

Geometria Descritiva, Modelação Geométrica e Captura da Realidade

Versão 0.3

2025.10.13

Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa (FAUL)

Luís Mateus (lmmateus@fa.ulisboa.pt)

Esta sebenta foi preparada para apoio às aulas de Geometria Descritiva e Conceptual em Arquitetura e Modelação Geométrica e Generativa do mestrado integrado em Arquitetura da FAUL, e de Geometria Descritiva e Conceptual da licenciatura em Design da FAUL.

Em versões seguintes serão também incluídas as unidades curriculares optativas relacionadas com a Captura da Realidade.

No entanto pode ser livremente utilizada por qualquer pessoa, docente ou aluno, de qualquer nível de ensino.

Sugestões de melhoria são bem-vindas.

Índice

Introdução	9
As geometrias	10
As origens da Geometria	11
Da geometria euclidiana à topologia	11
As dimensões	16
Geometria sintética e Geometria analítica	18
Geometria pura e Geometria aplicada	20
Geometria descritiva e Computação gráfica	21
Geometria estática e geometria dinâmica	23
Geometria e a imaginação	25
Geometria, estrutura e representação	26
Um pequeno exercício de representação	30
Desenho à mão levantada	31
Desenho analógico de precisão	33
Desenho digital de precisão	35
Uma reflexão antecipada	37
PARTE I – Geometria Descritiva	41
Introdução	41
Notações	41
Noções essenciais de Geometria no Espaço I	42
Relações de incidência entre as figuras geométricas	49
Interações métricas entre pontos, retas e planos	50
Da posição relativa entre retas	50
Da posição relativa entre retas e planos	51
Da posição relativa entre planos	51
Noção informal de transformação geométrica	52
Organização do espaço	53
Sistemas de coordenadas	53
Sistema de coordenadas retangulares	56
Sistema de coordenadas cilíndricas	56
Sistema de coordenadas polares	57

Taxonomias	58
O alfabeto do ponto	58
O alfabeto da reta	58
O alfabeto do plano	59
Noção de projeção e tipos de projeção.....	60
Algumas propriedades das projeções	61
Projeção de figuras com diferentes orientações.....	61
Razão simples e razão cruzada	65
Relação entre o teorema de Desargues e algumas transformações geométricas	69
Paralelismo e perpendicularidade.....	72
Os algoritmos fundamentais da Geometria Descritiva	75
Aplicação à projeção ortogonal.....	76
Rotação.....	77
Rebatimento.....	77
Mudança do plano de projeção	81
Aplicação à projeção cilíndrica	81
Aplicação à projeção cónica	83
Introdução aos sistemas de representação e sua inter-relação	85
Um exemplo prático	90
DPO, MPO e sistema Cotado	91
Da DPO ao Sistema Axonométrico	96
Axonometria ortogonal.....	96
Axonometria oblíqua.....	98
Da DPO ao Sistema cónico	99
Integração dos sistemas de representação em ambiente digital.....	100
Análise de uma aplicação de desenho digital	101
Múltipla Projeção Ortogonal	104
Representação e análise do ponto.....	104
Representação e análise do segmento de reta	105
Representação e análise da reta.....	106
Representação e análise do plano	108
Operações relacionadas com o ponto, a reta e plano	109
Relações de pertença.....	110
Paralelismo e perpendicularidade.....	113

Condução de uma reta paralela a uma reta dada	113
Condução de uma reta paralela a um plano dado e vice-versa.....	113
Condução de um plano paralelo a um plano dado	113
Condução de uma reta perpendicular a um plano dado e vice-versa.....	113
Condução de um plano perpendicular a um plano dado.....	115
Interseções	115
Interseção entre dois planos	115
Interseção entre uma reta e um plano.....	117
Distâncias e ângulos	117
Determinação da distância entre dois pontos	117
Determinação da distância entre um ponto e um plano.....	118
Determinação da distância entre duas retas enviesadas entre si	120
Determinação da distância entre dois planos paralelos entre si.....	121
Determinação da inclinação relativa entre duas retas concorrentes ou enviesadas entre si	122
Determinação da inclinação entre uma reta e um plano	123
Determinação da inclinação relativa entre dois planos.....	123
Representação de figuras geométricas simples	124
Esfera	124
Cone e cilindro	126
Prisma e pirâmide.....	127
Poliedros regulares	128
Tetraedro.	129
Hexaedro.....	130
Octaedro	131
Dodecaedro.....	132
Icosaedro	134
Operações geométricas	136
Planos tangentes.....	136
Cone	136
Cilindro	138
Esfera.....	138
Intersecções, Secções e Truncagens.....	141
Prismas e pirâmides.....	141

Cones e cilindros	145
Operações booleanas	153
Um dos sólidos tem arestas projetantes	155
Um dos sólidos é delimitado por superfícies curvas	156
Os dois sólidos são delimitados por superfícies curvas	157
Aplicação das transformações geométricas	158
Rotação.....	159
Translação.....	160
Reflexo	161
Homotetia	162
Afinidade	164
Homologia.....	165
Planificações	167
Aplicações da MPO (incluindo a DPO e sistema cotado).....	173
Composição de volumes	173
Modelação de coberturas com superfícies de pendente constante	176
Modelação de terrenos	178
Movimento.....	183
Sombras	184
Perspetiva	190
Perspetiva axonométrica.....	190
Axonometria oblíqua ou clinogonal	191
Axonometria ortogonal	197
Representação do ponto, reta e plano	203
Representação de formas geométricas simples	205
Operações geométricas.....	207
Aplicações da perspetiva axonométrica.....	209
Composição de volumes	209
Representação de volumes descritos em MPO	210
Axonometria explodida	212
Sombras	213
Perspetiva cónica.....	214
Perspetiva de um ponto de fuga	219
Perspetiva de dois pontos de fuga	226

Perspetiva de três pontos de fuga.....	232
Representação do ponto, da reta e do plano.....	239
Direção, orientação, proporção, dimensão e posição – Síntese	241
Direção e orientação.....	242
Proporção.....	244
Dimensão e posição	247
Representação de formas geométricas simples	251
Operações geométricas.....	253
Aplicações da perspectiva cónica	255
Composição e ideação de volumes.....	256
Representação de volumes descritos em MPO ou axonometria.....	257
Visualização de espaços interiores	260
Corte perspectivado	261
Sombras	261
Reflexo em espelho plano	263
Sistema Integrado de Representação	266
PARTE II – Modelação geométrica tridimensional.....	271
Introdução	271
Noções essenciais de Geometria no Espaço II	271
Pontos e vetores	272
Produto interno.....	272
Produto externo	273
Linhas e superfícies.....	274
Incidência entre ponto, linha e superfície	274
Reta tangente a uma curva e a uma superfície	275
Plano tangente a uma curva e plano osculador a uma curva	275
Triedro de Frenet–Serret.....	275
Circunferência osculadora e esfera osculadora	276
Curvatura e torção de uma linha curva	277
Continuidade geométrica entre curvas.....	277
Paralelismo entre curvas	278
Plano tangente e reta normal	278
Plano normal e secção normal.....	279
Curvatura de uma superfície.....	279

Linhas geodésicas, linhas de curvatura e triedro de Darboux.....	280
Interseção e continuidade geométrica entre superfícies	281
Paralelismo entre linhas e superfícies e entre superfícies	282
Representação paramétrica de linhas e superfícies	282
Linhas.....	286
Critérios de classificação	286
Linhas retas e poligonais	286
Malhas planas e malhas espaciais lineares.....	288
Linhas de forma livre	293
Linhas cónicas.....	294
Bézier, B-Splines e NURBS.....	296
Curva de Bézier	296
Curva B-Spline	297
Curva NURBS	302
Superfícies.....	304
Critérios de classificação	304
Plano e regiões planas	305
Malhas espaciais facetadas	305
Poliedros	307
Pirâmides, prismas e prismoides	307
Antiprismas.....	308
Poliedros regulares	309
Poliedros semi-regulares	309
Poliedros de Catalan	312
Cúpulas geodésicas.....	313
Superfícies regradas	314
Superfícies planificáveis	314
Superfícies cónicas e cilíndricas	315
Superfícies tangenciais	315
Superfície de pendente constante	316
Convolutas	317
Plano tangente a uma superfície planificável	318
Planificação.....	318
Superfícies empenadas	319

Caso geral de uma superfície empenada definida por três curvas	320
Parabolóide hiperbólico	321
Hiperbolóide regrado	323
Superfície de conóide	325
Superfície de cilindroide	327
Tetraedroide	328
Superfície de arco enviesado.....	329
Plano tangente a uma superfície empenada simplesmente regradada	330
Superfícies de revolução	331
Revolução circular.....	331
Superfície tórica	332
Esferoide ou elipsoide de revolução.....	333
Parabolóide de revolução	334
Hiperbolóide de revolução de duas folhas	335
Hiperbolóide de revolução de uma folha.....	336
Revolução elíptica	337
Pseudo revolução	337
Superfícies translacionais	339
Quádricas.....	340
Superfícies NURBS	341
Sólidos.....	346
Operações geométricas.....	347
Subdivisão de superfícies.....	347
Concordâncias	348
Concordância entre um hiperbolóide de revolução de duas folhas e um parabolóide de revolução	348
Concordância entre o hiperbolóide regrado e o parabolóide regrado	349
Geração de uma superfície por concordância com outra	350
Interseções e operações booleanas	351
Interseções planas em superfícies quádricas	352
Interseção cíclica no elipsoide	352
Interseção parabólica no hiperbolóide regrado	353
Interseções planas em superfícies de revolução.....	354
Interseções entre superfícies cónicas (incluindo as cilíndricas)	355

Interseções entre superfícies de revolução com eixos concorrentes	356
Operações booleanas	356
Transformações geométricas	357
Isometrias.....	358
Dilações e semelhanças.....	359
Transformações afins	359
Transformações projetivas.....	360
Transformações topológicas.....	361
Aplicações	365
Modelação paramétrica	365
Estruturação de um projeto	368
Modelação de edifícios	372
Modelação de terrenos	376
Estereotomia	378
Formas orgânicas	379
PARTE III – Captura da Realidade	381
Referências	383

Introdução

A geometria tem múltiplas aplicações em variadas áreas de atividade do homem, desde as artes e ofícios às ciências e tecnologias. Exemplos como o estudo das órbitas dos planetas, o estudo das estruturas cristalográficas, a produção de mapas, a medição de estruturas construídas, a elaboração de projetos de arquitetura, a conceção de máquinas ou objetos do quotidiano, ilustram bem o lugar central que a geometria ocupa. E num mundo em que a Inteligência Artificial está por todo o lado, também na geometria isso trará seguramente impactos. Veja-se o exemplo do projeto AlphaGeometry da DeepMind que conseguiu desenvolver um sistema que resolve problemas de geometria euclidiana de forma sintética.

Este documento é uma reflexão sobre a nossa prática pedagógica e científica dos últimos 25 anos na Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa. Nesse sentido é uma afirmação da área disciplinar da geometria e pretende preparar o caminho para, pelo menos, os próximos 25 anos. Um conteúdo pedagógico, embora circunscreva uma ou várias áreas temáticas, não se reduz a um programa ou índice de conteúdos. Um conteúdo pedagógico é uma fusão entre conteúdos e estratégias para a sua implementação e só se concretiza verdadeiramente no processo de ensino e aprendizagem que, fica necessariamente amputado se algum dos lados envolvidos, docente ou discente, não estiver presente. As estratégias não devem estimular a mera cópia ou a simples associação de ideias. Devem verdadeiramente promover o pensamento criativo. Isto é, nem tudo deve ser dado de bandeja. É preciso dar o espaço e as condições para que se desenvolva a curiosidade, a reflexão e para permitir o prazer da descoberta por parte dos estudantes e, por que não afirmá-lo, do docente. É para contribuir para o atingir desse objetivo que produzimos este trabalho.

O momento tornou-se oportuno a propósito da preparação das chamadas Provas de Agregação a que, a determinada altura, os docentes universitários têm de submeter-se se almejarem progredir academicamente.

Focamo-nos na geometria descritiva e no seu papel na formação em arquitetura e design. Tem-se aqui um entendimento alargado do que é geometria descritiva incorporando tanto a modelação 2D, tradicionalmente veiculada através do desenho analógico e hoje expandida ao desenho digital, e a modelação 3D, tradicionalmente tornada possível através da produção de modelos físicos e atualmente potenciada pela modelação digital. Note-se que a utilização de modelos tridimensionais em geometria descritiva sempre ocorreu. Uma das expressões mais interessantes desta utilização foi desenvolvida por Theodore Olivier, no século dezanove, com os seus modelos articulados, na essência paramétricos, de superfícies e suas interseções.

No que concerne à arquitetura e ao design, a geometria descritiva desempenha um papel fulcral a três níveis fundamentais.

Primeiro fornece as bases para o entendimento dos sistemas de representação. Quer seja através de métodos analógicos tradicionais ou métodos digitais, há sempre a necessidade de entender e operar sobre os parâmetros que determinam a representação e o modo como se olha para os objetos. Este é o foco da PARTE I.

Em segundo lugar participa na fundamentação e suporte da estruturação da conceção da forma. O conhecimento de princípios e estruturas geométricas funciona como um repertório que potencia a criatividade. Ao ampliar o espaço dos conceitos, a mente expande o domínio

das associações possíveis, torna-se mais recetiva e capaz de interpretar e criar. O foco da PARTE II consiste no estudo de algumas destas estruturas e princípios.

E em terceiro lugar, consubstancia-se como um interface entre o mundo físico e o mundo mental, e fá-lo de vários modos. O modo menos tangível como o faz relaciona-se com as operações mentais que permitem estabelecer nexos entre os dois mundos, capacidade que deve ser cultivada por arquitetos, designers e engenheiros. O modo mais prático e operativo, quase metáfora do anterior, corresponde a atividades de medição do real levando à sua representação e a atividades de concretização física tridimensional a partir de representações de diversos tipos. A PARTE III corresponde a uma espécie de retorno às origens da geometria como medição e concentrar-se-á nos métodos da fotogrametria e do varrimento laser e em algumas aplicações destes no ponto de vista do estudo da geometria. Também se abordará superficialmente o tema da fabricação digital.

Como ponto prévio à entrada nos três blocos acima referidos, começamos por fazer uma exploração da paisagem das geometrias no sentido de perceber o lugar da geometria descritiva no meio dessa paisagem. Pareceu-nos fundamental esta abordagem porque ao perceber o lugar que a geometria descritiva ocupa também se consegue melhor entender os nexos que se podem estabelecer entre esta e as demais geometrias e afirmar aquilo que é o cerne da disciplina. Na sequência dessa visita panorâmica passamos pelo tema da geometria como suporte da representação e como estrutura da forma. Aqui pretendemos estabelecer o papel fundamental da geometria em áreas como a arquitetura ou o design. E para abrir a porta à geometria descritiva propriamente dita, terminamos a introdução propondo um pequeno exercício prático.

Ao longo do texto, a partir da PARTE I, vão sendo deixadas perguntas ao leitor. Procurámos deixar essas questões após termos dado previamente indicações que entendemos serem suficientes para que o leitor lhes possa dar resposta. Adicionalmente incluímos, em caixas de texto, sugestões de prática após os vários pontos tratados.

As geometrias

Se procurarmos no dicionário a definição de geometria encontramos qualquer coisa como “parte da matemática cujo objeto é o estudo do espaço e das figuras que podem ocupá-lo”. Mas logo de seguida, outras designações e respetivas definições aparecem. Temos por exemplo geometria absoluta, geometria algébrica, geometria analítica, geometria esférica, geometria euclidiana, geometria não euclidiana, geometria sintética, geometria diferencial, geometria computacional, geometria projetiva, geometria descritiva, geometria plana, geometria no espaço, etc. E a lista seguramente não fica por aqui. Quer isto dizer que não há só uma geometria? E o que é que distingue as várias geometrias? Não pretendemos dar aqui um resposta definitiva e exaustiva, mas interessa-nos pelo menos discutir possíveis critérios de classificação das geometrias que nos permitam agrupá-las com alguma lógica e que nos permita perceber o lugar da geometria descritiva no contexto mais amplo das geometrias. E com isso, mostrar aos estudantes de design, arquitetura e engenharia que a geometria descritiva não é a única geometria que existe. Assim, podem ser abertos outros caminhos de exploração aos que tiverem curiosidade para o fazer.

As origens da Geometria

As origens da geometria remontam a uma interessante ligação entre direito, política e discurso por meio de uma atividade prática de medição da terra, do céu, conforme nos diz Michel Serres (1999). No antigo Egito os agrimensores eram uma classe de funcionários do estado que estavam encarregues de repor os marcos de divisão das propriedades que eram periodicamente arrasados pelas cheias do rio Nilo. Essa atividade era de extrema importância porque dela dependia a retoma das atividades agrícolas e a boa cobrança de impostos. A observação ótica do céu e da terra também ocupava os geómetras antigos por diversas ordens de razões. Eratóstenes estimou o raio da terra através da observação simultânea das sombras em dois pontos distintos. Os construtores das pirâmides seguramente precisaram de métodos de medição para implantar e controlar os processos de construção. Tales mediu a altura das pirâmides do Egito através da comparação da sua sombra com a sombra de um bastão. Os exemplos são inúmeros. Esta origem prática, a que a palavra geometria deve o seu étimo, “medida da terra”, terá dado origem a áreas como a **topografia**, a **cartografia** e a **astrometria**. Através das práticas de medição e considerando uma origem discursiva, os geómetras foram acumulando e transmitindo regras e resultados para o cálculo de comprimentos, ângulos, áreas e volumes. Até que chegou um momento, em que os geómetras ultrapassaram as preocupações meramente práticas e, verdadeiramente, a **geometria** constituiu-se como uma atividade do intelecto. O momento chave para esta mudança de paradigma foi protagonizado por Euclides no sec. III a.c.. A geometria que assim se originou ficou cunhada como **geometria euclidiana**.

Da geometria euclidiana à topologia

Começamos esta viagem pela **geometria euclidiana**. Fazemo-lo porque esta geometria é a que pode ser considerada como mais concreta e familiar para a generalidade dos estudantes. Mais concreta porque no espaço próximo aparenta ser a que melhor permite descrever os objetos ao nosso redor. Mais familiar porque lida com as ideias comuns de distância, ângulo, paralelismo e perpendicularidade. Por esta razão, nesta geometria, é possível distinguir entre um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um trapézio e um quadrilátero genérico. Nesta geometria o infinito não é considerado. Tudo é feito considerando dimensões finitas que podem ser estendidas tanto quanto se queira. Em síntese, pode dizer-se que a geometria euclidiana se ocupa do estudo das propriedades que se mantêm invariantes sob um tipo de transformações que se designam por transformações rígidas. Estas incluem a rotação, a translação e a reflexão. Neste sentido, a geometria euclidiana é a mais específica e particular, no sentido em que introduz o maior número de restrições. A noção, de que uma geometria se ocupa do estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob um determinado grupo de transformações é muito importante e funciona como um critério para a classificação das geometrias. Esta ideia foi introduzida pelo matemático Felix Klein na segunda metade do sec. XIX.

Passamos agora à **geometria afim**. Podemos dizer que se subtrairmos à geometria euclidiana as noções comuns de distância e ângulo ficamos com a geometria afim. Do ponto de vista da caracterização desta geometria como o estudo de propriedades invariantes, podemos dizer que a geometria afim se ocupa daquelas transformações que preservam o paralelismo e que, em geral, não preservam distâncias nem ângulos. Assim, nesta geometria não há distinção entre quadrado, retângulo ou paralelogramo. Também não se distingue circunferência e elipse. Para melhor entender esta geometria, é útil considerar o infinito. Considera-se que cada reta tem um

ponto no infinito, cada plano tem uma reta no infinito e que o espaço tridimensional tem um plano no infinito. Considera-se ainda que estes elementos do infinito são fixos. Em relação às retas, diz-se que são paralelas se tiverem em comum o ponto do infinito; em relação aos planos, diz-se que são paralelos se tiverem em comum a reta do infinito. Estes elementos do infinito dizem-se impróprios ou ideais. A elipse é uma cónica sem pontos no infinito, a parábola tem um ponto no infinito e a hipérbole tem dois. Generalizando, podemos dizer que a geometria afim se ocupa das transformações que preservam os elementos no infinito. Estas, designam-se por transformações afins e incluem a homotetia, o cisalhamento e a escala não uniforme.

Subindo mais um nível, chegamos à **geometria projetiva**. A passagem da geometria afim para a geometria projetiva deixa cair a noção de paralelismo. Agora já não é possível distinguir entre um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um trapézio e um quadrilátero; apenas há quadriláteros e quadrângulos. Nesta geometria não há diferença entre elipse, parábola e hipérbole; apenas há cónicas. Isto porque o espaço estendido já não distingue os elementos impróprios dos demais; estão todos ao mesmo nível. Na geometria projetiva as retas interseitam-se sempre bem como os planos ou as retas com planos. Na geometria projetiva são invariantes a incidência e natureza das linhas, isto é, sob uma transformação projetiva uma reta é transformada noutra reta, um plano é transformado noutro plano, uma cónica noutra cónica, e um ponto de interseção entre duas retas é transformado no ponto de interseção das retas que lhe correspondem. Porém, na geometria projetiva as transformações geométricas não têm de preservar os pontos no infinito, o que significa que não há verdadeiramente uma diferença entre os elementos impróprios e os elementos próprios, como já havíamos notado. A diferença entre a geometria afim e a geometria projetiva é que naquela se fixam os elementos impróprios e nesta todos são equivalentes. Estas designam-se por transformações projetivas e incluem as perspetividades e as projectividades. Assim, pode considerar-se que a geometria afim é um caso particular da geometria projetiva. Se a geometria euclidiana é a geometria da régua e do compasso, a geometria projetiva é a geometria da régua, como nos diz Coxeter no seu livro *Projective Geometry* (1974).

Por fim chegamos à **topologia**. Esta geometria torna-se mais geral no sentido em que implica reter da geometria anterior apenas a noção de incidência e de continuidade. Agora, uma linha reta pode ser transformada numa linha curva, e um plano numa superfície curva. Porém, se considerarmos os pontos vizinhos de um dado ponto, sob uma transformação projetiva, estes pontos são transformados nos vizinhos do ponto transformado. Intuitivamente, podemos falar de uma transformação topológica quando enchemos um balão (sem rebentar), dobramos (sem partir) um arame, deformamos (sem romper) uma borracha. Nesta geometria não há distinção entre um cubo, uma esfera ou um copo. Isto é, são objetos topologicamente equivalentes ou homeomórficos. Isto é, é possível deformar cada um deles, continuamente, até chegar a outro. Neste sentido, um toro e uma caneca com uma asa também são homeomórficos. O mapa das estações de metro da cidade de Lisboa é uma representação topológica. Nessa representação não interessam as distâncias, as direcções nem as configurações reais das linhas. Apenas interessa a sequência das estações e os cruzamentos das linhas. O grafo das relações entre os espaços de um edifício também é uma representação topológica. Não é relevante a dimensão dos compartimentos nem as distâncias que é preciso percorrer para ir de uns aos outros, nem a forma do edifício. Apenas interessam as relações de contiguidade, isto é, as ligações entre eles. Assim, dois edifícios podem ser considerados topologicamente equivalentes se os compartimentos se ligarem do mesmo modo mesmo que um tenha 50m² e outro 5000m². As

transformações topológicas designam-se por **homeomorfismos**. Assim, pode considerar-se a topologia como a mais geral das geometrias.

Fez-se esta viagem como uma subida, da geometria euclidiana (a mais particular) até à topologia (a mais geral). Fizemo-lo porque esse foi o sentido histórico da evolução da geometria e porque, num certo sentido, a geometria euclidiana está mais próxima do mundo do dia a dia que nos rodeia. Mas a narrativa podia ter seguido a ordem inversa, indo do mais geral para o particular. Não o vamos fazer de forma detalhada, mas vamos considerar esse sentido para incluir uma referência breve às geometrias não euclidianas.

Quando relacionámos a geometria projetiva com a geometria afim, afirmámos que se podia ir desta para aquela fixando elementos no infinito e dizendo assim que, na geometria afim, se fixou um ponto no infinito para cada reta, uma reta no infinito para cada plano e um plano no infinito para o espaço. E deste modo fixou-se a noção de paralelismo. Depois afirmou-se que a geometria afim trata das transformações que mantêm invariantes os elementos impróprios, isto é, sob uma transformação afim, a um ponto impróprio corresponde sempre outro ponto impróprio e a uma reta imprópria, outra reta imprópria. E o que aconteceria se, em vez de cada reta conter apenas um ponto impróprio, contivesse dois pontos impróprios? Sem entrar em detalhes técnicos que estão muito para além do âmbito deste texto, daí resultaria que no plano seria de considerar fixa uma cónica imprópria, não degenerada, e no espaço uma quádrlica não regrada imprópria, não degenerada. A consequência que daqui resulta é o aparecimento das chamadas geometrias não-euclidianas. Assim, se a cónica, no caso do plano, e a quádrlica, no caso do espaço, forem reais, obtém-se a **geometria hiperbólica**. No caso de serem imaginárias, isto é, se não puderem ser representadas por números reais, obtém-se a **geometria elíptica**. Neste contexto, é costume a geometria euclidiana designar-se por **geometria parabólica**. A geometria hiperbólica plana é a que se desenvolve no interior da cónica tomada como elemento impróprio fixo. Nesta geometria, uma reta pode ser vista como a corda que une dois pontos impróprios. Um dos modelos comumente utilizado para visualizar a geometria hiperbólica é o disco de Beltrami-Klein. Neste contexto, a geometria euclidiana plana aparece quando, após se fixar uma reta imprópria, se fixa uma involução elítica sobre essa forma imprópria, o que permite o estabelecimento da perpendicularidade e, subsequentemente uma forma de medir ângulos e distâncias. Para um maior detalhe sobre a relação entre as várias geometrias sugere-se a consulta dos livros “Fundamental Concepts of Geometry” (Meserve, 1954) e “As geometrias” (Godeaux, 1936).

Estas geometrias trazem consequências importantes e obrigam a repensar as noções de paralelismo. Se redefinirmos a noção de paralelismo entre duas retas como não havendo interseção entre elas, fica óbvio que na geometria hiperbólica, observando o disco de Beltrami-Klein, por um ponto exterior a uma reta passa mais que uma reta que lhe é paralela. Se considerarmos como paralelas as retas que partilham um ponto no infinito, então por um ponto exterior passam duas retas paralelas a uma reta dada.

No caso da geometria elíptica é comum considerar a superfície da esfera como um modelo para o seu desenvolvimento, dando origem ao que se designa por **geometria esférica**. Neste caso uma reta é um arco de uma circunferência máxima. Fica óbvio que nesta geometria não existem retas paralelas. Se estendermos dois arcos de circunferências máximas na superfície de uma esfera, estes vão sempre acabar por se intersestar. Na verdade, há alguns detalhes que têm de ser considerados para que a geometria esférica possa ser considerada como uma geometria elíptica, mas a sua explicação está para além do âmbito deste texto.

Se generalizarmos esta ideia, proposta por Riemann, de que diferentes tipos de superfícies podem servir como modelos para diferentes tipos de geometrias somos levados a introduzir o conceito de curvatura Gaussiana num ponto de uma superfície. Assim uma superfície de curvatura gaussiana constante negativa (como a pseudoesfera) pode servir como modelo para a geometria hiperbólica, uma superfície curvatura gaussiana constante positiva (como a esfera) pode servir como modelo para a geometria elíptica, e uma superfície de curvatura gaussiana constante igual a zero (como o plano) pode servir como modelo para a geometria euclidiana. Nestes casos a ideia de reta é substituída pela ideia de geodésica, isto é, a linha de comprimento mais curto entre dois pontos numa superfície. É claro que isto já implica introduzir noções métricas de distância e ângulo.

A história do desenvolvimento da geometria como a dedução de um conjunto de afirmações a partir de um número limitado de hipóteses iniciais, designadas postulados, é muito interessante e rica. Por isso vale apenas fazer aqui uma referência. Essa jornada começou com Euclides (300 a.C.) e a sua redação de um tratado de Geometria em 13 volumes designado Elementos, que compilou, desenvolveu e organizou todo o conhecimento de geometria daquela época. Para desenvolver a geometria, Euclides considerou cinco postulados, isto é, hipóteses que, a serem aceites, permitem a dedução de um edifício lógico de afirmações que podem ser provadas através de um encadeamento de argumentos que, em última análise, radicam sempre nas hipóteses iniciais.

Esses cinco postulados são os seguintes:

1. Deixemos que uma linha reta fique definida por dois pontos.
2. Deixemos que uma linha reta possa ser estendida indefinidamente.
3. Deixemos uma circunferência ser traçada a partir de um centro e um raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se duas retas forem intersectadas por uma terceira reta, as duas retas estendidas intersectam-se do lado da terceira reta em que a soma dos ângulos internos, desta com aquelas, for menor que dois ângulos retos.

A par dos cinco postulados, Euclides também considerou cinco axiomas, isto é, cinco afirmações a serem consideradas como verdadeiras à partida e que desempenham o papel de fornecer regras lógicas para os argumentos. Esses cinco axiomas são:

1. Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais entre si.
2. Se coisas iguais forem adicionadas a coisas iguais, os resultados são iguais.
3. Se coisas iguais forem subtraídas a coisas iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem entre si são iguais entre si.
5. O todo é maior que a parte.

Adicionalmente considerou um conjunto de definições que, introduzidas progressivamente nos Elementos, procuram definir objetos ou figuras passíveis de eventual existência. Por exemplo define o que é uma reta, o que são pontos, o que é um ângulo reto, ou o que é uma circunferência. Atualmente, os matemáticos consideram que elementos como ponto e linha e não são definíveis sem entrar em círculos viciosos de palavras. Por isso deixam-nos sem

definição e estabelecem-nos como pontos de partida a par das relações que podem estabelecer entre si. Uma fundamentação moderna da geometria pode encontrar-se em Fundamentos da Geometria, obra de Hilbert primeiramente editada em 1899 e reeditada várias vezes e multiplamente traduzida para várias línguas ao longo do século XX (1930).

Munido destes elementos iniciais, Euclides vai construindo, através de proposições sucessivas um corpo de conhecimentos, a geometria euclidiana, que persistiu mais de dois mil anos e ainda hoje é referência incontornável. Com efeito, é a geometria euclidiana que utilizamos para modelar o mundo na nossa vizinhança própria.

Durante centenas de anos, os matemáticos consideraram que o quinto postulado, que em termos práticos significa que, por um ponto exterior a uma reta, apenas pode passar uma reta que lhe é paralela, era muito complicado e que deveria ser possível obtê-lo a partir dos quatro anteriores. Ora, essa demanda verificou-se sem sucesso. E no século XIX os matemáticos Nikolai Lobachevsky, Gauss e János Bolyai, chegaram à conclusão de que não havia nenhuma razão lógica para não considerar que, por um ponto exterior a uma reta, não pudesse passar mais que uma reta que lhe fosse paralela. Muito resumidamente, é assim lançada a semente para o desenvolvimento das geometrias não euclidianas. Esta geometria ficou conhecida por geometria hiperbólica. No contexto da investigação de Bolyai, ficou estabelecida a designação de **geometria absoluta** para a que é passível de ser desenvolvida apenas a partir dos quatro primeiros postulados. Mais tarde, ainda no século dezanove, matemáticos como Cayley e Riemman desenvolveram os princípios da geometria elíptica.

O trabalho contínuo dos matemáticos, prolongado pelo século vinte adentro, foi generalizando as relações entre as várias geometrias podendo nós esquematizar essa relação através da figura seguinte.

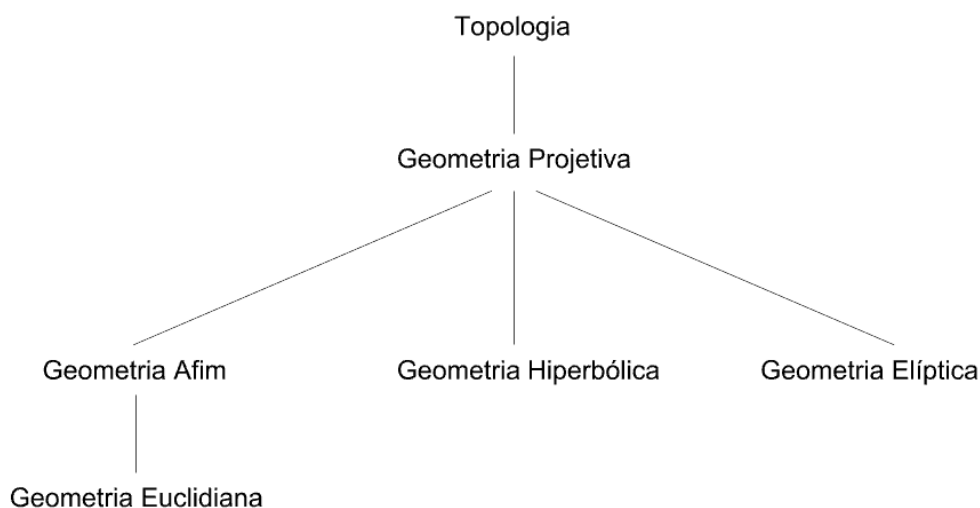


Fig. 0.1. Grafo com a relação entre as várias geometrias (segundo Meserve).

A história da geometria, enquanto parte da matemática, pode ser aprofundada através da consulta de várias obras indicadas na bibliografia (Katz, 1998) (Estrada et al, 2000) (Boyer, 1996). Estas referências podem ser utilizadas também para as secções seguintes.

As dimensões

Começemos por exemplo por considerar a geometria plana e a geometria no espaço. O que as distingue é a dimensão. A primeira é uma **geometria a duas dimensões** (2D) e a segunda é uma **geometria a três dimensões** (3D). Em termos de sequência lógica, nada nos impede de considerar que possam existir geometrias de dimensão superior, por exemplo 4D, 5D, etc., embora a nossa intuição possa resistir a essa ideia. Mas, na verdade assim é. Embora apenas as geometrias 2D e 3D possam ser integralmente visualizadas e materializadas, se considerarmos que o nosso mundo físico apenas contém três dimensões espaciais, as geometrias de dimensão superior podem ser de alguma forma representadas visualmente através do modo como se podem projetar em duas e três dimensões ou interseccionar estes “espaços” de dimensão inferior. Pode fazer-se uma analogia entre a geometria plana e a geometria no espaço que nos pode fornecer alguma intuição sobre esta questão.

Pensemos num mundo a duas dimensões. Esse mundo pode conter toda uma variedade de figuras bidimensionais, por exemplo pontos, segmentos de reta, triângulos, quadriláteros, círculos, etc. Mas não pode conter uma superfície esférica. Um habitante desse mundo percebe uma circunferência como um segmento de reta. Será possível que esse habitante crie uma intuição do que é uma superfície esférica? Uma superfície esférica ao atravessar esse mundo plano determinará circunferências cujo diâmetro irá variar. Essas serão percebidas, primeiro como um ponto, depois como um segmento de reta que vai aumentando até atingir uma dimensão máxima, de seguida como um segmento que vai diminuindo de dimensão, até voltar a ser um ponto e, por fim, desaparecer. A partir dessa aparição, esse habitante poderá criar uma intuição ou melhorar o seu entendimento do que é esse objeto de dimensão superior, mas nunca o poderá verdadeiramente visualizar. Se em vez de interseção considerarmos antes projeção, podemos elaborar um raciocínio idêntico.

Será que o mesmo se passa entre o espaço 3D e o “espaço” 4D? O que significa um “espaço” 4D? Quando dizemos que o plano é bidimensional é porque estamos a considerar que pode ser estruturado e referenciado através de duas direções ortogonais entre si. Por extensão, no espaço podemos considerar três direções ortogonais entre si. No “espaço” 4D, chamemo-lhe hiperespaço, a sequência lógica é acrescentar uma nova direção ortogonal às três primeiras. À primeira vista isto parece não fazer sentido. E não faz de facto do ponto de vista dos nossos sentidos e das nossas percepções habituais. Mas não podemos esquecer que isso não é feito no espaço, mas sim no hiperespaço, onde “habita” uma **geometria a quatro dimensões**. Na figura seguinte representa-se a sequência entre o ponto (0D) e o tesseracto, que é a figura 4D correspondente ao quadrado em 2D e ao cubo em 3D. O tesseracto é composto por **8** cubos, **24** faces quadradas, **32** arestas e **16** vértices. Um tesseracto com **2** metros de aresta tem um hipervolume de **$16m^4$** .

Assim, um dos critérios para classificar as geometrias é quanto à dimensão. Por exemplo, pode falar-se de geometria euclidiana 2D, 3D, 4D, nD, geometria projetiva 2D, 3D, 4D, nD, geometria hiperbólica 2D, 3D, 4D, nD, etc.

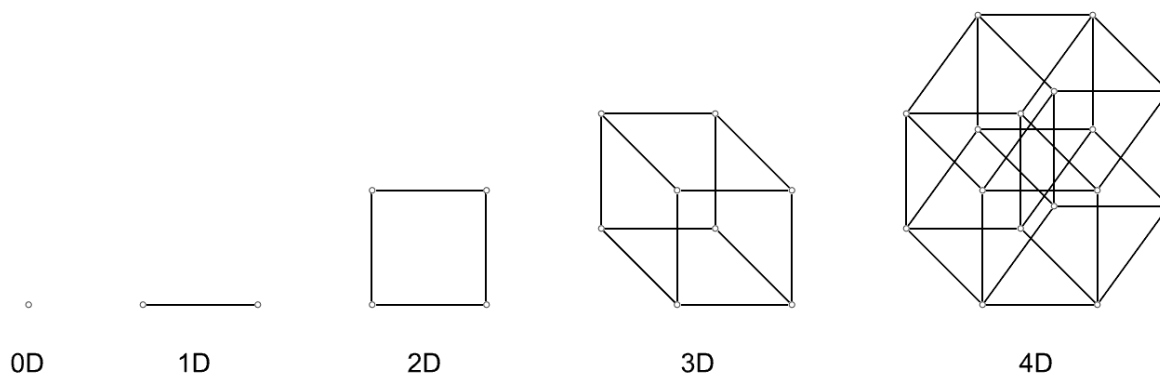


Fig. 0.2. Sequência do ponto ao tesseract em projeção 2D.

Para além destas dimensões inteiras, há ainda que considerar as dimensões fracionárias, o que enquadra a **geometria fractal**. Nesta geometria, as figuras não têm dimensões 1, 2, 3, ..., n . Nesta geometria pode haver linhas que preenchem completamente o plano, como a curva de Hilbert (figura 0.3.a), e linhas que, tendo início e fim bem definidos, têm comprimento infinito, como a curva de Koch (figura 0.3.b). Ou figuras planas cuja área tende para zero, como é o caso do triângulo de Sierpinski (figura 0.3.c). E ainda formas tridimensionais cuja área tende para infinito ao mesmo tempo que o volume tende para zero, como é o caso da esponja de Menger (figura 0.3.d). Em cada um dos casos estão representadas três iterações do processo de construção das figuras fractais.

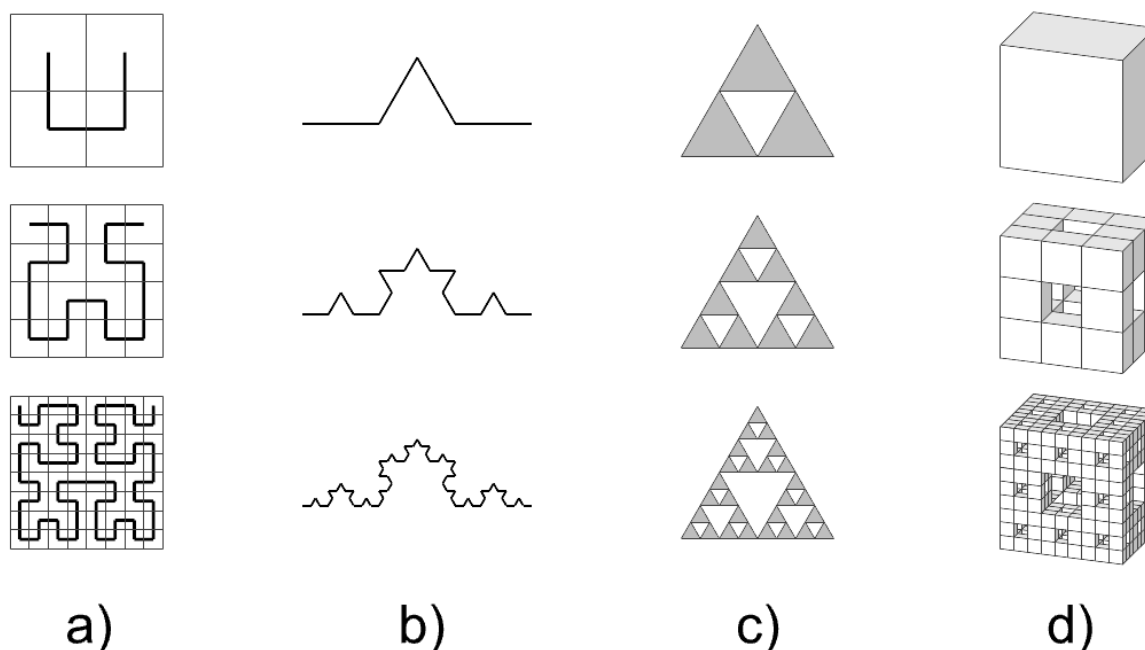


Fig. 0.3. Objetos fractais: a) curva de Hilbert, b) curva de Koch, c) Triângulo de Sierpinski, d) Esponja de Menger.

Na geometria fractal a ideia fundamental é a auto semelhança. Isto é, réplicas da figura inicial podem ser vistas se ampliarmos uma parte da figura. E se nos afastarmos da figura inicial, também percebemos que esta é uma réplica de outra que existe a uma escala superior. É quase como se as figuras fractais não tivessem princípio nem fim e, sendo observadas com qualquer nível de aproximação, se auto replicassem em diferentes escalas. Uma figura icónica da geometria fractal é o conjunto de Mandelbrot que representa uma região do plano complexo,

cujos pontos e respetivas coordenadas, consideradas como valores iniciais numa determinada função, aplicada de forma iterativa, resultam em *outputs* contidos numa área limitada. O que é interessante nesta figura é que tem uma fronteira fractal, isto é, se ampliarmos a figura vamos ver regiões de auto semelhança.

Este e outros temas podem ser estudados com mais detalhe no livro “Geometria, Temas actuais” de Eduardo Veloso (1998).

Geometria sintética e Geometria analítica

Quando se distingue entre geometria sintética e geometria analítica referimo-nos ao tipo de abordagem ao estudo da geometria mais do que à geometria em si.

A **geometria sintética** corresponde ao modo como tradicionalmente a geometria é estudada e desenvolvida. Em geral assenta numa abordagem axiomática em que os objetos geométricos e as suas relações são estudados através de deduções lógicas e construções geométricas conceptualmente realizadas com régua e compasso. A geometria desenvolvida por Euclides, no sec. III a.c., nos Elementos é uma exemplo de geometria sintética.

No caso da **geometria analítica** os objetos geométricos a serem estudados são associados a sistemas de coordenadas e as relações entre eles são expressas através de equações algébricas e funções matemáticas. As propriedades das figuras são deduzidas a partir dos métodos utilizados para resolver aquelas equações. Os pioneiros na formalização desta abordagem à geometria foram Descartes e Fermat no sec. XVII.

A geometria analítica permitiu o desenvolvimento de outras técnicas e áreas da matemática como a **geometria diferencial** e o **cálculo integral** que lidam com problemas como o cálculo de comprimentos de curvas, áreas de superfícies e volumes de sólidos.

A geometria analítica tende a ser mais poderosa na sua capacidade de generalização do tratamento da geometria, incluindo as dimensões superiores a três, enquanto que a geometria sintética, inerentemente de carater mais visual e construtivo, permite desenvolver a intuição sobre representação gráfica que é fundamental em campos do conhecimento como a arquitetura ou o design. Mas isso não significa que a geometria analítica seja de desprezar nestes campos. Na verdade, num ambiente cada vez mais informatizado, o seu domínio apresenta-se como uma vantagem.

Vamos ilustrar, com um exemplo simples, a diferença entre estas duas abordagens aos estudo da geometria através da demonstração do seguinte teorema de Tales: **O ângulo inscrito na semicircunferência é um ângulo reto.**

Na demonstração por via sintética, apoiada pela figura 0.4.a, toma-se como ponto de partida o facto de todos os raios da circunferência serem iguais e o facto de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é **180°**. A partir destas duas propriedades, é possível deduzir um argumento que demonstra que o ângulo inscrito é de facto um ângulo reto, a partir da seguinte sequência de afirmações:

a. Seja $\widehat{APB}$ o ângulo inscrito na semicircunferência e expresso pela soma dos ângulos $\widehat{APO}$ e $\widehat{BPO}$.

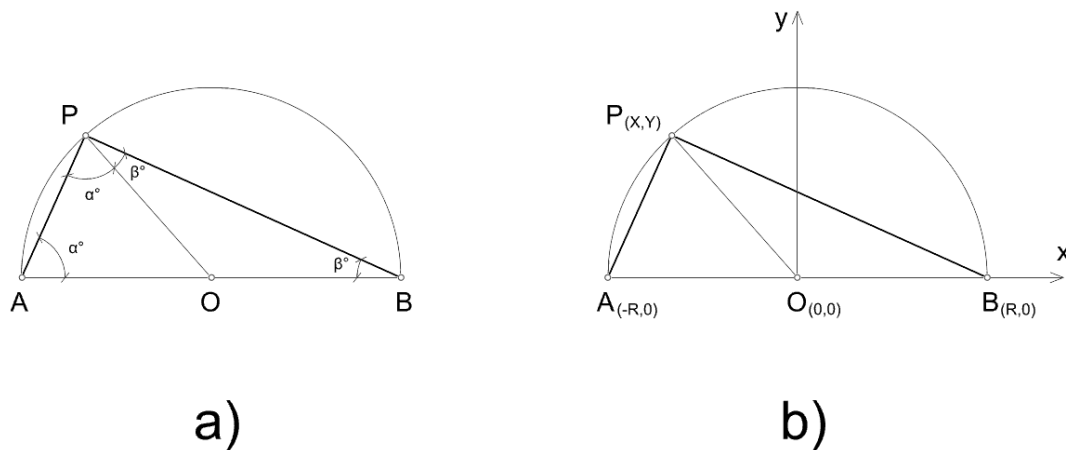


Fig. 0.4. Ângulo inscrito numa semicircunferência: a) demonstração por via sintética, b) demonstração por via analítica.

b. Os triângulos $[PAO]$ e $[PBO]$ são isósceles uma vez que em cada uma deles, dois lados têm a dimensão do raio da semicircunferência. Isto significa que os ângulos $\widehat{APO}$ e $\widehat{PAO}$ são congruentes. Designemo-los por α° . Também, por razão idêntica, os ângulos $\widehat{BPO}$ e $\widehat{PBO}$ são congruentes. Designemo-los por β° .

c. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então $2\alpha^\circ$ somado com $\widehat{APB}$ perfaz 180° , $2\beta^\circ$ somado com $\widehat{BOP}$ perfaz 180° .

d. Por outro lado, o ângulo $\widehat{AOB}$, que é a soma dos ângulos $\widehat{AOP}$ e $\widehat{BOP}$, é um ângulo raso, isto é, mede também 180° .

e. Então $2\alpha^\circ$ é igual ao ângulo $\widehat{BOP}$ e $2\beta^\circ$ é igual ao ângulo $\widehat{AOP}$.

f. Logo, a soma de $2\alpha^\circ$ com $2\beta^\circ$ perfaz 180° , de onde resulta que, metade desta soma, isto é $\alpha + \beta$ perfaz metade daquele valor, isto é, o ângulo $\widehat{APB}$, que é o ângulo inscrito na semicircunferência, é um ângulo reto, ou seja, mede 90° .

