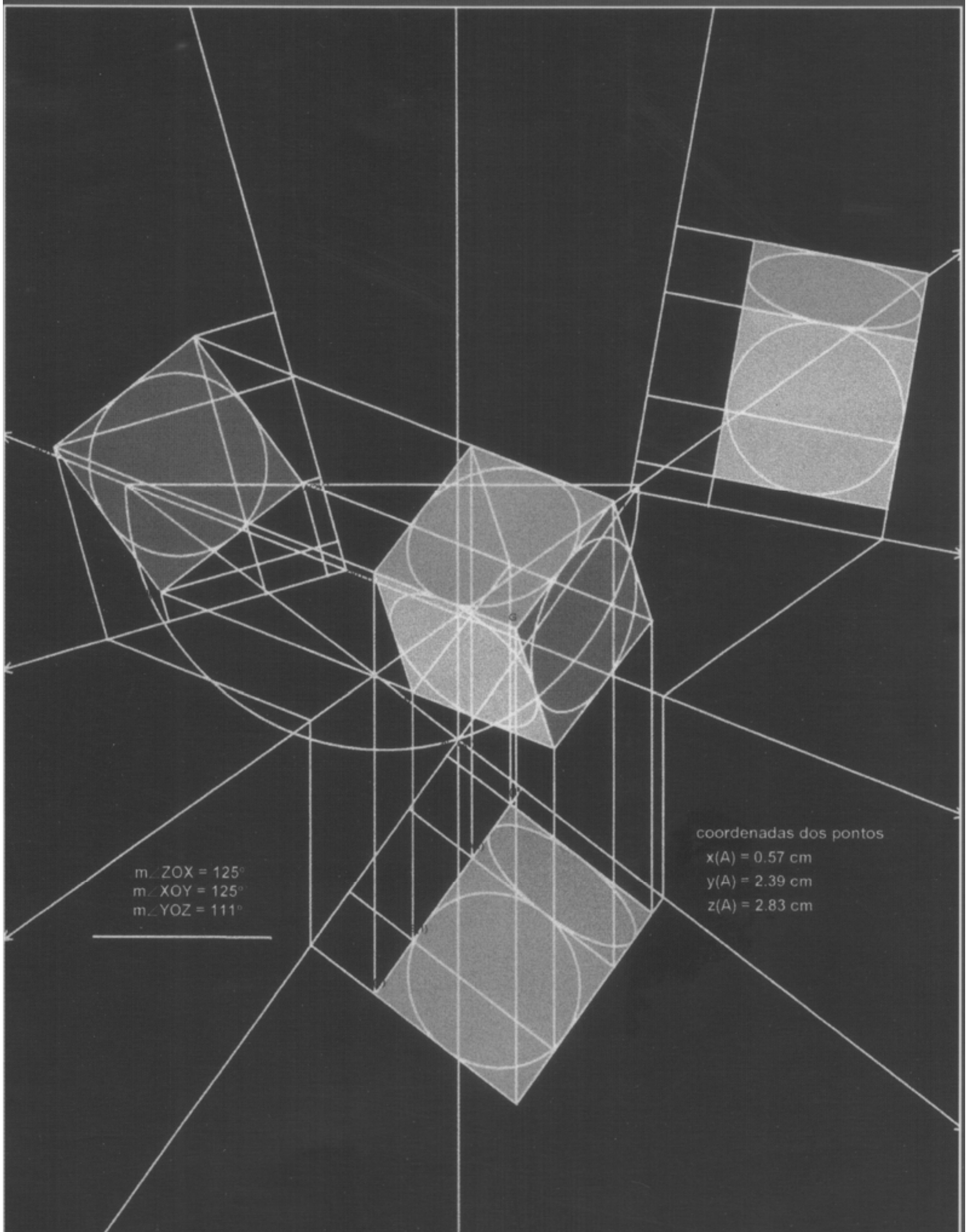
boletim da aproged

nº 19 Outubro / 2002

ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE DESENHO E GEOMETRIA DESCRITIVA

ESCOLA SECUNDÁRIA AURÉLIO DE SOUSA . R. AURÉLIO DE SOUSA 4000-099 PORTO . TEL. 225509039 . FAX 225518518 . EMAIL: aproged@telepac.pt