Na demonstração por via analítica, apoiada pela figura 0.4.b, associa-se um sistema de coordenadas à figura sendo as coordenadas dos pontos de interesse para o problema expressas em função desse sistema de referência e do raio R da semicircunferência. As relações entre as partes são estabelecidas em termos de equações que, ao serem resolvidas permitem concluir que o ângulo é reto. Nesta abordagem parte-se da definição analítica de declive de uma reta e do facto, também demonstrável analiticamente que, o produto dos declives de duas retas perpendiculares entre si é -1 .

Primeiro escrevem-se as equações que definem os declives das retas AP e BP e expressa-se a distância $\overline{PO}$. Depois calcula-se o produto dos dois declives e se for -1 , fica demonstrado que o ângulo $\widehat{APB}$ é reto.

$$\begin{aligned}
 \text{a. } & \begin{cases} d_{AP} = \frac{Y-0}{X-(-R)} \\ d_{BP} = \frac{0-Y}{R-X} \\ X^2 + Y^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{AP} \cdot d_{BP} = \left(\frac{Y}{X+R}\right)\left(\frac{Y}{X-R}\right) \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{AP} \cdot d_{BP} = \frac{Y^2}{X^2 - R^2} \\ - \\ - \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} d_{AP} \cdot d_{BP} = \frac{Y^2}{X^2 - (X^2 + Y^2)} \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{AP} \cdot d_{BP} = \frac{Y^2}{-Y^2} = -1 \\ - \\ - \end{cases}
 \end{aligned}$$

Este exemplo, embora muito simples, ilustra bem a diferença entre a abordagem sintética e a abordagem analítica. O apoio das figuras, em ambos os casos, visa ilustrar que o que distingue as duas abordagens não é tanto o facto de se utilizarem figuras gráficas, mas sim a forma como a argumentação é estabelecida. Na abordagem sintética segue-se uma sequência de argumentos que se vão apoiando em conclusões tiradas a partir de argumentos precedentes na cadeia de demonstração; na abordagem analítica associam-se coordenadas aos vértices da figura e a demonstração faz-se aplicando as regras da álgebra. Em todas as abordagens à geometria se podem utilizar figuras gráficas. E há mesmo casos em que essa utilização é intrínseca à própria geometria e é, por isso, incontornável.

Geometria pura e Geometria aplicada

Uma distinção entre **geometria pura** e **geometria aplicada** é importante no contexto deste documento. A geometria pura foca-se no estudo de conceitos e propriedades geométricas de modo abstrato e teórico. Neste sentido, conceitos como **exatidão** e **precisão** são irrelevantes. O que interessa é a lógica e a forma como as propriedades das figuras podem ser deduzidas. Em geral não se preocupa com aplicações práticas. A ênfase é colocada na exposição e prova de teoremas, na exploração de relações entre conceitos geométricos podendo envolver sistemas axiomáticos. Exemplos de abordagens teóricas à geometria são o estudo da geometria euclidiana, ou o estudo da geometria projetiva. Por outro lado, a geometria aplicada ocupa-se da utilização de princípios geométricos para resolver problemas do mundo real, o que significa, em muitos casos, uma integração com outros campos do conhecimento, como por exemplo a arquitetura ou o design. Neste sentido implica, em geral, a utilização de técnicas computacionais e modelação, aqui entendidas em sentido lato. E nesse sentido, são muito relevantes os conceitos de exatidão e precisão enquanto validadores da aplicabilidade na mesma. Exemplos de geometria aplicada incluem a computação gráfica e os sistemas de representação utilizados em arquitetura, design e engenharia para desenhar edifícios, componentes mecânicos e estruturas.

Neste contexto, pode considerar-se que a **geometria descritiva** está na charneira entre geometria pura e geometria aplicada. Os argumentos para a primeira classificação assentam no facto de que se apoia num desenvolvimento sistemático da teoria das projeções, interseções e transformações geométricas que podem ser estudadas sem uma preocupação imediata de aplicação prática. Atendendo ao contexto histórico do seu desenvolvimento, pode argumentar-se que a geometria descritiva forneceu um suporte para o estudo rigoroso (aqui do ponto de vista lógico) de problemas geométricos de forma sistemática, como por exemplo o estudo das superfícies geométricas quanto à sua natureza e representação. Com efeito, a geometria descritiva como a geometria das projeções torna-a também uma das raízes da geometria projetiva. Veja-se a menção de Felix Klein na segunda metade do século XIX: *“Metrical geometry is a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is all geometry”*, citado por Coxeter (1974). No que concerne à sua classificação como geometria aplicada, os argumentos vão no sentido de que a sua utilidade e inspiração se encontra em áreas como a engenharia e a arquitetura que dependem da representação de formas espaciais e da análise das suas relações no espaço o que pode ser feito através de projeções, em papel ou num ecrã de computador, com vista à conceção de objetos reais. Uma das origens da geometria descritiva radica seguramente nos procedimentos que, ao longo de séculos, os arquitetos e os construtores foram desenvolvendo para projetarem e construírem edifícios e cidades. Essa origem expressa-se claramente através dos tratados de arquitetura civil e militar e nos tratados de estereotomia da pedra, da madeira e dos metais. Também se pode considerar que os

procedimentos que os pintores desenvolveram ao longo dos tempos para representarem de forma fiel a realidade constituem outra origem da geometria descritiva.

Geometria descritiva e Computação gráfica

Desde as suas origens, a geometria está relacionada com a representação gráfica. Euclides traduz cada uma das proposições através de um desenho, ou melhor, uma construção gráfica, que apoia o argumento e traduz a sua possibilidade. Dada a natureza do desenvolvimento da geometria feito por Euclides, as construções gráficas pressupõem a utilização da régua (reta) e do compasso (circunferência). Se, para o estudo puro da geometria, a régua e o compasso são, antes de tudo, ideias ou noções, do ponto de vista da materialização da geometria, que interessa em termos de aplicações práticas, a régua e o compasso são dispositivos mecânicos que permitem a representação destas linhas de forma mais ou menos precisa e exata. Deste ponto de vista, vários foram os dispositivos inventados ao longo da história para materializar e representar geometria. Os geómetras gregos inventaram curvas mecânicas para resolver os três problemas clássicos da antiguidade: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo. E ao longo da história foram concebidos dispositivos mais ou menos sofisticados utilizados para materializar elipses, parábolas ou hipérbolas, ou as *splines* dos engenheiros da indústria automóvel. E hoje, as tecnologias de CAD/CAM permitem essa materialização de forma ainda mais premente a partir de representações computacionais.

Num certo sentido, uma construção gráfica materializada (seja num papel ou num ecrã de computador) é uma forma de computação. Tem-se um conjunto de condições e figuras geométricas iniciais e, através de um encadeamento de construções, levadas a cabo com dispositivos variados, analógicos ou digitais, passa-se pela representação de um conjunto de figuras intermédias que desaguam numa configuração final que oferece uma resolução para um problema concreto. Esse processo é uma forma de cálculo que materializa e operacionaliza a geometria para fins práticos como é o caso da sua aplicação em arquitetura, engenharia ou design. Para esta noção de construção gráfica não se distingue a natureza do suporte, analógico ou digital. No contexto deste texto, entende-se também por computação gráfica toda aquela operação que visa, por meio de um cálculo por natureza não gráfico, assistido por dispositivos de controlo de precisão, obter uma representação gráfica, que traduz a resolução de um determinado problema, sendo porventura informada de elementos doutra natureza, por exemplo simbólicos. Neste sentido, aqui, o computador, podendo ser uma possível máquina, é também o indivíduo que elabora ou concetualiza o problema e o resolve ou programa a sua resolução de modo a ter um resultado palpável.

Vimos que a geometria pode ter um sentido abstrato ou concreto. No primeiro caso é importante tornar tangível a geometria para suportar, por exemplo, a explicação de uma propriedade de uma figura ou de um processo geométrico. E no segundo caso é importante a forma de a tornar tangível através de um modo de representação porque dessa representação pode estar dependente a fabricação de uma peça de um motor, de um edifício ou de um eletrodoméstico.

As origens da **geometria descritiva** radicam na pintura, nos traçados dos templos e catedrais, das pontes e fortificações, e na estereotomia da pedra e da madeira. O que há de comum em todas estas áreas de atividade do homem é a necessidade de transformar os materiais para produzir objetos úteis, seja na esfera do uso corrente, seja na esfera artística. E para o fazer de forma controlada foram desenvolvidos métodos que pressupõem um controlo rigoroso da

medida. Esses métodos consubstanciam-se através de traçados gráficos mais ou menos sistematizados. O principal contributo de Monge (1797), no final do século XVIII, foi o dar um método sistemático para tratar os problemas do espaço através de construções gráficas.

Com este sentido duplo, de geometria pura e geometria aplicada, declarou os seus objetivos:

1. O primeiro é representar com exatidão, sobre desenhos que não têm mais que duas dimensões, os objetos que têm três, e que são suscetíveis de definição rigorosa. Sob este ponto de vista, é uma linguagem necessária ao engenheiro que concebe um projeto, aos que devem dirigir a sua execução, e por fim aos artistas que devem eles mesmos executar as suas diferentes partes.

2. O segundo objetivo da geometria descritiva é o de deduzir da descrição exata dos corpos tudo o que segue necessariamente das suas formas e das suas posições relativas. Nesse sentido, é um meio de pesquisar a verdade; ela oferece exemplos sem fim de passagem do conhecido ao desconhecido; e porque é sempre aplicada aos objetos suscetíveis da maior evidência, é necessário fazê-la entrar num plano de educação nacional.

Como se vê, a geometria descritiva é fundada com o sentido de sistematizar os princípios e os procedimentos que permitem, através de uma representação gráfica rigorosa, precisa e exata, o estudo dos objetos tridimensionais. E isso pode ser útil tanto a engenheiros e arquitetos como a matemáticos e geómetras. Aos primeiros interessarão as aplicações práticas, e aos segundos interessará a possibilidade de dispor de uma ferramenta para estudar de modo sistemático, por via da sua representação gráfica, as propriedades das figuras geométricas do espaço. É muito importante perceber que a geometria descritiva não se esgota na produção da representação.

O conceito de projeção é ideia fundamental que operacionaliza a geometria descritiva. Do ponto de vista prático, as projeções envolvem computações, de natureza gráfica, para determinar o correto posicionamento e articulação das vistas das figuras geométricas. E estas são análogas aos algoritmos da **geometria computacional** que lidam com projeções e transformações e que são possibilitados pela aplicação da álgebra. Com efeito, Gaspard Monge afirmava a respeito da relação entre a geometria descritiva (de caráter tendencialmente sintético e visual) e a geometria analítica (de caráter analítico e abstrato) que “*Não há nenhuma construção de geometria descritiva que não possa ser traduzida em análise; e desde que as questões não comportem mais que três incógnitas, cada operação analítica pode ser olhada como a escrita de um espetáculo em geometria*”. E acrescenta “*Seria desejável que estas duas ciências fossem cultivadas em conjunto: a geometria descritiva traria às operações analíticas mais complicadas a evidência que é sua característica, e, por outro lado, a análise traria à geometria a generalidade que lhe é própria*”.

Muitos problemas em geometria descritiva envolvem a construção de figuras geométricas através dos métodos tradicionais com o uso da régua e do compasso. Os computadores digitais vieram ampliar o espaço instrumental dessas construções trazendo a possibilidade de lidar com maior quantidade de informação, maior complexidade, mantendo ou até aumentando a precisão e o rigor dos resultados. Trouxeram também a possibilidade da modelação tridimensional que permite, concetualmente, manipular diretamente os objetos através de inputs espaciais, sem depender de uma ou outra projeção específica. Neste sentido, podemos considerar a fundação da geometria descritiva como um marco na história da geometria computacional gráfica. Isto é, a geometria descritiva forneceu o entendimento

fundacional e os métodos que influenciaram o desenvolvimento dos algoritmos da geometria computacional, podendo aquela considerar-se precursora desta. A arquitetura, o design e as engenharias apoiam-se em métodos computacionais da forma, e estes foram explorados originalmente no domínio da geometria descritiva. Enquanto a geometria descritiva, tradicionalmente, se apoia sobretudo em técnicas manuais, ainda que transpostas para o suporte digital, estas técnicas corporizam princípios computacionais que estão alinhados com o que se pode encontrar na geometria computacional. E mesmo a utilização do próprio desenho manual à mão levantada não está excluída desta aceção. Mas não nos devemos iludir, como tantas vezes acontece com a utilização do computador. Qualquer aplicação informática de modelação geométrica tem as suas limitações, como adiante se evidenciará. E na maior parte das vezes utilizam-se aproximações em vez das figuras matematicamente ideais.

A capacidade de interpretar visualmente a espacialidade de configurações geométricas dadas através das suas projeções, isto é, através de desenhos ou imagens, no papel ou num ecrã, é uma das habilidades que a geometria descritiva ajuda a desenvolver e para a qual não há uma regra ou caminho únicos. Esta, que apenas se pode desenvolver através da prática, fortalece a capacidade de visualização espacial e a capacidade de raciocínio para resolver problemas no espaço.

Este elo entre geometria descritiva e geometria computacional suporta a ideia de que a geometria descritiva, não se esgotando aqui, é um sistema de tratamento e manipulação de informação gráfica de natureza eminentemente computacional. Isto é, as construções geométricas elaboradas em geometria descritiva traduzem sempre uma forma de cálculo, seja o cálculo de uma projeção, seja o cálculo de uma interseção ou de qualquer grandeza que, por qualquer razão, se pretenda. Esse cálculo, é, em si mesmo, uma computação gráfica. Mas o cálculo também pode ser de natureza algébrica, desde que o resultado se expresse graficamente. Isto é o que acontece quando utilizamos um software de desenho assistido por computador (CAD). E pode acontecer atrás do palco, escondido do utilizador, quando este utiliza as funções nativas da aplicação CAD, como pode acontecer às claras se o utilizador precisar de explicitar, através de linguagens simbólicas, vulgo programação, instruções para que a máquina realize determinada operação não nativa da aplicação CAD. Deste modo, através da computação gráfica, aqui entendida em sentido lato, aproximam-se os mundos da geometria descritiva e da geometria analítica ao serviço da representação gráfica.

No contexto da arquitetura e do design, o livro de Helmut Pottman et al (2007), *Architectural Geometry*, é uma referência contemporânea incontornável. Nesta obra é tornado evidente que a geometria se encontra no cerne da produção arquitetónica e que há uma história que nos levou dos métodos e ferramentas tradicionais da representação aos métodos e ferramentas contemporâneas. Nessa história a geometria descritiva é protagonista.

Geometria estática e geometria dinâmica

A distinção entre geometria estática e geometria dinâmica não é verdadeiramente uma distinção entre tipos de geometria. Mas pode falar-se desta distinção como abordagem ou como lente através da qual se olha para a geometria.

Quando fazemos um desenho de uma determinada configuração geométrica podemos entendê-lo como um objeto em si, cristalizado, estático e imutável ou podemos entendê-lo como representando um estado particular num contínuo possível de estados de coisas, um pouco dentro do princípio da continuidade evidenciado por Poncelet (1865, 1866) no seu

tratado das propriedades projetivas das figuras, obra escrita em dois volumes. Por exemplo, de acordo com este princípio, é possível deformar continuamente uma circunferência em qualquer linha cônica mantendo certas **propriedades invariantes**. Com efeito, imagine-se uma reta tangente a uma circunferência. Projetem-se estas duas figuras a partir de um ponto não contido no seu plano. Gera-se assim uma superfície cônica e uma superfície plana. Imagine-se agora que um plano coincidente com o plano da circunferência se destaca e começa a deslocar-se de forma contínua no espaço. Este novo plano intersesta a superfície cônica e a superfície plana, acima referidas. A cada nova posição do plano corresponde uma curva e uma reta tangentes entre si nele contidas. Há, pois, uma relação entre a circunferência e a sua tangente e as novas curvas e as suas tangentes. A sequência de figuras não é mais do que uma sucessão contínua de estados possíveis de interseções que o plano móvel pode produzir na superfície cônica e seu plano tangente. A propriedade da tangência persiste em todos esses estados, ou seja, é um **invariante**. Em geometria é muitas vezes útil olhar para as figuras sob este ponto de vista. Que caso particular representa determinada configuração geométrica? O que é que persiste e o que é acidental? Olhar para uma dada configuração geométrica como um caso particular de um contínuo de casos possíveis pode ser um desbloqueador na resolução de problemas e no entendimento mais profundo das propriedades das figuras geométricas.

Também é possível falar de geometria dinâmica se pensarmos em movimento. Muitas vezes refere-se que uma linha é o resultado do movimento de um ponto de acordo com uma dada lei. Um exemplo disto é o estudo das epitrocoides, ou dos sistemas articulados. Essencialmente uma epitrocoide é um caso particular de uma classe de curvas, designadas *roulette*, que são geradas pelo movimento de pontos atrelados a curvas que rolam sobre outras curvas (Veloso, 1998). Um exemplo de epitrocoide é a epicloide que é gerada pelo movimento de um ponto de uma circunferência que rola, sem deslizamento, sobre outra de raio múltiplo. Os sistemas articulados são outra forma de pensar na geometria de forma dinâmica. Considere-se por exemplo a articulação de quatro barras iguais duas a duas, opostamente, em que uma das barras maiores é imóvel podendo as outras rodar em torno das articulações entre si. Neste caso, qualquer ponto intermédio da barra móvel maior descreve uma curva em forma de oito. Um caso particular é a lemniscata. Pensar na geometria do movimento pode ser muito relevante em áreas como o design ou a engenharia mecânica. Outro exemplo é a construção da elipse pelo método do jardineiro.

Do ponto de vista das ferramentas e apoio ao estudo, sob os vários pontos de vista geometria dinâmica, há as ferramentas de software que podem ser utilizadas para o efeito. Mas mesmo ainda antes da revolução digital, já havia ferramentas desse tipo. Lembremo-nos dos modelos de Olivier no século XIX. Por contraponto àquele tipo de aplicação informática em que cada elemento representado fica fixo e imutável, temos outro tipo de aplicação informática de natureza paramétrica em que é possível alterar elementos geométricos mantendo fixas determinadas relações entre eles. As ferramentas de software utilizadas para este efeito são habitualmente designadas por ambientes digitais de geometria dinâmica (ADGD). Por exemplo, se duas linhas são perpendiculares entre si, ao mudar a direção de uma delas a outra ajusta-se mantendo a perpendicularidade. Ou, estabelecida a relação entre alguns elementos, é possível produzir uma animação que ilustra todos os estados possíveis dessa relação. O Cinderella e o GeoGebra são exemplos de software de geometria dinâmica especificamente concebidos para o estudo da geometria. Há, no entanto, outro tipo de software, não concebido especificamente para o estudo da geometria, mas que pode ser igualmente válido para o entendimento de

princípios geométricos. Referimo-nos a software CAD/CAM utilizado na indústria. Este tipo de software também pode ser utilizado com proveito para o estudo da geometria, particularmente em contexto de formação em arquitetura, design e engenharia uma vez que é comum nestas áreas. O AutoCAD e o Rhinoceros são exemplos de software deste tipo. Em particular, o Rhinoceros vem equipado com um *plugin* de modelação paramétrica, *Grasshopper*, que aplica os princípios acima descritos. Genericamente, neste contexto designaremos estas ferramentas como **ambientes digitais de modelação geométrica (ADMG) bidimensionais (ADMG2D) ou tridimensionais (ADMG3D)**.

Assim, é nosso posicionamento que os ADMG2D e ADMG2D são instrumentos para a operacionalização prática do estudo e da geometria no espaço, legítimos no contexto da geometria descritiva.

Geometria e a imaginação

Esta secção pede emprestado o nome ao livro “Geometria e a imaginação” (Hilbert e Cohn-Vossen, 1952) cuja consulta se recomenda vivamente. Trata-se de uma referência obrigatória para quem se interessa pelo estudo da geometria e suas aplicações. O autor parte do pressuposto que há duas tendências na abordagem da geometria, uma direccionada para a abstracção e outra direccionada para o entendimento intuitivo. Com a abstracção e com a lógica consegue ordenar-se e sistematizar os resultados da investigação. Mas é com a intuição que se fomenta a descoberta e se estabelece uma relação mais próxima com os objetos que se estudam e se entende o significado concreto das suas relações. Tal como nos diz Henri Poincaré, citado por Rudolph Arnheim (1969), “É através da lógica que provamos mas é pela intuição que descobrimos.”

A imaginação é uma ferramenta indispensável em todas áreas do conhecimento, e em particular para quem estuda geometria. Imaginar significa criar imagens que são, em primeiro lugar mentais. Mas também há, na interação com imagens concretas, e através da percepção, um verdadeiro ato de criação de imagens. Segundo Rudolph Arnheim, a percepção visual é um ato pelo qual a mente estrutura aquilo que vê e com isso gera uma imagem ou conceito. Assim, a utilização da imaginação em geometria faz-se num jogo de parada e resposta entre o que os sentidos apreendem e aquilo que a mente imagina num processo indissociável. Por essa razão entendemos que o estudo da geometria, sobretudo em áreas que implicam a transformação do meio pela manipulação material das coisas, como é o caso da arquitetura, do design e das engenharias, não pode deixar de considerar esta componente, que é veículo da criatividade.

Com esta dialética reforçada, também se expande na mente a capacidade de visualizar, isto é, de projetar em imagem aquilo que pode ser dado aos sentidos de outros modos, por exemplo através de descrições verbais escritas ou orais. Imaginar e visualizar também significa ser capaz de reestruturar a imagem de um problema, transformando-a noutra e noutra que melhor traduza o que está posto em equação, num processo iterativo quase natural ou naturalizado pela prática. Isso às vezes significa literalmente reconfigurar a imagem. Outras vezes, essa reconfiguração ocorre apenas mentalmente porque se olhou para o problema de outro ponto de vista.

Em geometria, a imagem que se produz e que se imagina mentalmente, deve ser sempre aquela que captura melhor a estrutura do problema ou objeto em análise. Deve ser simples e colocar em evidência os aspetos estruturantes do mesmo. E não deve ser desprovida de contexto, que tem de ser declarado. A mesma imagem, com dois contextos diferentes, pode

levar a resultados dramaticamente diferentes. Um quadrado com duas diagonais pode ser visto apenas como tal, como a justaposição de quatro triângulos retângulos isósceles, como uma cruz num boletim de voto, como uma pirâmide, ou como um túnel com uma grande profundidade.

Do que foi dito, ressalta a convicção de que a imagem é uma componente fundamental do processo de ensino e aprendizagem em geometria. Na sua instância concreta, a imagem consubstancia-se em desenhos e em modelos tridimensionais.

Geometria, estrutura e representação

Há diferentes modos de representar a geometria. Por um lado há a representação simbólica através de sinais e operações matemáticas, própria da álgebra e da análise. Por outro lado há a representação através de imagens bidimensionais ou modelos tridimensionais, mesmo que a referência seja de dimensão superior. Pelas razões anteriormente invocadas, interessa-nos sobretudo a representação através de imagens, particularmente desenhos, ou modelos, independentemente dos seus suportes. Claro é, como acima dito, que o contexto tem de ser sempre claro. Do ponto de vista discursivo, a mensagem verbal só passa se o recetor conhecer a mensagem do desenho (Serres, 1993). E o inverso também é verdadeiro.

Diferentes modos de desenhar e diferentes tipos de desenho prendem-se com diferentes contextos e objetivos da representação. Por exemplo, em design ou arquitetura, numa fase exploratória das ideias é normal dominar o desenho à mão levantada porque é mais flexível, suporta a incerteza, permite iterar rapidamente entre diferentes hipóteses de projeto e quase nunca é um desenho acabado e definitivo. Depois, à medida que as ideias se cristalizam, é normal tornar o desenho mais preciso e metricamente controlado já que, no fim, o desenho poderá desempenhar o papel de suportar e informar um processo construtivo. Esse controlo implica a utilização de instrumentos e dispositivos variados sobre suportes igualmente variados. Porventura, esse desenho mais preciso e de caráter mais definitivo pode até ser obtido automaticamente através de modelos tridimensionais digitais.

De acordo com Fraser e Henmi (1993), em “Envisioning Architecture: An Analysis of Drawing”, há três tipos de desenho em arquitetura, nomeadamente, os desenhos ortográficos, as perspectivas axonométricas e as perspectivas cónicas. Porém estes desenhos dão determinam em si as suas possíveis aplicações. Estas podem ser diversas e os autores referem as seguintes: desenhos referenciais, diagramas, desenhos de projeto, desenhos de apresentação e desenhos visionários. Este tipos de desenho e suas aplicações podem apresentar qualidades distintas relativamente à precisão, ao rigor, à incerteza, ao nível de completamento, cor, tipo de linha, e forma como são gerados. Mas o que importa salientar aqui é que, de um modo ou de outro, todos os tipos de desenho estão embebidos de geometria. Bryan Lawson (2004), em “*What Designers Know*”, explora o papel do desenho como meio para o projeto começando por salientar que nem sempre este foi o meio utilizado. É interessante notar que este autor toma por tipos de desenho as aplicações mencionadas por Fraser e Henmi. Parece ignorar por completo a dimensão geométrica descritiva que estes autores consideraram para tipificar os desenhos em arquitetura. Seja como for, propõe uma classificação dos desenhos baseada no tipo de conhecimento que eles veiculam em vez das suas características. Mais uma vez, parece ignorar que o que Fraser e Henmi utilizaram para distinguir os tipos de desenhos não foram as suas características mas sim as suas aplicações. Assim, propõe a seguinte taxonomia: desenhos de apresentação, desenhos de instrução, desenhos de consulta, desenhos experienciais, diagramas, desenhos de efabulação, desenhos propositivos, desenhos de

cálculo. Curiosamente, ao pretender categorizar os desenhos em função do tipo de conhecimento que veiculam, acaba por ter uma classificação que também se baseia em características. Para nós este tipo de classificações é interessante na medida em que permite perceber que a geometria (ou talvez seja melhor dizer as geometrias) é um pano de fundo em todos os tipos de desenho. Isso traduz-se em primeiro lugar pelo facto de ser possível retornar quase sempre à classificação de Fraser e Henmi. E mesmo quando não se consegue, os desenhos são sempre utilizados para resolver certos aspetos de organização topológica, de proporções, de ponto de vista, de interação entre formas, que não são mais que operações geométricas. É claro que deve ser entendido que estas operações geométricas são realizadas em contextos mais amplos no processo de conceção. E talvez por isso seja muitas vezes esquecida a presença da geometria como um dos protagonistas do processo.

Em nosso entendimento, imagem e modelo podem ser unificados na ideia de representação. Estendendo as taxonomias acima referidas propomos um sistema de classificação de tipos de representação de acordo com a figura seguinte.

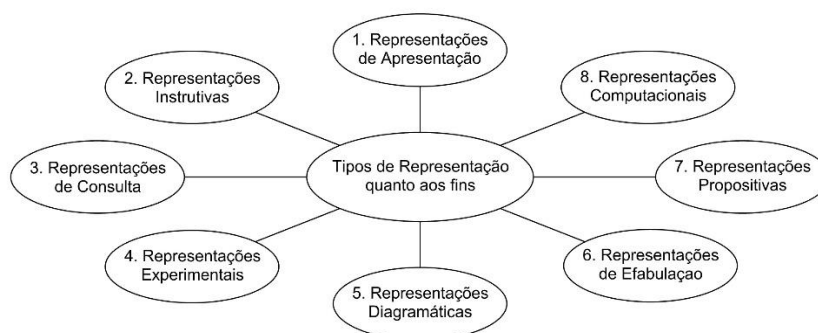


Fig. 0.5. Tipos de representação, quanto aos fins (adaptado da taxonomia proposta por Lawson).

Os processos conceptuais correspondem sempre a iterações entre diversos tipos de representação. Uma representação de apresentação tem por objetivo veicular um resultado, porventura a pessoas que não participaram no processo de projeto. Uma representação computacional, aqui entendida em sentido lato, corresponde a um qualquer cálculo que visa resolver espacialmente uma dada configuração, atendendo a dimensões diversas, como por exemplo a tectónica dos materiais, o seu comportamento estrutural, ou qualquer outro fator de desempenho. Uma representação instrutiva ou instrucional será aquela que tem por objetivo fornecer um conjunto de instruções a serem seguidas, por exemplo, num processo construtivo. Interessa-nos sublinhar o carácter gráfico e visual que estes tipos de representação podem ter na maior parte das formas que podem assumir.

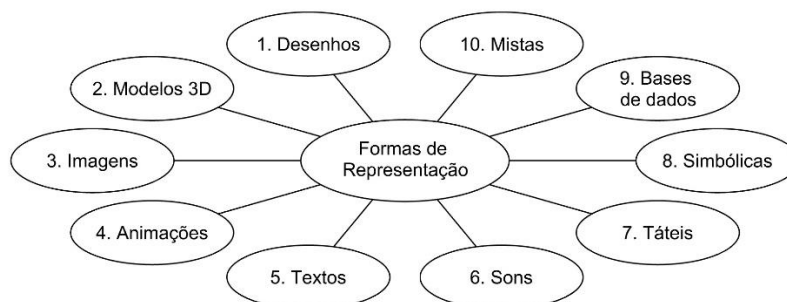


Fig. 0.6. Formas de representação.

Isto é, os vários tipos de representação consubstanciam-se através de formas de representação que podemos ilustrar através da figura 0.6.

Do ponto de vista prático, uma forma de representação, fruto de um processo de representação, é um veículo em que se concretiza a comunicação de ideias. A classificação das formas de representação é, até este ponto, independente dos suportes e sua natureza. Por exemplo, quando se referem modelos 3D não se está a dizer se são físicos ou digitais, o mesmo se passa relativamente ao desenho ou imagens. Do mesmo modo, não se pressupõe, em particular, nenhuma das qualidades, como precisão, incerteza, nível de completamento, ou outras. Isto é, todas estas qualidades podem ser consideradas.

Entendemos que, sobretudo se pensarmos no contexto da formação em arquitetura e design, os tipos e as formas de representação, independentemente dos seus suportes, devem permitir uma vinculação entre representação e um sentido de construtividade, estrutura e materialidade. Isto significa que a construção de modelos físicos, a par de um processo de transferência gráfica entre estes e as suas contrapartes bidimensionais, é de fundamental importância.

As formas de representação assumem a sua existência através de suportes de representação. No essencial, podemos classificar os suportes de representação de acordo com o esquema seguinte.

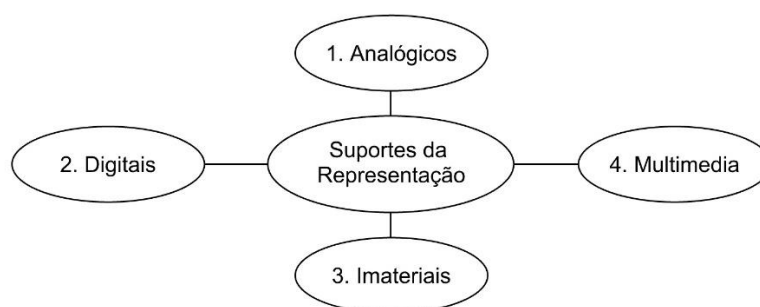


Fig. 0.7. Suportes da representação.

Naturalmente, entende-se por suporte digital, todo aquele que implica, em última análise, uma representação numérica, discretizada, mesmo que a experiência percetiva do mesmo não permita perceber essa natureza. Isto é o que acontece quando olhamos para uma imagem de elevada qualidade no ecrã de um computador. Os suportes analógicos são aqueles que tradicionalmente estamos mais habituados (ou não!), embora atualmente talvez esta observação já esteja desatualizada (ou não!). Neste contexto, considera-se um suporte multimédia aquele que integra vários suportes ou meios, podendo combinar o analógico e o digital. A referência a suportes imateriais necessita ser esclarecida uma vez que, verdadeiramente não existem suportes imateriais. Referimo-nos a suportes imateriais como aqueles que não fixam a representação no tempo. Por exemplo uma transmissão oral utiliza o ar como meio mas esgota-se no momento. É muito importante promover a ideia que as fronteiras entre suportes de representação precisam ser atravessadas e que há meios tecnológicos, mais ou menos avançados, para o fazer. Por exemplo, é possível transferir imagens analógicas para suportes digitais, e é possível imprimir fisicamente modelos tridimensionais digitais.

Toda a representação deverá ser estruturada através de sistemas. Estes são uma fusão entre códigos e regras que estruturam a representação, podendo implicar aparatos tecnológicos mais ou menos sofisticados. Num certo sentido, e recuperando a ideia de Fraser e Henmi relativa aos tipos de desenho, propomos classificar os sistemas de representação de acordo com o esquema da figura seguinte.

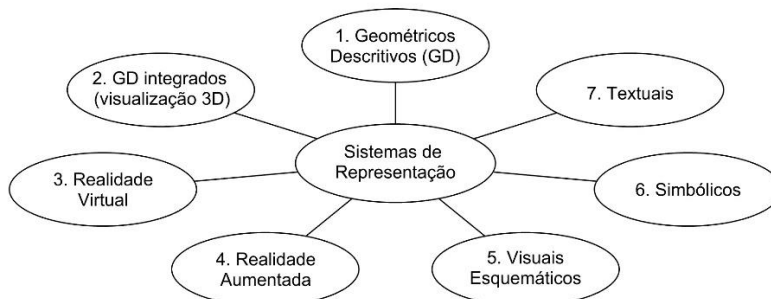


Fig. 0.8. Sistemas de representação.

De acordo com este critério, os sistemas geométrico descritivos correspondem, no essencial à classificação de Fraser e Henmi relativa aos tipos de desenho. Os sistemas geométrico descritivos integrados correspondem essencialmente ao que na visão computacional se traduz implementação e controlo de câmaras. Isto é, corresponde a sistemas que permitem a iteração dinâmica, por vezes simultânea, entre diferentes pontos vista sobre um modelo tridimensional seja para o visualizar ou para o editar. Num certo sentido, a realidade virtual (RV) e realidade aumentada (AR) são sistemas específicos da visão computacional que implicam um controlo da câmara perspetiva para criar ilusão de imersão, no caso da RV, e ilusão de ampliação da realidade por sobreposição de um modelo digital ao campo visual, no caso da RA. Os sistemas visuais esquemáticos são aqueles em que se procura essencializar um determinado aspeto da representação que não passa pela sua configuração física e que, por isso, não se reduz a uma projeção. É por exemplo o caso de esquemas topológicos que podem ser utilizados para resolver, num nível de abstração mais elevado, certas relações entre partes de um edifício ou de um engenho. Um sistema de representação simbólico, levado a um extremo, pode ser o conjunto de símbolos e regras matemáticas utilizados para manipular certos conceitos e operações algébricas. Mas também usamos sistemas de representação simbólicos, pelo menos parcialmente, quando em arquitetura ou design, substituímos uma representação explícita por um símbolo. A representação do tipo de movimento de abertura de um vão, ou a indicação de uma pendente de uma cobertura, ou até mesmo a cotagem, são exemplos deste tipo de sistemas. Por fim, as representações textuais também podem ser usadas como complemento das representações gráficas dominantes.

Até este ponto ocupámo-nos sobretudo da representação. Mas a geometria não é só uma questão de representação. É possível reconhecer nos objetos que nos rodeiam uma estrutura geométrica. É possível identificar a superfície de uma mesa com um plano, a aresta de um edifício com uma reta, uma pedra polida pelo tempo com uma esfera, a copa de uma conífera com um cone, a estrutura do ADN com uma hélice. Os exemplos são infindáveis. Nas áreas de atuação do homem que pressupõem a manipulação do existente, como é o caso da arquitetura, do design, e das engenharias, esta noção torna-se fulcral porque, ela própria, vai tender a impor essa estrutura geométrica nos produtos dessa ação. Isto é, a geometria é, nestas áreas, o suporte da estrutura da forma. Esta dimensão da geometria é fundamental. Se é verdade que, desde o Renascimento, o desenho como representação dominou a produção da

arquitetura, nem sempre assim foi, mas a geometria esteve sempre presente. Tal como nos dizem Pottman et al (2007), no seu livro “Architectural Geometry”, *“a geometria está no cerne do processo de conceção arquitetónica”*. Esta observação subentende as duas dimensões, a da representação e da conceção. A conceção, que não se pode dissociar da representação, implica que é fulcral o estudo e entendimento das mais variadas estruturas geométricas. Estas vão desde os sólidos básicos, como o cone, o cilindro, a pirâmide, o prisma, a esfera, até às superfícies mais complexas como as NURBS. Entre estes extremos há uma infinidade de variedades geométricas que podem ser abordadas e estudadas. Aqui, o foco não será na exaustão. Pretendemos antes fazer uma afirmação pedagógica do que pode ser um modelo de abordagem. Depois, esse modelo pode ser aplicado a outros casos.

A produção de um modelo tridimensional é uma espécie de desenho no espaço. Se esse modelo for produzido através de um suporte digital, a fronteira entre modelo tridimensional e desenho torna-se mais ténue. Na verdade, a utilização de modelos digitais permite ultrapassar o facto de que *“Uma épura de geometria descritiva, não sendo mais que o traçado de uma conceção geométrica num plano, torna necessário primeiro combinar linhas, superfícies, prever tudo o que resulta das suas intersecções, dos seus contactos, numa palavra resolver no espaço um problema de geometria tridimensional, antes que a mão possa executar as operações que conduzem à solução gráfica do problema”*. Esta citação de Hachette (1828), discípulo de Monge, evidencia as limitações do desenho geométrico bidimensional. Mas também nos interessa considerar a produção de modelos físicos com uma espécie de desenho no espaço. Na verdade qualquer carpinteiro, canteiro ou serralheiro de qualidade sabe que isto é assim. O material físico, madeira, pedra, metal, é suporte do risco, isto é, do desenho que extravasa uma folha de papel, e se vincula à produção de um objeto. E é isso que os arquitetos acabam por fazer também quando elaboram maquetes. Esta capacidade, que deve ser explorada, é potenciada pelo uso de ferramentas digitais, como nos diz Pottman et al (2007). *“A geometria ... É omnipresente, desde a exploração inicial da forma até à construção final. A computação geométrica moderna fornece uma variedade de ferramentas para projeto, análise e fabricação eficientes de formas complexas. Por um lado, isto abre novos horizontes para a arquitetura. Por outro lado, o contexto arquitetónico também coloca novos problemas à geometria.”* E desta interação entre o físico e o digital surgem novas possibilidades como o fazem notar Mitchell et al (1995) quando afirma que *“Novas ferramentas e novas formas de pensar vêm em conjunto”*.

Um pequeno exercício de representação

Vamos notar que um desenho isolado, ou mesmo um conjunto de desenhos, sem mais nenhuma indicação nunca tem um significado único e permite várias interpretações, o que não é necessariamente um problema. É normal associar aos desenhos outro tipo de informação (textual, simbólica, numérica, etc.) e dotá-los de uma expressão específica (empírica ou convencional), que visa estreitar o espaço de interpretações e clarificar o objetivo comunicacional, se isso for desejável. Isto é, os desenhos têm de ser vistos em articulação com um conjunto de informação adicional que os integra e com um contexto. Por vezes a ambiguidade pode ser desejável porque pode desencadear o espoletar novas ideias, por exemplo em fases iniciais de processos de conceção. Outras vezes não é nada desejável porque pode implicar prejuízos, por exemplo numa representação que deve informar um processo construtivo. A expressão do desenho inclui elementos como o tipo e espessura das linhas, a utilização de manchas com determinados significados, ou ainda a utilização da cor. Por exemplo, linhas contínuas com maior espessura tendem a ser utilizadas para representar

arestas ou contornos de objetos enquanto linhas de menor espessura podem ser utilizadas para representar elementos acessórios ou auxiliares do desenho.

Do ponto de vista estrito do desenho geométrico, que é o nosso foco, e não se confunda isto com rigidez, interessa-nos incorporar na discussão conceitos como a precisão e o rigor, certeza e a incerteza, desenho acabado versus desenho inacabado. Interessa-nos também refletir sobre a utilização ou não de instrumentos de controlo da precisão e do rigor e perceber como o seu uso, através de diversos meios, analógicos ou digitais, pode determinar a invocação de diferentes propriedades geométricas das figuras que se pretendem representar, isto é, diferentes camadas de conhecimento geométrico. Sublinhamos que o nosso enfoque é sempre em relação a um tipo de desenho que invoca a geometria.

Vamos distinguir vários modos de desenhar através do exercício de representação de uma figura e refletir sobre como diferentes propriedades geométricas dessa figura são evidenciadas em cada um dos modos. Para o efeito vamos considerar o exemplo da **representação de um cilindro de revolução considerando que a altura do cilindro mede o dobro do comprimento do diâmetro da base**. A leitura conjunta deste enunciado com os resultados desenhados e eventuais notações, tendo como pano de fundo os nossos conhecimentos, maiores ou menores, sobre a geometria do cilindro e das projeções, pode convencer-nos da adequação da representação ao objetivo pretendido.

Desenho à mão levantada

No caso do desenho à mão levantada, é necessário confiar nas habilidades de observação espacial da imagem mental do cilindro que se forma e, a partir daí, representar a forma, por exemplo numa folha de papel ou na superfície de um tablet, procurando um controlo mínimo das proporções. Neste processo enfatiza-se a intuição e o entendimento básico da estrutura e relações espaciais da forma. A maior ou menor qualidade do resultado depende, por um lado, da habilidade para o desenho em função de um eventual objetivo e, por outro lado, do conhecimento da geometria do cilindro e como esta se reflete num desenho que é, inerentemente, bidimensional. Não há um caminho único para proceder à representação, mas atrevemo-nos a postular que a proficiência nesta abordagem está correlacionada com a maior ou menor prática nas que se lhe seguem, que estruturam o alicerce racional, bem como numa prática do desenho de observação, que estrutura o alicerce empírico.

Passemos à prática.

Num desenho à mão levantada, pode começar-se por desenhar uma curva ovalizada correspondente a uma das bases do cilindro, depois duas retas mais ou menos tangentes àquela curva e, por fim outra curva mais ou menos ovalizada que tampona o cilindro convencendo-nos de que respondemos ao solicitado. Se assim se proceder, estamos a considerar, consciente ou inconscientemente, que o eixo do cilindro é oblíquo ao plano de projeção ou que a direção da projeção é oblíqua ao plano de projeção, ou ainda ambas as coisas. Se desenhássemos apenas uma circunferência ou um retângulo, com as proporções de dois para um, como representação do cilindro, estaríamos a considerar que o eixo seria perpendicular ou paralelo ao plano de projeção. Mas o mais provável é não darmos essa resposta perante o problema. Embora esta descrição pareça evidente, na verdade pode dar origem a uma enorme variedade de resultados, uns mais corretos e outros menos corretos, contraditórios ou mesmo errados.

Pensemos no passo inicial, isto é, desenhar uma elipse correspondente a uma das bases do cilindro. Se tivermos presente a dupla simetria da elipse em relação a dois eixos perpendiculares, o nosso desenho, ainda que produzido sem instrumentos de controlo da precisão, deve refletir e permitir reconhecer essa propriedade mesmo que não sejam utilizados traçados auxiliares (figura 0.9.a). Em alternativa, para facilitar o desenho da curva, o desenhador até pode explicitar os dois eixos de simetria (figura 0.9.b) ou desenhar um retângulo no qual se inscreve a elipse (figura 0.9.c), e não é de esperar que os procedimentos de controlo vão muito além disto. No entanto, tudo depende da intenção e habilidade de quem representa.

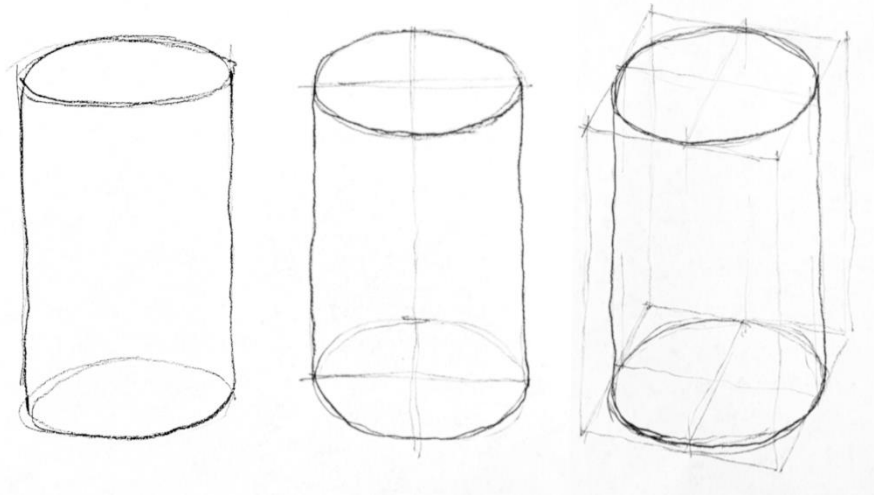


Fig. 0.9. Desenho do cilindro à mão levantada: a) as elipses são desenhadas sem traçados auxiliares, b) são desenhados os eixos principais das elipses, c) são desenhados os retângulos envolventes das elipses e um paralelepípedo circunscrito.

De seguida há o desenho das duas retas tangentes à elipse. Provavelmente, e de forma intuitiva, essas duas retas são representadas paralelas. Afinal, todas as geratrizes do cilindro são paralelas entre si e há, em geral, a tendência em fazer refletir no desenho aquilo que se conhece do objeto representado. Mas o mais certo é não se pensar muito no facto de que essas retas resultam da interseção de dois planos projetantes com o plano de projeção, tangentes à superfície do cilindro e paralelos entre si. Se for reconhecível que essas retas são tangentes à elipse nos extremos do eixo maior, então está a representar-se algo que pode ser interpretado e considerado como uma projeção ortogonal do cilindro, mesmo que isso, mais uma vez, possa não ser totalmente consciente por parte de quem está a desenhar. Caso contrário, a representação equivalerá a uma projeção oblíqua do cilindro.

Por fim há o desenho da elipse correspondente à outra base do cilindro. Se tivermos presente que as duas bases são iguais e estão contidas em planos paralelos, e se soubermos que figuras iguais contidas em planos paralelos têm projeções iguais, então desenhamos a segunda elipse como uma translação da primeira, isto é, procura-se que o desenho das duas curvas seja o mais igual possível. Mais uma vez, o conhecimento, a habilidade e a intuição de quem desenha determinam a qualidade do resultado.

Eventualmente pode considerar-se que o desenho se torna mais explícito ou que fica mais facilitado se se começar por desenhar um paralelepípedo envolvente do cilindro. Neste caso, em geral, as elipses têm de ser inscritas em paralelogramos. Deve ser reconhecido que cada uma das elipses deve ser tangente a cada um dos paralelogramos nos pontos médios dos seus lados ao mesmo tempo que se deve ter presente a dupla simetria da curva em relação aos dois

eixos principais perpendiculares entre si e que não têm a direção dos lados dos paralelogramos.

Já em relação às geratrizes do contorno aparente, deve reconhecer-se que, sendo paralelas a quatro arestas do paralelepípedo envolvente, são tangentes às elipses em pontos que se distinguem dos pontos médios dos lados do paralelogramo. Se, no resultado produzido for visualmente reconhecível que estas tangentes são perpendiculares aos eixos maiores das elipses, então poderemos ser convencidos de que estamos perante uma projeção ortogonal, caso contrário será oblíqua. O desenhador, se for menos habilidoso, poderá ainda sentir-se mais confortável ao desenhar as diagonais dos paralelogramos para estimar melhor o desenho da curva elíptica.

Não se distinguiu o desenho analógico do desenho digital uma vez que o desenho digital à mão levantada tende a mimetizar o desenho manual pelo facto de considerarmos que não há a utilização de instrumentos de controlo da precisão para além da relação olho/cérebro/mão. Porém, no caso do desenho de precisão, pode ser significativa a diferença entre a abordagem analógica e a abordagem digital.

Desenho analógico de precisão

Vejamos agora a mesma questão no caso do desenho de precisão analógico, isto é, feito sobre papel com os instrumentos tradicionais de controlo da precisão (a régua, o compasso e o transferidor, etc.).

A estratégia geral pode ser muito semelhante ao caso anterior, porém há diferenças significativas. Enquanto no desenho à mão levantada as proporções, as relações e as dimensões são estimadas visualmente ainda que apoiadas por traçados auxiliares, no caso do desenho de precisão estas necessitam ser controladas por processos gráficos rigorosos, em geral mais extensos, com o auxílio de instrumentos, e o conhecimento das propriedades geométricas envolvidas tem de ser muito mais consciente e evidente.

Suponhamos uma sequência similar à descrita anteriormente, isto é, comecemos pelo desenho de uma elipse correspondente a uma das bases. Neste caso é preciso ter claro se a projeção é oblíqua ou ortogonal porque temos de controlar com precisão e rigor a representação. Também é imprescindível explicitar as dimensões do cilindro. Isto implica forçosamente a utilização de construções gráficas auxiliares que visam garantir a correção dos resultados.

Assumindo a projeção ortogonal, se começarmos por representar os eixos principais da elipse devemos ter em conta que o comprimento do eixo maior é igual ao comprimento do diâmetro da base do cilindro e que o comprimento do eixo menor é função da inclinação do plano da base em relação ao plano de projeção (figura 0.10.a). Quanto menor for o comprimento do eixo menor, maior é a inclinação do plano da base. Depois, como os planos das bases do cilindro são perpendiculares às geratrizes, esta decisão inicial também condiciona a representação dos comprimentos das geratrizes.

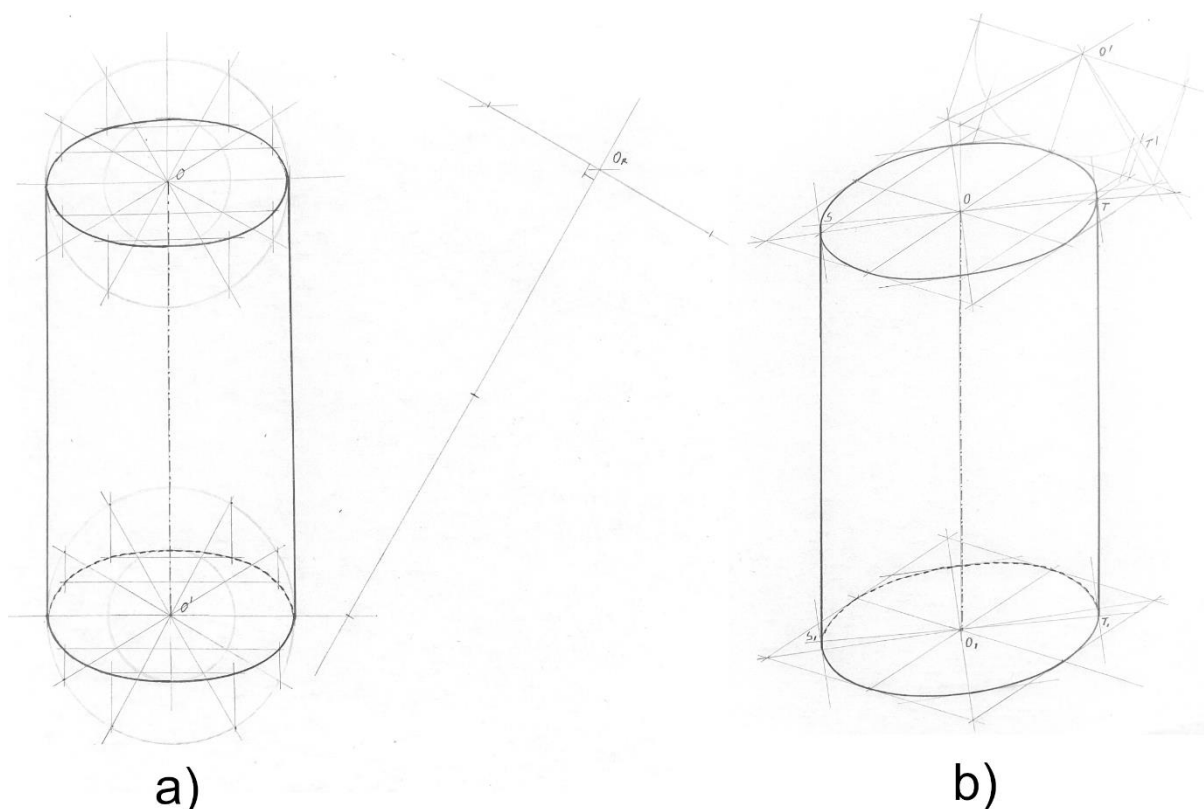


Fig. 0.10. Cilindro representado através de desenho manual de precisão: a) projeção ortogonal, b) projeção oblíqua.

Começemos por representar os eixos principais de uma das elipses corresponde a uma das bases. Embora estes eixos definam uma e apenas uma elipse, a sua representação gráfica precisa não é imediata. Note-se que neste momento apenas temos quatro pontos por onde a curva passa. Se procurarmos desenhar a curva apenas com estes pontos, o mais certo é produzirmos um desenho pouco preciso e pouco rigoroso. Assim, é necessário construir um conjunto de pontos adicional que permitam um incremento da precisão e do rigor no desenho da curva. Isso pode ser feito de diferentes modos. Definidos os eixos principais da elipse, e conhecendo um qualquer método de construção de pontos da elipse, pode aplicar-se esse procedimento. No caso concreto foi utilizado um procedimento que cruza duas afinidades. O desenho da curva é feito interpolando os pontos determinados. O traçado da curva pode ser executado à mão levantada ou com o auxílio de instrumentos como o escantilhão ou a régua cobra. Note-se o desenho pode ainda ser facilitado se forem desenhadas as retas tangentes à elipse nos pontos previamente obtidos, o que não fizemos no caso da figura 0.10.a.

Após a representação da elipse é agora necessário representar as projeções das geratrizes de contorno aparente. Atendendo a que estas projeções não são mais que os traços, no plano de projeção, dos planos projetantes tangentes à superfície do cilindro, resulta que são tangentes à elipse nos extremos do seu eixo maior. O seu comprimento, no desenho, pode ser obtido através de cálculo (abordagem analítica) ou graficamente através da construção da inclinação das geratrizes (abordagem gráfica). A segunda base pode agora ser representada a partir da primeira por translação dos pontos que foram utilizados para a representar ou repetido o procedimento seguido para a primeira base.

Se começarmos por representar um paralelepípedo envolvente do cilindro como se de uma axonometria oblíqua se tratasse, procedimentos idênticos se impõem. Será necessário utilizar

uma afinidade para obter pontos das elipses das bases, incluindo os pontos de tangência das geratrizes de contorno aparente. Mais uma vez, para melhor guiar o traçado das curvas, pode adicionar-se a determinação das retas tangentes às elipses nos pontos previamente determinados (figura 0.10.b).

Desenho digital de precisão

Vamos agora considerar o caso do desenho digital de precisão. A utilização de um ADMG2D no estudo da geometria introduz diferenças de procedimentos face aos procedimentos analógicos tradicionais. Em parte, isto deve-se à ampliação das possibilidades e representação dadas pelas funcionalidades do ambiente digital. Neste sentido, a sua adoção deve ser precedida de um exame às suas funcionalidades do ponto de vista geométrico. Isto não se trata de uma mera descrição de comandos e “truques”. Deve antes ser a procura do entendimento dos fundamentos geométricos das funcionalidades disponibilizadas. É uma espécie de engenharia inversa da aplicação. Quer isto dizer que, através da experimentação das funcionalidades disponibilizadas deve conduzir-se um processo de entendimento qualitativo geral dos fundamentos geométricos que estão na sua base levando a reconhecer o seu potencial, mas também as suas limitações.

Há que distinguir duas situações. Primeiro aquela em que os procedimentos tendem a estender o que atrás foi dito em relação ao desenho analógico de precisão, isto é, no essencial os procedimentos são transferidos da folha de papel bidimensional analógica para a “folha” bidimensional digital. E de seguida, aquela em que os desenhos são o resultado da aplicação de um automatismo a partir de modelos tridimensionais. Para já, vamos considerar apenas o primeiro caso.

No primeiro caso, assumindo a projeção ortogonal, o desenho do cilindro desenvolve-se de modo idêntico com uma exceção. É que agora não é necessário determinar pontos adicionais na elipse para garantir a precisão e rigor do seu desenho, nem tampouco é necessário determinar retas tangentes à elipse para guiar o seu traçado (figura 0.11.a). É que, a generalidade dos ADMG2D dispõe de funções, vulgarmente designadas por comandos, que permitem o desenho de uma elipse dando os extremos dos eixos principais como dados. É como se agora dispuséssemos de um “compasso” especial que permite desenhar elipses. O mesmo sucede para outras figuras geométricas, e isso é uma vantagem dos ambientes digitais. A consequência prática imediata é uma rapidez maior na execução do desenho e a necessidade de executar menos traçados. Este facto leva por vezes à opinião, em nosso ver injustificada e errada, que a adoção de ADMG2D empobrece ou substitui a geometria. Na verdade, é exatamente o contrário que se passa como vamos agora ver.

Vamos supor que se começa pelo desenho do paralelepípedo envolvente como se de uma axonometria oblíqua se tratasse (figura 0.11.b). Podemos agora ser tentados a pensar que temos de reproduzir exatamente o mesmo caminho que realizámos no caso do desenho analógico de precisão, isto porque, a generalidade dos ADMG2D não dispõe de uma função que permita, de modo imediato, representar uma elipse inscrita num paralelogramo. Porém, se o fizermos, estamos a utilizar o ADMG2D de forma errada porque o resultado obtido não será o que maior precisão pode apresentar nem o que aumenta a eficiência do processo de representação.

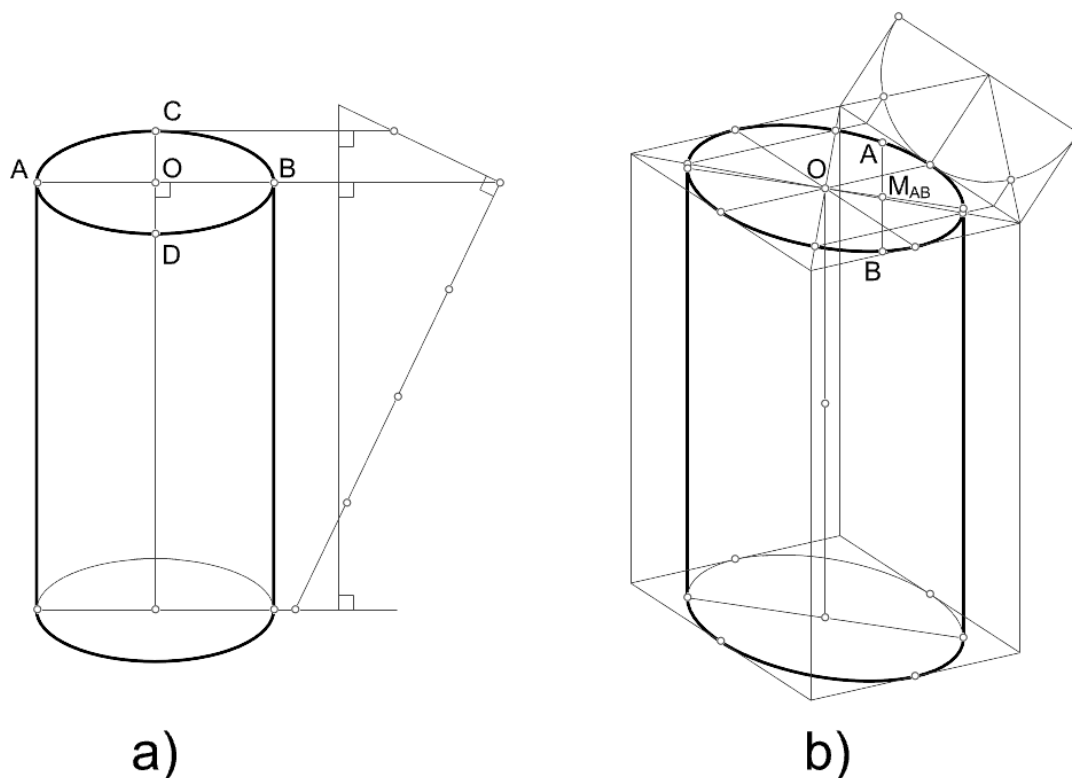


Fig. 0.11. Cilindro representado através de desenho digital de precisão: a) projeção ortogonal, b) projeção oblíqua.

Ora vejamos, a definição de uma elipse inscrita num paralelogramo equivale à sua definição através de diâmetros conjugados, admitindo que esta é tangente aos lados do paralelogramo nos seus pontos médios. Assim, neste caso, podemos utilizar a afinidade não para determinar pontos quaisquer da elipse, mas sim para determinar os extremos dos eixos principais, após o que podemos utilizar a função disponibilizada para o desenho da elipse com toda a precisão e rigor. Ou então, se o ADMG2D permitir exercer controlo idêntico através do traçado da curva apoiado em pontos da mesma, também podemos proceder desse modo. No caso da figura 0.11.b foi o que fizemos. E em relação ao contorno aparente, uma vez que em termos práticos consiste no desenho de duas retas, de direção conhecida, tangentes à elipse, podemos utilizar a afinidade para obter os pontos de tangência ou obter os pontos de tangência através da interseção da elipse com o seu diâmetro que fica definido pelo centro e o ponto médio de uma corda com a direção (conhecida) das tangentes. Isto é possível porque, no ADMG2D, o desenho da elipse, e consequentemente a sua interseção com uma reta, é tão preciso e rigoroso como, por exemplo, a interseção de duas retas. Por fim, o desenho da segunda base não é mais que uma cópia da primeira sem a necessidade de novos traçados.

Adicionalmente as aplicações digitais de desenho geométrico geralmente dispõem de ambientes que permitem automatizar e personalizar procedimentos através de programação, o que nos possibilita adicionar novas funções que não existiam inicialmente na aplicação. Esta possibilidade implica o estreitar a ligação entre as abordagens gráfica e analítica à geometria. Por exemplo, no caso dado anteriormente, é possível automatizar a sequência de passos que permitem a determinação dos eixos principais da elipse e guardar esse algoritmo como uma nova função à disponibilidade do utilizador.

Com este exemplo colocámos em evidência que, embora a utilização do ADMG2D tenha tornado desnecessários alguns procedimentos utilizados no desenho analógico, também implicou a invocação de outros conhecimentos e procedimentos, porventura mais exigentes e

avançados, que não eram oportunos, do ponto de vista prático, no contexto do desenho analógico de precisão. Assim, na verdade, a utilização do ADMG2D colocou a geometria em evidência em vez de a omitir, isto é, exige maior conhecimento de geometria e não o contrário. Reconhecemos que, pelas facilidades introduzidas pelos ADMG2D, o desenho de precisão analógico tende a cair em desuso. Mas reconhecemos igualmente que, pelo menos do ponto de vista formativo, é importante fazer uma passagem, ainda que breve, por aquela forma de representar, pois só se consegue reconhecer a vantagem e a diferença de um processo face a outro, se ambos forem conhecidos e tiverem sido experimentados.

Uma reflexão antecipada

No caso da extração automática das representações bidimensionais a partir de modelos tridimensionais produzidos em ADMG3D, a reflexão é outra. Podemos considerar a modelação tridimensional como uma forma de desenho. De facto, e conceptualmente, ao modelar tridimensionalmente está a agir-se diretamente no espaço tridimensional, embora esse espaço seja apenas percecionado, em geral, através de uma janela (o monitor do computador) que cria uma barreira física entre o desenhador/modelador e o espaço do modelo. É claro que não existe espaço físico nenhum para lá do ecrã. Mas a ilusão está lá (figura 0.12).

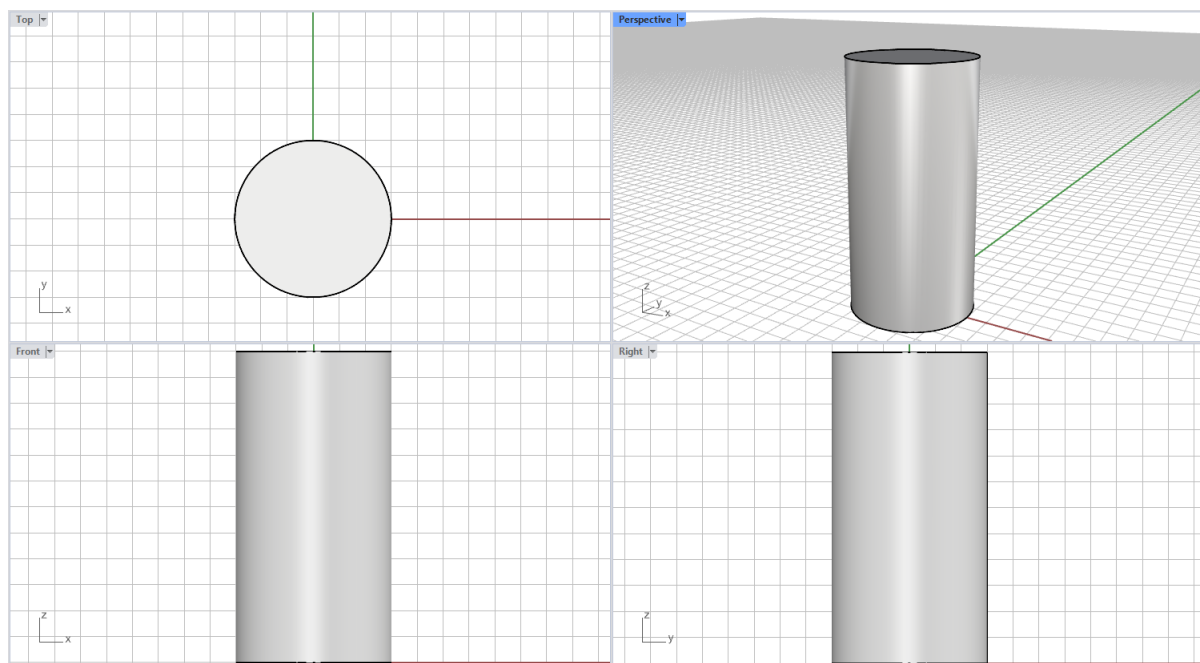


Fig. 0.12. Cilindro modelado tridimensionalmente num ADMG3D e visualizado através de um esquema tipo de vistas.

Essa ilusão pode até ser ampliada dramaticamente através de dispositivos de realidade virtual criando a percepção de se estar verdadeiramente embebido num espaço tridimensional, porém, mais uma vez, o utilizador está apenas a olhar para dois ecrãs para lá dos quais, tal como no computador, não há espaço físico nenhum, apenas um espaço percebido e percecionado.

O operador fornece certos dados de entrada que são processados sendo devolvida uma imagem no ecrã e escolhe os pontos de vista sobre o espaço do modelo e os modos de renderização da visualização. Como a interação é dinâmica têm-se verdadeiramente a ilusão de estar a contemplar e manipular diretamente um espaço tridimensional. E como os dados de entrada para representar as formas são tendencialmente inerentes à forma espacial e não a projeções específicas, temos então um cenário significativamente diferente daquele que é o

contexto operativo tradicional da representação, inerentemente bidimensional, da geometria descritiva. Isto é, a representação na geometria descritiva não é dissociável da construção das projeções ao passo que no ADMG3D a dissociação existe. Mas há um elo de ligação que persiste pelo facto da realização de muitas operações de modelação poder começar pela consideração de elementos de projeções como ponto de partida. Por outro lado, os resultados de saída, do ponto de vista do controlo das projeções, também envolvem o domínio de um conjunto de parâmetros que são comuns à geometria descritiva. Por exemplo se for pretendida uma dada vista normalizada, é necessário invocar princípios e conhecimentos geométricos que são do domínio da geometria descritiva. No entanto, a maior parte das aplicações digitais de modelação tridimensional tem implementados esquemas tipo que resolvem a articulação entre diferentes tipos de vistas do modelo.

Um aspeto significativo é a automatização da extração da representação bidimensional a partir da representação tridimensional. Não nos referimos aqui à representação que ocorre dinamicamente no ecrã do computador, como o que temos na figura 0.12, mas sim à possibilidade de extração de uma representação inerentemente bidimensional editável a partir do modelo tridimensional. Embora essa seja uma dimensão que não nos ocupará, é relevante considerar que a edição geométrica desses desenhos está no domínio estrito da geometria descritiva.

Por fim, importa notar que nas áreas de conhecimento que utilizam a representação gráfica como recurso, como é o caso do design, da arquitetura e de algumas engenharias, é normal iterar entre os vários tipos de suporte de representação. Por exemplo é possível desenhar à mão levantada sobre uma impressão do desenho produzido em ambiente digital de modo a que, por sua vez, se informe um processo de modelação 3D do qual se extrai automaticamente um desenho. As possibilidades são inúmeras e o que importa salientar é a importância de se praticar as várias formas de desenho e representação, reconhecendo a vocação e o contexto de aplicabilidade de cada uma, explorando transversalidades entre as mesmas, de modo a tornarmos mais eficiente o nosso processo de trabalho.

No início desta secção referimo-nos ao desenho manual à mão levantada. No seguimento deste texto iremos considerar sobretudo o desenho de precisão em ADMG, fazendo apenas referências pontuais ao desenho à mão levantada. Mas é oportuno deixar aqui um elogio a esta forma de desenhar, que deve ser praticada, e acrescentar algumas reflexões. O desenho à mão levantada assume expressões muito variadas e, ainda que informado por princípios geométricos, é mais subjetivo. O desenvolvimento de um desenho de pendor geométrico à mão levantada é tanto melhor sucedido quanto mais o seu praticante itere entre o desenho de observação e o desenho geométrico. Neste sentido, é uma síntese entre estas duas abordagens. E essa síntese dificilmente se explica; é preciso cada um fazê-la. É da prática continuada do desenho de observação e da observação do desenho geométrico de precisão, que resulta a proficuidade naquela forma de desenhar que todos os arquitetos, designers e engenheiros deveriam dominar. Nesse sentido, o desenho manual, com a sua flexibilidade e capacidade de acomodar a incerteza, mas também com a sua capacidade de aportar rigor, que é em primeiro lugar mental, é uma forma superior de desenho que deve ser encorajada, a par do desenho de precisão, em ambiente de ensino e aprendizagem em geometria descritiva.

Quando se desenha isso faz-se mobilizando mais ou menos um conjunto de traçados que auxiliam a produção do desenho, em função da habilidade de quem o produz. Não há uma regra rígida. Pensemos por exemplo no desenho em perspetiva. Atualmente é muito pouco

provável que, num atelier de arquitetura, alguém tenha de produzir uma perspectiva rigorosa de um projeto através de desenho 2D. O mais provável é essa perspectiva resultar de um modelo 3D. Porém, o desenho em perspectiva à mão levantada continuará a ser necessário para desenvolver o projeto e tomar decisões sobre o mesmo. Neste, os pontos de fuga podem ser explícitos ou implícitos, bem como as convergências das linhas. De forma semelhante, em geometria, também os desenhos à mão levantada podem ser os que permitem discorrer, de forma mais descomprometida, sobre as várias hipóteses de abordagem à resolução de um dado problema. Caberá ao estudante fazer a síntese e caberá ao professor balancear as práticas no sentido de evitar anacronismos e no sentido de tirar o máximo partido de todas as possibilidades que são oferecidas pelo espectro de meios de que hoje dispomos.

Num certo sentido, o que pretendemos com este trabalho é contribuir para informar a componente geométrica do desenho e para colocar em evidência que, em geometria descritiva o processo não termina quando o desenho está concluído. Nessa fase ainda vamos apenas a meio. A outra metade do caminho consiste na utilização do desenho como suporte do discurso sobre o objeto representado.

PARTE I – Geometria Descritiva

Introdução

A geometria descritiva ocupa-se da descrição das figuras que habitam o espaço tridimensional, em geral euclidiano, através de projeções em planos, o que é feito, tradicionalmente, através de desenhos bidimensionais, de forma mais ou menos orgânica ou estruturados através de sistemas de representação. Para isso confluem essencialmente métodos gráficos, mas não se descarta a utilização de resultados de processos analíticos, o que efetivamente acontece nos casos em que utilizam conceitos provenientes, por exemplo, da álgebra ou da geometria diferencial. Atualmente a operacionalização prática desse tipo de resultados e noções, como é o caso do conceito de curvatura de uma linha ou superfície, fica facilitado pela utilização de ambientes digitais de modelação geométrica (ADMG). Esses ambientes constituem um interface que permite, entre a visão e o raciocínio, o estudo e aplicação prática de propriedades das figuras que de outro modo seriam graficamente impraticáveis ou que, pelo menos, seriam de aplicação prática difícil e trabalhosa. Em linha com o que é defendido por alguns autores, entendemos que os ADMG2D e ADMG3D são uma extensão natural do ambiente operativo da geometria descritiva. Com efeito, e num certo sentido, os ADMG2D pouco mais fazem que digitalizar a tradicional folha de desenho.

Começaremos por seguir os procedimentos tradicionais da geometria descritiva na resolução dos vários tipos de problemas através da construção bidimensional das projeções. Entendemos que a abordagem 2D é formativa e permitirá tratar um conjunto de questões básicas que embasam os alicerces do entendimento visual da geometria no espaço. Nesse processo passaremos por vários exemplos práticos. Nos casos em que os exemplos se traduzirem em situações que visam uma prática por parte do leitor, os nossos desenhos vêm acompanhados pela declaração de uma escala e unidade de trabalho. O objetivo é que o leitor possa reproduzir esses desenhos na sua prática. Nos casos em que as situações são tratadas com maior generalidade, prescindimos dessa indicação. E aqui o objetivo é deixar a liberdade ao leitor para poder decidir pela disposição dos dados na folha de desenho (analógica ou digital) da forma que entender. No final desta secção, faremos uma incursão por um ADMG3D naquilo que designamos por **sistema integrado de representação**. Aí chegados, fazemos uma pequena seleção de questões já abordadas previamente e voltamos a tratá-las procurando colocar em evidência o que há de comum, e o que há de diverso, entre os modos de operar próprios das projeções e da modelação geométrica tridimensional.

Notações

Neste texto consideram-se as seguintes convenções.

Pontos são notados por letras maiúsculas: ***P, Q, R, ...***

Retas são notadas por letras minúsculas: ***r, s, t, ...***

Quando a projeção de uma reta se reduz a um ponto, é notada entre parêntesis curvos: ***(a), (b), (p), ...***

No caso de se pretender, nota-se a reta identificando dois pontos: ***AB, BC, AD, ...***

Curvas são notadas por letras minúsculas entre parêntesis retos: ***[a], [b], [c], ...***

Planos são notados por letras minúsculas do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Quando a projeção de um plano se reduz a uma reta, é notada entre parêntesis curvos: $(\alpha), (\beta), (\gamma), \dots$

Pode notar-se a definição do plano através de pontos e/ou retas: $ABC, PQR, ab, ac, aP, Qb, \dots$

Superfícies são notadas por letras minúsculas do alfabeto grego entre parêntesis retos: $[\alpha], [\beta], [\gamma], \dots$

Sólidos são notados por letras maiúsculas do alfabeto grego entre parêntesis retos ou não: $[\Gamma], [\Theta], \Sigma, \dots$

Um segmento de reta fica representado pela notação dos seus pontos entre parêntesis retos: $[AB], [BC], \dots$

O comprimento de um segmento de reta fica notado por um traço sobre a designação dos pontos que o definem: $\overline{AB}, \overline{PQ}, \dots$

O símbolo $\equiv$ é utilizado para notar dois elementos coincidentes: $A \equiv B, r \equiv s, \alpha \equiv \beta, \dots$

Também se pode utilizar o símbolo $\equiv$ para notar que um figura é definida em termos de outras: $\alpha \equiv ABC, m \equiv PQ, \dots$

Um índice numérico associado a um ponto ou reta pode notar uma projeção, se estiver após a designação do elemento; ou notar uma cota, se estiver antes da designação do elemento: ${}_4P, A_2, {}_5m, n_1, \dots$

O índice R associado a um ponto ou reta nota que se trata de um elemento rebatido ou rodado: $A_R, P_R, m_R, \dots$

Outras convenções não expressas aqui poderão ser introduzidas no texto.

Quando o contexto de representação não levanta ambiguidades, a notação pode ser simplificada ou até mesmo omissa.

Noções essenciais de Geometria no Espaço I

Normalmente a geometria descritiva não é a porta de entrada para o estudo da geometria. Idealmente, alguém que aborda a geometria descritiva pela primeira vez, já teve contacto com tópicos de geometria no âmbito da sua formação em matemática, e já teve contacto com o tópico das construções geométricas no âmbito da sua formação em educação visual. É certo que essas bases podem não ser muito sólidas. Por isso é sempre importante uma abordagem pedagógica que permita seguir em frente quem possa ter maiores lacunas de base.

Mas a geometria descritiva é seguramente para muitos a porta de entrada para o estudo da geometria no espaço. E nesse sentido é preciso estabelecer um conjunto de conceitos iniciais que possibilitem uma abordagem mais informada e sólida. A exposição que vamos fazer não é extensiva. As nossas afirmações seguintes poderiam ser enquadradas, do ponto de vista formal, em noções comuns, axiomas, postulados, definições, teoremas. Mas não estão organizadas num sentido lógico matemático. Privilegiamos uma abordagem, porventura menos estruturada, que apela ao sentido da visão e que deverá ajudar a reforçar a intuição do leitor.

Sabemos que a procura de definições acaba por cair sempre num círculo vicioso de palavras, isto é, tautológico, como nos recordou Coxeter (1974). Por isso os geómetras que estudam a geometria pura preferem deixar alguns termos primitivos (como ponto e reta) e certas relações indefinidas (estar contido em ou passar por, que na verdade se podem resumir à relação de incidência) e desenvolver, a partir daí, as propriedades da geometria. Pese embora a impossibilidade matemática de definir estes elementos base da geometria, quando nos referimos a estes elementos, damos definições que assentam nas palavras da linguagem corrente e naquilo que é a experiência sensível de ponto e reta. Mesmo sem possibilidade de definição matemática, todos sabemos do que se trata quando falamos em ponto e reta. Mais tarde poderemos fazer o exercício de chamar ponto à reta e reta ao ponto e perceber que, do ponto de vista lógico nada muda (lembremo-nos do princípio da dualidade da geometria projetiva). Mas isso fica para outra oportunidade...

Por agora.

Ponto e reta são conceitos indefinidos. Um ponto **pode incidir ou não numa reta** e uma **reta pode incidir ou não num ponto**. Incidir é uma relação que significa “estar em” ou “passar por”.

A **linha** é uma entidade geométrica, com apenas uma dimensão, gerada pelo movimento do ponto.

Dado um ponto e uma reta não incidentes, o **plano** por eles definido é o conjunto de todas as retas que se podem apoiar no ponto e na reta dados, bem como todas aquelas que se podem apoiar e em pontos e retas assim geradas. O plano é uma superfície contínua com uma infinidade de pontos e retas.

Dado um plano e um ponto não incidentes, o **espaço** por eles definido é o conjunto de todos os planos que se podem apoiar no ponto dado e em retas do plano dado, bem como todos aqueles que se podem apoiar e em pontos e retas de planos assim gerados. O espaço é uma figura contínua com uma infinidade de pontos, retas e planos.

No **espaço euclidiano** as retas e os planos podem estender-se tanto quanto se queira.

Duas retas incidentes no mesmo plano se, por mais que se estenderem, nunca se intersektarem, diz-se que são **retas paralelas**. Cada linha reta tem uma **direção**. Direção é a propriedade comum a uma família de retas paralelas entre si.

De dois planos que, por mais que se estenderem, nunca se intersektarem, diz-se que são **planos paralelos**.

Cada plano tem uma **orientação**. Orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si. Uma orientação contém uma infinidade de direções.

No **espaço afim**, cada reta é estendida com um ponto situado no infinito (**ponto impróprio**) e cada plano é estendido com uma reta situada no infinito (**reta imprópria**). O conjunto destes pontos e retas é o **plano do infinito** ou **plano impróprio**. No espaço afim, o plano impróprio considera-se fixado.

A cada direção corresponde um ponto impróprio, daí dizer-se que **retas paralelas se intersektam no infinito**. A cada orientação corresponde uma reta imprópria, daí dizer-se que **planos paralelos se intersektam no infinito**.

Uma **curva** é uma entidade geométrica gerada pelo movimento contínuo do ponto no espaço não percorrendo uma linha reta.

Retas e curvas são **linhas**.

A linha que se desloca no espaço, deformando-se ou não, para gerar uma superfície, designa-se **geratriz**.

Uma curva pode incidir num plano ou não. No primeiro caso diz-se que é **curva plana**, no segundo caso diz-se que é **curva torsa**.

As linhas têm apenas uma **dimensão** e os pontos nenhuma.

Uma **superfície** é uma entidade, gerada pelo movimento contínuo de uma linha.

Um plano é uma superfície. Uma superfície que não é plana é uma **superfície curva**.

As superfícies têm duas dimensões.

Pode entender-se a geração de uma superfície considerando o movimento de uma linha geratriz apoiando-se sobre outra linha ou sobre uma superfície.

Designa-se por **diretriz** a linha ou superfície sobre a qual se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a diretriz é uma superfície, então diz-se que a superfície gerada tem um **núcleo**.

Uma **superfície regradada** é gerada pelo movimento contínuo de uma linha reta.

Uma superfície regradada pode ser condicionada a incidir em três diretrizes.

No **espaço projetivo**, o plano do infinito não é fixo, e pode ser qualquer plano do espaço, pelo que todas as retas e todos os planos se interseçam. Neste espaço não existem retas paralelas nem planos paralelos, e os planos não são orientáveis, isto é, um plano não divide o espaço.

Nas definições que se seguem considera-se o **espaço euclidiano**. Este espaço implica uma forma de medição de distâncias e de ângulos.

Dois pontos contidos numa reta dada definem um **segmento de reta** contido na reta dada. O **comprimento** do segmento de reta é a distância entre os dois pontos e corresponde à sua comparação com a extensão do comprimento de um **segmento padrão**. Qualquer comprimento pode ser escolhido arbitrariamente como unidade de medida. Porém, é comum utilizarem-se unidades padrão como o **centímetro**, o **metro** ou a **polegada**.

Uma linha contínua composta pela união de vários segmentos de reta designa-se por **linha poligonal**.

Um ponto contido numa reta divide-a em duas partes. Cada uma dessas partes designa-se **semirreta** e o ponto é a **origem** de ambas.

Designa-se por **ângulo** a figura plana delimitada por duas semirretas com a mesma origem. As semirretas são os **lados do ângulo**, a origem comum das semirretas é **vértice** do ângulo.

Duas semirretas permitem definir dois ângulos, ditos **replementares**, um **côncavo** e outro **convexo**. A união de dois ângulos complementares forma um ângulo **giro**. Define-se como **grau**, um ângulo correspondente a 1/360 de um ângulo giro. O grau pode ser utilizado como padrão para medir ângulos. O complementar de um ângulo giro é o **ângulo nulo**.

Meio ângulo giro é um ângulo **raso**. Dois ângulos que somados perfazem um ângulo raso dizem-se **suplementares**. Um ângulo concavo está compreendido entre um ângulo raso e um ângulo giro.

Meio ângulo raso é um ângulo **reto**. Dois ângulos que somados perfazem um ângulo reto dizem-se **complementares**. Um ângulo entre um ângulo reto e um ângulo raso é um **ângulo obtuso**. E menor que um ângulo reto é um **ângulo agudo**. Um ângulo convexo está entre um ângulo raso e um ângulo nulo.

Designa-se por **faixa** ou **tira** a região plana delimitada por duas retas paralelas.

Uma reta divide um plano que a contém em duas partes, cada uma das quais designada **semiplano**.

Uma **região plana finita** pode ser delimitada por linhas de diferentes naturezas.

No plano, em geral, uma **reta tangente a uma curva num ponto**, é uma reta que, passando por esse ponto, deixa toda a curva do mesmo lado da reta na **vizinhança** do ponto. Há exceções que, por agora, não serão abordadas.

No plano, uma **reta normal a uma curva num ponto** é a reta perpendicular (ver adiante a noção de perpendicularidade entre retas) à tangente nesse ponto.

Num plano, os pontos a distância constante de um ponto fixo definem uma linha designada **circunferência** e o ponto fixo é o seu **centro**. O conjunto dos pontos do plano delimitados pela circunferência, e de que o seu centro faz parte, definem um **círculo**. Qualquer segmento de reta, definido pelo centro do círculo e por um ponto da circunferência que o delimita, é um **raio** do círculo.

Dois pontos distintos de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é um **arco de circunferência**.

Uma **reta tangente a uma curva torsa num ponto** é tangente à circunferência definida pelo ponto dado, e pelos pontos imediatamente anterior e seguinte a este (esta noção será aprofundada na PARTE II). Esta circunferência recebe a designação de **círculo osculador**.

Uma **reta normal a uma curva torsa num ponto** é a perpendicular à tangente contida no plano do círculo osculador.

Dois pontos distintos de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é um **arco de circunferência**.

Uma região do círculo delimitada por dois raios e um arco de circunferência é um **setor circular**.

Uma região do círculo delimitada por uma corda e um arco de circunferência é um **segmento circular**.

Se a corda for um diâmetro a região é um **semicírculo**.

Uma região plana delimitada por segmentos de reta é um **polígono**.

Triângulo, quadrilátero, pentágono, hexágono, são exemplos de polígonos. Deve distinguir-se o polígono da figura que o delimita, o **n-látero** (embora também se possa utilizar a palavra polígono para nos referirmos a figura composta apenas pelos lados).

Há vários tipos de triângulos como o **equilátero**, o **isósceles**, o **escaleno**, o **acutângulo**, o **retângulo** e o **obtusângulo**.

Há vários tipos de quadrilátero como o **quadrado**, o **retângulo**, o **paralelogramo**, o **losango**, o **papagaio** e o **trapézio**.

Se uma linha roda em torno de uma reta, é gerada uma **superfície de revolução** e a reta é o seu **eixo**.

Uma **reta tangente a uma superfície num ponto**, é uma reta tangente a uma curva da superfície nesse ponto.

O **plano tangente a uma superfície num ponto** fica definido por duas retas tangentes à superfície no ponto.

Uma **reta normal a uma superfície num ponto** é a perpendicular ao plano tangente nesse ponto (ver adiante a noção de perpendicularidade entre reta e plano).

A **ordem** de uma superfície pode ser interpretada como o número máximo de pontos em que uma reta a pode interseccionar. Por exemplo, o plano é uma superfície de ordem um e a superfície esférica é uma superfície de ordem dois.

Quando uma superfície regradada se pode desenrolar para um plano, sem causar rasgos ou pregas, diz-se que é uma **superfície planificável**.

Uma **superfície não regradada** não admite a geração por linhas retas.

Uma superfície regradada, de diretriz curva, em que todas as geratrizes passam num único ponto, designa-se **superfície cônica** e o ponto é o seu **vértice**.

Uma superfície regradada, de diretriz poligonal, em que todas as geratrizes passam num único ponto, designa-se **superfície piramidal** e o ponto é o seu **vértice**.

Uma superfície regradada, de diretriz curva, em que todas as geratrizes são paralelas entre si designa-se **superfície cilíndrica**.

Uma superfície regradada, de diretriz poligonal, em que todas as geratrizes são paralelas entre si designa-se **superfície prismática**.

Um plano divide o espaço em duas partes. Cada uma dessas partes designa-se **semiespaço**.

Designa-se por **diedro** a região do espaço delimitada por dois semiplanos com a mesma reta de origem, que se designa por **aresta do diedro**. Os semiplanos são as **faces do diedro**.

Designa-se por **camada** ou **muro** a região do espaço delimitada por dois planos paralelos.

Designa-se por **triedro** a região do espaço delimitada por três ângulos com lados comuns dois a dois.

No espaço, os pontos a distância constante de um ponto fixo definem uma **superfície esférica** e o ponto fixo é o seu centro. A superfície esférica é uma superfície curva.

Uma **região de uma superfície** é uma porção finita da superfície delimitada por linhas nela contidas.

Um **sólido** é qualquer volume finito delimitado por regiões de superfícies.

A **esfera** é o sólido delimitado por uma superfície esférica.

O **cone** é o sólido delimitado por uma região plana, a **base**, e por uma região cônica.

O **cilindro** é o sólido delimitado por duas regiões planas paralelas, as **bases**, e por uma região cilíndrica.

A **pirâmide** é o sólido delimitado por uma região plana, a **base**, e por uma superfície piramidal.

O **tetraedro** é uma pirâmide com quatro faces triangulares.

O **prisma** é o sólido delimitado por duas regiões planas paralelas, as **bases**, e por uma região prismática.

Um **paralelepípedo** é um sólido delimitado por seis faces paralelas entre si duas a duas. Se as faces forem retangulares, diz-se **paralelepípedo retângulo**, se forem quadradas, o sólido é um **cubo**.

Um sólido delimitado exclusivamente por regiões planas é um **poliedro** e essas regiões são as suas **faces**. Tetraedro, Cubo, prisma, paralelepípedo, pirâmide, são exemplos de poliedros.

Pontos, linhas, planos, polígonos, superfícies, sólidos e espaço são **figuras geométricas**. Qualquer combinação de figuras geométricas pode originar uma nova figura geométrica.

Entende-se por **operação geométrica** qualquer operação que permita obter uma ou mais figuras a partir de uma ou mais figuras prévias. Por exemplo, a obtenção de um ponto pela interseção de uma reta com um plano, a separação de um segmento de reta em dois, a determinação da linha comum a duas superfícies, a determinação da **região de secção** entre um plano e um sólido, a **truncagem** de um sólido, e a planificação de uma superfície são operações geométricas.

Duas superfícies com uma linha em comum **interseitam-se** ou são **concordantes**. Se duas superfícies são concordantes, os planos tangentes a ambas são coincidentes em todos os pontos da linha comum. Por exemplo, uma superfície esférica e uma superfície cônica de revolução cujo eixo passa pelo centro da superfície esférica podem não se interseitar, podem interseitar-se segundo duas circunferências (mesmo que uma se reduza a um ponto), ou podem ser concordantes segundo uma circunferência.

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se interseitam (ou são concordantes) segundo uma linha $[i]$, existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que interseita as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo linhas $[a]$ e $[b]$, respetivamente, que se interseitam entre si num ponto I pertencente à linha $[i]$.

Entende-se por **transformação geométrica** qualquer operação estabeleça uma correspondência ponto a ponto entre duas figuras geométricas, em que cada elemento de cada uma delas apenas corresponda a um, e apenas um, elemento da outra.

Vejamos quatro exemplos de transformações geométricas comuns.

Se uma figura for copiada e deslocada um determinado comprimento segundo uma dada direção, diz-se que uma figura é a transformada da outra por **translação**.

Se uma figura for copiada e for deslocada de modo a que todos os seus pontos, mantendo as distâncias entre si constantes, descrevam trajetórias circulares com centros contidos numa

reta fixa, diz-se que uma figura é transformada da outra por **rotação** em torno de um **eixo**, a reta fixa.

Se uma figura for transformada de modo a dar origem a uma figura espelhada, diz-se que a figura é transformada da outra por **reflexão** segundo um plano.

Se os pontos correspondentes entre duas figuras transformadas são todos coincidentes entre si, a transformação operada designa-se **identidade**.