Trabalho do professor formando Miguel Ângelo M. Carvalho realizado na Acção Geometria Dinâmica

ropriedade da
ssociação de Profess
e Geometria Descritiv

irector: Abreu Pesseg

º de exemplares: 500

epósito legal: 186158/

npressão: Greca, Artes

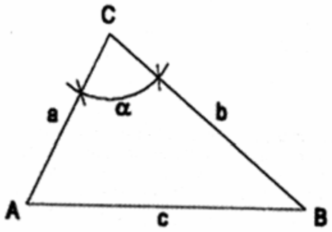
Axonometria por projecção ortogonal

Determinação dos coeficientes de redução – via analítica

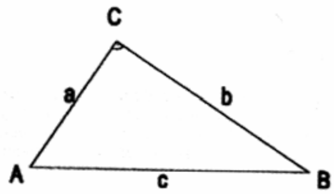
Luís Mateus (*)

Se me perguntarem para que serve a determinação, por via analítica, dos coeficientes de redução nas axonometrias por projecção ortogonal, por certo encolho os ombros e talvez responda: "Que me lembre, talvez não sirva para nada, Mas é divertido fazê-lo!"

Para efectuar a determinação foram utilizados dois teoremas relativos a triângulos: o teorema de Carnot e o teorema de Pitágoras (*).



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 . a . b . \cos\alpha$$



$$c^2 = a^2 + b^2$$

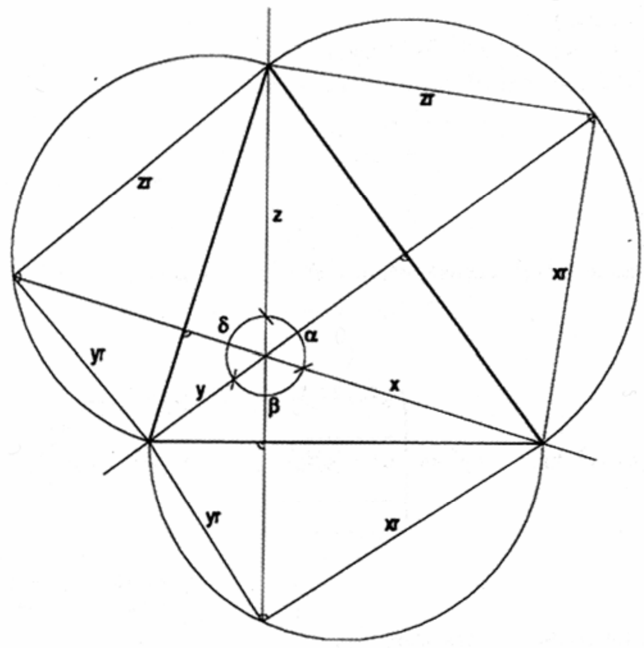
Nas axonometrias por projecção ortogonal, qualquer segmento que não se encontre paralelo ao plano de projecção, é projectado neste, segundo outro segmento de medida inferior. À razão entre a medida da projecção e a medida do segmento pode dar-se o nome de coeficiente de redução. Facilmente se entende que projecções de segmentos paralelos estão na mesma razão de redução. Também se pode perceber que esta razão corresponde ao coseno do ângulo que mede a inclinação do segmento com o plano de projecção.

O que se pretendeu foi a determinação, por via analítica, dos coeficientes de redução dos eixos axonométricos relativamente aos eixos coordenados (os eixos axonométricos são as projecções dos eixos coordenados), como função dos ângulos formados pelos semi-eixos axonométricos positivos.

$$\frac{y}{yr} = \text{Coeficiente de redução em y} \quad ; Cr(y) \qquad \frac{y}{yr} = f(\alpha, \beta, \delta)$$

$$\frac{x}{xr} = \text{Coeficiente de redução em x} \quad ; Cr(x) \qquad \frac{x}{xr} = f(\alpha, \beta, \delta)$$

$$\frac{z}{zr} = \text{Coeficiente de redução em z} \quad ; Cr(z) \qquad \frac{z}{zr} = f(\alpha, \beta, \delta)$$