Note-se que as transformações são aplicadas a todo o espaço (plano ou tridimensional) embora às vezes, por comodidade, apenas nos referimos a figuras específicas, por exemplo um quadrado ou um triângulo.

Nas noções que se seguem consideramos o **espaço afim**.

Ao conjunto de retas de um plano que passam num ponto dá-se o nome de **feixe de retas** e o ponto é o **centro do feixe**. Um feixe de retas paralelas tem centro no infinito.

Ao conjunto de planos que passam numa reta dá-se o nome de **feixe de planos** e essa reta é o **eixo do feixe**. Um feixe de planos paralelos tem eixo no infinito.

Ao conjunto de retas que passam num ponto dá-se o nome de **estela de retas** e o ponto é o **centro da estela de retas**. Uma estela de retas paralelas tem o centro no infinito.

Ao conjunto de planos que passam num ponto dá-se o nome de **estela de planos** e o ponto é o **centro da estela de planos**. Uma estela de planos paralelos a uma direção de retas tem o centro no infinito.

Por um ponto próprio ou impróprio é possível conduzir uma estela de retas tangentes ou rasantes à superfície de um corpo sólido. Os pontos de contacto da estela com a superfície do sólido formam, em geral, uma linha. Se esse ponto for considerado um ponto de vista, essa separa o corpo da sua envolvente e designa-se por **contorno aparente**.

Se o ponto for considerado uma fonte de luz, o contorno aparente corresponderá à uma linha que separa, na superfície do sólido, a região iluminada e a região em sombra e designa-se **separatriz luz/sombra**.

Daqui em diante será sempre considerado um **espaço euclidiano** com a sua **métrica habitual** em que os elementos impróprios têm sempre um carácter excecional e aos quais a métrica euclidiana não se aplica. Ou, dito de outra forma, um **espaço afim com a métrica euclidiana**.

Há uma correspondência entre as operações da Geometria Descritiva e as operações da Geometria Analítica.

Analiticamente, dir-se-ia que se pode estabelecer uma correspondência entre os pontos da reta euclidiana e os números reais, isto é, o conjunto $\mathbf{R}$. Neste sentido diz-se a geometria no plano é a geometria de $\mathbf{R}^2$, e que geometria no espaço é a geometria de $\mathbf{R}^3$, isto é, em que os pontos ficam definidos por dois números reais, ou três números reais, respetivamente as suas coordenadas planas ou tridimensionais. Assim, as operações geométricas podem fazer-se corresponder às operações que se podem realizar com os números reais. Por exemplo, na geometria analítica a medição de distâncias, ângulos, áreas e volumes é feita através de funções específicas. Por exemplo a distância entre dois pontos é medida através do teorema de Pitágoras, os ângulos são medidos em termos de produto interno de vetores, as áreas e os

volumes podem ser estabelecidos em função de determinantes, a **ordem** de uma **curva algébrica** ou de uma **superfície algébrica** é entendida como o grau máximo do **polinómio** que a define, etc.

Atividade proposta:

Esta subsecção obriga a um esforço de visualização elevado. Como prática sugere-se a elaboração de esboços à mão levantada que ilustrem cada uma das afirmações, descrições e definições feitas. Note que o esboço deve traduzir-se num exercício de compreensão e reforço do raciocínio visual.

Relações de incidência entre as figuras geométricas

Dois pontos podem ser **coincidentes** ou **distintos**.

Duas retas podem ser **coincidentes** ou **distintas**. Para que duas retas sejam coincidentes têm de ter em comum, pelo menos, dois pontos distintos. E se tiverem dois pontos distintos em comum, têm todos os pontos em comum.

Dois planos podem ser **coincidentes** ou **distintos**. Para que dois planos sejam coincidentes têm de ter em comum, pelo menos, três pontos distintos que não podem estar contidos na mesma reta. E se tiverem três pontos distintos em comum nestas condições, têm todos os pontos em comum.

Por vezes, para efeitos práticos considera-se que pontos, retas e planos coincidentes são, na verdade, apenas um ponto, uma reta e um plano.

De um ponto pertencente a uma reta diz-se que é **incidente** com a reta.

O termo “incidir” é utilizado como sinónimo de “conter”, “estar contido”, “pertencer” ou “passar por”.

De uma reta passante por um ponto diz-se que é **incidente no ponto**. De um ponto exterior a uma reta diz-se que não é **incidente com a reta**. De uma reta não passante por um ponto diz-se que não é incidente no ponto. O mesmo se diz de um ponto, ou reta, contido ou não contido num plano, ou de um plano que passa, ou não passa, por um ponto ou reta.

Duas retas contidas num plano interseitam-se sempre, isto é, incidem num ponto próprio ou impróprio. De duas retas que incidem num ponto impróprio diz-se que são paralelas.

Designemos por **propriamente concorrentes** as retas que se interseitam num ponto próprio.

Dados dois pontos distintos há sempre uma reta que passa, isto é, incide nos dois pontos. Se os dois pontos forem impróprios, a reta é imprópria. Se um dos pontos for impróprio, a reta fica definida pelo ponto próprio e por uma direção.

Uma reta e um plano que não a contém interseitam-se sempre, isto é, incidem num ponto próprio ou impróprio. De uma reta e um plano que incidem num ponto impróprio diz-se que são paralelos.

Dois planos distintos interseitam-se sempre, isto é, **incidem numa reta** própria ou imprópria. De dois planos que incidem na reta imprópria diz-se que são paralelos.

Dadas **duas retas incidentes num ponto**, existe sempre **um plano que contém**, isto é, incide nas duas retas.

Três planos distintos, não incidentes todos na mesma reta, **incidem sempre num ponto** próprio ou impróprio. Dado um ponto qualquer é sempre possível fazer incidir nesse ponto três planos distintos. Se o ponto é impróprio, os planos têm uma direção em comum.

Dados **três pontos não colineares** (que não pertencem à mesma reta), há sempre **um plano que incide nos três pontos**. Dado um plano qualquer é sempre possível fazer incidir no plano três pontos não colineares. Se os três pontos forem impróprios, o plano é impróprio, isto é, é o plano do infinito. Se forem dois impróprios, o plano fica definido pelo ponto próprio e por duas direções. Se um ponto for impróprio, o plano fica definido pelos pontos próprios e por uma direção.

Atividade proposta:

À semelhança da subsecção anterior, como prática, sugere-se a elaboração de esboços que permitam ilustrar as relações de incidência descritas.

Interações métricas entre pontos, retas e planos

Atividade proposta:

Em relação a esta subsecção, antecipa-se já a sugestão do exercício prático de ilustrar, através de esboços, as descrições feitas. Esse exercício ajudará o leitor a reforçar o seu pensamento visual. Se for necessário, construa modelos físicos que ajudem a compreender as situações descritas.

Da posição relativa entre retas

Duas retas concorrentes dividem o plano em que incidem em quatro ângulos iguais dois a dois, também designados por **verticalmente opostos**.

Dos quatro ângulos, cada um dos menores é um **ângulo agudo** e cada um dos maiores é um **ângulo obtuso**. A soma de um dos ângulos agudos com um dos ângulos obtusos é um **ângulo raso**. E a soma dos quatro ângulos é um **ângulo giro**. Se os quatro ângulos forem iguais entre si, são **retos** e as duas retas dizem-se **perpendiculares**. Cada par de ângulos verticalmente opostos é dividido em partes iguais por uma **reta bissetriz**. As duas retas bissetrizes dos dois pares de ângulos verticalmente opostos são perpendiculares entre si.

Qualquer ângulo pode ser usado como padrão para a medição de ângulos, porém é comum utilizar unidades padrão como o **grau**. Um ângulo reto tem 90 graus de **amplitude**. Assim, grau é uma unidade possível para medir ângulos. Outras unidades podem ser o **grado** (a centésima parte do ângulo reto) ou o **radiano** (ângulo subtendido por um arco de comprimento unitário contido numa circunferência de raio unitário).

Costuma designar-se por **ângulo entre duas retas** o valor da amplitude dos ângulos menores que elas formam entre si.

Se duas retas não se intersectarem, podem ser **paralelas entre si** ou **enviesadas entre si**.

Por um ponto ***P***, não contido numa reta ***s***, é possível conduzir uma reta ***m*** que lhe é paralela e uma reta ***p*** que lhe é perpendicular. As duas retas, ***m*** e ***p***, são perpendiculares entre si. O ponto

de interseção da reta p com a reta s , ponto I , é designado por **pé da perpendicular** da reta p na reta s . A distância do ponto P à reta s é igual à distância da reta s à reta m , e é dada pelo comprimento do segmento de reta $[PI]$.

Duas retas enviesadas entre si podem ser **obíquas entre si** ou **ortogonais entre si**. Duas retas são ortogonais entre si se forem paralelas a duas retas perpendiculares entre si. A inclinação relativa entre duas retas enviesadas é dada por um dos menores ângulos formados por duas retas concorrentes que lhes sejam paralelas.

A distância entre duas retas paralelas, s e t , fica definida pelo comprimento de um segmento de reta $[IJ]$ contido numa qualquer reta p que lhes é perpendicular e definido pelos pontos I e J , pés da reta p nas retas s e t .

A distância entre duas retas enviesadas, a e b , é dada pelo comprimento do segmento de reta $[IJ]$ contido na reta p simultaneamente perpendicular às duas retas e definido pelos pés da reta p , pontos I e J , nas duas retas a e b .

Da posição relativa entre retas e planos

Uma reta pode incidir num plano, ser paralela a um plano ou intersestar um plano.

Uma **reta paralela a um plano** é uma reta que, não estando contida no plano, é paralela a uma família de retas do plano.

Uma reta que intersesta um plano pode ser **obliqua ao plano** ou **perpendicular ao plano**. Se a reta for perpendicular a um plano, é perpendicular a todas as retas do plano que a intersestem, e ortogonal a todas as retas do plano que não a intersestem. Se a reta for obliqua ao plano, é perpendicular apenas a uma reta do plano e ortogonal a todas as outras que lhe são paralelas.

Por um ponto P , não contido num plano α , é possível conduzir uma reta p , perpendicular ao plano α e um plano β paralelo ao plano α . Todas as retas do plano β são paralelas ao plano α . O ponto I de interseção da reta p com o plano α , é designado por **pé da perpendicular** da reta p no plano α . A distância do ponto P dado ao plano α é o comprimento do segmento de reta $[PI]$.

Por uma reta p , perpendicular a um plano α , é possível conduzir uma infinidade de planos perpendiculares ao plano α . Estes definem um feixe de planos incidentes na reta p . Os planos do feixe intersestam o plano α segundo um feixe de retas com centro no pé da reta p no plano α . As retas do feixe são todas perpendiculares à reta p . E todas as retas do plano que não fazem parte do feixe são ortogonais à reta p .

Uma reta s obliqua a um plano α é perpendicular a apenas uma reta r do plano α . As retas s e r intersestam-se num ponto I . E a reta r é perpendicular a outra reta, t , do plano α , passante pelo ponto I . A inclinação da reta s relativamente ao plano α é dada por um dos menores ângulos formados pelas retas s e t . As retas s e t definem um plano perpendicular ao plano α porque são ambas perpendiculares à reta r .

Da posição relativa entre planos

Dois planos distintos são **paralelos** quando há pelo menos duas direções de retas comuns entre eles. Se houver duas, todas são comuns.

Dois planos distintos são **concorrentes** quando apenas há uma direção de retas comum a ambos.

A distância entre dois planos paralelos α e β fica definida pelo comprimento de um segmento de reta $[IJ]$ contido numa qualquer reta p que lhes é simultaneamente perpendicular e definido pelos pés dessa reta p , pontos I e J , nos dois planos α e β , respetivamente.

Dois planos concorrentes dividem o espaço em quatro diedros, geralmente iguais dois a dois. A reta comum aos dois planos é a **aresta dos diedros**. Destes quatro diedros, há dois **planos bissetores** perpendiculares entre si que dividem cada um dos diedros em dois diedros iguais entre si.

Se os quatro diedros forem iguais entre si, os dois planos dizem-se **perpendiculares** e cada um dos diedros designa-se por **quadrante**.

Dois planos são perpendiculares quando existe em cada um delas uma família de retas perpendiculares ao outro. Ou, dito de outro modo, em cada uma das orientações existe uma direção ortogonal à outra.

Um plano perpendicular à aresta do diedro é perpendicular aos planos das faces do diedro, e intersecta as faces do diedro segundo duas semirretas. O ângulo por estas definido designa-se **retilíneo** do diedro e mede a inclinação relativa das suas faces e, por conseguinte, a inclinação entre os dois planos.

Três planos incidentes num ponto, e não numa reta, dividem o espaço em oito triedros, geralmente iguais dois a dois. Se os três planos forem perpendiculares entre si, os oito triedros são iguais e designam-se por **octantes**.

Um triedro é designado por **triedro retângulo**, **triedro birretângulo** ou **triedro trirretângulo** consoante uma, duas ou três faces sejam ângulos retos. Um octante é obviamente um triedro trirretângulo.

Um triedro pode ser definido pelas suas três faces, pelos seus três diedros, ou por uma combinação destes em número de três.

Noção informal de transformação geométrica

Uma transformação geométrica é uma operação pela qual se fazem corresponder os elementos (pontos, linhas, planos) de uma figura geométrica aos elementos (pontos, linhas, planos) de outra figura geométrica de tal modo que a um elemento de uma figura corresponde apenas um elemento da outra. Para já vamos considerar que a correspondência é entre elementos do mesmo tipo. As transformações geométricas podem ser bidimensionais, tridimensionais ou de dimensões superiores. Porém apenas nos interessam as bidimensionais e tridimensionais. Numa transformação geométrica há relações que permanecem invariantes e são estes invariantes que permitem caracterizar as transformações geométricas.

Por exemplo, as **isometrias**, no plano ou no espaço, são o grupo de transformações que preservam as distâncias entre pontos, e consequentemente os ângulos, as áreas e os volumes (no caso do espaço). As isometrias incluem a translação, a rotação, a reflexão, e qualquer combinação destas transformações. Não se deve confundir esta designação com a designação do subsistema axonométrico homónimo.

A **dilatação** mantém os ângulos e as proporções das figuras mas altera-lhes a dimensão.

A **afinidade** preserva o paralelismo, mantém as proporções entre as dimensões que dizem respeito a uma direção, mas não preserva os ângulos.

As **transformações projetivas** preservam a razão cruzada, ou razão de razões, entre comprimentos situados numa reta, ou de ângulos entre retas de um feixe num plano, ou ainda de planos de um feixe no espaço. Não preservam o paralelismo e podem ser de dois tipos: i) as que preservam a linearidade, ou seja, transformam linhas retas em linhas retas, designando-se **colineações**, e, ii) as que fazem corresponder pontos a retas ou pontos a planos, e vice-versa, designando-se **correlações**.

As **transformações topológicas** apenas preservam a incidência e a **vizinhança**. Por exemplo, numa transformação topológica, as retas poderão corresponder curvas e vice-versa.

Atividade proposta:

Ainda que de forma empírica, como prática, a partir de uma figura base, elabore esboços que traduzam os vários tipos de transformação aqui referidos. Se for necessário elabore uma pequena pesquisa para esclarecer os vários tipos transformação.

Organização do espaço

Um sistema de coordenadas é qualquer sistema de referência que possa ser utilizado para posicionar figuras, seja num plano ou no espaço. Por exemplo, dois pontos de um plano com uma dada distância entre si podem servir como base para um sistema de coordenadas bidimensional. A reta que passa pelos dois pontos divide o plano em duas regiões, uma de coordenadas positivas e outra de coordenadas negativas. Depois, os pontos podem ser posicionados no plano em função das distâncias aos dois pontos de referência e escolhendo a região plana a que pertencem. Gaspard Monge (1797) expande esta ideia indicando que, no espaço, um ponto poderia ficar referido pelas distâncias a três pontos fixos. Depois faz o exercício de considerar três retas de referência. Por fim, conclui que é mais prático utilizar três planos de referência que, por conveniência, devem ser perpendiculares entre si. Depois acaba por simplificar o sistema considerando apenas dois planos de referência, ficando o terceiro implícito.

Com efeito, nós iremos considerar sistemas de referência que se baseiam em três planos perpendiculares entre si. E iremos mencionar os sistemas de **coordenadas retangulares**, **coordenadas polares**, e **coordenadas cilíndricas**.

Sistemas de coordenadas

No espaço euclidiano pode definir-se um sistema de referência através de três retas perpendiculares entre si designadas por **eixos coordenados** e notadas por x , y e z . O ponto de interseção das três retas designa-se por **origem** e nota-se com a letra **O**. Cada uma das retas pode associar-se à **reta real R** com a coordenada **O** na origem.

Cada par de eixos coordenados define um **plano coordenado** que é dividido em quatro ângulos retos designados quadrantes. Os três planos coordenados dividem o espaço em oito octantes. Cada par de planos coordenados contém um eixo em comum. Esta estrutura é a base para os sistemas de coordenadas retangulares, cilíndricas e polares. Para distinguir entre pontos de diferentes octantes, as coordenadas podem ser positivas ou negativas. Isto corresponde a considerar um critério para estabelecer distâncias positivas e negativas bem como estabelecer

ângulos positivos e negativos. A convenção que utilizaremos é a que se designa por **referencial de mão direita** (figura 1.1a). Na Geometria Descritiva considera-se o sistema de coordenadas de mão direita.

Também se considera a regra da mão direita para a definição dos ângulos positivos. Por exemplo, considerando os sentidos positivos dos eixos, uma rotação em torno do eixo x considera-se positiva se for do eixo y positivo para o eixo z positivo. Generalizando, uma rotação em torno de um eixo e qualquer é positiva se for no sentido anti-horário (sentido direto) quando observada no sentido negativo do eixo de rotação (figura 1.2).

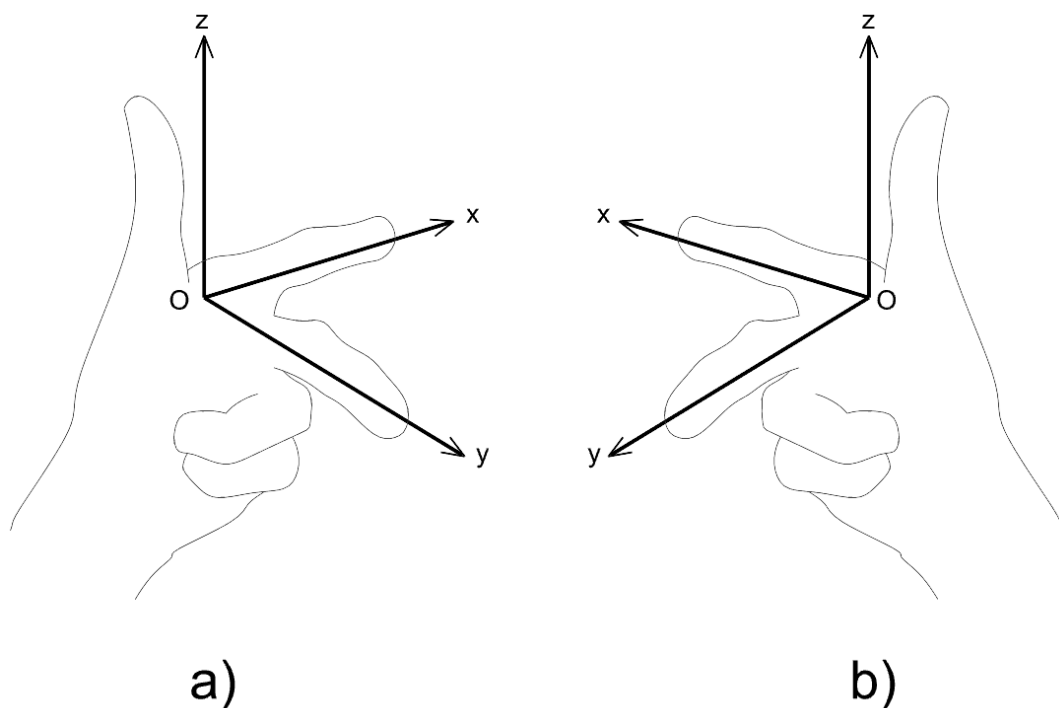


Fig. 1.1. Referencial cartesiano retangular: a) de mão esquerda, b) de mão direita.

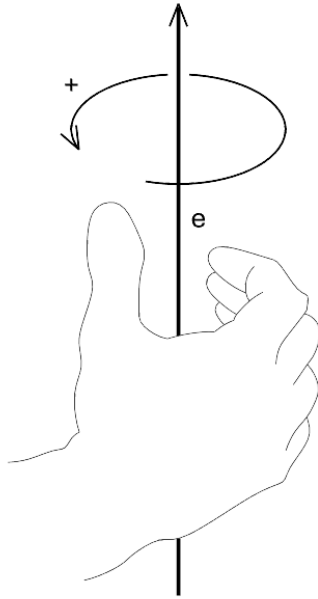


Fig. 1.2. Rotação positiva em torno de um eixo e cujo sentido positivo “aponta para o observador”.

Um sistema com três planos coordenados perpendiculares entre si divide o espaço em oito octantes conforme se mostra na figura 1.3. Se considerarmos a organização do espaço resultante dos planos coordenados xy (plano horizontal) e zx (plano frontal), podemos considerar a divisão em quatro quadrantes: 1º quadrante (1º e 2º octantes), 2º quadrante (3º e 4º octantes), 3º quadrante (7º e 8º octantes) e 4º quadrante (5º e 6º octantes). Note que esta organização não é a que se costuma evidenciar em manuais de geometria descritiva em que os octantes são considerados como a divisão dos quatro quadrantes por dois planos bissetores passantes no eixo x (na prática são diedros com 45º de amplitude).

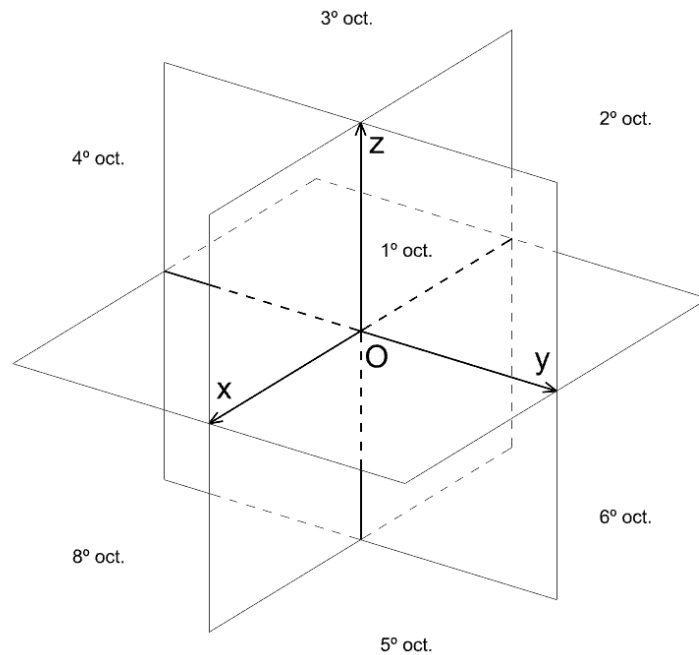


Fig. 1.3. Divisão do espaço em octantes (a referência ao 7º octante é omissa no desenho).

Um sistema de coordenadas não tem de ser absoluto. É possível definir vários sistemas de coordenadas em função de determinadas conveniências. Por exemplo, se tivermos um objeto constituído por várias partes, pode associar-se a cada uma das partes um sistema de coordenadas específico. A relação entre os vários sistemas de coordenadas pode ficar definida através de transformações de translação e rotação.

Sistema de coordenadas retangulares

Um ponto **P** pode ser referenciado através das distâncias aos planos coordenados; a distância ao plano **zy** designa-se coordenada **X**, **abscissa** ou **largura**; a distância ao plano **zx** designa-se coordenada **Y**, **afastamento** ou **profundidade**; e a distância ao plano **xy** designa-se coordenada **Z**, **cota** ou **altura**. Este sistema de referência corresponde a um **sistema de coordenadas cartesiano** e aquelas distâncias designam-se por **coordenadas retangulares**.

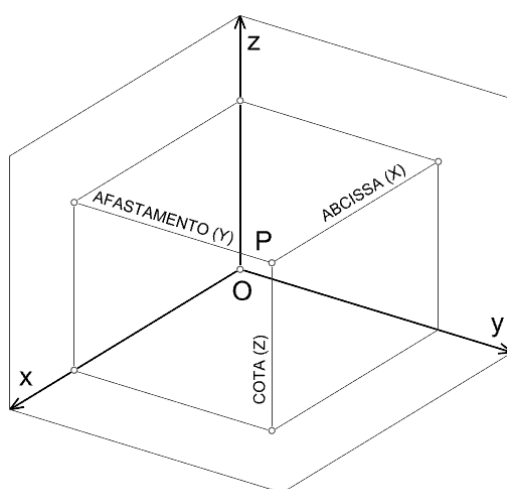


Fig. 1.4. Sistema de coordenadas retangulares.

Um ponto **P** fica definido pelas suas coordenadas **(X, Y, Z)**.

Em termos sintéticos, a distância entre dois pontos **A** e **B** é o comprimento do segmento de reta que os tem por extremos, e é dada pela sua comparação com o comprimento de um segmento padrão. Analiticamente, a distância Δ entre dois pontos **A** e **B** de coordenadas, **(X_AY_AZ_A)** e **(X_BY_BZ_B)**, respetivamente, é dada pela expressão

$$\Delta = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2}.$$

Sistema de coordenadas cilíndricas

Um ponto **P** pode ser referenciado através de duas distâncias e um ângulo; trata-se da distância **D** do ponto ao eixo coordenado **z**, do ângulo **ρ** que esta distância forma com o eixo coordenado **x**, e da distância do ponto ao plano coordenado **xy**, isto é a coordenada **Z**, ou cota.

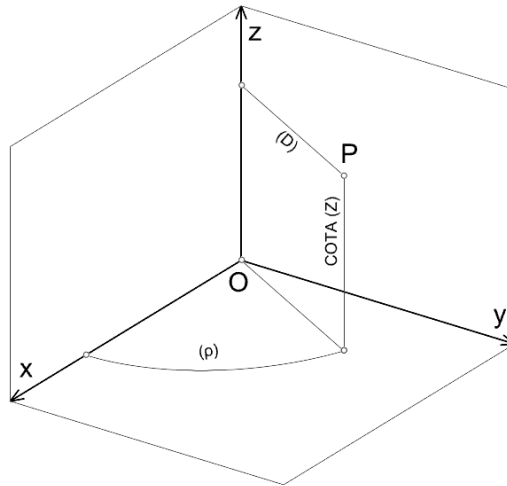


Fig. 1.5. Sistema de coordenadas cilíndricas.

Um ponto **P** fica definido pelas suas coordenadas **(D, ρ, Z)**. Note-se que a conversão destas coordenadas em coordenadas retangulares é simples de obter:

$$X = D\cos(\rho)$$

$$Y = D\sin(\rho)$$

Sistema de coordenadas polares

Um ponto **P** pode ser referenciado através de uma distância e dois ângulos; trata-se da distância **R** do ponto à origem, do ângulo **θ** da projeção horizontal desta distância relativamente ao eixo coordenado **x**, e do ângulo **φ** entre a distância **R** e a sua projeção horizontal.

Um ponto **P** fica definido pelas suas coordenadas **(R, θ, φ)**. Note-se que a conversão destas coordenadas em coordenadas retangulares é simples de obter:

$$X = R\cos(\varphi)\cos(\theta)$$

$$Y = R\cos(\varphi)\sin(\theta)$$

$$Z = R\sin(\varphi)$$

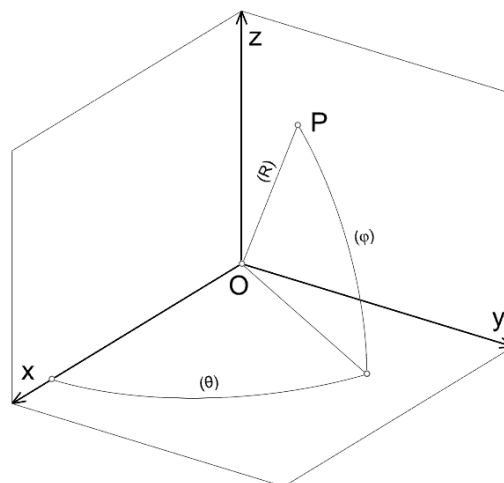


Fig. 1.6. Sistema de coordenadas esféricas.

Taxonomias

Definido o sistema de coordenadas retangulares de referência, é agora oportuno introduzir algum vocabulário que nos permita mencionar os elementos geométricos reta e plano atribuindo-lhes designações que nos permitam, rapidamente, entender a sua relação com os planos coordenados. Vimos anteriormente que uma reta pode ser paralela, oblíqua ou perpendicular a um plano. E vimos também que dois planos podem ser, entre si, paralelos, oblíquos ou perpendiculares. Como num sistema cartesiano temos mais que um plano de referência, estas designações não são suficientes para que se perceba a relação de uma reta ou plano com todos os planos coordenados em simultâneo. Introduz-se assim a noção de alfabeto do ponto, da reta e do plano.

Atividade proposta:

Em relação aos alfabetos que a seguir se referem sugere-se a seguinte prática ao leitor. Construa um modelo físico dos planos coordenados, por exemplo em cartolina ou noutro material qualquer. De seguida, com arames e cartolina modele os diferentes tipos de retas e os diferentes tipos de planos. Nestes modelos, um ponto pode ser materializado como uma pequena bola de plasticina enfiada num arame. Este exercício permitir-lhe-á ganhar familiaridade com os diferentes tipos de retas e planos e reforçar o universo percetivo relativo a estes elementos geométricos, a partir do qual se constroem as abstrações que vierem a ser necessárias.

O alfabeto do ponto

O alfabeto do ponto reduz-se às posições tipo que um ponto pode ter no referencial cartesiano tridimensional de acordo com as suas coordenadas. Um ponto pode estar num dos oito octantes, num dos três planos coordenados, num dos eixos ou nos três eixos em simultâneo. Cada uma das suas coordenadas pode ser negativa, positiva ou nula. Por exemplo, um ponto com todas as coordenadas positivas está situado no primeiro octante; um ponto com todas as coordenadas negativas está situado no 7º octante; um ponto com abcissa e afastamento positivos e cota negativa está situado no 5º octante; um ponto com abcissa e cota 0, e afastamento negativo, pertence ao semieixo y negativo; e assim por diante.

O alfabeto da reta

Há sete tipos de retas quanto à direção relativa ao referencial cartesiano.

A **reta de topo**, perpendicular ao plano coordenado zx e paralela aos outros dois.

A **reta vertical**, perpendicular ao plano coordenado xy e paralela aos outros dois.

A **reta fronto-horizontal**, perpendicular ao plano coordenado yz e paralela aos outros dois.

A **reta horizontal** ou **de nível**, paralela ao plano coordenado xy e oblíqua aos outros dois.

A **reta frontal**, paralela ao plano coordenado zx e oblíqua aos outros dois.

A **reta de perfil**, paralela ao plano coordenado yz e oblíqua aos outros dois.

A **reta oblíqua**, oblíqua aos três planos coordenados.

Deve observar-se que estas designações podem ser permutáveis. Por exemplo pode dizer-se que uma reta fronto-horizontal é de topo em relação ao plano coordenado **yz**. Ou mais genericamente que uma reta perpendicular a um plano é de topo em relação a esse plano.

O alfabeto do plano

Há sete tipos de planos quanto à orientação relativa ao referencial cartesiano.

O **plano de nível** ou **horizontal**, paralelo ao plano coordenado **xy** e perpendicular aos outros dois.

O **plano de frente** ou **frontal**, paralelo ao plano coordenado **zx** e perpendicular aos outros dois.

O **plano de perfil**, paralelo ao plano coordenado **yz** e perpendicular aos outros dois.

O **plano de topo**, perpendicular ao plano coordenado **zx** e oblíquo aos outros dois.

O **plano vertical**, perpendicular ao plano coordenado **xy** e oblíquo aos outros dois.

O **plano de rampa**, perpendicular ao plano coordenado **yz** e oblíquo aos outros dois.

O **plano oblíquo**, oblíquo aos três planos coordenados.

Mais uma vez, também no caso dos planos, estas designações podem ser permutáveis. Por exemplo pode dizer-se que um plano de rampa é de topo em relação ao plano **yz**. Ou mais genericamente que um plano perpendicular a outro plano é de topo em relação a esse plano.

Noção de projeção e tipos de projeção

A noção de projeção está na base do entendimento dos sistemas de representação e é fulcral na geometria descritiva. É a operação fundamental pela qual se representa numa superfície bidimensional qualquer figura espacial, seja isso feito da forma tradicional construindo as projeções, ou automaticamente através de algoritmos computacionais quando as figuras nos aparecem representadas no ecrã de um computador.

Essencialmente, a **projeção** de um ponto A , numa **superfície de projeção** $[\alpha]$ qualquer, é um ponto A' resultante da interseção entre a superfície $[\alpha]$ e a reta p_A passante pelos pontos A e A' . A reta p_A designa-se por **reta projetante** do ponto A (figura 1.7). Normalmente, em geometria descritiva, a superfície de projeção é plana.

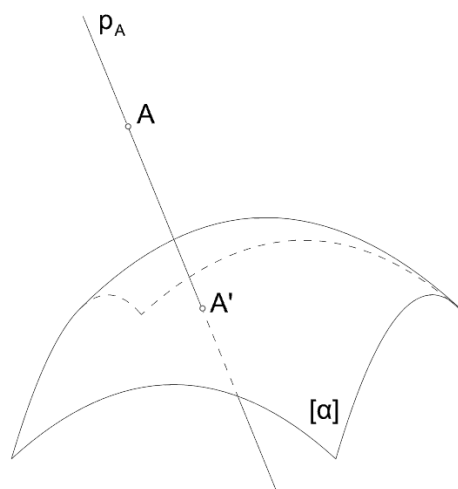


Fig. 1.7. Projeção de um ponto A numa superfície $[\alpha]$.

Embora a geometria no plano possa ser estudada sem fazer considerações à geometria no espaço, uma vez que pretendemos tratar da Geometria Descritiva, interessa-nos muito mais estabelecer nexos e vínculos entre a geometria no plano e a geometria no espaço. Assim, ocupar-nos-emos sobretudo da interpretação das figuras planas, e suas propriedades, como qualquer coisa que pode ser derivado da geometria no espaço, seja por projeção ou por interseção. E inversamente, interessa-nos também o caminho do plano para o espaço. Por exemplo, interessa-nos mais olhar para um paralelogramo como possível projeção de um quadrado do que esgotá-lo na definição de quadrilátero com os lados paralelos dois a dois. Também nos interessa mais olhar para uma elipse como a interseção produzida por um plano numa superfície cónica do que começar com uma definição da mesma estritamente em termos de geometria plana.

O estudo sistemático das operações de projeção e interseção e a derivação de todo o tipo de figuras a partir destas operações é o objeto da geometria projetiva. No âmbito da geometria descritiva interessa-nos um conhecimento mínimo destas operações para tornar operativa a representação das figuras do espaço.

A projeção de uma figura num plano é a projeção de todos os seus pontos no plano, embora, em termos práticos possam ser destacados na representação apenas alguns pontos e linhas mais significativos.

Tal como por um ponto P passa uma reta projetante, p_A , por uma reta a passa um **plano projetante** π_a , e por uma curva $[m]$ passa uma **superfície projetante** $[\pi]_m$. As projeções da reta a e da curva $[m]$ são, respetivamente, as interseções do plano projetante π_a e da superfície projetante $[\pi]_m$ com o plano de projeção.

Há diferentes **tipos de projeção**. Se as retas projetantes forem todas paralelas entre si, a projeção diz-se **paralela** ou **cilíndrica** (figura 1.8.a). Se tiverem em comum um ponto próprio, designado **centro de projeção**, a projeção diz-se **central** ou **cónica** (figura 1.8.b). No caso da projeção paralela, esta pode ainda subdividir-se em **projeção clinogonal** (ou **oblíqua**) e **projeção ortogonal** consoante as retas projetantes sejam oblíquas ou perpendiculares ao plano de projeção.

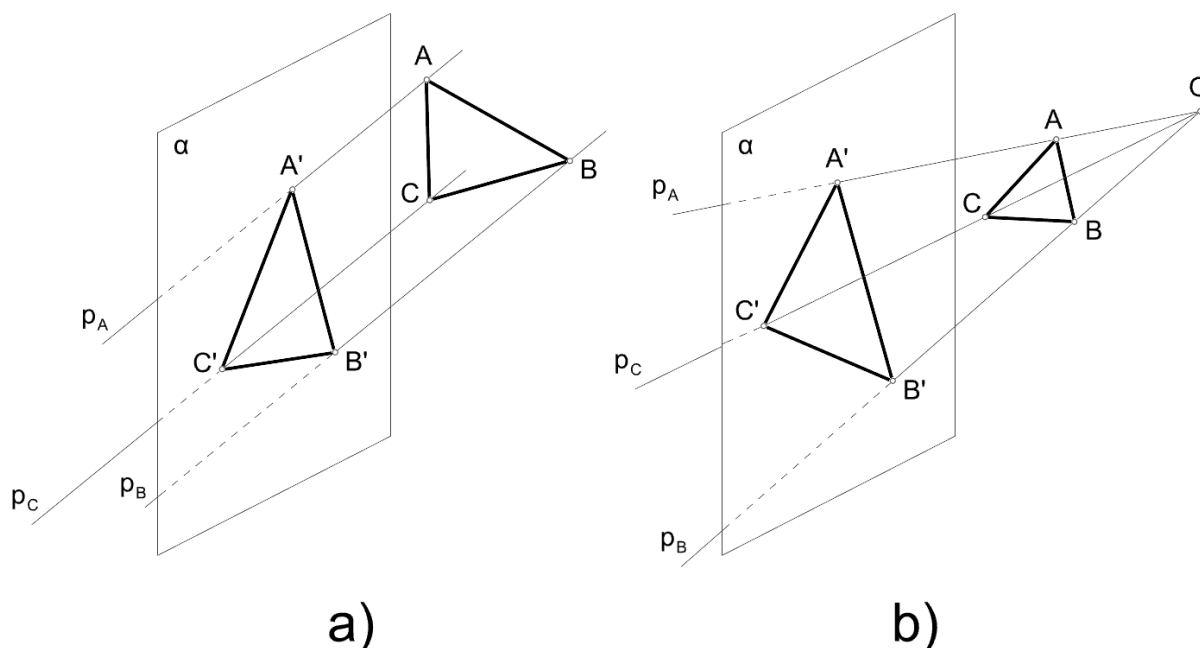


Fig. 1.8. Tipos de projeção: a) projeção paralela ou cilíndrica, b) projeção central ou cónica.

Algumas propriedades das projeções

Nas considerações feitas nesta secção considera-se o Espaço Euclidiano, estendido até ao infinito, e a sua métrica usual aplicável aos pontos próprios.

Projeção de figuras com diferentes orientações

Nos exemplos que se seguem iremos considerar, lado a lado, a projeção cilíndrica (à esquerda nas figuras) e a projeção cónica (à direita nas figuras) de um quadrado. A escolha desta figura justifica-se pelo facto de, sendo simples, permitir tecer algumas considerações sobre paralelismo, perpendicularidade, que serão importantes adiante.

Na figura seguinte, considera-se a projeção de um quadrado $[ABCD]$ contido num plano paralelo ao plano de projeção α . Em ambos os casos a projeção $[A'B'C'D']$ é um novo quadrado com os lados paralelos ao primeiro quadrado. Logo, as projeções preservaram o paralelismo, a perpendicularidade e as proporções das figuras. A projeção cilíndrica também preservou as dimensões, o que não aconteceu no caso da projeção cónica. No exemplo da figura, as dimensões foram ampliadas. É o que acontece se o plano da figura se encontra a uma distância do centro de projeção O inferior à distância deste ponto ao plano de projeção. Se a

distância for superior, as dimensões são reduzidas. E se a distância for igual, as dimensões mantêm-se. Também é fácil de perceber que se o centro de projeções O estiver entre o plano do quadrado $[ABCD]$ e o plano de projeção α , então a projeção $[A'B'C'D']$ fica invertida. Se o plano do quadrado $[ABCD]$ contiver o centro de projeções O , então a projeção estará contida na reta imprópria do plano de projeção α , que é comum ao plano do quadrado $[ABCD]$.

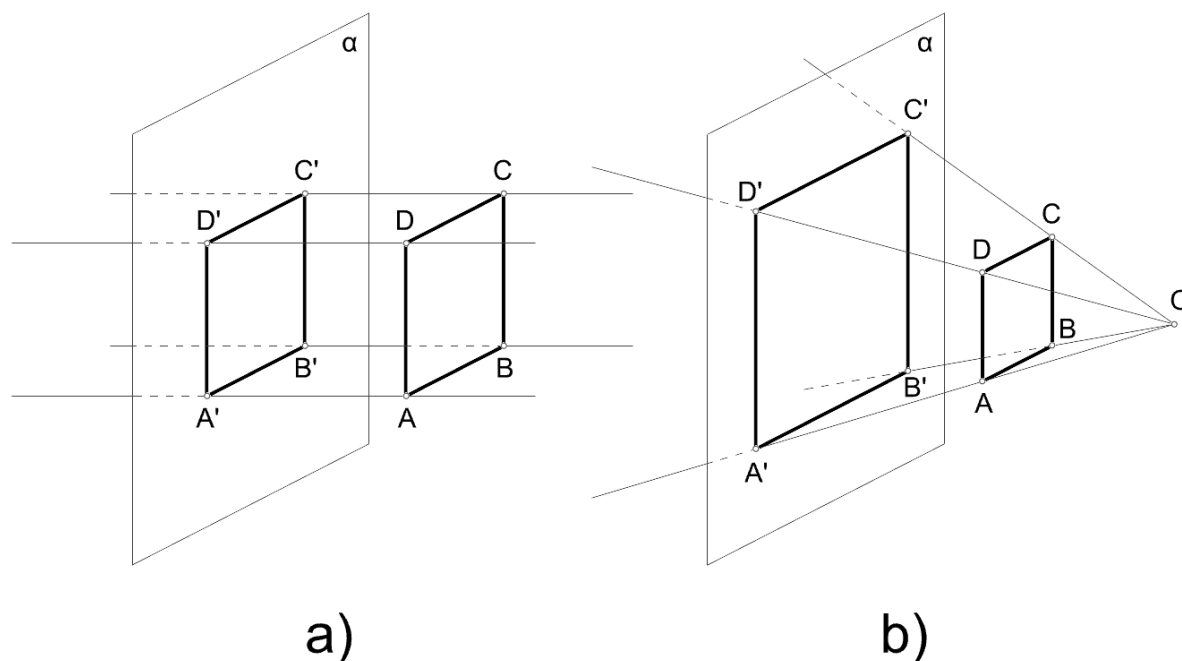


Fig. 1.9. Projeção de um quadrado $[ABCD]$ num plano α sendo paralelo a esse plano de projeção: a) projeção cilíndrica, b) projeção cônica.

No caso seguinte (figura 1.10) iremos considerar que o quadrado $[ABCD]$ tem apenas dois lados paralelos ao plano de projeção α , os lados $[AB]$ e $[CD]$. No caso da projeção cilíndrica, verificamos que esta preserva o paralelismo. Isto é, retas que se sabe serem paralelas têm projeções paralelas. Isto não significa que as projeções dos lados dos quadrados sejam paralelas aos lados correspondentes da figura inicial. Com efeito, isso apenas acontece com as projeções $[A'B']$ e $[C'D']$ que são paralelas aos lados $[AB]$ e $[CD]$ porque estes são paralelos ao plano de projeção α . Se para além de cilíndrica, a projeção for ortogonal, isto é, se as retas projetantes forem perpendiculares ao plano de projeção α , então as projeções dos lados $[AD]$ e $[BC]$, isto é, os segmentos $[A'D']$ e $[B'C']$ são perpendiculares a $[A'B']$ e $[B'C']$. Isto traduz uma propriedade muito importante relativa à projeção ortogonal de retas perpendiculares ou ortogonais entre si que voltaremos a mencionar mais adiante.

No caso da projeção cônica, verificamos que os dois lados $[AB]$ e $[CD]$, que são paralelos ao plano de projeção α , têm projeções, $[A'B']$ e $[C'D']$ que lhes são paralelas e, por isso, também são paralelas entre si. Porém, verifica-se que não são preservados os comprimentos. No caso das projeções dos lados $[AD]$ e $[BC]$, isto é, os segmentos $[A'D']$ e $[B'C']$, verifica-se que convergem num ponto F . Este ponto F é a interseção produzida pela reta i no plano de projeção α . E a reta i , paralela aos lados $[AD]$ e $[BC]$, é a reta de interseção dos dois planos projetantes das retas AD e BC . Isto leva-nos a concluir que, na projeção cônica, retas que não são paralelas ao plano de projeção têm projeções convergentes e que, para cada direção de retas nestas condições, há um, e apenas um, ponto de convergência que fica definido pela interseção da reta projetante, com essa direção, com plano de projeção. Este ponto F também recebe a designação de **ponto de fuga**. Podemos então definir ponto de fuga.

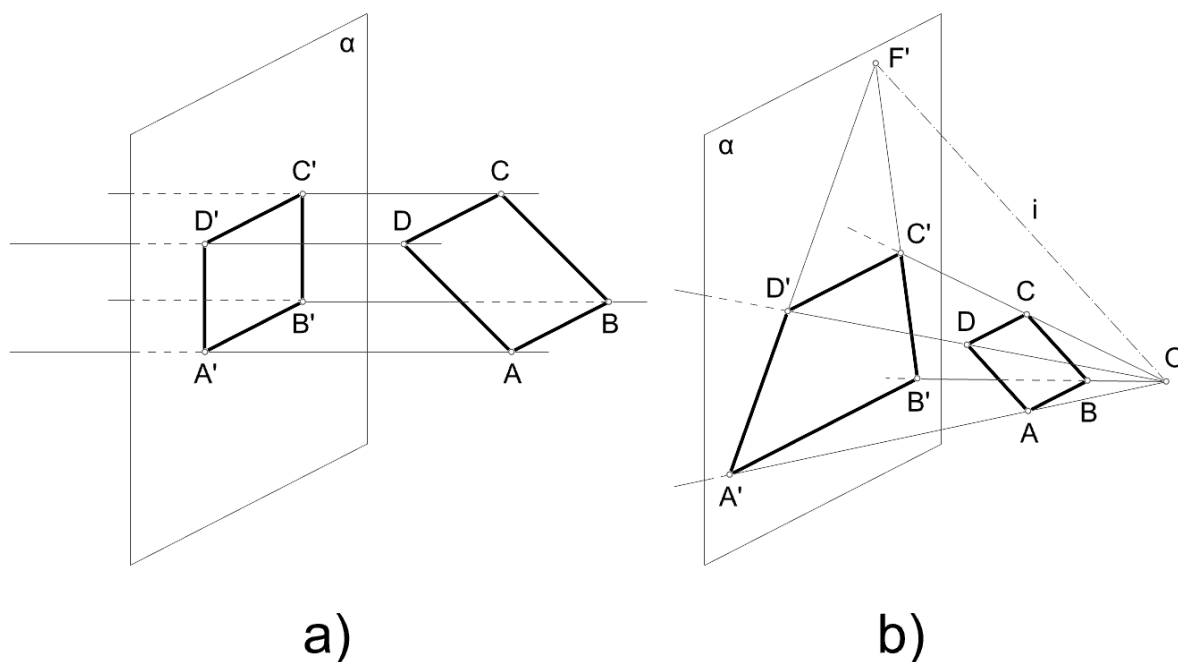


Fig. 1.10. Projeção de um quadrado $[ABCD]$, num plano α , com dois lados paralelos a esse plano de projeção: a) projeção cilíndrica, b) projeção cónica.

Ponto de fuga de uma direção de retas é a interseção produzida no plano de projeção pela reta projetante com essa direção.

Outra definição equivalente é a seguinte.

Ponto de fuga de uma direção de retas é a projeção cónica do ponto impróprio correspondente a essa direção.

Das definições dadas fica claro que retas paralelas ao plano de projeção não têm ponto de fuga ou, dito de outro modo, retas paralelas ao plano de projeção têm ponto de fuga impróprio.

Vamos agora considerar o caso em que o quadrado $[ABCD]$ tem todos os lados oblíquos ao plano de projeção α (figura 1.11). Na projeção cilíndrica, a lados paralelos correspondem projeções igualmente paralelas. Os lados $[AB]$ e $[CD]$ paralelos entre si têm projeções, $[A'B']$ e $[C'D']$, também paralelas entre si, embora as projeções não preservem as direções das figuras que lhes deram origem. E o mesmo acontece para o outro par de lados. Nestas condições, em geral, as dimensões não são preservadas.

No caso da projeção cónica verificamos agora que, para além de não serem preservadas as dimensões nem o paralelismo, as duas direções de lados do quadrado $[ABCD]$ têm pontos de fuga, F'' relativo à direção dos lados $[AB]$ e $[CD]$, e F' relativo à direção dos lados $[AD]$ e $[BC]$.

As retas projetantes i e j , sendo paralelas a lados do quadrado perpendiculares entre si, são obviamente perpendiculares entre si. As retas i e j definem um plano π paralelo ao plano do quadrado $[ABCD]$. A reta f_π resultante da interseção do plano π com o plano de projeção α contém obviamente os pontos de fuga F' e F'' . Esta reta f_π também se pode designar por **linha de fuga**. Podemos então definir linha de fuga.

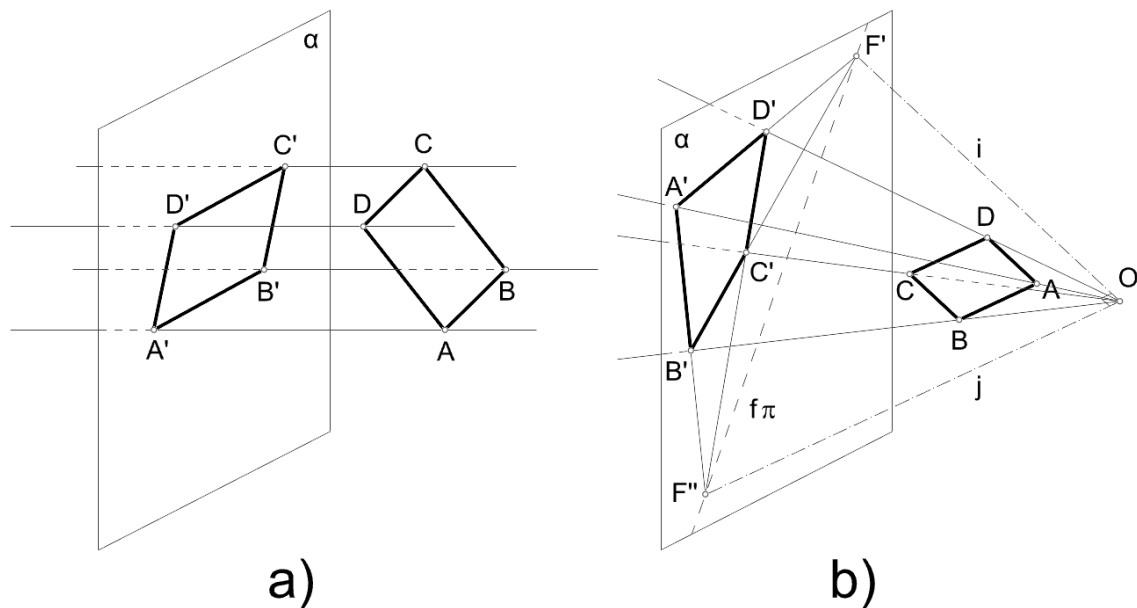


Fig. 1.11. Projeção de um quadrado $[ABCD]$ num plano α com todos os lados oblíquos a esse plano de projeção: a) projeção cilíndrica, b) projeção cônica.

Linha de fuga de uma orientação de planos é a interseção produzida no plano de projeção pelo plano projetante com essa orientação.

Outra definição equivalente é a seguinte.

Linha de fuga de uma orientação de planos é a projeção cônica do reta imprópria correspondente a essa orientação.

Das definições dadas fica claro que planos paralelos ao plano de projeção não têm linha de fuga ou, dito de outro modo, planos paralelos ao plano de projeção têm linha de fuga imprópria.

Os conceitos de ponto de fuga e linha de fuga voltarão a ser abordados com mais detalhe a propósito da perspectiva cônica que será tratada mais adiante.

Há apenas ainda a considerar os casos em que o plano do quadrado $[ABCD]$ é projetante. Nesta situação a projeção cilíndrica reduz-se a um segmento de reta. A projeção cônica pode dar origem a vários resultados, todos eles contidos na reta de interseção do plano do quadrado com o plano de projeção.

Relativamente à projeção de figuras, vamos considerar ainda o caso geral da projeção de uma curva $[c]$ e de uma reta t tangente a essa curva num dos seus pontos, digamos T (figura 1.12). Por efeito da projeção define-se uma superfície projetante passante pela curva e um plano projetante passante pela reta. Estas duas superfícies são tangentes entre si ao longo da reta projetante passante pelo ponto de tangência T . Qualquer plano de projeção que não contenha o centro de projeções (próprio ou impróprio), intersesta este par de superfícies segundo uma reta t' tangente a uma curva $[c]'$ num ponto T' . Isto é, a projeção preserva a tangência.

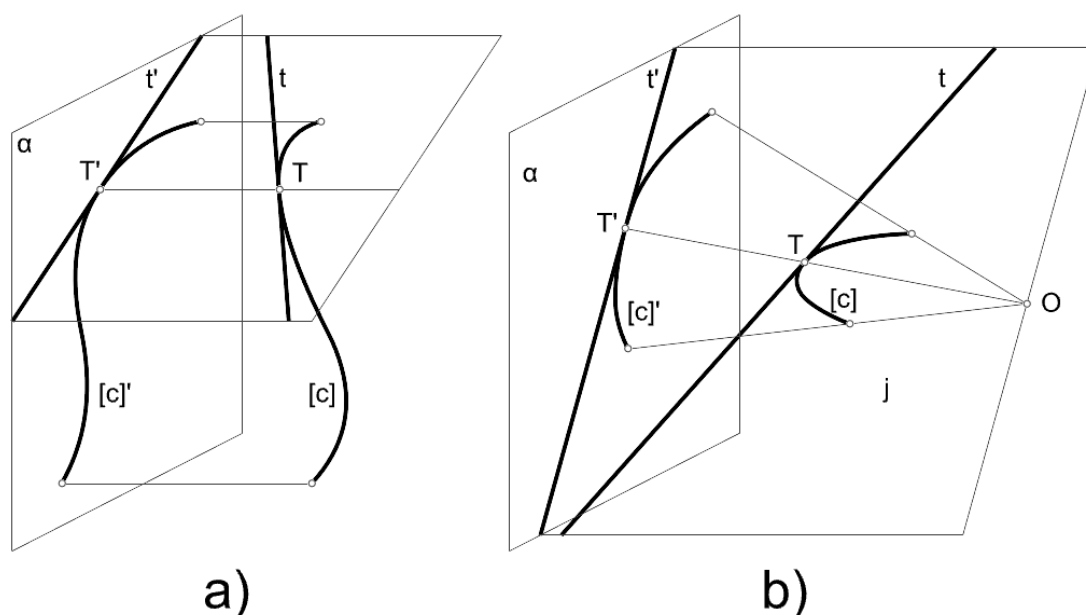


Fig. 1.12. Projeção de uma curva $[C]$, e respetiva tangente t num ponto C , num plano α : a) projeção cilíndrica, b) projeção cónica.

Atividade proposta:

Uma forma prática de visualizar as projeções é através das sombras. Assim, propõe-se o seguinte exercício. Construa um objeto com arames, por exemplo um quadrado, uma curva, ou um cubo, e materialize um plano de projeção através de uma cartolina. Agora ilumine o objeto com a luz do sol e oriente o plano de projeção de modo a obter projeções cilíndricas oblíquas e ortogonais. Como a fonte luminosa está a uma distância muito grande, na prática os raios luminosos podem considerar-se paralelos. Repita o exercício com um foco luminoso a distância finita. Neste caso terá um modelo da projeção cónica. Outra forma de modelar a projeção ortogonal é colocar o plano de projeção na posição horizontal e usar um fio de prumo como projetante.

Razão simples e razão cruzada

Já vimos que tanto a projeção cilíndrica como a projeção cónica preservam as proporções das figuras se estas estiverem contidas em planos paralelos ao plano de projeção. No caso da projeção cilíndrica vimos que as dimensões também são preservadas neste caso. E por fim, podemos também concluir com facilidade que na projeção cilíndrica as proporções de comprimentos de segmentos de reta paralelos entre si são preservadas, o que não se verifica no caso da projeção cónica. A questão que se coloca é se existe algum invariante métrico no caso da projeção cónica. E a resposta é afirmativa.

Convencionemos que, para cada direção de retas há um sentido no qual se tomam as medidas como positivas e outro no qual se tomam as medidas como negativas. E convencionemos que, num plano, em torno de um ponto, há um sentido no qual se tomam os ângulos como positivos e outro no qual se tomam os ângulos como negativos.

Comecemos por considerar o caso da projeção cilíndrica (figura 1.13.a).

Neste caso as proporções, ou razões entre segmentos de reta definidos pelos pontos A , B e C são as mesmas que se podem obter entre segmentos de reta definidos pelos pontos A' , B' e C' . Por exemplo $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$. Cada uma destas razões é uma razão simples de comprimentos e

traduz um invariante da projeção cilíndrica que se pode constatar de forma simples através de semelhanças de triângulos. Em geometria projetiva estas razões notam-se por $(A B C)$ e $(A' B' C')$.

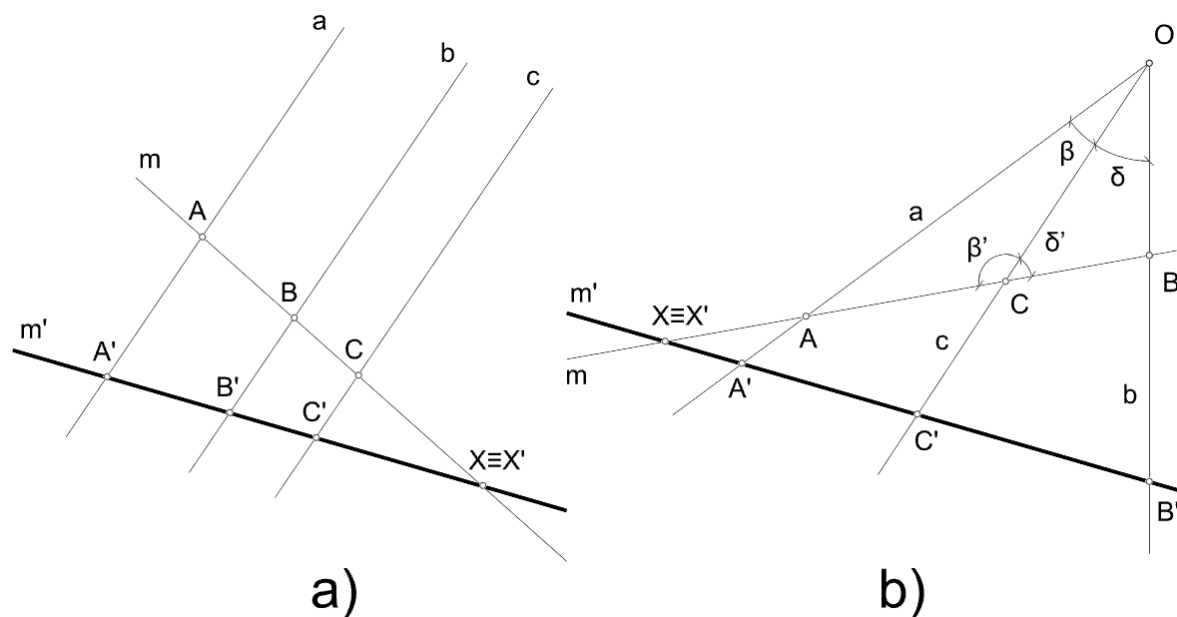


Fig. 1.13. Razão simples: a) projeção cilíndrica, b) projeção cónica.

Vejamos agora o caso da projeção cónica (figura 1.13.b).

Sobre a reta m podemos considerar a razão simples $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. E sobre a m' podemos considerar a razão simples $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$. Coloca-se agora a questão se estas duas razões simples são iguais ou não, isto é, se a razão simples é um invariante da projeção cónica. A resposta é negativa, como se verá adiante.

Introduzamos a razão simples entre três semirretas de um feixe. A razão simples entre as semirretas a, b e c , correspondente às razões simples mencionadas, fica notada por $(a b c)$ e define-se como sendo $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)}$.

Munidos destas definições, podemos verificar que $\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta')}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\sin(\delta)}{\sin(\delta')}$.

Por divisão, daqui resulta que $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)}$ e analogamente $\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \frac{\sin(\beta')}{\sin(\delta')}$.

O que mostra que no caso da projeção cónica $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \neq \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$, isto é $(A B C) \neq (A' B' C')$.

Esta limitação ultrapassa-se introduzindo a noção de **razão dupla** ou **razão anarmónica**. Assim, considerados quatro pontos A, B, C e D sobre uma reta m (figura 1.14) uma das 24 razões anarmónicas que se podem estabelecer entre eles fica notada por

$$(A B C D) = \frac{(A B C)}{(A B D)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

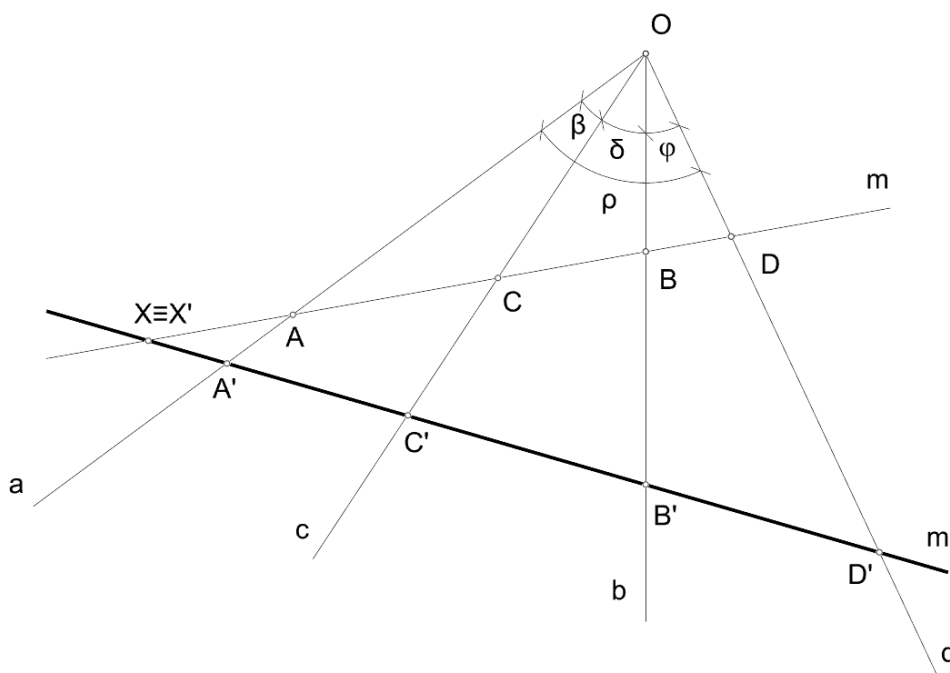


Fig. 1.14. Razão dupla ou razão anarmônica.

Analogamente, consideradas quatro semirretas **a**, **b**, **c** e **d**, com a mesma origem **O**, uma das 24 razões anarmônicas que se podem estabelecer entre elas fica notada por

$$(a\ b\ c\ d) = \frac{(a\ b\ c)}{(a\ b\ d)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)} : \frac{\sin(\rho)}{\sin(\varphi)}.$$

$$\text{Como } (A\ B\ C\ D) = \frac{(A\ B\ C)}{(A\ B\ D)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OA} \sin(\beta)}{\overline{OB} \sin(\delta)} : \frac{\overline{OA} \sin(\rho)}{\overline{OB} \sin(\varphi)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)} : \frac{\sin(\rho)}{\sin(\varphi)} = (a\ b\ c\ d)$$

Ou seja, a razão dupla $(A\ B\ C\ D)$ entre os quatro pontos **A**, **B**, **C** e **D**, e a razão dupla $(a\ b\ c\ d)$ entre as quatro semirretas **a**, **b**, **c** e **d**, é igual.

Logo $(a\ b\ c\ d) = (A'\ B'\ C'\ D')$.

Daqui resulta então que a razão dupla ou razão anarmônica entre quatro pontos, ou entre quatro semirretas com a mesma origem, é um invariante projetivo que se propaga através das operações de projeção e interseção. Este invariante também se aplica a quatro semiplanos de um feixe de planos. Sendo um invariante projetivo, a razão anarmônica também é preservada na projeção cilíndrica.

Acima referimos que entre quatro pontos podem ser estabelecidas 24 razões anarmônicas. Trata-se das combinações possíveis ($4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$) pelas quais se podem ordenar os quatro pontos.

Uma razão anarmônica não se altera quando permutam entre si dois elementos, se os outros dois também permutarem, por exemplo $(A\ B\ C\ D) = (C\ D\ A\ B)$.

Duas razões anarmônicas que permutam entre si a ordem dos dois primeiros ou dos dois últimos elementos são inversas uma da outra, por exemplo $(A\ B\ C\ D) = (B\ A\ C\ D)$.

Duas razões anarmônicas que permutam entre si a ordem dos dois elementos extremos ou dos dois elementos médios têm por soma a unidade, por exemplo $(A\ B\ C\ D) + (D\ B\ C\ A) = 1$.

Estes três resultados, que se podem mostrar com facilidade, permitem verificar que as razões anarmónicas, não são independentes umas das outras, e se reduzem de facto a seis.

E destas seis, conhecida uma delas, λ , ficam conhecidas as outras cinco, $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $1 - \frac{1}{\lambda}$ e $\frac{\lambda}{\lambda-1}$. E destas verifica-se que, duas a duas, uma é inversa da outra.

Duas retas como as retas m e m' da figura 1.14, dizem-se **perspetivas a partir do ponto O** . E as razões anarmónicas que se podem formar entre quaisquer quatro pontos de uma delas são iguais às razões anarmónicas que se podem formar entre os quatro pontos correspondentes da outra, e são as mesmas que se podem formar entre os quatro raios que ligam os pares de pontos homólogos. Se considerarmos apenas uma das retas, por exemplo m , e se pelos pontos desta reta passarem raios de dois feixes de retas de centros diferentes, os dois feixes de retas dizem-se **perspetivos a partir da reta m** . Se for possível fazer corresponder os pontos homólogos de duas retas através de uma sequência finita de perspetivas, diz-se que temos **duas retas projetivas**. Do mesmo modo, se for possível fazer corresponder os raios homólogos de dois feixes de retas através de uma sequência de perspetivas, diz-se que temos dois **feixes de retas projetivos**.

Importa apenas acrescentar que se a razão anarmónica for igual a **1**, dois dos quatro pontos são coincidentes. Se for igual a **-1** diz-se **razão harmónica**. E neste caso coincide com a sua inversa. É muito interessante verificar que uma configuração como a da figura seguinte implica sempre que a dupla razão entre os pontos **A, B, C e D** , tomados por esta ordem, é sempre uma razão harmónica. Diz-se que os pontos **A e B** são separados harmonicamente pelos pontos **C e D** . Ou que os pontos **A e B** são **conjugados harmónicos** dos pontos **C e D** .

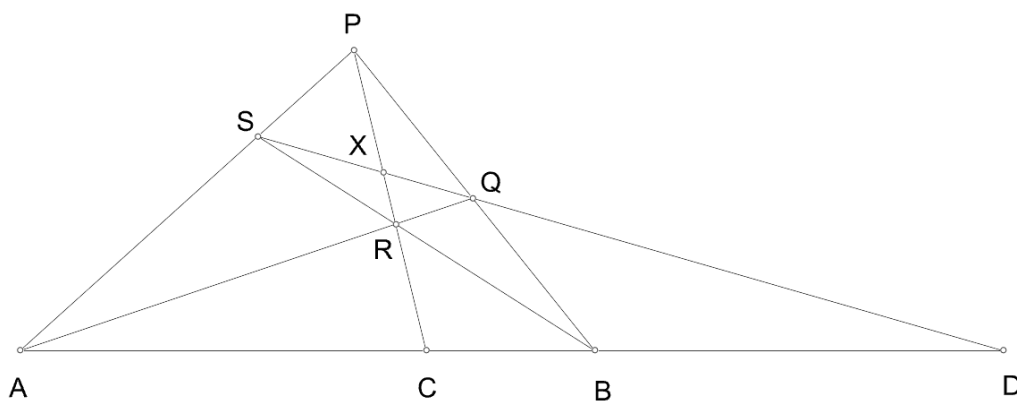


Fig. 1.15. Razão harmónica de quatro pontos A, B, C e D .

Note-se que $(A B C D) = (S A S B S C S D) = (P R C X) = (Q P Q R Q C Q X) = (B A C D)$ pelo que, sendo inversas e iguais as razões $(A B C D)$ e $(B A C D)$, o seu valor deve ser **-1**. Esta configuração será frequente na perspetiva cónica. Com efeito, comparemos esta configuração com a configuração da figura 1.11.b. Conseguimos estabelecer uma relação entre os pontos **P, Q, R e S** com os pontos **A', B', C' e D'** , e uma relação entre a linha **AB** com a linha de fuga **f_π** . Isto significa que a configuração da figura 1.15 pode ser obtida a partir da projeção cónica de um quadrado com os lados oblíquos ao plano de projeção. Na verdade, e de modo mais geral, pode obter-se por projeção cónica de qualquer paralelogramo com os lados oblíquos ao plano de projeção.

Se projetarmos os quatro pontos que definem a razão harmónica, a partir do ponto P , sobre uma reta $A'B'$ paralela a PD , o ponto D será projetado no infinito mas a razão harmónica mantém-se (figura 1.16), isto é $(A B C D) = (A' B' C D_{\infty}) = -1$.

Na dupla razão $(A' B' C D'_{\infty})$, a razão simples $\frac{\overline{A'D'_{\infty}}}{\overline{B'D'_{\infty}}} = 1$ deve entender-se como um limite da razão quando o ponto D' tende para o infinito. Daqui resulta que $\frac{\overline{A'C}}{\overline{B'C}} = -1$. E para isto acontecer, o ponto C tem de ser o ponto médio do segmento $[A'B']$.

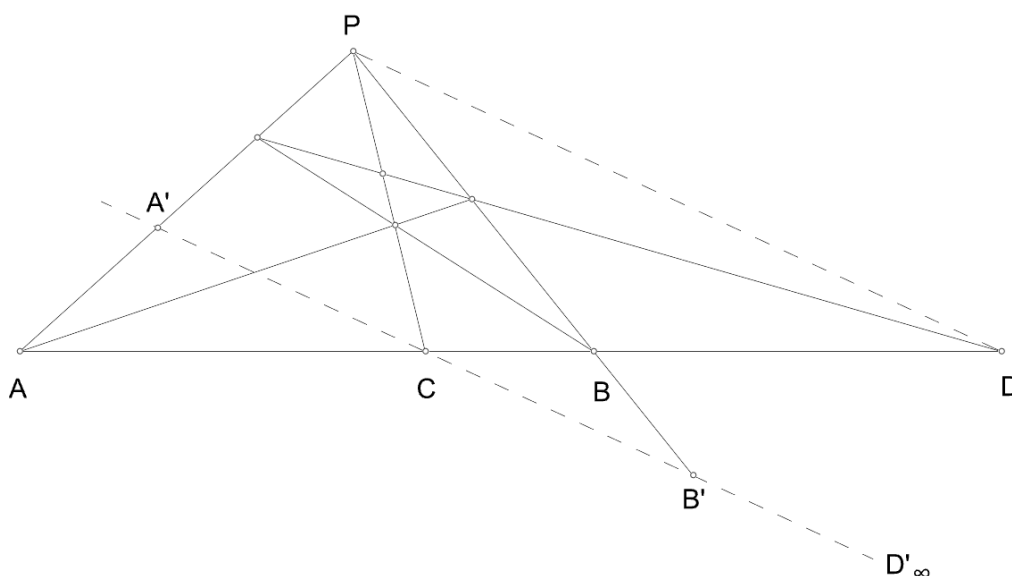


Fig. 1.16. Razão harmónica de quatro pontos A, B, C e D e de quatro pontos A', B', C e D'_{∞} .

As explicações dadas neste ponto seguiram de perto a organização que se apresenta no livro “Elementos de geometria projetiva e geometria descritiva” de Luís Albuquerque (1969) e que pode ser consultado para maiores desenvolvimentos sobre o tema da geometria projetiva.

Atividade proposta:

O exercício que se propõe agora é um pouco mais abstrato. Considerando quatro pontos A, B, C e D , escreva as 24 razões anarmónicas que se podem estabelecer e agrupe-as de acordo com os seis diferentes valores que elas podem ter.

Relação entre o teorema de Desargues e algumas transformações geométricas

Considere-se a projeção cónica, $[A'B'C']$, de um triângulo $[ABC]$ contido num plano oblíquo ao plano de projeção, a partir de um ponto O não incidente no plano do triângulo $[ABC]$ nem no plano de projeção.

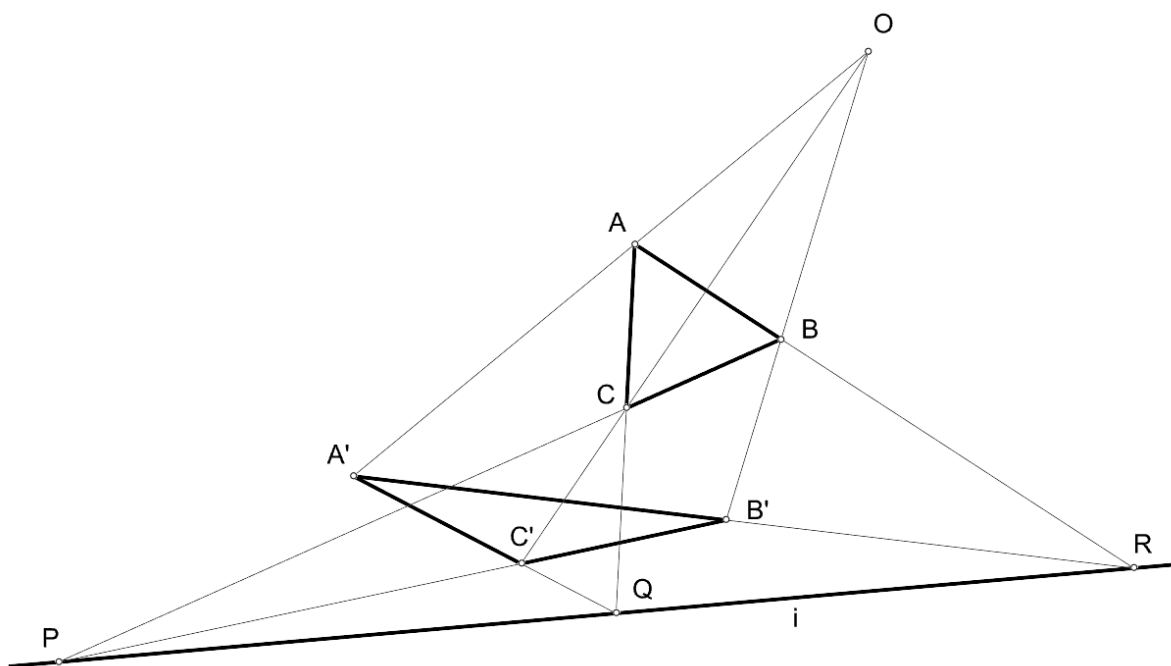


Fig. 1.17. Projeção cônica de um triângulo contido num plano oblíquo ao plano de projeção.

Da análise da figura 1.17 resulta quase imediato o entendimento de que os pontos de interseção, P , Q e R , dos pares de retas que contêm lados de triângulos correspondentes entre si, estão sobre uma reta i , que não é mais que a reta de interseção entre o plano do triângulo $[ABC]$ e o plano de projeção. Note-se que é indiferente as retas projetantes convergirem no ponto O ou serem paralelas, isto é, o ponto O pode ser próprio ou impróprio (figura 1.18).

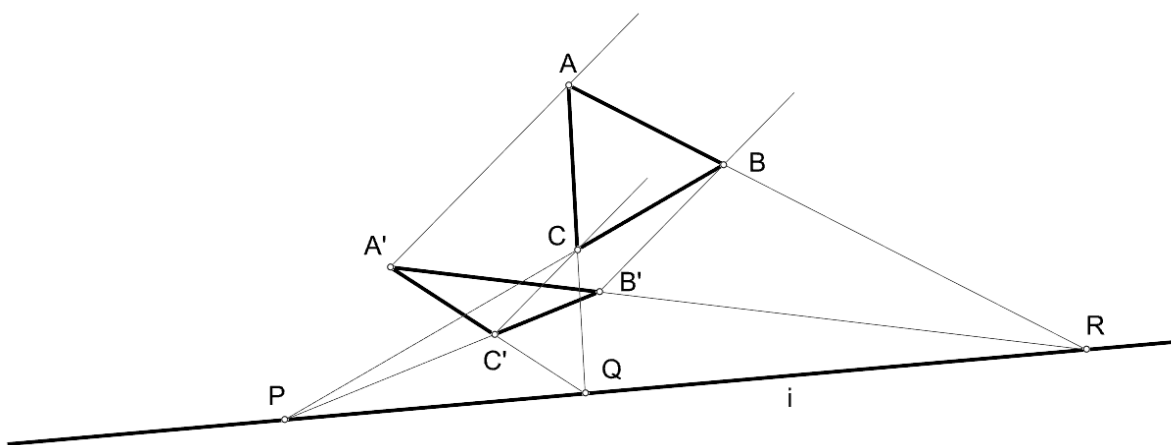


Fig. 1.18. Projeção cilíndrica de um triângulo contido num plano oblíquo ao plano de projeção.

Também se pode dar o caso de um dos pares de retas correspondentes serem paralelas, situação em que o ponto de interseção é impróprio, ou o caso dos planos dos dois triângulos serem paralelos, situação em que a reta i é imprópria. Neste caso o triângulo $[A'B'C']$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ diferindo por um fator de escala. No caso da projeção cilíndrica, caso o plano do triângulo seja paralelo ao plano de projeção, a reta i é imprópria, e o triângulo $[A'B'C']$ é sempre igual ao triângulo $[ABC]$.

A projeção plana deste tipo de configuração espacial (que não é mais que o desenho apresentado nas figuras 1.17 e 1.18) ilustra um dos teoremas fundamentais da geometria projetiva, o teorema de Desargues.

Este teorema, nas suas variações, permite definir a **homotetia** ou **dilação** (correspondente ao caso em que o triângulo $[A'B'C']$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ diferindo por um fator de escala), a **translação** (correspondente ao caso em que o triângulo $[A'B'C']$ é congruente com o triângulo $[ABC]$), a **homologia** (correspondente ao caso da figura 1.17) e a **afinidade** (correspondente ao caso da figura 1.18). Ora, todas estas transformações planas, a que se acrescenta a **rotação**, a **reflexão** (também conhecida por simetria bilateral) e a **reflexão deslizante** (combinação da translação com a reflexão), desempenham um papel crucial na representação em geometria descritiva e na resolução de problemas, por exemplo relacionados com tangências a linhas cónicas. A combinação de duas ou mais transformações geométricas é ainda uma transformação geométrica. E todas as transformações planas podem ser estendidas ao espaço.

A homologia plana fica definida pelo seu centro O , pela reta fixa i , que recebe a designação de **eixo da homologia**, e por um par de pontos correspondentes, A e A' (figura 1.19). O eixo da homologia é o lugar geométrico dos **pontos duplos** da transformação, isto é, os pontos que se correspondem a si próprios, como por exemplo o ponto $F \equiv F'$. Há uma exceção, o ponto O que também é duplo. Assim, o eixo da transformação é uma **reta dupla**. Mas há outras retas duplas cujos pontos não são pontos duplos. São as retas que unem pontos homólogos. Por exemplo, a reta AA' é uma reta dupla.

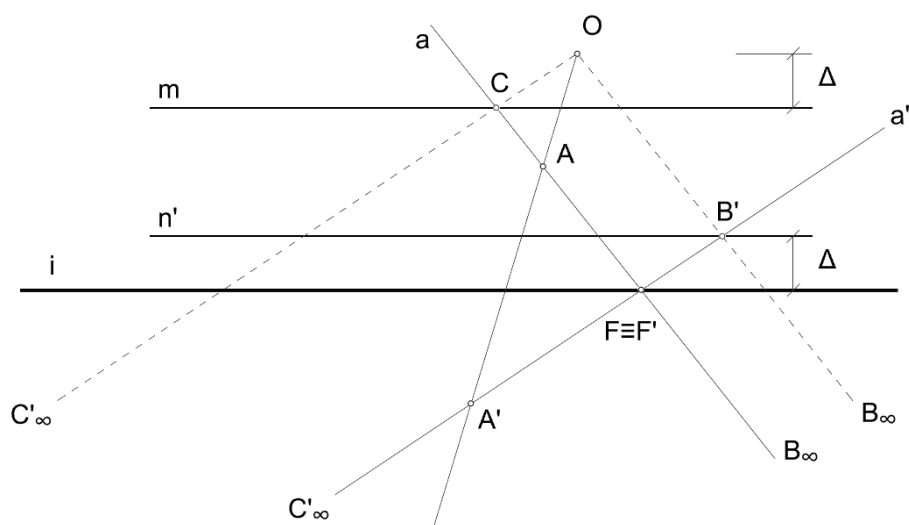


Fig. 1.19. Homologia plana.

Na homologia plana há duas retas especiais, paralelas ao eixo i . Trata-se da reta m do plano α a que corresponde a reta m' imprópria do plano α' ; e da reta n' do plano α' que corresponde à reta n imprópria do plano α . A distância de uma delas ao ponto O é igual à distância da outra ao eixo i . Na homologia a reta imprópria não é fixa, isto é, a reta imprópria do plano α não corresponde à reta imprópria do plano α' . A homologia, tal como a projeção cónica, preserva a razão dupla ou razão anarmónica e não preserva a razão simples.

A afinidade fica definida pela reta fixa i , que recebe a designação de **eixo da afinidade**, e por um par de pontos correspondentes, A e A' . Neste caso o ponto O é impróprio e fica definido

pela direção da reta AA' (figura 1.20). Tal como na homologia, o eixo da afinidade é o lugar geométrico dos pontos duplos da transformação, isto é, os pontos que se correspondem a si próprios. No caso da afinidade espacial, em vez de eixo há um plano como lugar geométrico dos pontos duplos ou fixos.

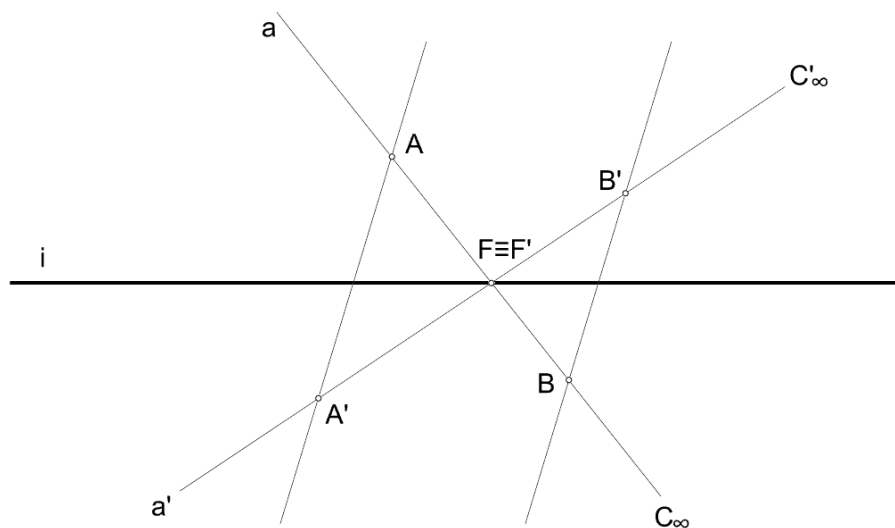


Fig. 1.20. Afinidade plana.

Na afinidade a reta impropria é fixa, isto é, um ponto C da reta imprópria corresponde a outro ponto C' da reta imprópria. Mas note-se que os pontos da reta imprópria não são, em geral, duplos. A afinidade, tal como a projeção cilíndrica, preserva a razão simples de comprimentos.

É ainda muito importante voltar a recordar que as transformações planas afetam todo o plano e mapeiam-no sobre si próprio. Isto quer dizer que, sob uma transformação plana, a cada ponto do plano corresponde outro ponto do plano, e apenas um, numa correspondência biunívoca. É como se houvesse dois planos, α e α' , sobrepostos ou coincidentes. Um dos planos contém os pontos $A, B, C, \dots$ e outro contém os pontos $A', B', C', \dots$ de tal modo que a cada ponto A de um plano corresponde um ponto A' , e apenas um ponto, do outro plano, e vice-versa. Uma reta AB de um plano corresponde a uma reta $A'B'$ do outro plano. Do mesmo modo, uma transformação espacial afeta todo o espaço. E neste caso, para as transformações que no plano têm uma reta de pontos duplos, passa a haver, no espaço, um plano de pontos duplos.

Atividade proposta:

Utilizando um software de geometria dinâmica, a partir da formulação do teorema de Desargues, modele cada uma das transformações geométricas referidas.

Paralelismo e perpendicularidade

Algumas propriedades relativas ao paralelismo e perpendicularidade são consequências daquilo que observámos anteriormente. Neste ponto interessa-nos olhar para estas relações sob o ponto de vista das projeções.

Duas retas paralelas entre si e paralelas ao plano de projeção têm sempre projeções paralelas entre si, ou eventualmente coincidentes.

Duas retas paralelas entre si, e não paralelas ao plano de projeção, têm sempre projeções cilíndricas paralelas entre si, ou eventualmente coincidentes ou reduzidas a dois pontos.

Duas ou mais retas paralelas entre si, e não paralelas ao plano de projeção, têm sempre projeções cónicas convergentes num ponto que se designa ponto de fuga da direção de retas.

Em projeção cilíndrica, duas retas paralelas entre si e paralelas ao plano de projeção, projetam-se sempre em verdadeira grandeza.

Em projeção cónica, duas ou mais retas paralelas entre si e paralelas ao plano de projeção, em geral não se projetam em verdadeira grandeza.

Se duas retas a e b são perpendiculares ou ortogonais entre si, as suas projeções ortogonais num plano α são perpendiculares entre si se pelo menos uma delas for paralela ao plano de projeção α e a outra não for perpendicular ao projeção α .

A propriedade seguinte pode ser entendida a partir das anteriores.

Uma reta p perpendicular a um plano α tem projeção ortogonal num plano β , ou seja p' , perpendicular à reta i comum aos dois planos (figura 1.21).

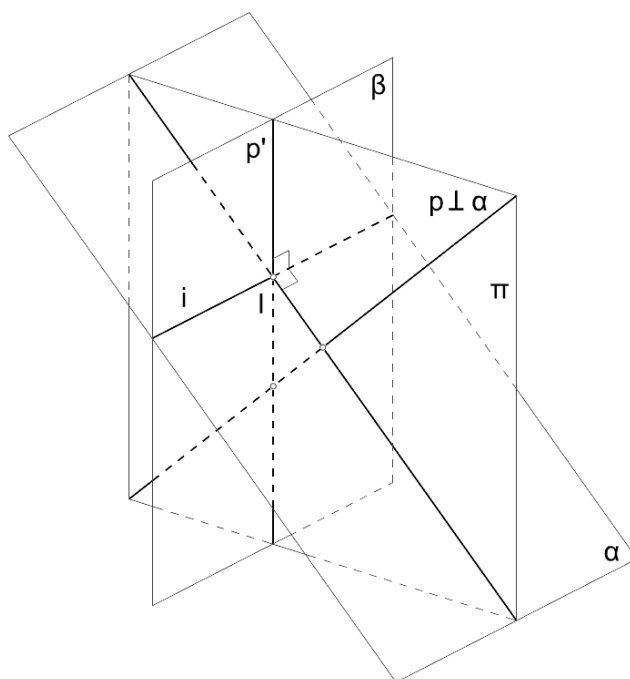


Fig. 1.21. Perpendicularidade entre reta e plano.

Quando uma reta p é perpendicular a um plano α , ela é perpendicular a todas as retas do plano com as quais é concorrente e ortogonal a todas as outras com que não é concorrente. Ora sendo a reta i uma reta do plano α , a reta p é perpendicular ou ortogonal à reta i . Mas como a reta i também é uma reta do plano β , isto significa que todas as retas do plano α paralelas à reta i têm projeção ortogonal no plano β segundo retas paralelas à reta i . Já vimos anteriormente que duas retas perpendiculares ou ortogonais entre si têm projeções ortogonais perpendiculares entre si se uma delas for paralela ao plano de projeção. É este o caso. Logo a projeção ortogonal da reta p no plano β é perpendicular à reta i .

A explicação pode ser dada de outro modo. O plano π projetante da reta p é, face à situação, simultaneamente perpendicular ao plano α (porque contém a reta p perpendicular ao plano α) e ao plano β (porque a projeção é ortogonal relativamente ao plano β). Logo, tanto o plano α como o plano β têm de conter retas perpendiculares ao plano π . Como, dada uma orientação

de planos, só há uma direção de retas que lhe são perpendiculares, essa direção tem de ser comum às orientações dos planos α e β . Isto é, tem de ser a direção da reta i comum aos dois planos. Sendo a reta i perpendicular ao plano π , é perpendicular a todas as retas do plano π que passam pelo seu pé nesse plano, ou seja pelo ponto I . Como a reta p' , interseção do plano π com o plano β , passa pelo ponto I , tem de ser perpendicular à reta i .

Três retas, a , b e c , perpendiculares entre si num ponto O , e oblíquas a um plano α que não contém o ponto O , interseçam-no, em três pontos A , B e C , respetivamente, que formam um triângulo acutângulo. A projeção ortogonal do ponto O no plano α , é o ortocentro, O' , do triângulo $[ABC]$. A explicação deste resultado decorre das observações anteriores uma vez que cada uma das retas é perpendicular ao plano definido pelas outras duas e cada uma delas tem projeção ortogonal no plano α , passante pelo seu ponto de interseção nesse plano (a' , b' , e c'). E acresce que cada plano, definido por cada par de retas, intersesta o plano α segundo uma reta que passa pelas interseções daquelas retas com o plano α (figura 1.22).

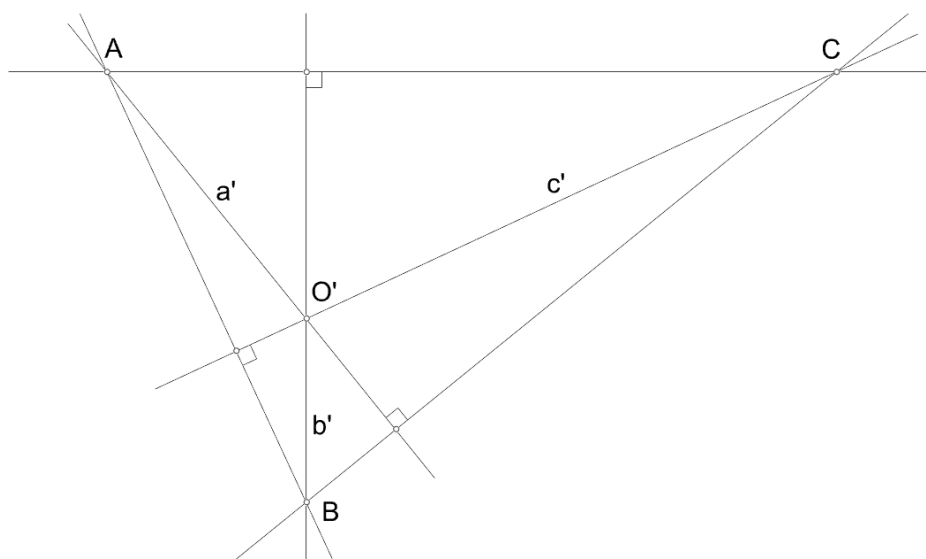


Fig. 1.22. Projeção ortogonal de três retas perpendiculares entre si e oblíquas ao plano de projeção.

Uma aplicação direta deste resultado é a seguinte. Numa projeção cónica sobre um plano α , os pontos de fuga de três direções de retas ortogonais entre si, e oblíquas ao plano α , definem um triângulo acutângulo cujo ortocentro é a projeção ortogonal do centro de projeções no plano α .