O traçado utilizado mostra que existem pares de triângulos que têm em comum um dos lados do triângulo fundamental. Existem três pares de triângulos nestas condições, e um dos triângulos de cada par é rectângulo. No primeiro par temos **yr** e **xr** como catetos de um triângulo rectângulo e **y** e **x** como lados do outro triângulo (o lado que ambos têm em comum é o lado do triângulo fundamental que está contido no traço do plano coordenado **xy** no plano axonométrico), no segundo par temos **zr** e **yr** como catetos do triângulo rectângulo e **z** e **y** como lados do outro triângulo (o lado que ambos têm em comum é o lado do triângulo fundamental que está contido no traço do plano coordenado **zy** no plano axonométrico) e no terceiro par temos **xr** e **zr** como catetos do triângulo rectângulo e **x** e **z** como lados do outro triângulo (o lado que ambos têm em comum é o lado do triângulo fundamental que está contido no traço do plano coordenado **xz** no plano axonométrico). Para cada um destes triângulos podemos escrever a expressão que relaciona os lados (para cada par, uma das expressões corresponde ao teorema de Pitágoras e a outra corresponde ao teorema de Carnot). Se ao $\mathbf{c^2}$ das expressões fizermos corresponder sempre o lado do triângulo fundamental, isto permite-nos escrever as primeiras três equações do sistema de cinco equações que a seguir se apresenta.

Como se optou por determinar em primeiro lugar o **Cr (y)**, verificou-se conveniente considerar as duas últimas equações do sistema (as igualdades que cada uma delas expressa são de fácil compreensão e correspondem a uma aplicação simples da trigonometria).

Pretende-se a resolução do sistema de equações até à obtenção da razão **y/yr** em função de $\boldsymbol{\alpha}$,$\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\delta}$.

$$\begin{cases} yr^2+xr^2=y^2+x^2-2.y.x.\cos\beta \\ zr^2+yr^2=z^2+y^2-2.z.y.\cos\delta \\ xr^2+zr^2=x^2+z^2-2.x.z.\cos\alpha \\ y.\cos\delta=x.\cos\alpha \\ y.\cos\beta=z.\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ zr^2=z^2+y^2-2.z.y.\cos\delta-yr^2 \\ xr^2=x^2+z^2-2.x.z.\cos\alpha-zr^2 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=x^2+z^2-2.x.z.\cos\alpha-(z^2+y^2-2.z.y.\cos\delta-yr^2) \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=x^2+\cancel{z^2}-2.x.z.\cos\alpha-\cancel{z^2}-y^2+2.z.y.\cos\delta+yr^2 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=x^2-2.x.z.\cos\alpha-y^2+2.z.y.\cos\delta+yr^2 \\ x=\frac{y.\cos\delta}{\cos\alpha} \\ z=\frac{y.\cos\beta}{\cos\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yr^2+xr^2=y^2+\left(\frac{y.\cos\delta}{\cos\alpha}\right)^2-2.\left(\frac{y.\cos\delta}{\cos\alpha}\right).y.\cos\beta \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=\left(\frac{y.\cos\delta}{\cos\alpha}\right)^2-2.\left(\frac{y.\cos\delta}{\cos\alpha}\right).\left(\frac{y.\cos\beta}{\cancel{\cos\alpha}}\right).\cancel{\cos\alpha}-y^2+2.\left(\frac{y.\cos\beta}{\cos\alpha}\right).y.\cos\delta+yr^2 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha}-\cancel{\frac{2.y^2.\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha}}-y^2+\cancel{\frac{2.y^2.\cos\beta.\cos\delta}{\cos\alpha}}+yr^2 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yr^2+yr^2-y^2+\cancel{\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha}}=y^2+\cancel{\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha}}-\frac{2.y^2.\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ xr^2=yr^2-y^2+\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

Desenvolvendo agora, isoladamente, a primeira equação do sistema temos:

$$yr^2+yr^2-y^2+\cancel{\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha}}=y^2+\cancel{\frac{y^2.\cos^2\delta}{\cos^2\alpha}}-\frac{2.y^2.\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2.yr^2=2.y^2-2.y^2.\frac{\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \qquad \text{(dividindo todos os membros da equação por } 2.y^2\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{yr^2}{y^2}=1-\frac{\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{yr}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha}}}$$

A partir da obtenção deste resultado e fazendo coerentemente a permutação de α, β e δ no sequndo membro da equação obtemos as expressões que nos dão os coeficientes de redução para os eixos restantes.