O exemplo seguinte ilustra bem o interesse de interpretar as configurações planas como projeções de configurações espaciais. Um desses casos é a reta de Euler. A reta de Euler, e , é uma reta que passa pelo ortocentro, O' , pelo baricentro, B' , e pelo circuncentro, C' , de um triângulo $[ABC]$. Assim descrita, trata-se de uma propriedade da geometria plana, em particular da geometria dos triângulos. Mas vamos verificar que esta configuração pode ser olhada como a projeção ortogonal de uma diagonal espacial de um paralelepípedo.

Determine-se o ortocentro O' do triângulo $[ABC]$. Considerem-se os segmentos $[O'A]$, $[O'B]$ e $[O'C]$, referidos na figura 1.22, como projeções ortogonais das arestas $[OA]$, $[OB]$ e $[OC]$ de um paralelepípedo no plano α definido pelos pontos A , B e C . Complete a representação do paralelepípedo (figura 1.23).

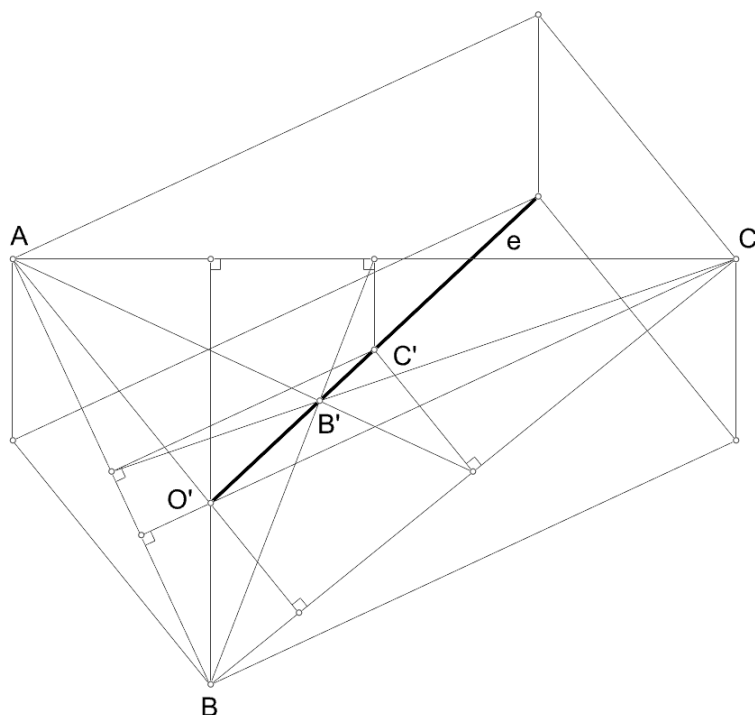


Fig. 1.23. A reta de Euler interpretada como a projeção de uma diagonal de um paralelepípedo.

O baricentro do triângulo, B' , corresponde à interseção da diagonal e com o plano de projeção definido pelos pontos A , B e C . O circuncentro do triângulo, C' , corresponde ao centro do paralelepípedo e, por isso, também tem de pertencer à diagonal e . A explicação também funciona no caso de triângulos retângulos (por exemplo $O' \equiv B$). No caso de o triângulo $[ABC]$ ser obtusângulo, por exemplo em B , a construção, e respetiva interpretação, é idêntica. Com esta interpretação espacial, é ainda fácil de mostrar que $\overline{O'B'} = 2\overline{B'C'}$.

Há muitos outros exemplos em que a interpretação espacial torna o entendimento da propriedade bidimensional mais simples. A nossa intenção não é esgotar esses exemplos mas sim encorajar, sempre que possível, este exercício que é fundamental para o progresso em geometria descritiva.

Atividade proposta:

Gaspar Monge formulou o teorema seguinte. Dadas três circunferências de raios diferentes contidas num plano, os pontos de interseção, dos três pares de retas tangentes externamente a cada duas, são colineares. Assim formulado, o teorema implica que nenhuma das circunferências seja envolvida por outra. Procure encontrar uma explicação deste resultado interpretando-o espacialmente e, se possível, generalize-o de modo a eliminar a restrição apontada.

Os algoritmos fundamentais da Geometria Descritiva

O primeiro conjunto de algoritmos fundamentais da geometria descritiva corresponde às operações que decorrem dos vários tipos de projeção e já foram acima mencionados.

O segundo conjunto corresponde às operações pelas quais se opera sobre figuras representadas no sentido de obter algumas das suas propriedades como distâncias, ângulos e áreas. A chave para a obtenção gráfica deste tipo de grandeza é a colocação do elemento

geométrico correspondente num plano paralelo ao plano de projeção. Isto pode ser feito essencialmente de dois modos. O primeiro modo corresponde a rodar a figura até que o plano que a contém fique paralelo a um dos planos de projeção. Um caso particular da **rotação**, quando o eixo de rotação está contido no plano, designa-se por **rebatimento**. O segundo modo corresponde a reposicionar o sistema de coordenadas de modo a colocar um dos seus planos coordenados em função da figura da qual se pretende obter uma dada grandeza. Na prática corresponde a uma rotação, ou sequência de rotações, do referencial, eventualmente seguidas de uma translação. Este processo costuma receber a designação de **mudança do plano de projeção** mas seria mais bem referido como **mudança do sistema de coordenadas** ou **mudança do sistema de referência**. Referir-nos-emos a esta operação dos três modos indistintamente. Vemos que estas operações fundamentais são casos de aplicação das isometrias (transformações rígidas). Também a **translação**, enquanto transformação geométrica, pode em alguns casos ser de utilidade para a resolução de problemas específicos. A rotação, o rebatimento e a mudança do plano de projeção costumam ser designados como os **métodos auxiliares da representação**.

O terceiro conjunto de algoritmos, muito mais extenso, relaciona-se com a representação, no plano e no espaço, de todas as operações pelas quais se transformam e interagem as figuras geométricas. São exemplo disso a determinação de interseções entre planos, as secções planas de sólidos, as operações booleanas, o cálculo de sombras, entre outros. Não há propriamente uma lista fechada de algoritmos. Cada situação prática implicará um conjunto específico de algoritmos.

Note-se que, mesmo no contexto de utilização de ferramentas digitais de modelação tridimensional, estes métodos, ou os seus equivalentes, continuam a estar presentes. Por exemplo, há bastantes coisas em comum entre a determinação tradicional da interseção entre duas superfícies com as operações análogas implementadas num ADMG3D.

A seguir exemplificaremos os três algoritmos do segundo conjunto, nos três tipos de projeção, a propósito da determinação da verdadeira grandeza de um segmento de reta dado. O objetivo é o entendimento destas operações na sua generalidade para que possam ser usados posteriormente em qualquer situação no contexto de qualquer sistema de representação. Por uma questão de simplificação de leitura e tratamento, o referencial de coordenadas é omitido.

Os algoritmos do terceiro grupo irão sendo apresentados à medida que forem sendo necessários.

Atividade proposta:

Procure identificar em objetos e mecanismos do seu quotidiano as operações referidas como o “segundo conjunto de algoritmos”.

Aplicação à projeção ortogonal

Seja dado um segmento de reta $[AB]$ pela sua projeção ortogonal $[{}_5A {}_2B]$ num plano horizontal, aqui considerado como o plano do desenho. Os índices **2** e **5** correspondem às distâncias dos pontos **A** e **B** ao plano de projeção, respetivamente, dadas em centímetro (figura 1.24). A escala é explicitada graficamente. A distância, em projeção horizontal, entre os pontos **A** e **B** é **4cm**. Notamos que esta forma de representar corresponde ao que a seguir designaremos por Sistema Cotado.

Suponhamos que se pretende determinar graficamente a verdadeira grandeza do segmento de reta $[AB]$.

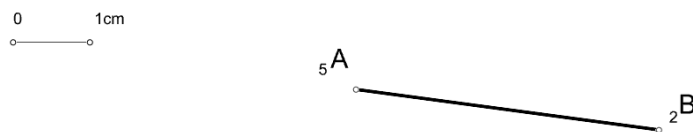


Fig. 1.24. Segmento de reta dado através da sua projeção ortogonal e das cotas dos seus extremos.

Rotação

Existe uma infinidade de rotações que permitem rodar o segmento $[AB]$ de modo a colocá-lo paralelo ao plano de projeção. Considere-se, por exemplo e por conveniência, um eixo e , horizontal, a $3cm$ do plano de projeção e a $2cm$ do segmento $[AB]$. Como o eixo é horizontal e tem projeção paralela à do segmento, então a mais curta distância entre o segmento $[AB]$ e o eixo e é dada pelo segmento $[CI]$ horizontal simultaneamente perpendicular a ambos. A verdadeira grandeza do segmento $[AB]$, na projeção, obtém-se pela sua rotação de 90° em torno do eixo e (figura 1.25).

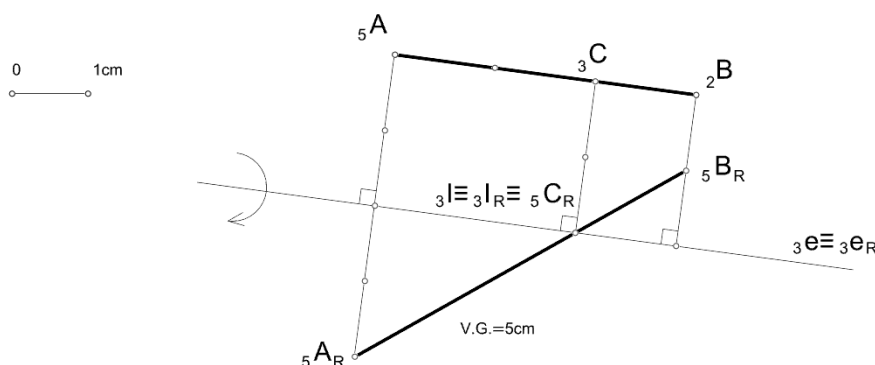


Fig. 1.25. Determinação da verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ por rotação em torno de um eixo e horizontal.

Nesta operação, os pontos A , B e C descrevem arcos de circunferência contidos em planos perpendiculares ao eixo e , na figura representados pelas linhas a traço fino traçadas perpendicularmente ao eixo. Como a distância do eixo ao segmento mede $2cm$ então o segmento rodado fica a $5cm$ de distância em relação ao plano de projeção (poderia ficar a $1cm$ do plano de projeção se a rotação fosse efetuada no outro sentido). A obtenção dos pontos $5B_R$ e $5A_R$ é fácil a partir do momento em que verificamos que o ponto $5C_R$ fica graficamente coincidente com o ponto $3I$, pois basta considerar as diferenças das distâncias entre os pontos A e B e o plano horizontal para o qual foi feita a rotação.

Rebatimento

O rebatimento não é mais que um caso particular da rotação. No caso do rebatimento considera-se a rotação de um plano em torno de um eixo nele contido. Costuma designar-se esse eixo por **charneira do rebatimento**. Assim, para se poder operar um rebatimento, é necessário que o eixo e seja concorrente com a reta que contém o segmento $[AB]$. Se a projeção do eixo for coincidente com a projeção da reta AB , fica definido um plano vertical α (figura 1.26).

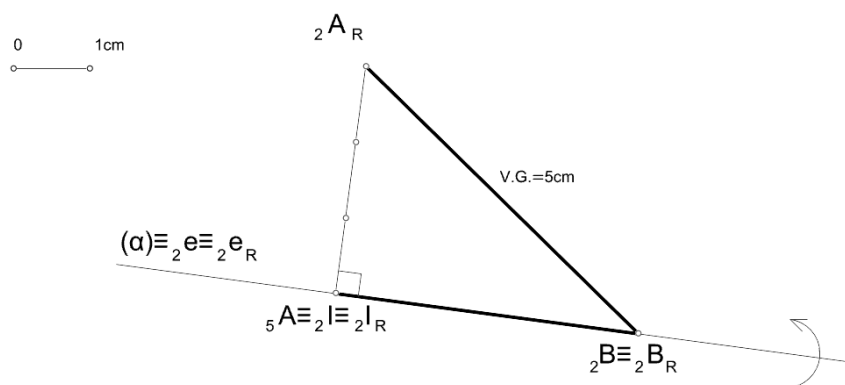


Fig. 1.26. Determinação da verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ por rebatimento de um plano vertical α .

Neste caso considerou-se como charneira do rebatimento, uma reta horizontal e passante pelo ponto B . Assim, o rebatimento corresponderá à rotação de 90° do plano α até coincidir com o plano horizontal à cota 2 cm . Note-se que há dois sentidos possíveis para este movimento. Como a reta e passa pelo ponto B , este mantém-se fixo na operação de rebatimento. O segmento vertical, compreendido entre o ponto A e o plano horizontal à cota 2 cm , mede 3 cm e fica rebatido na reta perpendicular a (α) passante por ${}_5A$, ficando o ponto A rebatido à cota 2 cm . O extremo inferior deste segmento, o ponto I , à cota 2 cm , é o centro do arco do rebatimento do ponto A . A verdadeira grandeza do segmento dado fica representada pelo comprimento do segmento $[{}_2A_R {}_2B_R]$.

Uma variante desta operação consiste em considerar que a charneira e do rebatimento não está contida no plano projetante da reta que contém o segmento (figura 1.27).

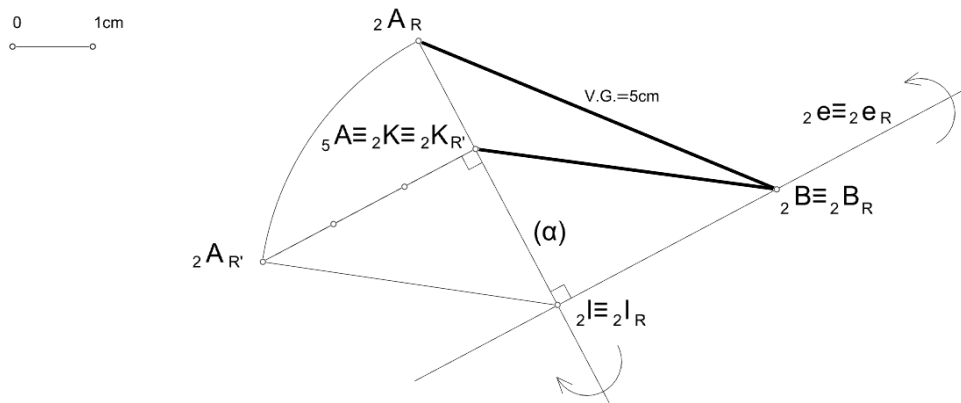


Fig. 1.27. Determinação da verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ por rebatimento de um plano oblíquo β (não notado na figura).

Neste caso a reta e horizontal, passante pelo ponto B à cota 2 cm , e a reta AB definem um plano β oblíquo ao plano horizontal de projeção (este plano não está identificado no desenho). À semelhança do caso anterior, o ponto B permanece fixo e o rebatimento opera-se para o plano horizontal à cota 2 cm . Porém, para rebater o ponto A é preciso determinar a sua distância ao eixo e , isto é, a verdadeira grandeza do segmento $[AI]$ (o ponto I é o centro do arco do rebatimento do ponto A em torno do eixo e), o que se resolve nos mesmos termos do exemplo anterior. Como o plano α , projetante do segmento $[AI]$ no plano horizontal também contém o arco do rebatimento do ponto A em torno do eixo e , esta operação também permite a sua representação e, por conseguinte, possibilita a determinação do ponto A rebatido, à cota 2 cm . Isto significa que o rebatimento do plano oblíquo β implicou um rebatimento auxiliar de

um plano vertical α que permitiu colocar em verdadeira grandeza o segmento $[IA]$, hipotenusa do triângulo $[AIK]$, também designado por **triângulo do rebatimento** do ponto A .

Caso se queira aplicar o rebatimento às faces de um triedro trirretângulo, cujas arestas são oblíquas ao plano de projeção, o procedimento é como se segue. Sejam dadas as projeções ortogonais a' , b' e c' das três arestas a , b e c do triedro. E seja fixado um dos pontos de interseção de uma delas com o plano de projeção, por exemplo o ponto A de interseção da aresta a com o plano de projeção. Tal como visto anteriormente, como o ponto O' , em que concorrem as retas a' , b' e c' , é o ortocentro do triângulo formado pelos pontos A , B e C resultantes das interseções das arestas a , b e c do triedro com o plano de projeção, respetivamente, então as retas AC e AB conduzem-se perpendicularmente a b' e c' , respetivamente. Determinadas AC e AB , a reta BC , também perpendicular a a' , fica definida pelos pontos B e C . Como as arestas do triedro são perpendiculares entre si no ponto O , os ângulos $\angle AOB$, $\angle BOC$ e $\angle COA$ são retos em O . Assim, cada um deles encontra-se inscrito numa semicircunferência cujo centro é o ponto médio de cada um dos segmentos $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, respetivamente. Deste modo, a determinação das verdadeiras grandezas das faces do triedro pode ser obtida facilmente representando a verdadeira grandeza destas semicircunferências. Na figura 1.28 apenas está resolvida a verdadeira grandeza da face que contém as arestas a e b e cuja semicircunferência auxiliar tem centro no ponto M_{AB} . A charneira do rebatimento foi a reta AB . Note-se que o rebatimento poderia ter sido feito no outro sentido

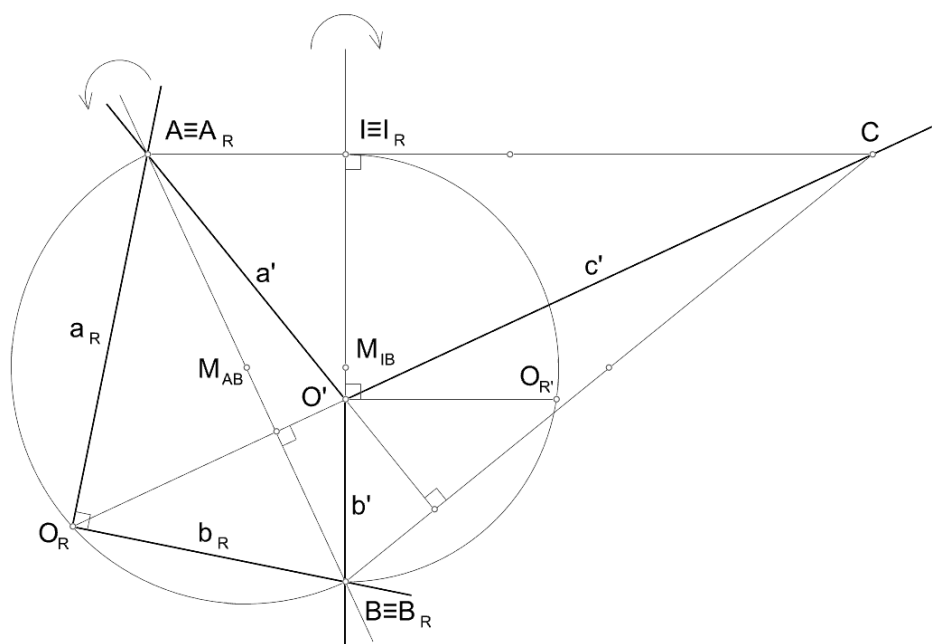


Fig. 1.28. Determinação da verdadeira grandeza das faces de um triedro trirretângulo cujas arestas são oblíquas ao plano de projeção.

Uma operação idêntica permite obter a distância do ponto O ao plano de projeção. Para o efeito considera-se o rebatimento do plano projetante de uma das arestas do triedro. Na figura 1.28 foi considerado o plano projetante da aresta b que intersecta a reta AC no ponto I . Como as retas OI e OB são perpendiculares em O , o ângulo $\angle BOI$ está inscrito numa semicircunferência de diâmetro $[BI]$ e centro em M_{IB} . Assim, a construção é em tudo idêntica à anterior. Considera-se o rebatimento dessa semicircunferência para o plano de projeção em torno da charneira BI . A distância pretendida é dada por $\overline{O'O_R'}$.

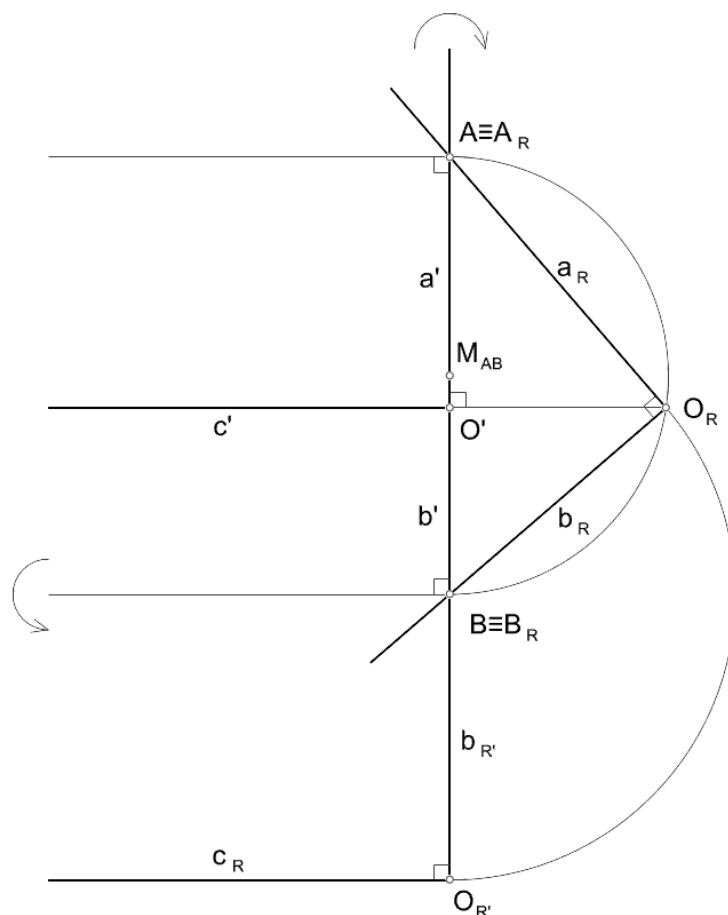


Fig. 1.29. Determinação da verdadeira grandeza das faces de um triedro trirretângulo com uma aresta paralela ao plano de projeção.

Neste caso, como a aresta $\mathbf{c}$ do triedro é paralela ao plano de projeção, a projeção $\mathbf{c}'$ é perpendicular às projeções $\mathbf{a}'$ e $\mathbf{b}'$. Note-se que não escrevemos $\mathbf{a}' \equiv \mathbf{b}'$ porque estamos apenas a considerar semirretas com origem em $\mathbf{O}$. Neste caso, o plano $\mathbf{ab}$ é projetante. Como o ângulo $\angle \mathbf{BOA}$ é reto em $\mathbf{O}$, então está inscrito numa semicircunferência de centro no ponto médio de $[\mathbf{AB}]$, isto é, no ponto $\mathbf{M}_{AB}$, e de diâmetro $[\mathbf{AB}]$. A verdadeira grandeza da face $\mathbf{ab}$ do diedro obtém-se considerando o rebatimento desta semicircunferência em torno da charneira $\mathbf{AB}$. Após ter-se resolvido a determinação da verdadeira grandeza da face $\mathbf{ab}$, a determinação da verdadeira grandeza de uma das outras duas faces, por exemplo $\mathbf{bc}$, resolve-se facilmente. A charneira do rebatimento passa por $\mathbf{B}$ e é paralela a $\mathbf{c}'$. A reta $\mathbf{c}_R$ também será paralela a $\mathbf{c}'$. E a distância da origem $\mathbf{O}$ ao ponto $\mathbf{B}$ já tinha sido determinada no rebatimento anterior. De onde, a determinação do ponto $\mathbf{O}_R$, se reduza a construir o arco de centro $\mathbf{B}$ e raio $[\mathbf{BO}_R]$ e a determinar a sua intersecção com a reta $\mathbf{b}_R$, que está no prolongamento da reta $\mathbf{b}'$.

Finalmente, se o triedro tiver uma aresta perpendicular ao plano de projeção, o plano das outras duas arestas é visível em verdadeira grandeza na projeção. Os outros dois planos serão projetantes. Se for conhecida a distância da origem **O** ao plano de projeção, o rebatimento de qualquer das faces projetantes é um exercício trivial.

Mudança do plano de projeção

A mudança do plano de projeção é em tudo muito similar ao rebatimento. Se definirmos um plano α , vertical, paralelo ao segmento (a uma distância qualquer) dado e sobre esse plano determinarmos a sua projeção ortogonal, esta representará a sua verdadeira grandeza. Restamos representar esse plano em verdadeira grandeza o que, de facto, se traduz num rebatimento, neste caso operado para o plano horizontal de projeção (figura 1.30).

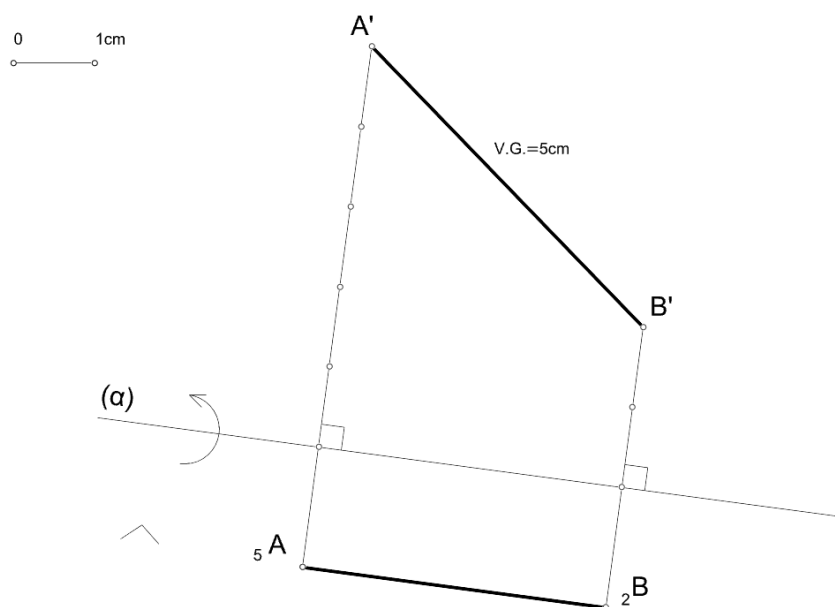


Fig. 1.30. Mudança do plano de projeção.

Nesta operação reconhece-se o que adiante iremos referir como o Sistema da Dupla Projeção ortogonal. Também devemos fazer a advertência que a referência a esta operação deste modo pode parecer estranha por relação ao que é comum ver em manuais de Geometria Descritiva. Porém, se analisarmos bem a questão, é de uma mudança de plano de projeção que se trata, ou bem vistas as coisas, da introdução de um novo plano de projeção, caminho pelo qual se passa do Sistema Cotado para o Sistema da Dupla Projeção Ortogonal.

Aplicação à projeção cilíndrica

Seja dado um segmento de reta $[AB]$ pela sua projeção oblíqua $[_5A_2B]$ num plano horizontal, aqui considerado como o plano do desenho. Os índices $2'$ e $5'$ correspondem às distâncias dos pontos A e B ao plano de projeção (que são diferentes das distâncias dos pontos às suas projeções), respetivamente, dadas em centímetro (figura 1.31). O comprimento do segmento $[_5A_2B]$ mede $3.1cm$. A direção da projeção é dada através da reta projetante p e do rebatimento do seu plano projetante α para o plano horizontal de projeção. O ângulo $\pi = 53^\circ$ formado entre p e p_R corresponde à inclinação da direção projetante relativamente ao plano de projeção. É ainda dada a relação entre direção do segmento $[_5A_2B]$ e a direção da projeção, no desenho.

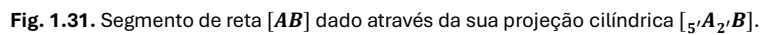
[illegible]

Fig. 1.32. Determinação da projeção ortogonal de um segmento de reta dado através da sua projeção cilíndrica.

82

Atividade proposta:

Neste caso, a verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ mede aproximadamente **4.1cm**. Sugere-se que o leitor resolva o problema até ao final para poder confirmar este resultado.

Aplicação à projeção cônica

Seja dado um segmento de reta $[AB]$ pela sua projeção cônica $[_5A_2B]$ num plano horizontal, aqui considerado como o plano do desenho. Os índices $2'$ e $5'$ correspondem às distâncias dos pontos A e B ao plano de projeção (que são diferentes das distâncias dos pontos às suas projeções), respetivamente, dadas em centímetro (figura 1.33). O centro de projeções, o ponto O , é dado pela sua projeção ortogonal no plano de projeção e pela sua distância a este plano, **7cm**. O comprimento do segmento $[_5A_2B]$ mede **7cm**, $_5A_7O = 3.5cm$ e $_2B_7O = 5cm$.

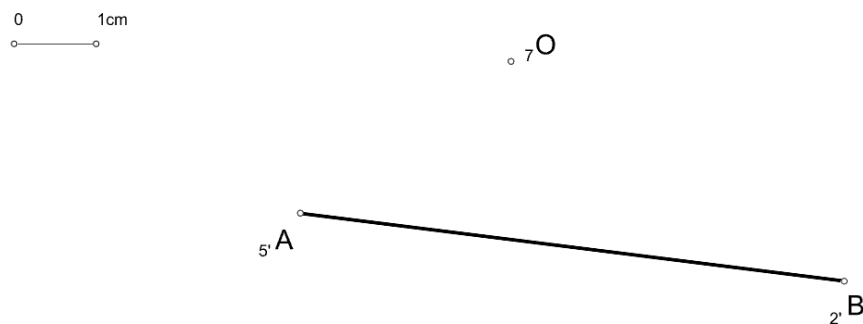


Fig. 1.33. Segmento de reta dado através da sua projeção cônica e das cotas dos seus extremos.

Mais uma vez, para determinar a verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ reduz-se o problema ao caso em que se conhece a projeção ortogonal do segmento no plano horizontal de projeção. Para o efeito representam-se as retas OA e OB , projetantes dos pontos A e B , respetivamente, e aqui representadas pelas suas projeções ortogonais no plano horizontal de projeção. Note-se que as projeções cônicas destas retas reduzem-se aos pontos $_5A$ e $_2B$, respetivamente. De seguida, como as projeções ortogonais preservam as razões de comprimentos, pela divisão dos segmentos $[_7O_5A]$ e $[_7O_2B]$ em sete partes iguais, é possível posicionar as projeções ortogonais dos pontos A e B , isto é, os pontos $_5A$ e $_2B$. (figura 1.34).

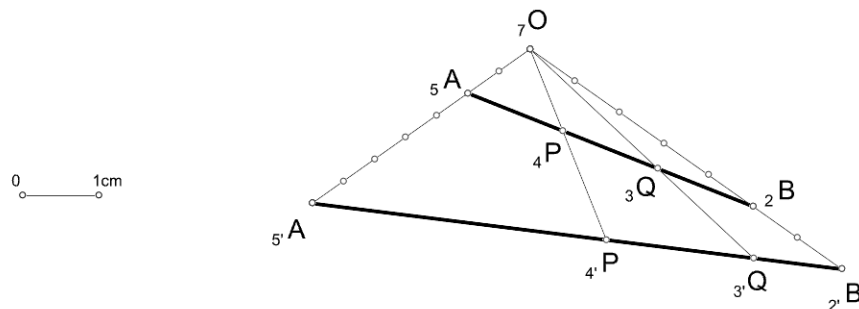


Fig. 1.34. Determinação da projeção ortogonal de um segmento de reta dado através da sua projeção cônica.

Mais uma vez, estando determinada a projeção ortogonal do segmento $[AB]$ no plano horizontal, isto é, o segmento $[_5A_2B]$, pode adotar-se qualquer um dos procedimentos atrás considerados para a determinação da verdadeira grandeza. Por curiosidade, determinaram-se as projeções cônicas dos pontos P e Q do segmento $[AB]$, de cotas **3cm** e **4cm**,

respetivamente, para colocar em evidência que neste tipo de projeção não são preservadas as razões de comprimentos. Isto foi feito a partir da divisão do segmento $[{}_5A {}_2B]$ em três partes iguais, operação pela qual se determinaram os pontos ${}_4P$ e ${}_3Q$, projeções ortogonais dos pontos P e Q no plano horizontal de projeção. A partir destas, os pontos ${}_4P$ e ${}_3Q$ são de determinação imediata.

Atividade proposta:

Neste caso, a verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ mede aproximadamente **5cm**. Sugere-se que o leitor resolva o problema até ao final para poder confirmar este resultado.

Introdução aos sistemas de representação e sua inter-relação

Designa-se por **Sistema de Representação** o articulado de planos de projeção, tipos de projeção e operações auxiliares que permitem compactar a representação num único plano de desenho. Mesmo na modelação tridimensional digital é isto que acontece quando vemos as imagens das figuras geométricas no ecrã do computador.

A geometria descritiva utiliza, em geral, o sistema de coordenadas retangulares. Por convenção, adota-se a regra da “mão direita” para o referencial e para as rotações.

Quando os planos de projeção principais são o plano coordenado xy , também designado por **plano horizontal de projeção**, e o plano coordenado zx , também designado por **plano frontal de projeção**, e as retas projetantes são perpendiculares a estes planos, estamos em presença do sistema da **Dupla Projeção Ortogonal (DPO)**. Considera-se que o eixo x divide o plano horizontal de projeção em dois semiplanos: o **semiplano horizontal anterior (SHA)** e o **semiplano horizontal posterior (SHP)**. Considera-se também que o eixo x divide o plano frontal de projeção em dois semiplanos: o **semiplano frontal superior (SFS)** e o **semiplano frontal inferior (SFI)**.

Estes semiplanos organizam o espaço nos quatro diedros ou quadrantes, já atrás mencionados. O 1º diedro é delimitado pelo SHA e pelo SFS; o 2º diedro é delimitado pelo SHP e pelo SFS; o 3º diedro é delimitado pelo SHP e pelo SFI; e o 4º diedro é delimitado pelo SFI e pelo SHA.

Por vezes consideram-se ainda dois planos bissetores destes quatro quadrantes. Estes planos são referidos como o plano **bissetor dos quadrantes ímpares**, ou β_{13} , e como o **plano bissetor dos quadrantes pares**, ou β_{24} . Estes planos correspondem ao lugar geométrico dos pontos cujo valor absoluto da cota e do afastamento são iguais entre si. Na figura seguinte ilustram-se estes elementos de forma esquemática.

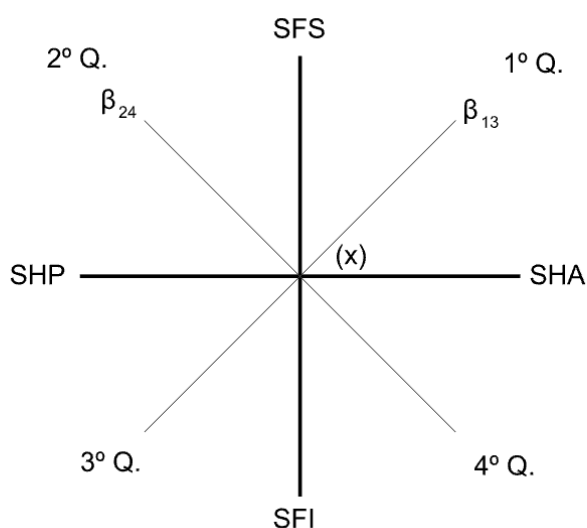


Fig. 1.35. Representação esquemática (“vista de lado” em que o eixo x se reduz a um ponto) dos semiplanos de projeção, dos quadrantes, e dos bissetores dos quadrantes.

Para tornar operativa a representação num único plano, é comum considerar-se uma rotação de 90° , em sentido positivo, do plano frontal de projeção, em torno do eixo coordenado x , até que este plano coincida com o plano horizontal de projeção que, na prática, corresponderá ao

plano do desenho. Se for conveniente, pode ainda ser considerada uma translação do plano frontal de projeção, na direção do eixo y , após a rotação. Este sistema de representação também recebe a designação de **Método de Monge** e uma representação produzida neste sistema designa-se **Épura**.

Um ponto A fica representado pelas suas projeções, A_1 no plano horizontal de projeção, e A_2 no plano frontal de projeção. Esta última projeção acompanha o movimento do rebatimento do plano frontal de projeção para o plano horizontal de projeção (figura 1.36.a). A disposição operativa do sistema de representação é a que está ilustrada na figura 1.36.b.

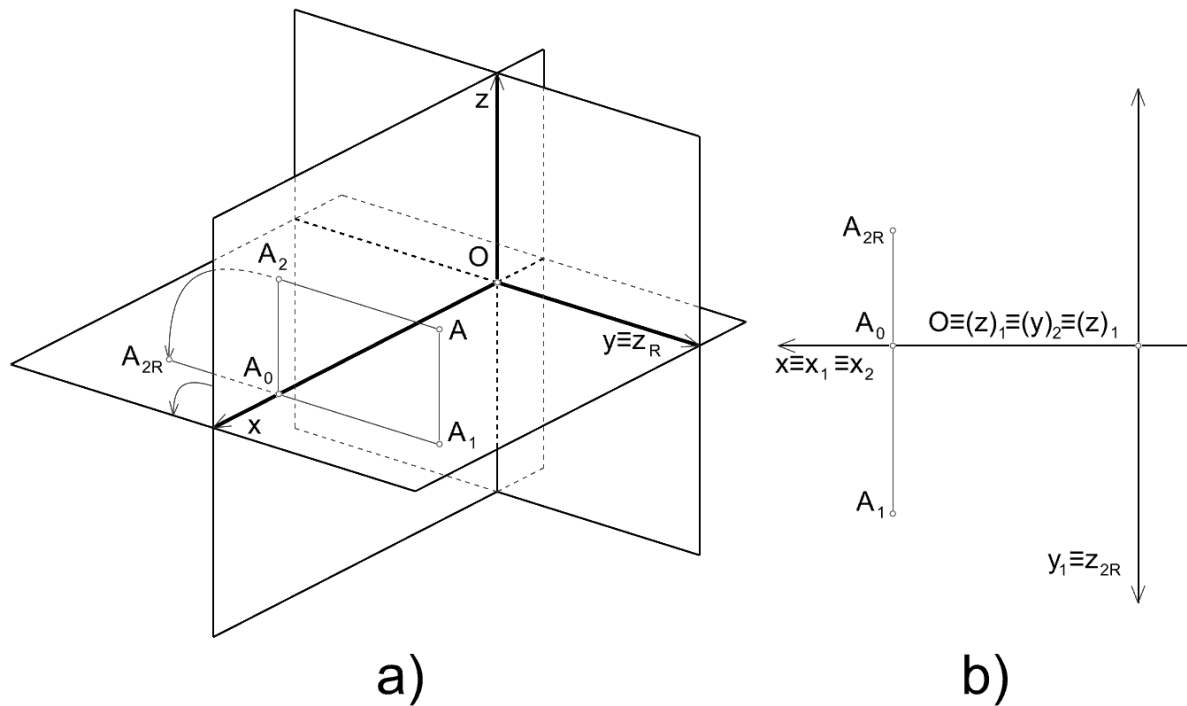


Fig. 1.36. Sistema da Dupla Projeção Ortogonal: a) ilustração em perspectiva; b) disposição operativa do sistema na folha de desenho.

Neste caso, o ponto A tem todas as coordenadas positivas por que se situa no primeiro quadrante e primeiro octante. O valor da abcissa do ponto é dado por $\overline{A_0O}$. O valor da cota é dado por $\overline{A_0A_2R}$. E o valor do afastamento é dado por $\overline{A_0A_1}$. No desenho figura 1.36.b, o segmento de reta perpendicular ao eixo x que passa pelos pontos A_0 , A_1 e A_2 designa-se por **linha de chamada**. Para evitar excesso de notação, é costume não notar o rebatimento nem as projeções dos eixos. Assim o que consta na figura 1.36.b é simplificado dando origem ao que se pode observar na figura 1.37. E por vezes pode mesmo omitir-se a representação e notação dos eixos y e z .

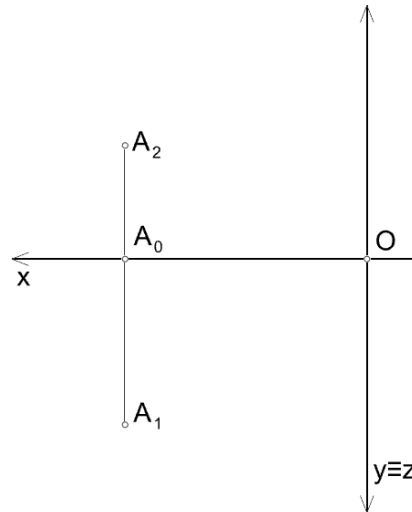


Fig. 1.37. Disposição operativa do sistema na folha de desenho com a notação simplificada.

Em aplicações práticas, por exemplo no contexto da arquitetura ou design, se na representação for óbvia a distinção entre as duas projeções, pode prescindir-se da notação em subscrito. Adicionalmente, se a percepção do objeto representado for óbvia pode ainda prescindir-se da identificação da notação dos seus elementos constituintes, como os pontos e linhas.

Se removermos um dos planos de projeção, por exemplo o plano frontal de projeção, e ficarmos apenas com a projeção ortogonal no plano horizontal de projeção, à qual devemos acrescentar uma notação respeitante à cota dos elementos representados, obtemos o **Sistema Cotado**. Neste sistema, por exemplo um ponto **A** com cota igual a **4** unidades de altura fica representado pela sua projeção no plano horizontal associada à sua cota. Pode escrever-se **A₄** ou **4A** consoante seja preferível destacar a designação do ponto ou a sua cota. No caso da primeira opção, não devemos confundir esta notação com a relativa à dupla projeção ortogonal, em que os subscritos identificam a projeção e não a cota. Por esta razão, consideraremos preferencialmente a segunda opção. No caso do sistema cotado é importante especificar a unidade a que se refere a altura. Na figura 1.38 mostra-se a representação de um segmento de reta **[AB]** em que o ponto **A** tem **4** unidades de cota e o ponto **B** tem **7** unidades de cota. A **unidade de altura (UA)** é dada graficamente através de uma **escala**. Quando está em causa a determinação de grandezas métricas, a escala é um elemento fundamental do desenho. Eventualmente pode prescindir-se da escala no caso em que nos ocupamos apenas das proporções.

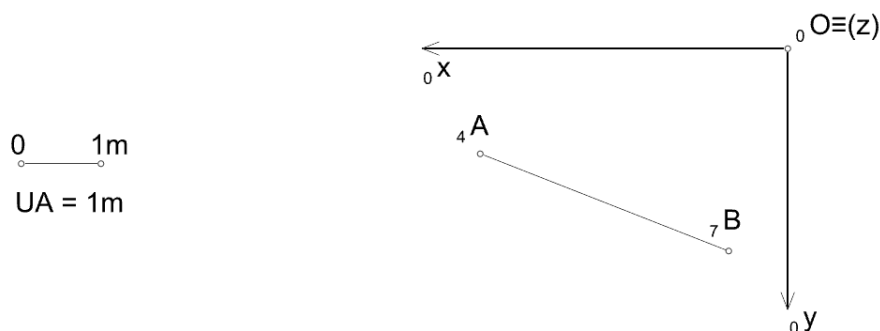


Fig. 1.38. Disposição operativa do sistema cotado na folha de desenho.

Conhecida a distância entre os pontos **A** e **B** na projeção horizontal, também designada como **distância horizontal (DH)**, e conhecida a diferença entre as cotas dos pontos, também designada como **distância vertical (DV)**, pode determinar-se o **declive (d)** do segmento de reta como $d = \frac{DV}{DH} = tg(\alpha)$. **Pendente** é outro termo que significa declive. Nesta expressão, α representa a inclinação do segmento de reta em relação ao plano horizontal de projeção. Pode ainda escrever-se $d = \frac{UA}{I}$, em que **I** representa a distância horizontal entre dois pontos de cota inteira consecutiva, também designada como **intervalo (I)**. Por exemplo se **UA = 1.5m** e **I = 2m**, vem $d = 3/4$. Se $d < 1$ então $\alpha < 45^\circ$, se $d = 1$ então $\alpha = 45^\circ$, e se $d > 1$ então $\alpha > 45^\circ$. Designa-se por **graduação** a determinação dos pontos de cota inteira de uma reta, a determinação das retas de cota inteira de um plano, ou ainda, de forma mais geral, a determinação das linhas de cota inteira de uma superfície, também designadas por **curvas de nível**. Assim, os conceitos de declive e intervalo tanto podem aplicar-se a retas como a planos. No caso dos planos, o declive em relação ao plano horizontal é dado pelo declive das retas do plano perpendiculares às retas de nível. Cada uma destas retas designa-se por **reta de maior declive**.

É comum encontrar em manuais de geometria descritiva uma distinção entre reta de maior declive e **reta de maior inclinação**. Uma como tendo a direção das retas perpendiculares às retas horizontais do plano e a outra como tendo a direção das retas perpendiculares às retas frontais do plano. Em nossa opinião esta distinção não tem sentido. Uma reta de maior declive também é uma reta de maior inclinação. Declive e inclinação são conceitos relacionados mas não são a mesma coisa. A inclinação é dada por um ângulo e o declive é a tangente trigonométrica desse ângulo. Assim, a inclinação de uma reta relativamente a um plano varia entre 0° e 90° enquanto que o declive varia entre 0 e $+\infty$. Por exemplo, é errado dizer que uma reta tem um declive de 40° em relação a um plano, ou dizer que tem uma inclinação de **50%** em relação ao um plano.

Por vezes, no sistema cotado não se representam os eixos. Isto acontece quando não é relevante a orientação do objeto representado em relação ao sistema de coordenadas.

O sistema da DPO pode ser expandido adicionando mais planos de projeção consoante as necessidades da representação, dando origem à **Múltipla Projeção Ortogonal (MPO)**. Abaixo, trataremos o sistema cotado e a DPO como integradas na MPO por entendermos que não há nada de verdadeiramente distintivo entre estes sistemas de representação. Com efeito, parte-se sempre de projeções ortogonais em planos de projeção. A diferença está no número de planos de projeção. A quantidade de planos de projeção adequados à resolução de um problema específico deve ser deixada em aberto à escolha de quem resolve o problema. Não há propriamente uma regra específica. No exemplo que se dará de seguida ilustrar-se-á bem a transversalidade entre estes sistemas de representação.

Se a direção de projeção for oblíqua a todos os eixos coordenados (pode haver exceções), teremos em geral o que se designa por **Axonometria** ou **Sistema Axonométrico**. Neste caso, se o plano de projeção for perpendicular às retas projetantes, temos a **Axonometria Ortogonal** e se for oblíquo às retas projetantes, mesmo que seja paralelo a um dos planos coordenados, temos a **Axonometria Clinogonal** ou **Axonometria Oblíqua**.

Se a projeção for central, com centro de projeções exterior ao plano de projeção, temos o **Sistema Cónico**. Embora seja comum considerar a **Perspetiva** como uma aplicação prática do sistema cónico, também é possível designar por perspectiva as representações decorrentes da

representação axonométrica. Neste texto designaremos a representações axonométricas por **Perspetiva Axonométrica** e as resultantes do Sistema Cónico como **Perspetiva Cónica** ou **Perspetiva Central**. Há ainda a designação do sistema cónico, adotada por alguns autores, como **Axometria Cónica** quando o plano de projeção é oblíquo aos três planos coordenados, designação que não adotaremos.

No âmbito estrito da geometria descritiva, entendida tradicionalmente, em todos os sistemas a representação desenvolve-se num único plano, em última análise, o plano do desenho. Neste sentido, toda a geometria descritiva torna-se operativa através da geometria plana. E isso é independente da folha de desenho ser física ou digital.

Considerando a incorporação de meios de representação digital na geometria descritiva há a distinguir duas situações.

A primeira corresponde essencialmente a uma computadorização dos processos, sobretudo quando se fala de desenho de precisão. A folha de papel dá origem a uma folha digital, mas não há nada de fundamentalmente diferente, embora a forma de encarar os processos gráficos possa, e deva, mudar face ao manancial de opções de que se passa a dispor, sobretudo se utilizarmos **ambientes de geometria dinâmica** (AGD). Neste caso a resolução dos problemas de geometria no espaço continua indissociável da construção das projeções por meio da geometria plana. Apenas muda o suporte e porventura a quantidade de funcionalidades disponíveis. Um ambiente deste tipo poderia ser designado por **ambiente digital de modelação geométrica bidimensional** (ADMG2D).

A segunda corresponde à adoção de **ambientes digitais de modelação geométrica tridimensionais** (ADMG3D). Neste caso passa a haver, quase sempre, uma dissociação entre a resolução do problema no espaço e a sua aparência através das projeções, isto porque estas são resolvidas e mostradas em tempo real, ou obtidas de forma automática enquanto se opera a modelação. Essas projeções, em geral emulam os sistemas de representação tradicionais (vistas ortogonais, perspetivas axonométricas e perspetivas cónicas) podendo ainda incluir outros (perspetivas cilíndricas, projeções estereográficas, etc). Neste tipo de ambiente, a passagem de um sistema de representação a outro não é mais que a possibilidade de escolha, dinâmica e em tempo real, do modo como se observa para a cena modelada. Mas também aqui, por vezes, é necessário ter como ponto de partida, ou de passagem, no processo de resolução de um problema de geometria no espaço, a consideração de projeções planas. Neste sentido, pode considerar-se que um ADMG3D é uma espécie de **Sistema Integrado de Representação**. E, na medida em que as operações a realizar tiverem sobretudo um carácter gráfico, postulamos que nos podemos considerar no âmbito da geometria descritiva ao adotar um tal ambiente de trabalho. É como se estendêssemos o mundo das construções geométricas ao espaço tridimensional. Agora, determinar a interseção de uma reta com uma circunferência ou com uma superfície esférica são operações gráficas sintéticas, na sua aparência, igualmente imediatas e acessíveis operativamente. Os sistemas de desenho assistido por computador (CAD), utilizados na indústria, caem nesta categoria. Também caem nesta categoria os **ambientes de geometria dinâmica tridimensionais** (AGD3D). Estes sistemas integrados, são uma extensão natural dos meios e suportes de que a geometria descritiva dispõe, seja para um estudo mais abstrato das formas geométricas seja para aplicações práticas como a representação de edifícios em arquitetura ou de mecanismos em engenharia.

Assim, a pretexto da representação de uma figura geométrica simples, o cubo, no exemplo prático seguinte, iremos expor os princípios e regras operativas de cada um dos sistemas de representação. Numa primeira iteração iremos partir da DPO e percorrer todos os demais sistemas de representação, incluindo o que designámos por Sistema de Representação Integrado, mostrando que é mais o que os une que aquilo que os separa. Quem estiver familiarizado com o sistema da DPO irá notar algumas diferenças em relação à abordagem habitual, mas não deverá deixar-se confundir porque, se verificar com atenção, verá que o que vamos fazer é equivalente em tudo às práticas comumente estabelecidas. Com efeito, vamos apresentar várias versões da resolução do problema que nos vai servir de pretexto, para que nos possamos ir acostumando à ideia de que a disposição das projeções no desenho não tem de ser rígida, embora tenha de ser consistente, e à ideia de que existe uma continuidade entre os vários sistemas de representação. Nesta fase a representação é intrinsecamente bidimensional pouco importando se os meios são analógicos ou digitais. Posteriormente, demonstrada a transversalidade entre os vários sistemas de representação, estes serão tratados separadamente no sentido de evidenciar procedimentos mais ou menos específicos e de sublinhar distintas vocações dos mesmos. Nessa fase, a DPO o Sistema Cotado e a MPO serão tratados em conjunto como se de um único sistema de representação se tratasse. No final fazemos uma incursão pelo que designámos de Sistema Integrado de Representação, fazendo uso da modelação geométrica tridimensional para ilustrar alguns exemplos de resolução de problemas análogos aos que abordámos de forma mais tradicional através de desenho bidimensional.

Após o exemplo prático inicial, serão tratados os seguintes tópicos ao longo desta PARTE I:

- Representação do ponto, da reta e do plano
- Operações relacionadas com o ponto, a reta e o plano (relações de pertença, paralelismo e perpendicularidade, interseções, distâncias e ângulos)
- Representação de figuras geométricas simples (cone, cilindro, esfera, prismas, pirâmides, poliedros regulares, superfícies topográficas)
- Operações relacionadas com as figuras geométricas simples (tangências e concordâncias, interseções, secções planas com destaque para as produzidas em cones e cilindros de revolução, truncagens, operações booleanas, transformações geométricas, planificações)
- Aplicações (composição e ideação de volumes, modelação de coberturas, modelação de terrenos, movimentos, sombras, reflexos, aplicações gráficas)

Nem todos os tópicos serão abordados em todos os sistemas de representação uma vez que isso seria redundante, porque é necessário que se consiga extrapolar, e porque há sistemas mais vocacionados para umas operações que outros.

Um exemplo prático

Através de um exemplo prático, faremos uma passagem geral pelos sistemas de representação e demonstraremos a sua inter-relação. Interessa-nos mostrar que é mais o que une os vários sistemas do que aquilo que distingue. Defendemos que a utilização dos vários sistemas de representação não deve ser compartimentada. É muito importante que se faça, desde o início, o esforço por cruzar as fronteiras entre eles e, com isso, perceber que, na verdade, essas não

são rígidas. Este exemplo é para aqueles que já tiveram contacto com a geometria descritiva e desenvolveram alguma proficiência na sua prática.

Para quem está a tomar contacto com a geometria descritiva pela primeira vez, adverte-se que este exemplo poderá, eventualmente, ser difícil de seguir. Se for esse o caso, recomenda-se passar de imediato às secções sobre a Múltipla Projeção Horizontal, Perspetiva e Sistema Integrado de Representação, por esta ordem. E no final poderá voltar aqui, e em jeito de síntese, seguir este exemplo prático.

Considere-se o seguinte enunciado:

Dados:

- A unidade é o centímetro (**cm**).
- Os pontos $A_{(5, 4, 1)}$ e $C_{(1, 2, 1)}$ definem a diagonal de um quadrado [**ABCD**] contido num plano horizontal (paralelo ao plano coordenado xy).
- O quadrado [**ABCD**] é a face de menor cota de um cubo.

Problema:

Represente o cubo nos vários sistemas de representação.

Resolução:

Vamos proceder à resolução deste problema nos vários sistemas de representação procurando demonstrar que há transversalidades entre eles que as fronteiras entre sistemas não são estanques.

DPO, MPO e sistema Cotado

A resolução, em DPO, começa pela representação dos pontos **A** e **B** através das suas projeções no plano frontal de projeção e no plano horizontal de projeção. No caso da projeção frontal é omitida a coordenada **Y** e no caso da projeção horizontal é omitida a coordenada **Z**. O entendimento espacial da situação vem da leitura cruzada das duas projeções. No caso de haver apenas uma projeção horizontal, o entendimento espacial deriva da aposição do valor da cota aos pontos representados.

Uma vez que o quadrado [**ABCD**] é horizontal, a sua projeção horizontal [**A₁B₁C₁D₁**] apresenta-se em verdadeira grandeza e a sua projeção frontal reduz-se a um segmento de reta paralelo a x_2 , isto é, paralelo à projeção frontal do eixo coordenado x . Note-se esta representação distingue-se do que foi mostrado na figura 1.37 porque, após o rebatimento do plano frontal de projeção, considerámos uma translação na direção do eixo y . Deste modo, as duas projeções do eixo x ficam distintas no desenho. Mas não nos devemos deixar perturbar por isso.

Como as arestas do cubo têm todas o mesmo comprimento, e como o cubo tem duas faces horizontais, as arestas que lhes são perpendiculares são paralelas ao plano coordenado zx , isto é, são verticais, de onde a suas projeções frontais se apresentam em verdadeira grandeza. Assim, pode transferir-se o comprimento de um dos lados do quadrado [**A₁B₁C₁D₁**], no caso $\overline{A_1D_1}$ para a projeção frontal de modo a completá-la.

Para além da notação habitual que distingue as projeções nos planos xy e zx , incluímos também uma legenda para cada uma das projeções bem como um símbolo que, em cada projeção, identifica o sentido de leitura da outra projeção. Note-se que as projeções devem ser construídas de modo a que a sua leitura, no desenho, corresponda ao sentido indicado, isto é, não podem aparecer invertidas.

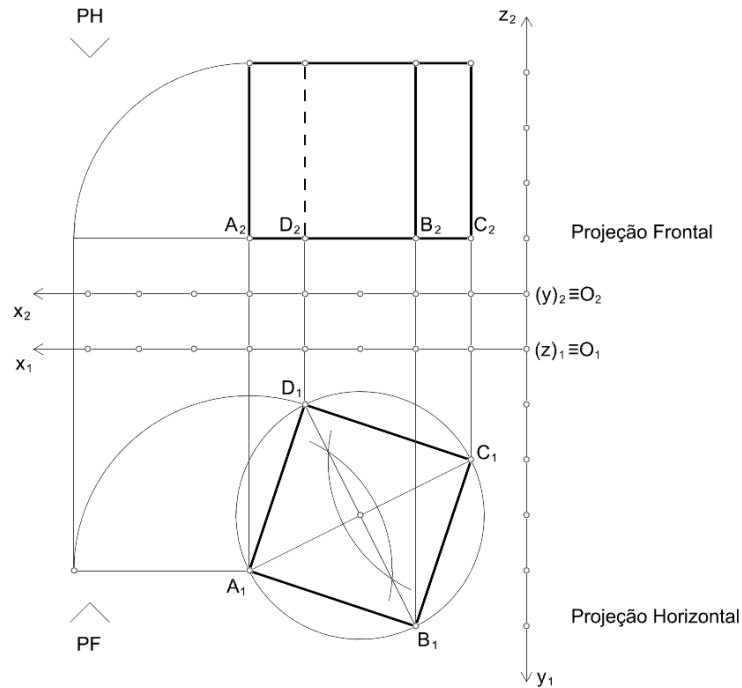


Fig. 1.39. Representação de um cubo em DPO – versão 1.

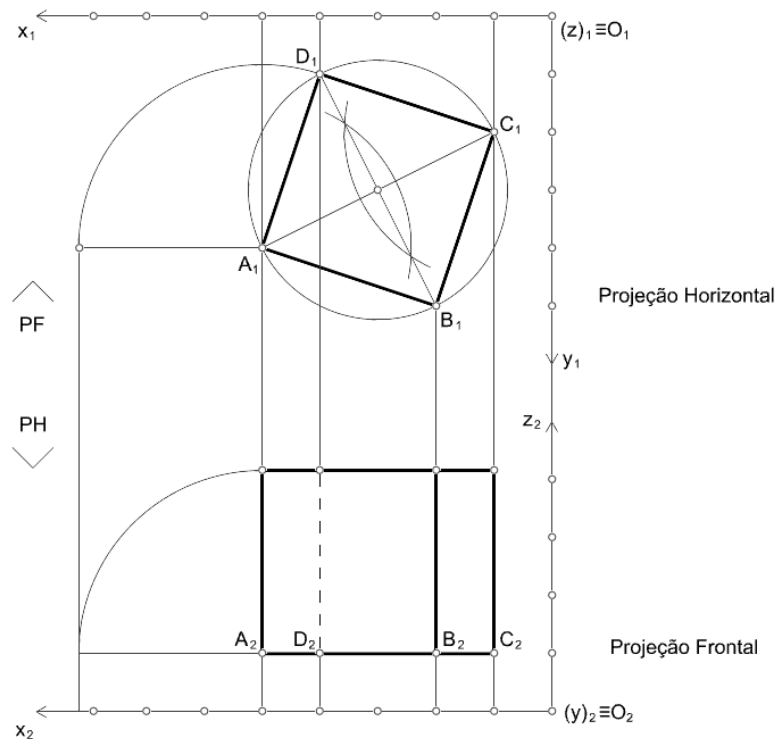


Fig. 1.40. Representação de um cubo em DPO – versão 2.

A primeira versão da solução (figura 1.39) é a que mais se aproxima das convenções habituais, com a diferença de distinguirmos, no desenho, as duas projeções do eixo x .

Habitualmente, essas projeções são representadas coincidentes com a menção única x . Poderíamos tê-lo feito também. Porém, ao distinguir as duas projeções do eixo colocamos em evidência cada uma das projeções e sublinhamos que a disposição relativa das duas projeções pode ser variável, como fica patente na segunda versão da resolução (figura 1.40).

Também optámos por distinguir a projeção frontal do eixo z da projeção horizontal do eixo y , embora estas sejam na verdade coincidentes no desenho. Ao distingui-las estamos a sublinhar o sentido positivo de cada um destes eixos.

Também é possível orientar de maneira distinta o plano xy no plano do desenho (figura 1.41). Neste caso, se quisermos manter o sentido de projeção relativo à projeção frontal, verificamos que esta aparece rodada 180° no desenho, bem como a notação, quando comparada com as duas versões anteriores, isto para manter o sentido lógico de leitura da projeção frontal.

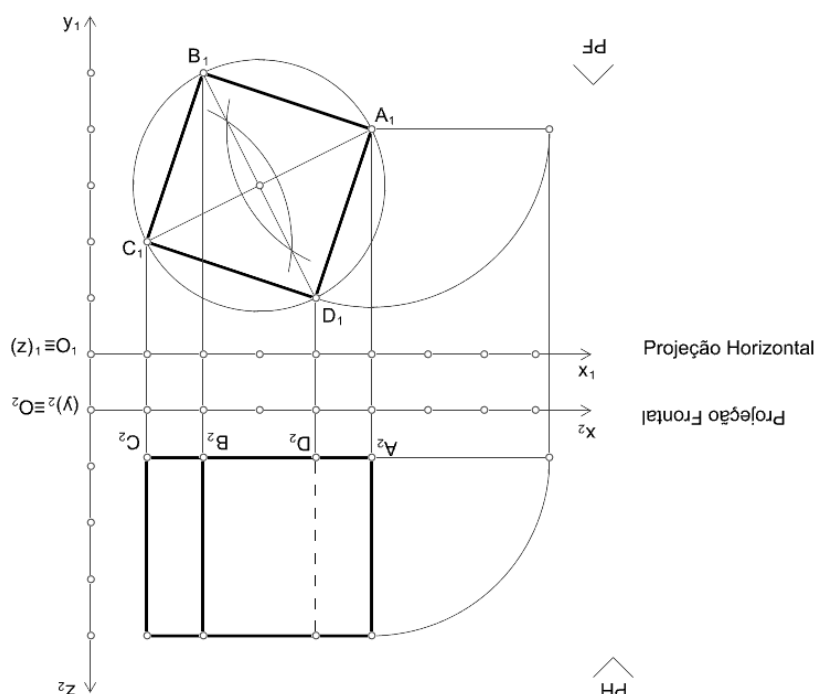


Fig. 1.41. Representação de um cubo em DPO – versão 3.

No entanto poderá inverter-se o sentido da projeção frontal. Mas nesse caso, como se observa na versão seguinte (figura 1.42), a projeção frontal já não é a mesma das três versões acima, sendo agora invisível a projeção da aresta vertical que contém o vértice B .

E neste caso, a disposição das projeções também pode ser a que a seguir se ilustra (figura 1.43).

Repare-se que, em todas as situações, as projeções do eixo x foram sempre colocadas na horizontal no desenho. Mas isso não é estritamente necessário. Com efeito, é isso que sucede quando passamos da DPO à MPO. A diferença significativa nesta passagem é a inclusão de novas projeções ortogonais. Isso pode ser feito através de um reposicionamento do referencial de modo a orientar, por exemplo, o novo plano $z'x'$ de acordo com a obtenção de uma nova projeção frontal que coloque duas faces laterais do cubo em verdadeira grandeza (figura 1.44).

Neste caso, o novo referencial tem o plano $z'y'$ paralelo à face vertical do cubo passante pelos vértices A e B , e o plano $x'y'$ coincidente com o plano xy . A nova projeção frontal, notada com $2'$, representa a verdadeira grandeza de duas faces do cubo e as cotas dos pontos são preservadas entre as duas projeções frontais uma vez que os dois planos horizontais de projeção são coincidentes.

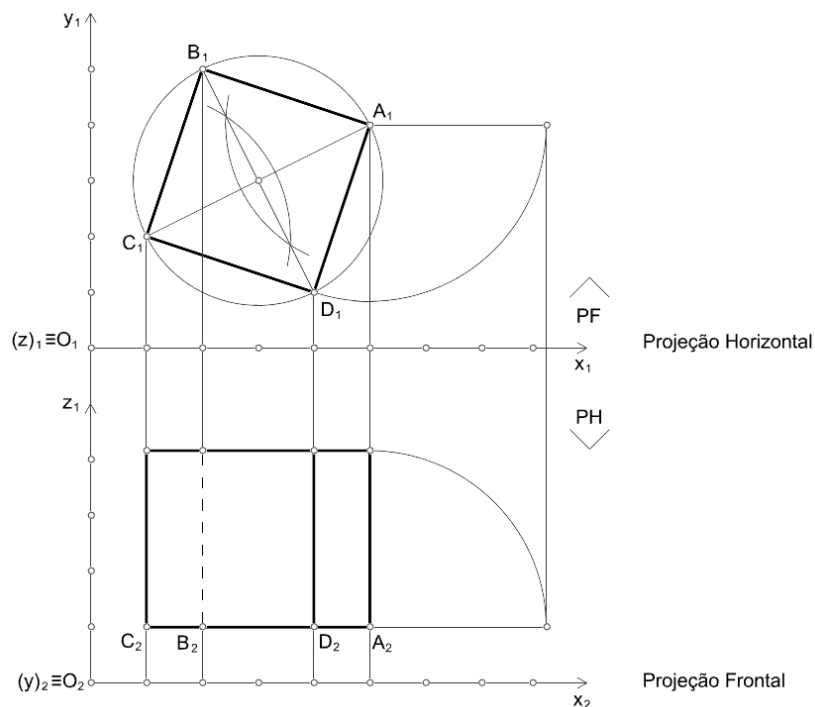


Fig. 1.42. Representação de um cubo em DPO – versão 4.

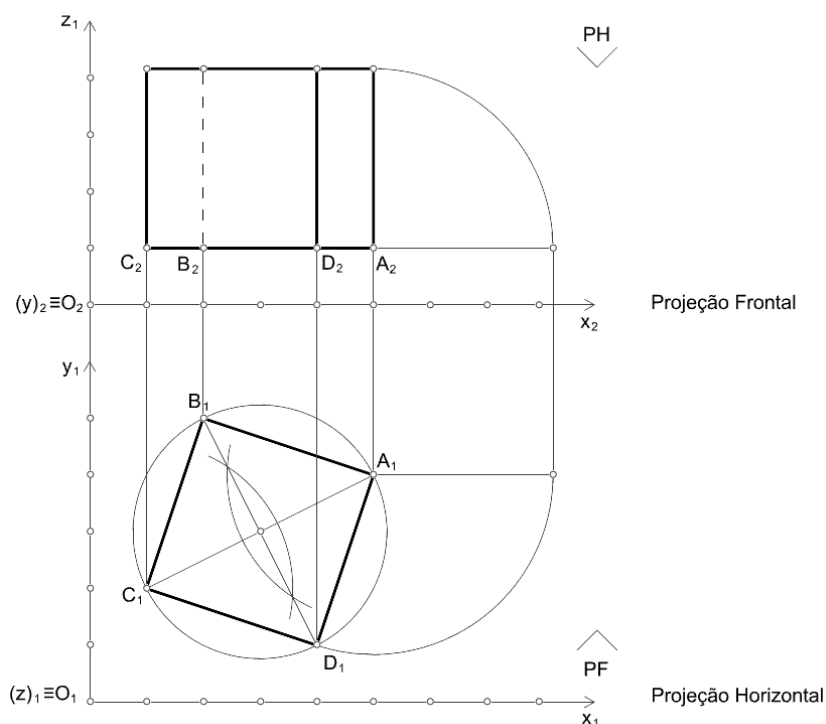


Fig. 1.43. Representação de um cubo em DPO – versão 5.

Facilmente se percebe que, caso a figura a representar seja mais complexa ou o número de projeções seja maior, a notação tende a tornar-se mais densa podendo tornar o desenho confuso. Assim, caso a disposição das projeções não levante dúvidas de interpretação, a notação pode ser simplificada. Por exemplo os vértices do quadrado podem reter apenas as suas designações originais, **A**, **B**, **C** e **D**, ou até mesmo estas poderão, eventualmente ser omitidas. É o que se faz em desenho de arquitetura. No entanto, apenas se aconselha proceder a esta omissão quando se estiver à vontade com o sistema de representação.

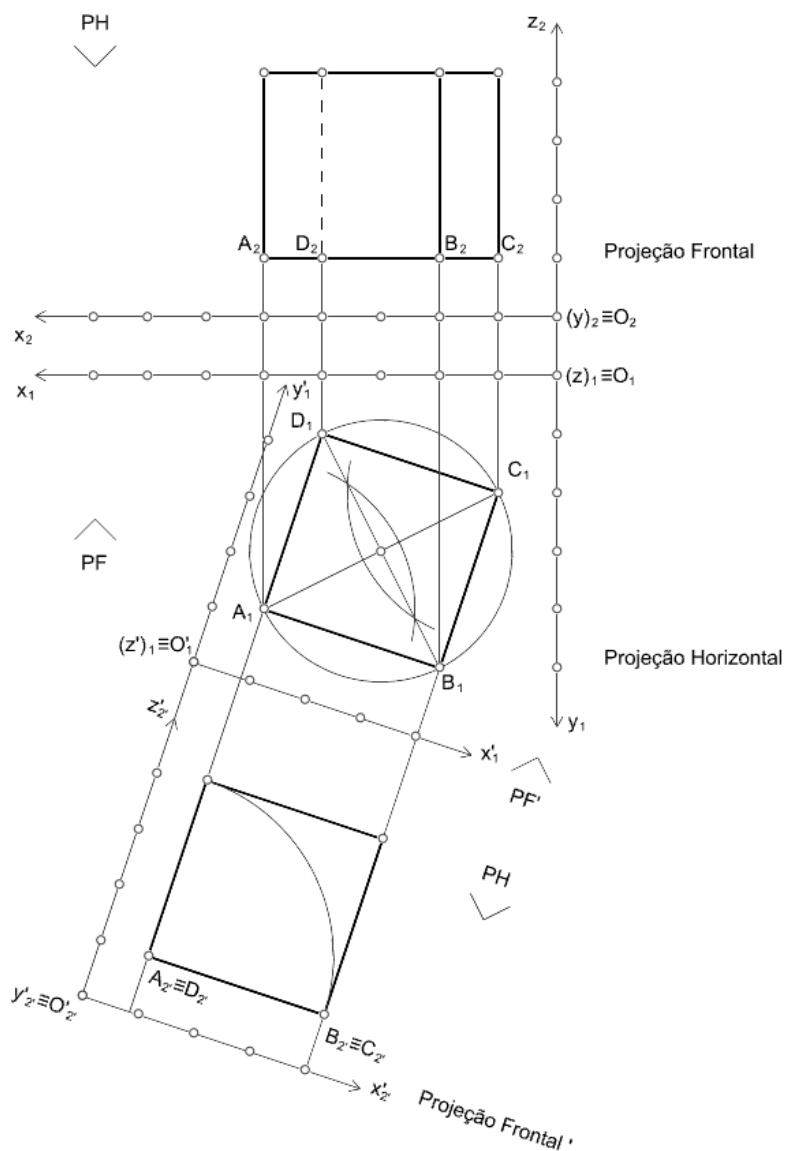


Fig. 1.44. Passagem da DPO à MPO através do reposicionamento do sistema de coordenadas.

No caso de utilizarmos o sistema cotado, tomando o plano xy como o plano de projeção, a representação reduz-se à projeção horizontal com a identificação das cotas dos pontos em relação ao **Plano de Referência**, neste caso o plano xy . Mas note-se que o plano de referência pode não ser o plano de projeção, mas sim qualquer outro que lhe seja paralelo. Nesta representação é conveniente identificar todos os vértices do cubo e respetivas cotas, caso contrário não é possível interpretar a representação como correspondendo a um cubo (figura 1.45). E repare-se que, caso uma cota só possa ser notada aproximadamente, o seu valor deve ser precedido do símbolo $\sim$. O valor ~ 4.2 indicado dentro de um retângulo representa

aproximadamente a cota da face superior do cubo arredondada às décimas. Da mesma forma, os índices **0** associados às projeções dos eixos x e y e da origem **O**, representam as cotas destes elementos.

Com este exemplo julgamos que fica evidente que, para além do número de projeções e alguma notação associada, não há verdadeiramente uma distinção entre o Sistema Cotado, a DPO e a MPO. Neste sentido, parece-nos ser benéfico que estes três sistemas sejam tratados em conjunto, para não criar distinções espúrias, porque de um pode passar-se rapidamente aos outros.

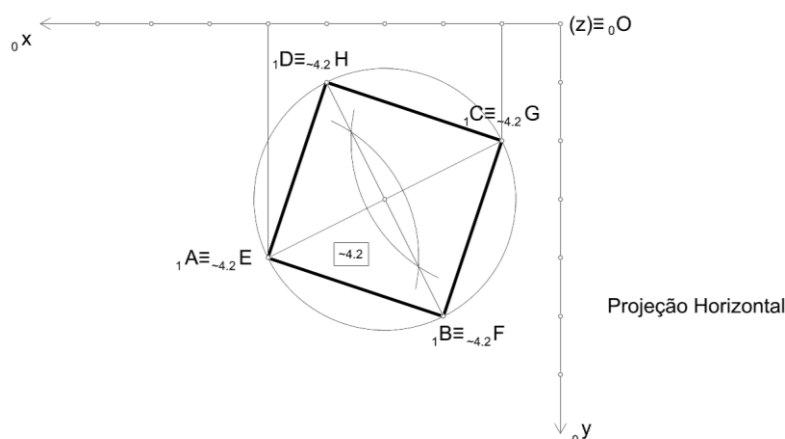


Fig. 1.45. Passagem da DPO às projeções cotadas através da remoção da projeção frontal e da aposição dos valores das cotas.

Da DPO ao Sistema Axonométrico

Embora a representação axonométrica possa ser tratada de forma independente dos sistemas de representação acima discutidos, vamos por agora, considerá-la obtida no contexto da MPO. Isto é, vamos ver que a projeção axonométrica é apenas mais uma projeção que se pode obter por processos idênticos aos utilizados até aqui. Este não será o modo seguido daqui em diante, mas através da sua adoção neste exemplo reforçamos a ideia de que há interligações entre os vários sistemas de representação.

Axonometria ortogonal

Considere-se uma axonometria ortogonal tendo o plano π , perpendicular à reta **OP**, como plano de projeção, também designado por **quadro** ou **plano axonométrico**. O plano π passa pelo ponto $P_{(2.5, 2.5, 2.5)}$. O sentido da projeção é de **P** para **O**. A representação axonométrica do cubo, ou simplesmente, a axonometria do cubo, é obtida através da projeção dos vértices do cubo no plano axonométrico (figura 1.46).

Começamos por considerar o plano δ definido pelo eixo z e pela reta **OP**. De seguida projetamos o conjunto (cubo, referencial e reta **OP**) ortogonalmente no plano δ , dando origem à projeção **2'** (nova projeção frontal). Note-se que, no exemplo precedente, considerou-se o reposicionamento do referencial para a obtenção da nova projeção frontal. Neste caso, a notação do plano δ e a indicação do sentido da nova projeção desempenham o mesmo papel que a definição de um novo referencial. Na prática, é como se o plano δ passasse a ser o novo plano $z'x'$. Nesta projeção, a representação da reta **OP** está em verdadeira grandeza e, por isso, o plano π , nesta projeção fica representado por uma reta $Z_2'P_2'$ perpendicular à reta $O_2'P_2'$. Nesta projeção foram preservadas as cotas dos pontos. Por fim, constrói-se nova projeção

ortogonal do conjunto no plano π , notada por $2''$. Mais uma vez, não há menção ao reposicionamento do referencial. Porém, é como se agora o plano π fosse um novo plano coordenado $x''y''$ no qual se obtém uma nova projeção.

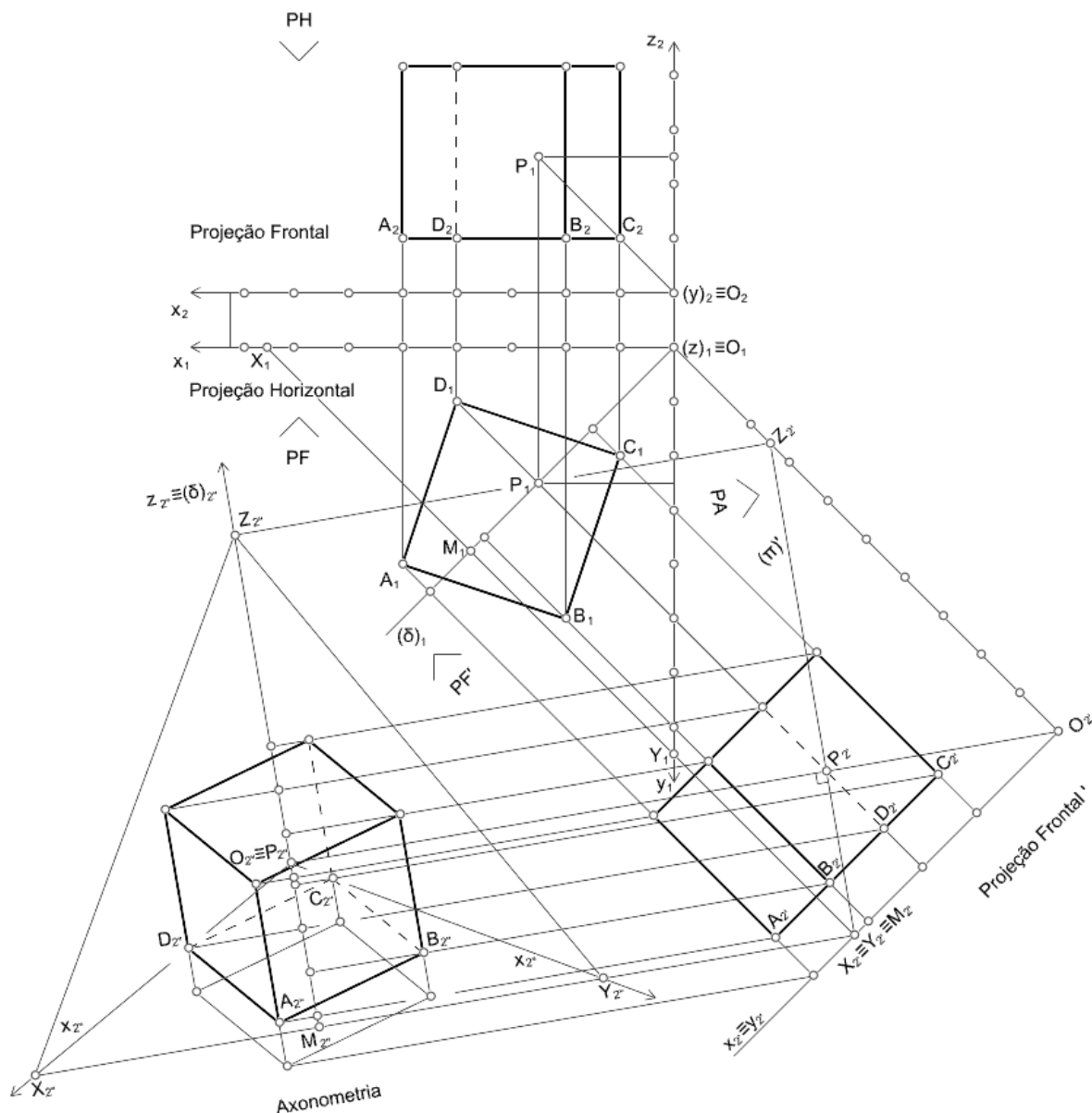


Fig. 1.46. Passagem da DPO à axonometria ortogonal.

Nesta projeção foram preservados os afastamentos dos pontos considerados em relação ao último par de projeções, projeção 1 e projeção 2'. Esta última projeção, projeção 2'', se isolada, corresponde ao que podemos designar por axonometria. Note-se que, neste caso da representação dita axonométrica, por ser costume orientar-se a projeção do eixo z na vertical, adotou-se este sentido de leitura. Daqui resulta que, em boa verdade, tratando-se de uma nova projeção ortogonal, a axonometria ortogonal não se distingue verdadeiramente dos sistemas anteriores. A designação deriva do facto de nenhuma das projeções dos eixos coordenados iniciais ficar reduzida a um ponto. Numa axonometria, as projeções dos eixos coordenados designam-se por **eixos axonométricos**. O ângulo formado por cada par de semieixos axonométricos positivos designa-se por **ângulo axonométrico**. O triângulo $[XYZ]$ definido pelos traços dos eixos coordenados no plano axonométrico designa-se por **triângulo**

fundamental da axonometria e é uma figura fundamental quando se opera diretamente sobre este sistema de representação.

Axonometria oblíqua

Nada obsta a que a projeção do conjunto no plano axonométrico seja oblíqua. Neste caso, costuma considerar-se um dos planos coordenados como plano de projeção. Porém nada obriga a que assim seja. Com efeito, o teorema de Pohlke-Schwarz, de que falaremos adiante, legitima qualquer relação de inclinação entre as projetantes e o plano de projeção, qualquer que este seja. Mas por agora consideremos o caso em que o plano coordenado xy é o plano de projeção, isto é, é o plano axonométrico. Para o efeito, a direção das retas projetantes é dada pela reta $\mathbf{PO}$ com $\mathbf{P}_{(1.5, 2.5, 4)}$. O sentido da projeção é de $\mathbf{P}$ para $\mathbf{O}$ e está notado na projeção frontal e na projeção horizontal (figura 1.47).

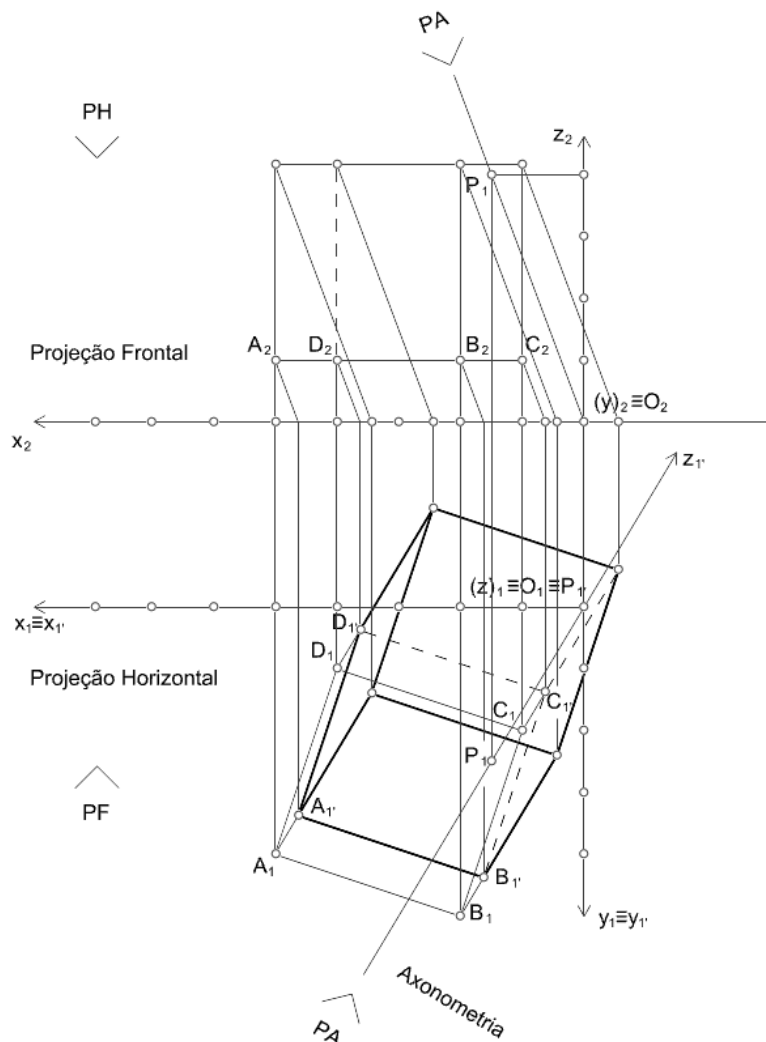


Fig. 1.47. Passagem da DPO à axonometria oblíqua.

A representação axonométrica oblíqua, notada por $1'$, obtém-se conduzindo retas projetantes, isto é, paralelas a $\mathbf{OP}$, por cada vértice do cubo, e determinando as interseções destas com o plano axonométrico, neste caso coincidente com o plano coordenado xy . Mais uma vez, a forma de obter a axonometria, como se de uma sombra se tratasse, está perfeitamente embebida no mesmo ambiente que utilizámos até aqui para obter as demais representações. Fica mais uma vez sublinhada a proximidade entre os vários sistemas de representação. Neste

desenho, como a representação axonométrica se sobrepõe à projeção horizontal inicial, optámos por representar esta última a traço fino, bem como a projeção frontal inicial, para evidenciar a representação axonométrica.

Da DPO ao Sistema cónico

Por fim, tratamos do sistema cónico. Neste caso é preciso definir um centro de projeções. Consideremos o ponto $Q(3, -6, 2.5)$ a partir do qual se conduzem as retas projetantes que, agora, não são paralelas entre si. Neste caso, o plano de projeção, ou quadro, é o plano coordenado zx , embora qualquer plano, coordenado ou não, possa assumir a função de plano de projeção. A projeção cónica do cubo fica determinada pelos traços das retas projetantes no quadro. Neste desenho optou-se por representar a projeção frontal e a projeção horizontal iniciais do cubo a traço fino para realçar a projeção cónica (figura 1.48).

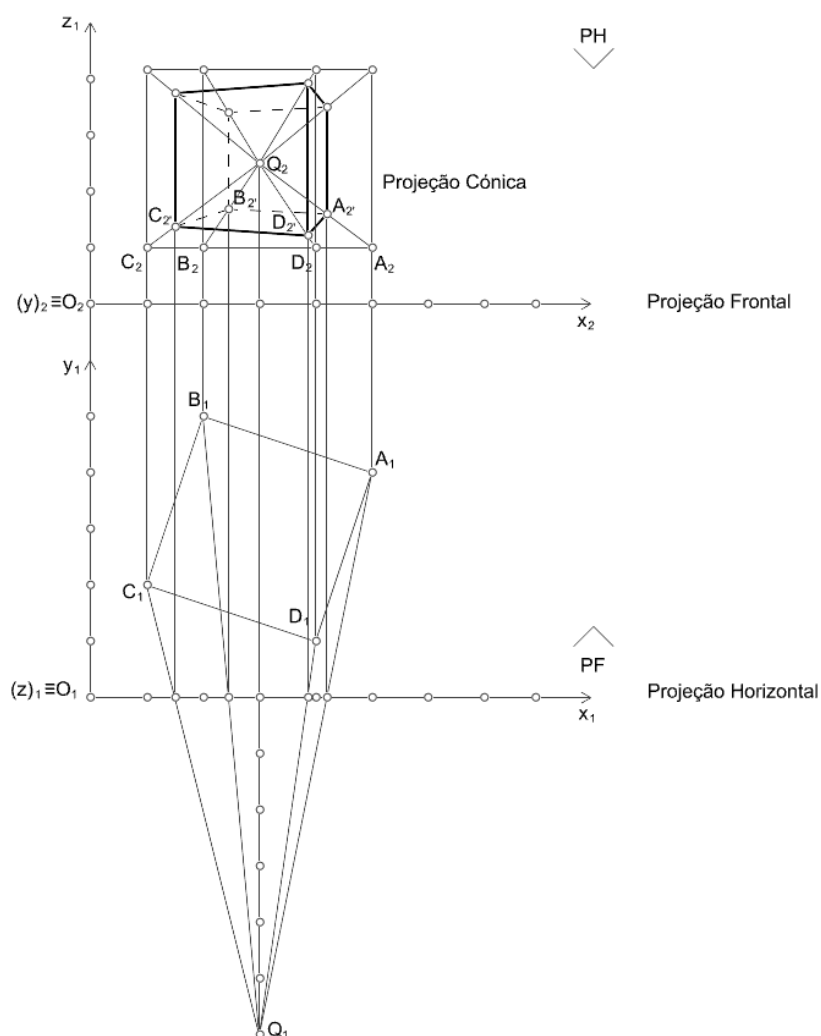


Fig. 1.48. Passagem da DPO à projeção cónica.

Vemos que na projeção cónica aparecem convergências nas projeções de linhas que sabemos serem espacialmente paralelas. Esta convergência e o efeito de redução na dimensão das projeções são características da projeção cónica. Também poderíamos verificar a existência de pontos de fuga se estendêssemos as linhas convergentes bem como poderíamos obter linhas de fuga unindo esses pontos de fuga. Mas vamos deixar isso para o desenvolvimento sistemático da perspectiva cónica que faremos adiante.

Integração dos sistemas de representação em ambiente digital

Por integração dos sistemas de representação em ambiente digital consideramos, genericamente, qualquer ADMG3D que, pela sua natureza, permita o estudo e representação de figuras geométricas espaciais. Considerando um qualquer desses ADMG3D, vamos abordar o mesmo problema de representação do cubo que temos vindo a tratar através dos sistemas tradicionais da geometria descritiva. Os sistemas CAD utilizados na indústria podem considerar-se deste tipo.

O cubo agora é, conceitualmente, construído no espaço. Posicionam-se, através das suas coordenadas, os pontos **A** e **C** dados; instancia-se o segmento de reta que os une; cria-se uma cópia deste segmento; no plano horizontal que o contém, roda-se **90°** o segmento copiado em torno do seu ponto médio; instancia-se o quadrado definido pelos extremos dos dois segmentos de reta; instancia-se um segmento de reta coincidente com um dos lados do quadrado; roda-se esse segmento **90°** em torno de um dos lados do quadrado passante por um dos seus extremos; utiliza-se esse segmento (e o seu comprimento) para restringir a extrusão do quadrado dando origem ao modelo tridimensional do cubo. Neste caso, as projeções que vemos nas quatro janelas da figura seguinte (figura 1.49) correspondem simplesmente a vistas do modelo geradas automaticamente pelo *software*. A única intervenção do desenhador/utilizador passou por definir os parâmetros dessas vistas. Essas vistas não são desenhos que o utilizador possa alterar (a não ser por alteração de parâmetros que condicionam o modo como o *software* gera a vista). São apenas “janelas” abertas para o “espaço virtual” percecionado pelo utilizador através do ecrã do computador.

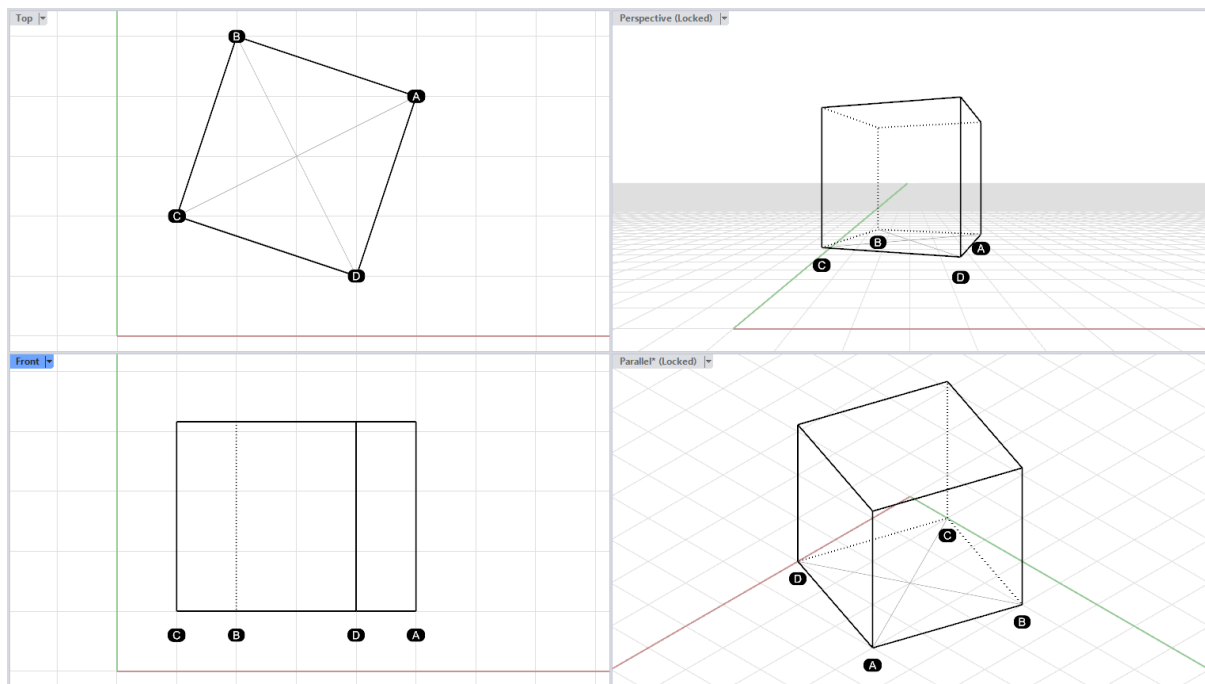


Fig. 1.49. Vistas do modelo tridimensional do cubo no sistema CAD.