O quadro seguinte apresenta as expressões dos coeficientes de redução para cada eixo.

$Cr(y)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos\delta.\cos\beta}{\cos\alpha}}}$	$Cr(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\delta}}}$	$Cr(z)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos\alpha.\cos\delta}{\cos\beta}}}$

A partir destas expressões podem organizar-se os quadros de tabelas de redução que se entender.

Creio que foi mais ou menos no 7º ano de escolaridade que aprendi, nas aulas de matemática, o tão famoso Teorema de Pitágoras: *Num triângulo rectângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa ;* $c^2=a^2+b^2$.

Mais tarde, no 9º ano de escolaridade, também nas aulas de matemática (ainda recordo a aula), aprendi aquele que me foi apresentado por Teorema de Carnot : *Num triângulo qualquer, a soma dos quadrados de dois lados quaisquer é igual ao quadrado do terceiro lado menos o dobro do primeiro pelo segundo lado a multiplicar pelo coseno do ângulo oposto ao terceiro lado;* $c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos\alpha$..

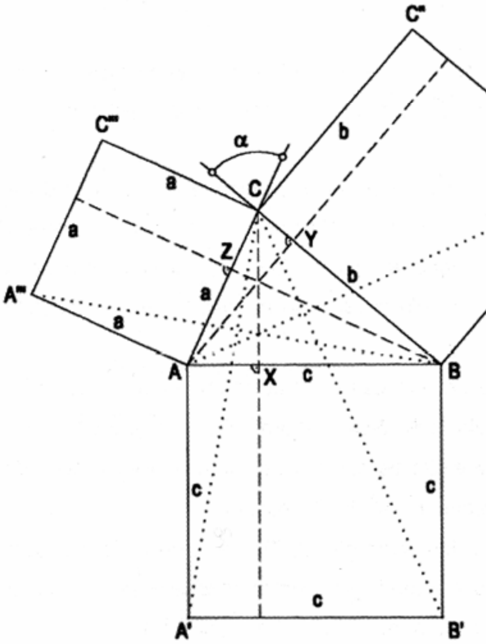
Facilmente se percebia que o primeiro teorema era um caso particular do segundo. Quando $\alpha=90^\circ$ o $\cos\alpha=0$ e a expressão $2.a.b.\cos\alpha$ tem valor nulo. Nessa altura tinha-se $c^2=a^2+b^2$.

Alguns tempo depois apercebi-me que na verdade não percebia o Teorema de Pitágoras nem o Teorema de Carnot : "Por que carga de água é que $c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos\alpha$?".

Um dia ao ler uma história da matemática vi uma demonstração do Teorema de Pitágoras (é a que está patente no 3º desenho) e percebi que a mesma lógica demonstrativa se podia aplicar a qualquer triângulo e por conseguinte se poderia assim perceber o Teorema geral.

O que aqui trago é essa modesta extrapolação.

TRIÂNGULO ACUTÂNGULO [ACB]



$\overline{CY} = a \cdot \cos\alpha$ (1)

$\overline{YB} = b - a \cdot \cos\alpha$

$\overline{CZ} = b \cdot \cos\alpha$

$\overline{ZA} = a - b \cdot \cos\alpha$

área $\triangle ABB''$ = área $\triangle CBB' \Rightarrow$ (2)

$b^2 - b \cdot a \cdot \cos\alpha = \overline{XB} \cdot c$

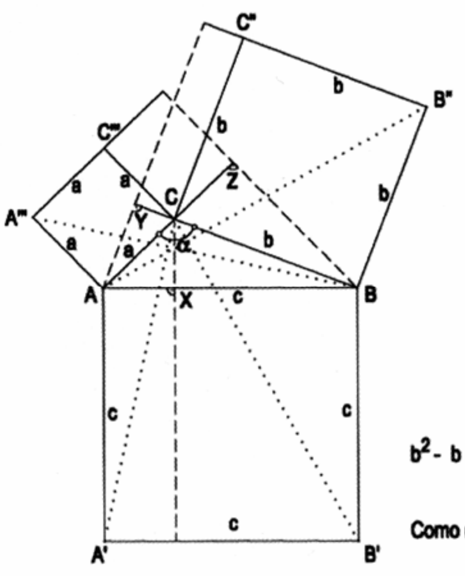
área $\triangle A'''AB$ = área $\triangle CAA' \Rightarrow$

$a^2 - a \cdot b \cdot \cos\alpha = \overline{AX} \cdot c$

$b^2 - b \cdot a \cdot \cos\alpha + a^2 - a \cdot b \cdot \cos\alpha = (\overline{AX} + \overline{XB}) \cdot c$

Como $(\overline{AX} + \overline{XB}) = c \Rightarrow a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha = c^2$

TRIÂNGULO OBTUSÂNGULO [ACB]



$\overline{CY} = - a \cdot \cos\alpha$ (1)

$\overline{CZ} = - b \cdot \cos\alpha$

área $\triangle ABB''$ = área $\triangle CBB' \Rightarrow$

$b^2 - b \cdot a \cdot \cos\alpha = \overline{XB} \cdot c$

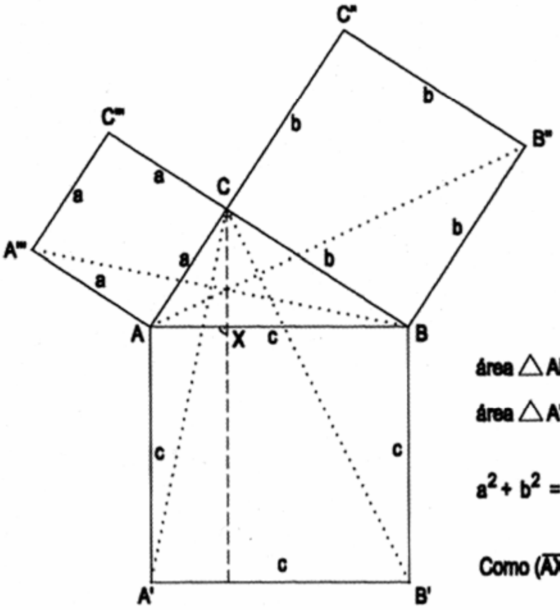
área $\triangle A'''AB$ = área $\triangle CAA' \Rightarrow$

$a^2 - a \cdot b \cdot \cos\alpha = \overline{AX} \cdot c$

$b^2 - b \cdot a \cdot \cos\alpha + a^2 - a \cdot b \cdot \cos\alpha = (\overline{AX} + \overline{XB}) \cdot c$

Como $(\overline{AX} + \overline{XB}) = c \Rightarrow a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha = c^2$

TRIÂNGULO RECTÂNGULO [ACB]



$$\text{área} \triangle ABB'' = \text{área} \triangle CBB' \Rightarrow b^2 = \overline{XB} \cdot c$$

$$\text{área} \triangle A'''AB = \text{área} \triangle CAA' \Rightarrow a^2 = \overline{AX} \cdot c$$

$$a^2 + b^2 = \overline{AX} \cdot c + \overline{XB} \cdot c \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (\overline{AX} + \overline{XB}) \cdot c$$

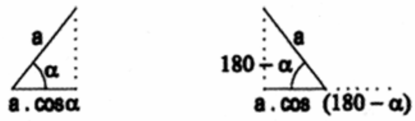
$$\text{Como } (\overline{AX} + \overline{XB}) = c \quad \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Num triângulo qualquer, a soma dos quadrados de dois dos seus lados é igual à soma do quadrado do terceiro lado com o dobro do produto dos dois primeiros lados pelo coseno do ângulo oposto ao ao terceiro lado.
A igualdade é dada pela expressão seguinte:

$$a^2 + b^2 = c^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha$$

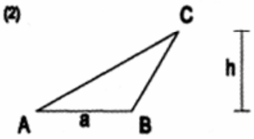
(3)

(1)



$a \cdot \cos\alpha$ $\qquad$ $a \cdot \cos(180 - \alpha) = -a \cdot \cos\alpha$

(2)



$$\text{área} \triangle ABC = \frac{h \cdot a}{2}$$

(3)

$0 < \alpha < 90 \quad \Rightarrow 1 > \cos\alpha > 0$
$90 < \alpha < 180 \Rightarrow 0 > \cos\alpha > -1$
$\alpha = 90 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 0$

(*) Assistente Estagiário na Faculdade de Arquitectura da U. T. L.

Lisboa, 08 de Abril de 2002