Mas note-se que há analogias entre o processo de construção seguido neste exemplo e as ações realizadas nas representações que o precederam. A noção espacial da construção do cubo é idêntica. Mas no primeiro caso, cada projeção tem de ser contruída pelo desenhador; e neste caso é o cubo que vai sendo construído como se de uma maquete se tratasse.

Embora estas vistas sejam janelas abertas sobre o modelo 3D, é possível convertê-las em desenhos bidimensionais editáveis no mesmo sentido em que os dos exemplos anteriores. Mas, mais uma vez, esse é um processo automático realizado pelo *software*, cabendo ao utilizador/desenhador especificar que projeções pretende. Na medida em que esses desenhos são editáveis, para o fazer é necessário entender os princípios da representação geométrico-descritiva tradicional, através do desenho bidimensional. Assim, vemos que a modelação tridimensional consubstancia-se como um ambiente de trabalho que está impregnado dos princípios da geometria descritiva. Nesse sentido, a utilização deste tipo de ambiente para o estudo da geometria, e da geometria descritiva em particular, aparece-nos com toda a lógica e pertinência.

Há que notar que, essencialmente, num “espaço” bidimensional as operações admissíveis são apenas o desenho de linhas, a determinação de pontos resultantes de interseções de linhas, a delimitação de regiões através de limites lineares, e todas as operações de edição e transformação que não saiam do “espaço” bidimensional. Já num espaço tridimensional ampliam-se as operações admissíveis. Para além das operações anteriores, podemos agora obter/construir pontos de interseção entre linhas e superfícies, obter linhas de interseção entre superfícies, definir regiões tridimensionais delimitadas por superfícies, e todas as operações de edição e transformação espaciais. Tudo isto visto através de uma janela, o ecrã do computador ou os ecrãs de uns óculos de realidade virtual.

Análise de uma aplicação de desenho digital

Tal como foi afirmado acima, é preciso ter noção que qualquer ambiente de trabalho que se eleja para o estudo da geometria, seja analógico ou digital, tem o seu potencial e as suas limitações. Assim, tal como os procedimentos práticos tradicionais são um reflexo dos meios disponíveis, também os procedimentos digitais refletem um determinado leque de possibilidades e limitações. Por essa razão, sempre que se adotar um ADMG2D ou ADMG3D para apoiar o estudo da geometria, é conveniente proceder a uma análise do mesmo no sentido de perceber a melhor forma de o integrar e, sobretudo, ganhar uma consciência de que as ferramentas em que se consubstanciam estes ambientes não são infalíveis.

Uma forma de conduzir a análise é seccioná-la em tipos de entidades geométricas e tipos de operações. O nível e profundidade da análise depende do tipo de utilização que se pretende da aplicação informática e pode, por isso, ser mais ou menos exaustivo. Por exemplo, se apenas pretende o desenho bidimensional poderá prescindir-se das funcionalidades 3D. Por outro lado, a capacidade de levar a cabo a análise está condicionada à partida pelo nível de conhecimentos de quem a leva a cabo. Porventura, poderá haver conceitos que não lhe são familiares. Neste sentido, também pode e deve ser um pretexto para aprofundar conhecimentos de geometria.

Por exemplo, uma determinada aplicação CAD pode ter funções que permitam representar quaisquer linhas cónicas ao passo que outra pode apenas permitir representar circunferências e elipses. Ou uma aplicação pode permitir modelar cones oblíquos de base circular ao passo que outra apenas permite modelar cones de revolução. Consideremos o caso das linhas cónicas. Um exame detalhado da aplicação pode levar ao entendimento de que esta permite a representação de curvas através de pontos de controlo possibilitando a especificação do seu grau. Se soubermos que uma curva de grau 2 com três pontos de controlo é na verdade uma parábola, caso especial de uma curva de Bezier, vemos ultrapassada parte daquilo que podia ser considerado como uma limitação inicial. Adicionalmente se soubermos que qualquer linha

cónica (elipse, parábola ou hipérbole) pode ser obtida a partir de uma curva de Bézier, com três pontos de controlo, editando o peso associado a um desses pontos, vemos a nossa limitação inicial potencialmente ultrapassada. Se não fizermos este exame, somos levados a uma utilização mais empírica da aplicação, mas porventura menos consciente e, seguramente, não exploraremos todo o seu potencial. Com resultado, vários equívocos terão lugar.

O pior dos equívocos é não reconhecer a natureza geométrica das operações realizadas pelo facto de poderem ser, na aparência, diferentes das que se está habituado aquando do desenho manual de precisão, ou por aparentarem dispensar aqueles procedimentos.

Outro equívoco é proceder a uma transferência direta dos métodos que se costuma aplicar no desenho manual de precisão sem perceber que muitos dos procedimentos aí usados derivam da limitação dos meios disponíveis naquele contexto. Há que reconhecer abertamente que adoção de um ADMG pode tornar anacrónicos e obsoletos, do ponto de vista prático, muitos dos procedimentos algorítmicos tradicionais da geometria descritiva, sendo o cálculo de interseções ou o cálculo de sombras paradigmáticos a esse respeito. A nosso ver, embora continue a ser pedagogicamente importante entender as bases dos procedimentos tradicionais porque podem ser formativos no entendimento das operações espaciais, já não faz sentido determo-nos na resolução de casos muito extensos ou complicados através desses procedimentos quando a modelação tridimensional digital o permite fazer de modo mais rápido e eficiente, abrindo portas para investigações mais avançadas.

Por fim, ainda outro equívoco é o de que o ADMG permite fazer tudo com rigor quase absoluto. E isso não é verdade. A qualidade das operações realizadas depende tão somente da robustez dos algoritmos que alguém implementou. Por exemplo, é relativamente simples encontrar limitações em funcionalidades de interseção e de paralelismo entre superfícies, ou entre linhas, em aplicações conhecidas do mercado. Na figura 1.50, evidenciamos a falta de robustez na determinação de linhas paralelas a linhas dadas em duas aplicações CAD amplamente conhecidas.

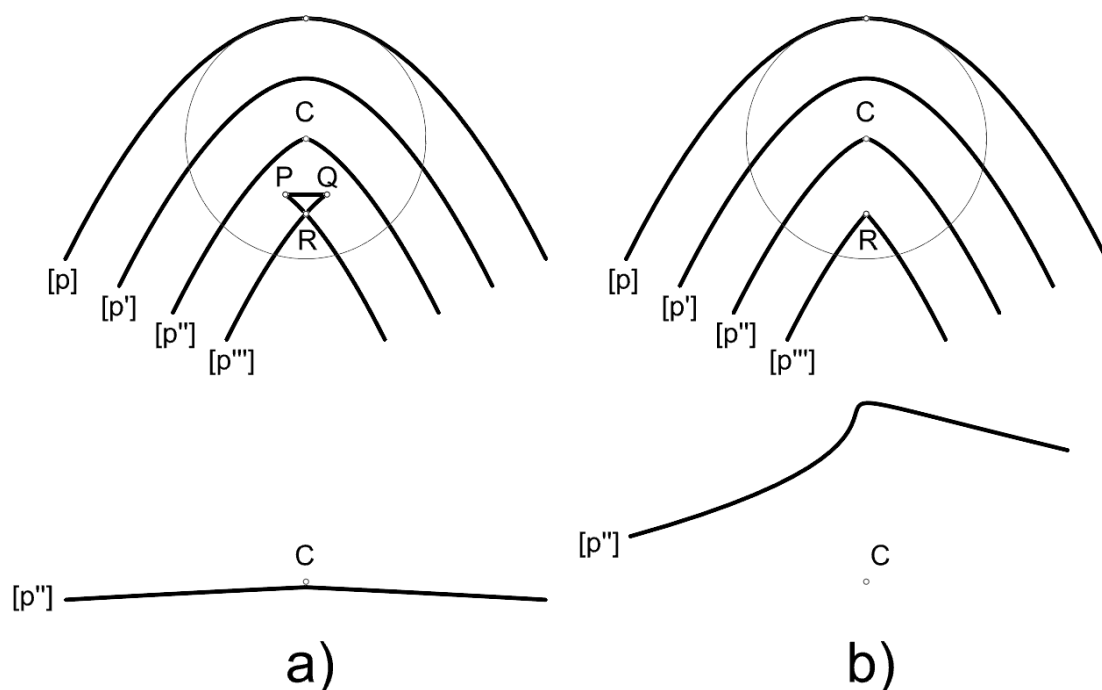


Fig. 1.50. Linhas paralelas a uma parábola: a) aplicação CAD 1, b) aplicação CAD 2.

Em ambas as situações considerou-se uma parábola $[p]$ de vértice V . O ponto C é o centro de curvatura (falaremos deste conceito na PARTE II) da parábola em V . Determinaram-se três curvas paralelas à parábola, a primeira a uma distância média entre V e C , a segunda à distância $\overline{VC}$ e a terceira a uma distância igual a uma vez e meia $\overline{VC}$. Em relação à aplicação 1 (figura 1.50.a) a primeira falha aparente surge na curva $[p''']$ no troço entre P e Q que, devendo ser visivelmente curvo com a concavidade voltada para cima, se apresenta reto. Em relação à aplicação 2 (figura 1.50.b) verifica-se a limitação de não ser calculada a parte da curva $[p''']$ a partir do ponto de auto interseção R . Ampliando as curvas $[p'']$ cerca de dez mil vezes verifica-se que as curvas não passam pelo ponto C , o que, manifestamente é um erro dado que o ponto C deveria ser cúspide da curva $[p'']$, sendo particularmente bizarro o comportamento da aplicação 2. É claro que se pode dizer que uma ampliação desta magnitude não interessa para fins práticos. Mas estamos convencidos que esta constatação chocará os que estavam convencidos de que as aplicações CAD são infalíveis!

A ideia subjacente à análise é o reconhecimento de que qualquer ADMG consiste num repositório de conhecimentos que é necessário descodificar e entender para que dele se possa tirar o devido partido. No nosso caso, interessam-nos particularmente os conhecimentos de ordem geométrica. Tal como o desenho geométrico analógico de precisão se baseia num conjunto de construções com régua e compasso, o desenho digital de precisão emula-as e expande-as incorporando outras possibilidades de construções geométricas entre o 2D e o 3D igualmente válidas do ponto de vista da precisão e do rigor relativos, e fundamentalmente, do ponto de vista conceptual.

Múltipla Projeção Ortogonal

Nesta secção, começamos pelo sistema da DPO e, à medida que formos avançando, e à medida das necessidades, vamos estender o sistema à MPO, ou restringi-lo ao Sistema Cotado naquelas questões que se possam eventualmente resolver com recurso a uma única projeção ortogonal. Em todos os desenhos indicaremos a escala e a unidade utilizada.

Representação e análise do ponto

Como já vimos, a representação de um ponto em DPO faz-se através da representação das suas projeções ortogonais nos planos coordenados xy (plano horizontal de projeção) e zx (plano frontal de projeção). Neste contexto interessa saber representar um ponto dadas as suas coordenadas e extrair as coordenadas de um ponto dadas as suas projeções. Ou seja, interessa tanto construir as projeções de um ponto como entender a sua localização no espaço a partir da sua representação.

Vamos considerar a representação de quatro pontos, **A**, **B**, **C** e **D** de coordenadas (5, 2.5, 3), (-3, 4, -1), (0, -4, 0) e (-6, -4, 4), respetivamente. A unidade é o metro (**m**), o que implica a escolha de uma escala adequada.

Definido o sistema de representação através da disposição das projeções do eixo x no plano do desenho e identificando a origem das coordenadas **O**, estamos em condições de avançar com a representação dos pontos como se ilustra na figura 1.51. Da análise das coordenadas, verifica-se que o ponto **A** está contido no 1º quadrante; o ponto **B** está contido no 4º quadrante; o ponto **C** está contido no SHP; e o ponto **D** está contido no bissetor β_{24} .

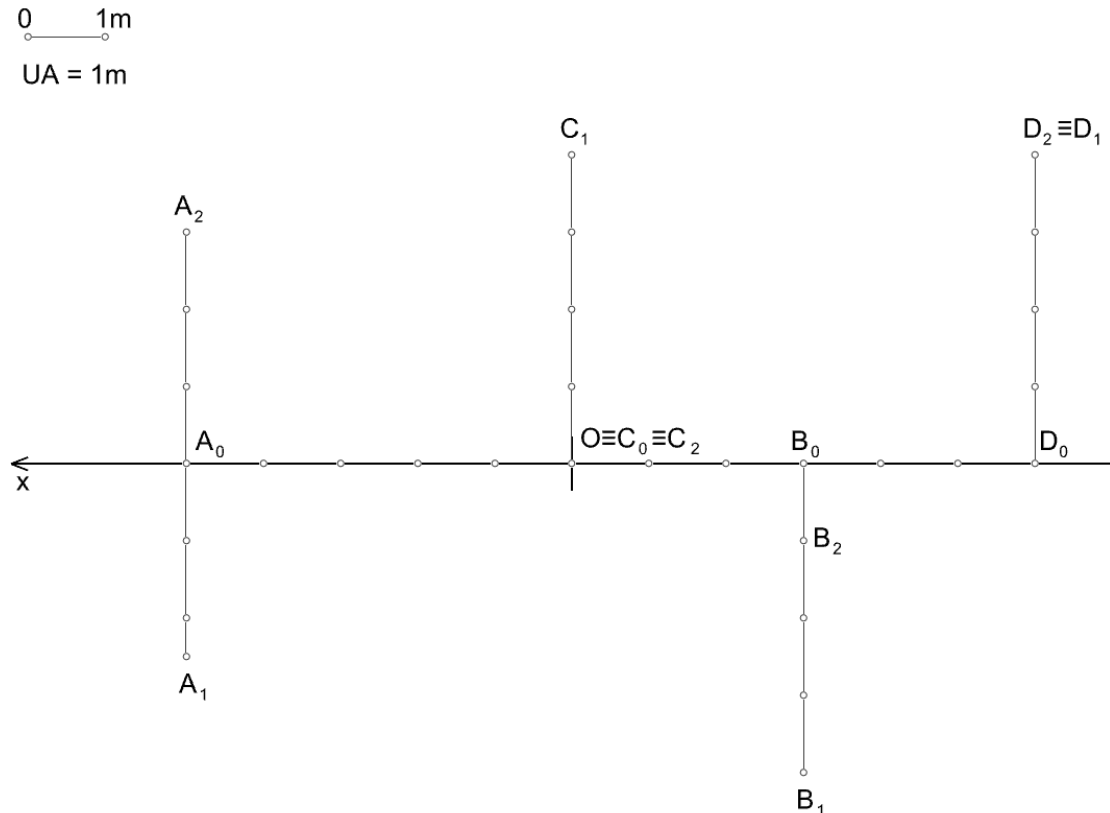


Fig. 1.51. Representação de pontos em DPO dadas as suas coordenadas.

A explicitação de um ponto do eixo x com a marcação do índice **0**, faz sentido apenas numa fase introdutória do estudo da representação dos pontos como reforço da ideia de que este ponto é o primeiro a ser representado a partir da abscissa dada. Porém, manter esta representação traduz-se num excesso de notação. Por isso, a partir deste momento, deixaremos de notar estes pontos com índice **0** no eixo x .

Se quisermos, podemos ainda localizar os pontos relativamente aos octantes, porém não fazemos essa análise aqui. Deixamo-la para o leitor.

Atividade proposta:

É conveniente praticar a representação de pontos e a leitura das suas coordenadas com vários exemplos até que se torne fácil o entendimento da sua localização. Da mesma forma, devemos ser capazes de entender as posições dos pontos se forem dadas as suas projeções, e devemos ser capazes de restituir as suas coordenadas, através de medições feitas sobre o desenho.

Representação e análise do segmento de reta

Um segmento de reta fica definido pelas projeções dos seus pontos extremos.

Vamos considerar primeiro um segmento de reta $[AB]$ definido pelos seus extremos $A_{(3, 3, 1)}$ e $B_{(-1, 1, 4)}$ conforme se representa na figura 1.52.

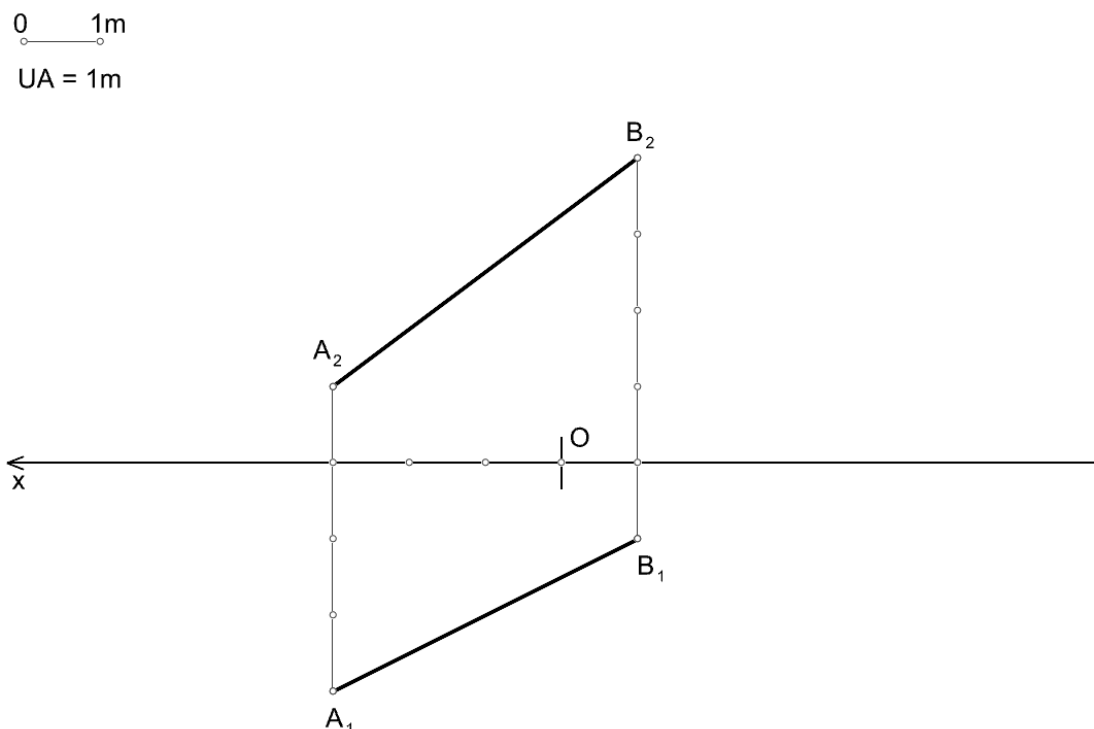


Fig. 1.52. Representação de um segmento de reta em DPO dadas as coordenadas dos seus extremos.

Como as distâncias dos pontos A e B ao plano frontal de projeção não são iguais, também não são iguais as distâncias ao plano horizontal de projeção nem ao plano coordenado yz , então o segmento $[AB]$ é oblíquo. Se a cota fosse constante, então o segmento seria **horizontal** (paralelo ao plano xy) e a projeção $[A_2B_2]$ seria paralela ao eixo x . Se o afastamento fosse constante, então o segmento seria **frontal** (paralelo ao plano zx), e a projeção $[A_1B_1]$ seria

paralela ao eixo x . Se tanto a cota como o afastamento fossem constantes, então o segmento seria **fronto-horizontal** (simultaneamente paralelo aos planos xy e zx).

Se as abscissas dos pontos A e B fossem iguais, então o segmento seria de **perfil** (paralelo ao plano yz) e as suas projeções fazem 90° com o eixo x . Se as projeções horizontais dos pontos A e B fossem coincidentes, isto é, $A_1 \equiv B_1$, o segmento seria **vertical**, isto é, a projeção horizontal do segmento reduzir-se-ia a um ponto. E se fossem coincidentes as projeções frontais dos pontos A e B , isto é, $A_2 \equiv B_2$, o segmento seria de **topo**, isto é, a projeção frontal do segmento reduzir-se-ia a um ponto.

Atividade proposta:

Sugere-se o exercício de alterar as coordenadas dos pontos A e B de modo a obter todas as situações aqui indicadas. Considere ainda casos em que o segmento fique contido nos planos de projeção. Adicionalmente, considere situações em que os dois pontos não estejam no mesmo quadrante.

Representação e análise da reta

Uma reta fica definida pelas projeções de quaisquer dois dos seus pontos. A diferença em relação ao caso do segmento de reta é que a reta pode ser estendida tanto quanto se queira. Considerando os mesmos pontos do exemplo anterior fica definida uma reta a oblíqua. Normalmente, na resolução de problemas de geometria descritiva podem usar-se muitas retas que, desempenham em geral o papel de linhas auxiliares. Porém, se o objetivo final for a representação de uma reta específica pode ser importante representá-la consoante a sua visibilidade. Assim, por convenção considera-se visível em projeção frontal os troços da reta que se situem no 1° e no 4° quadrantes, e considera-se visível em projeção horizontal os troços da reta que se situem no 1° e 2° quadrantes. Esta convenção é útil numa fase inicial, em que se estuda o percurso da reta, porque permite ler cada uma das projeções e perceber de imediato, em cada projeção, quando é que a reta atravessa de um semi-espaco visível para um semi-espaco invisível. Isto significa convencionar que os planos de projeção são opacos. É claro que qualquer outra convenção é válida desde que seja clara no espírito de quem executa os desenhos. Posteriormente, ignoraremos esta convenção e consideraremos que os planos de projeção não são opacos. Para se poder estabelecer esta representação gráfica, é necessário determinar os pontos de interseção da reta com os planos coordenados xy e zx . Estes pontos recebem a designação de traço horizontal da reta, notado com H_a , e traço frontal da reta, notado com F_a , respetivamente. É óbvio que o traço horizontal da reta é o seu ponto de cota 0 e por isso determina-se a partir da interseção da projeção frontal da reta com o eixo x . De igual modo, óbvio que o traço frontal da reta é o seu ponto de afastamento 0 e por isso determina-se a partir da interseção da projeção horizontal da reta com o eixo x (figura 1.53). Vemos ainda que a projeção frontal da reta define, com o eixo x , um ângulo α . Este ângulo é medido no semiplano frontal superior. De um ângulo α como o da figura, diz-se que a reta tem **abertura para a direita**. Do mesmo modo, a projeção horizontal da reta define, com o eixo x , um ângulo φ . Este ângulo é medido no semiplano horizontal anterior. De um ângulo φ como o da figura, diz-se que a reta tem **abertura para a esquerda**. Podem ainda determinar-se os pontos de interseção com os bissetores (não representados na figura). O ponto de interseção da reta com o bissetor dos quadrantes pares, β_{24} , é sempre um ponto afastamento e cota simétricos (um positivo e outro negativo). Por essa razão, fica graficamente determinado na interseção das projeções frontal e horizontal da reta (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes).

Logicamente, se as duas projeções da reta forem graficamente paralelas, isto significa que a reta é paralela ao plano bisetor dos quadrantes pares.

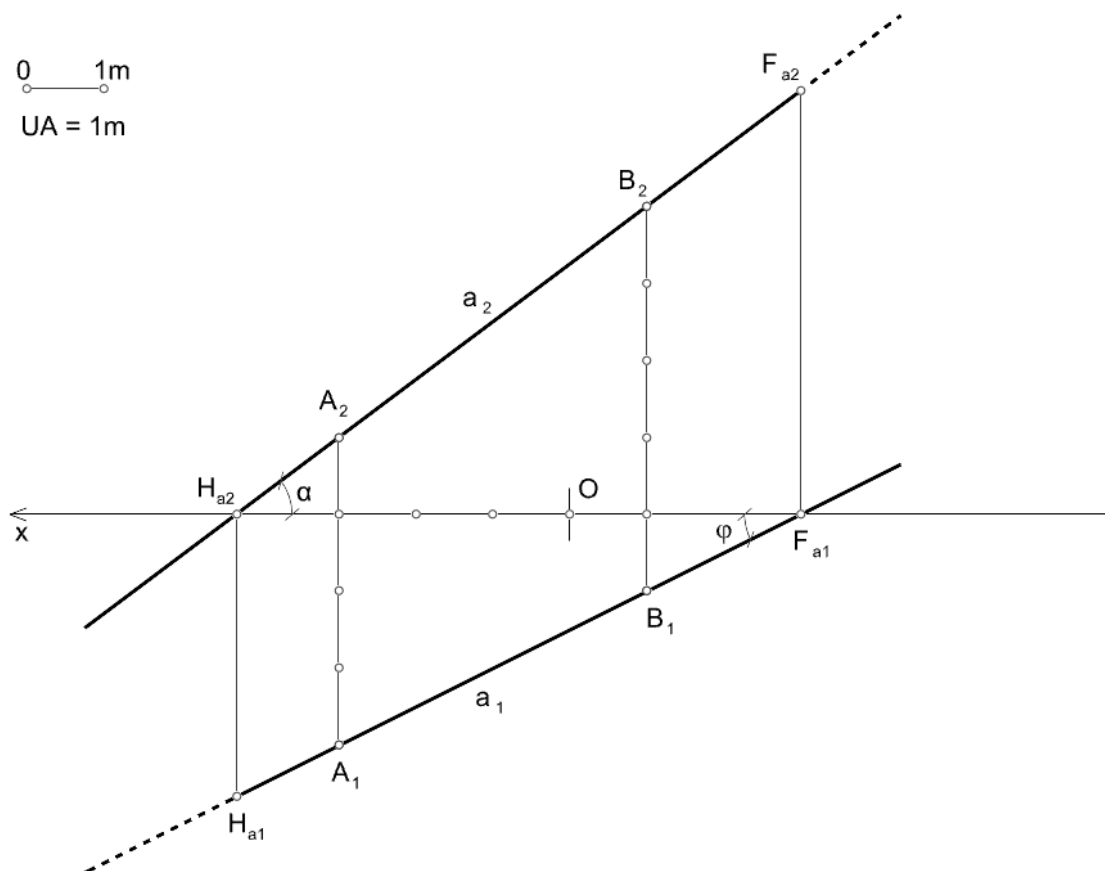


Fig. 1.53. Representação de uma reta em DPO e determinação dos seus traços nos planos xy e zx .

E se forem coincidentes, a reta está contida no bisetor dos quadrantes pares. De modo idêntico, o ponto de interseção da reta com o bisetor dos quadrantes ímpares, β_{13} , é sempre um ponto afastamento e cota iguais (ambos positivos ou ambos negativos). Por essa razão as suas projeções são simétricas em relação ao eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes). A sua determinação gráfica é simples. Por exemplo basta conduzir, pelo ponto H_{a2} , uma reta auxiliar simétrica da projeção a_2 relativamente ao eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes). Quando esta reta simétrica interseccionar a projeção a_1 determina-se a projeção horizontal do ponto pretendido. E desta, a outra projeção determina-se de modo imediato. Daqui resulta que se as direções das duas projeções da reta a forem simétricas em relação ao eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes), a reta é paralela ao plano bisetor dos quadrantes ímpares. E se, para além disso, as duas projeções da reta a se interseccionarem no eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes), então a reta está contida no plano bisetor dos quadrantes ímpares.

Atividade proposta:

Como exercício sugere-se a representação dos vários tipos de retas notando as suas visibilidades e invisibilidades, e determinando, quando existirem, os seus traços nos planos de projeção e nos planos bissetores. Note-se que as retas podem ser definidas por dois pontos ou por um ponto e pelas direções das projeções, ou qualquer outra combinação de dados que permita definir a reta ou suas projeções. No caso da reta de perfil poderá ser

necessário adotar algum dos métodos auxiliares da representação que iremos aplicar mais adiante.

Desenvolva também o exercício considerando disposições do sistema em que as duas projeções do eixo x não são coincidentes. Nestes casos terá de proceder a algumas adaptações dos traçados para obter os resultados pretendidos.

Representação e análise do plano

Um plano fica definido dados três pontos, um ponto e uma reta, duas retas concorrentes ou paralelas, um ponto e duas direções, ou uma reta e uma direção. Todas estas possibilidades são, de alguma forma, equivalentes. Por isso iremos considerar apenas o caso em que um plano δ é dado por três pontos A , B e C . É óbvio que esta definição é equivalente a definir o plano através de duas retas concorrentes ou paralelas. Sejam A e B os mesmos pontos do caso anterior e acrescentem-se as coordenadas $(1, 1, 1)$ do ponto C . Os pontos A e B definem uma reta a , e os pontos B e C definem uma reta b . Estudar o plano é uma extensão do estudo da reta. Da mesma forma que, no caso da reta, determinámos os seus traços nos planos xy e zx , também no caso do plano vamos determinar as retas de interseção com estes mesmos planos coordenados. Chama-se traço horizontal do plano à reta h de interseção com o plano xy , e traço frontal à reta f de interseção com o plano zx . É óbvio que a reta h é uma reta horizontal de cota 0 do plano e que a reta f é uma reta frontal de afastamento 0 do plano. E por isso, essas duas retas, se se intersectarem, fazem-no no eixo x . Também pode dar-se o caso dessas retas coincidirem com o eixo x , situação em que o plano contém esse eixo. No caso em apreço, a reta b é uma reta frontal. Uma vez determinado o seu traço horizontal, o ponto H_b , o traço horizontal do plano δ define-se unindo os pontos H_a e H_b . Mas, para não sobrecarregar a notação, não se indica a projeção frontal deste traço (que fica coincidente com o eixo x), ficando no desenho apenas a sua projeção horizontal dada pela reta h_δ . Como a o traço h_δ interseca o eixo x , esse ponto é comum ao traço frontal f_δ que passa também pelo ponto F_a . Do mesmo modo, para não sobrecarregar a notação, não se indica a projeção horizontal deste traço (que fica coincidente com o eixo x), ficando no desenho apenas a sua projeção frontal dada pela reta f_δ (figura 1.54).

Repare-se ainda que o traço frontal f_δ é paralelo à reta b , isto porque apenas há uma direção de retas frontais em cada plano. Da mesma forma, o traço horizontal h_δ é paralelo a todas as retas horizontais do plano.

Sendo os traços do plano retas concorrentes que também podem definir o plano, é possível especificar a orientação do plano através das direções os seus traços, horizontal e frontal, dadas pelos ângulos que formam com o eixo x , isto é, os ângulos φ e α , respetivamente.

À semelhança das retas, pode determinar-se a interseção do plano δ com os planos bissetores. Do que atrás foi dito, a reta de interseção do plano δ com o plano bissetor dos quadrantes ímpares, β_{13} , é a reta do plano que tem projeções simétricas em relação ao eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes). Fica definida pelo ponto comum aos dois traços nos planos xy e zx (caso exista) e por um qualquer ponto de uma reta do plano pertencente àquele bissetor. A reta de interseção do plano δ com o plano bissetor dos quadrantes pares, β_{24} , é a reta do plano que tem projeções graficamente coincidentes. Fica definida pelo ponto comum aos dois traços nos planos xy e zx (caso exista) e por um qualquer ponto de uma reta do plano pertencente àquele bissetor.

Um plano com os traços simétricos em relação ao eixo x (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes) é perpendicular ao plano bisetores dos quadrantes ímpares, β_{13} , e um plano com os traços graficamente coincidentes (caso as duas projeções do eixo x sejam coincidentes), é perpendicular ao plano bisetores dos quadrantes pares, β_{24} . Excetuam-se destas considerações os planos que têm os dois traços coincidentes com o eixo x e que apenas verificam estas propriedades se forem eles próprios os planos bisetores. E também os planos de perfil que são simultaneamente perpendiculares aos dois planos bisetores.

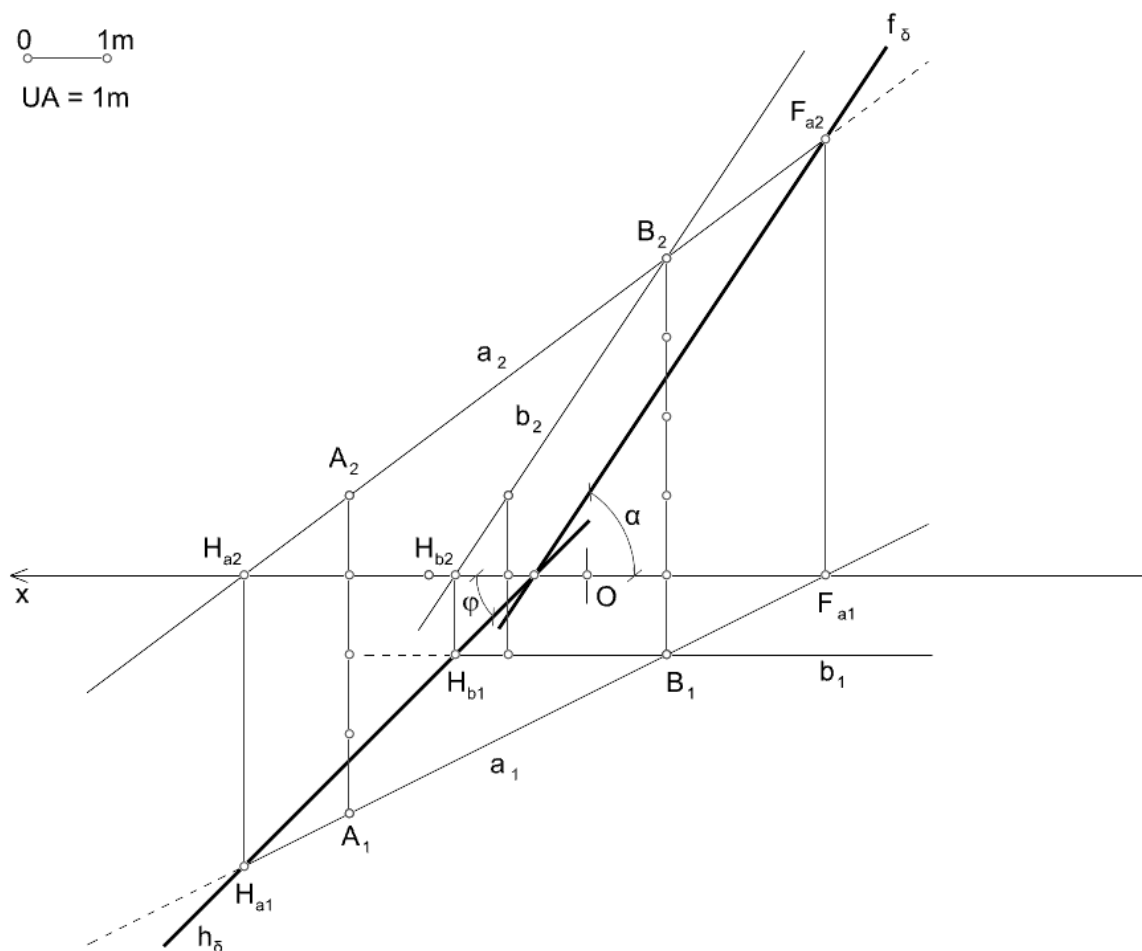


Fig. 1.54. Representação de um plano em DPO e determinação dos seus traços nos planos xy e zx .

Atividade proposta:

Como exercício sugere-se a representação dos vários tipos de planos determinando, quando existirem, os seus traços nos planos de projeção e nos planos bisetores.

Desenvolva também o exercício considerando disposições do sistema em que as duas projeções do eixo x não são coincidentes. Nestes casos terá de proceder a algumas adaptações dos traçados para obter os resultados pretendidos.

Operações relacionadas com o ponto, a reta e plano

Neste ponto iremos abordar vários tipos de operações e problemas relacionados com as figuras cuja representação temos vindo a estudar. É agora a oportunidade para invocar os métodos auxiliares da representação e introduzir a MPO ou o sistema cotado.

Relações de pertença

Um ponto P apenas pertence a uma reta a se as suas projeções pertencerem às projeções homólogas da reta, isto é, se P_1 pertencer a_1 , P_2 pertencer a a_2 , P_3 pertencer a a_3 , etc. Em geral, duas projeções são suficientes para verificar a pertença, mas no caso da reta de perfil, definida pelos pontos A e B , apenas as projeções nos planos xy e zx , não permitem a verificação direta da incidência entre o ponto P e a reta a (figura 1.55).

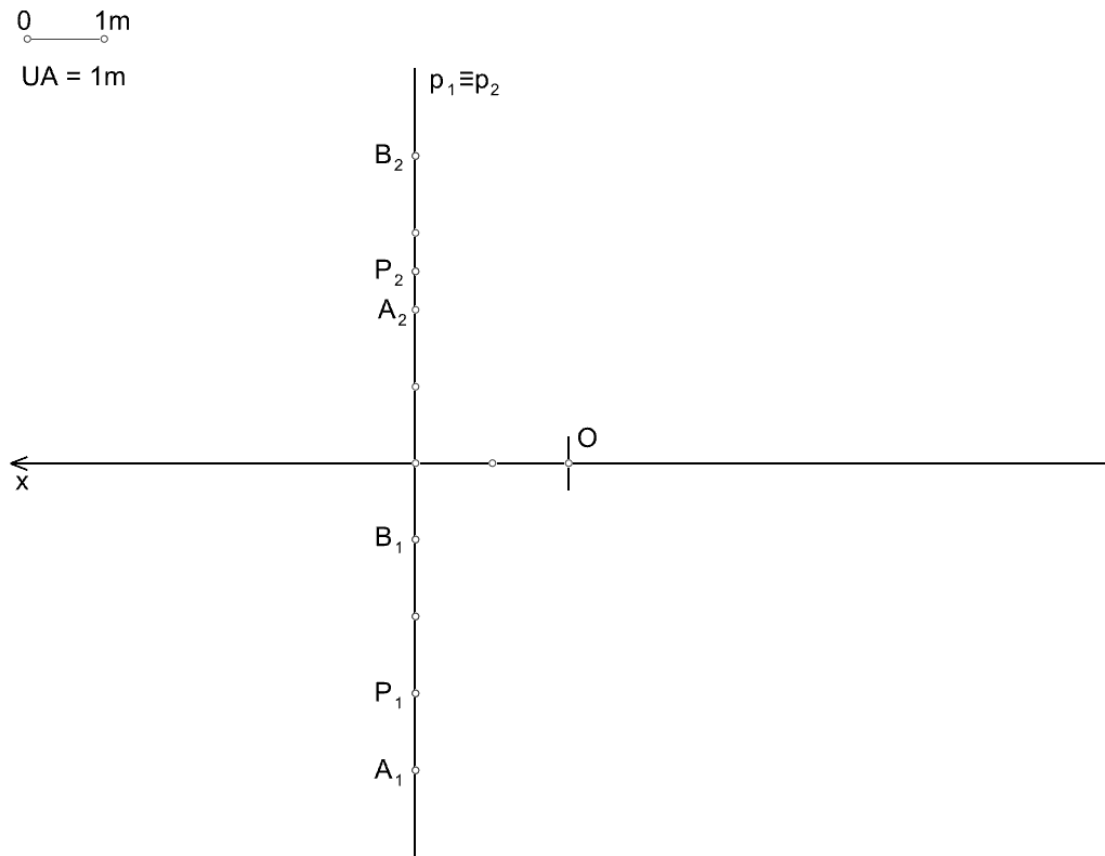


Fig. 1.55. Representação de uma reta de perfil em DPO definida pelos pontos A e B . O ponto P pertence ou não à reta p ?

Neste caso, para verificar se a pertença ocorre ou não torna-se necessário recorrer a um método auxiliar da representação.

Assim, para verificar se o ponto P pertence ou não à reta p optou-se por construir uma nova projeção. Para o efeito considera-se um reposicionamento do sistema de coordenadas (figura 1.56). Este reposicionamento pode ser qualquer desde que garanta uma nova projeção da reta p não coincidente com as anteriores. Neste caso, o reposicionamento pressupõe que o novo plano horizontal $x'y'$ coincide com o plano horizontal xy . Assim, as cotas dos pontos no primeiro sistema de coordenadas são iguais às cotas dos pontos no novo sistema de coordenadas. E as projeções horizontais no plano xy coincidem com as projeções horizontais no plano $x'y'$. Deste modo, construídas as novas projeções da reta p e do ponto P no plano $z'x'$ verifica-se que o ponto P não pertence à reta p .

Também tinha sido possível considerar que o reposicionamento do sistema de coordenadas era feito deixando o plano $z'x'$ coincidente com o plano zx . Neste caso seriam os afastamentos dos pontos que permaneceriam invariáveis nos dois sistemas de coordenadas bem como as projeções frontais.

Note-se que, uma vez que as projeções no plano xy coincidem com as projeções no plano $x'y'$, na prática passámos a ter uma representação com três projeções. Isto é, em termos práticos, o que fizemos foi introduzir a MPO.

Se considerarmos o par de projeções $1'$ e $2'$, a reta p passou de perfil (no primeiro sistema de coordenadas) para oblíqua (no segundo sistema de coordenadas). Uma vez que as projeções de índice $1'$ coincidem com as projeções de índice 1 , por vezes aquelas omitem-se. Faz-se isso quando daí não resultam ambiguidades na representação. Mas em boa verdade, as projeções devem ler-se aos pares para evitar ambiguidades.

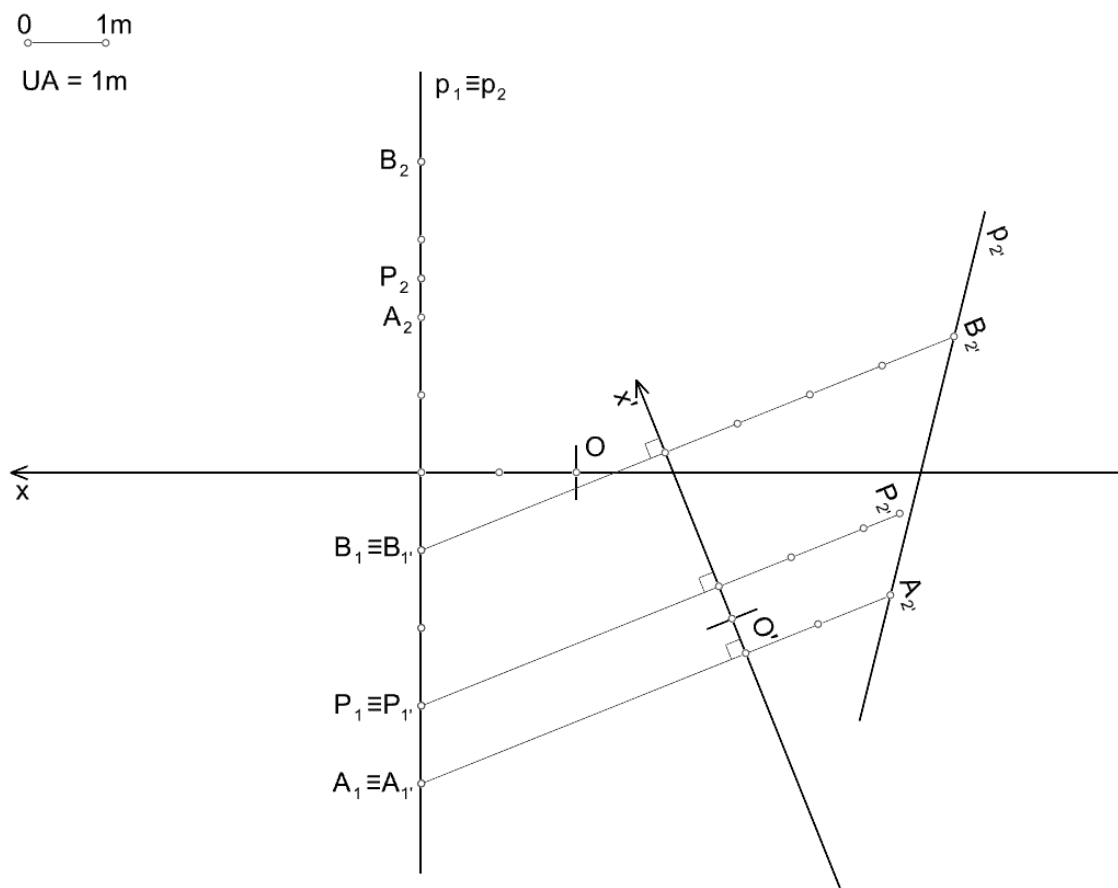


Fig. 1.56. Verificação de que ponto P não pertence à reta p através de uma mudança do plano de projeção.

Esta questão também pode ser resolvida através de uma rotação. Na figura 1.57 propõe-se a rotação da reta p e do ponto P em torno de um eixo e perpendicular ao plano zx . Neste movimento, os pontos A, B e P descrevem arcos contidos em planos paralelos ao plano zx , isto é, contidos em planos frontais. Assim, a projeção frontal de cada um destes arcos preserva a dimensão e corresponde a um arco com centro em $(e)_2$. A projeção horizontal de cada um dos arcos fica paralela a x e perpendicular a e_1 . Aqui a rotação apenas serve para colocar a reta p numa posição qualquer em que as duas projeções fiquem graficamente distintas. No caso optou-se por colocar a reta p_R na posição horizontal, mas qualquer outra (com a exceção da posição de perfil) serviria o propósito de mostrar que P_{R1} não pertence a p_{R1} e que, por isso, o ponto P não pertence à reta p . Como a rotação colocou a reta p de perfil na posição p_R horizontal, e como o eixo e é perpendicular ao plano zx , a amplitude da rotação foi de 90° , isto é, todos os pontos descreveram um arco de 90° em torno do eixo e . A forma prática de

proceder à rotação foi partir da rotação do ponto da reta p mais próximo do eixo, isto é, o ponto I (apenas notado na projeção frontal).

Teria sido possível escolher outra direção para o eixo da rotação, por exemplo vertical.

Conhecendo os valores das coordenadas dos pontos A , B e P é possível verificar analiticamente se o ponto pertence ou não à reta. Mas, em geometria descritiva, em geral segue-se o caminho da construção gráfica. Porém, se esta não permitir ter a certeza do resultado, poderá ser necessária a abordagem analítica.

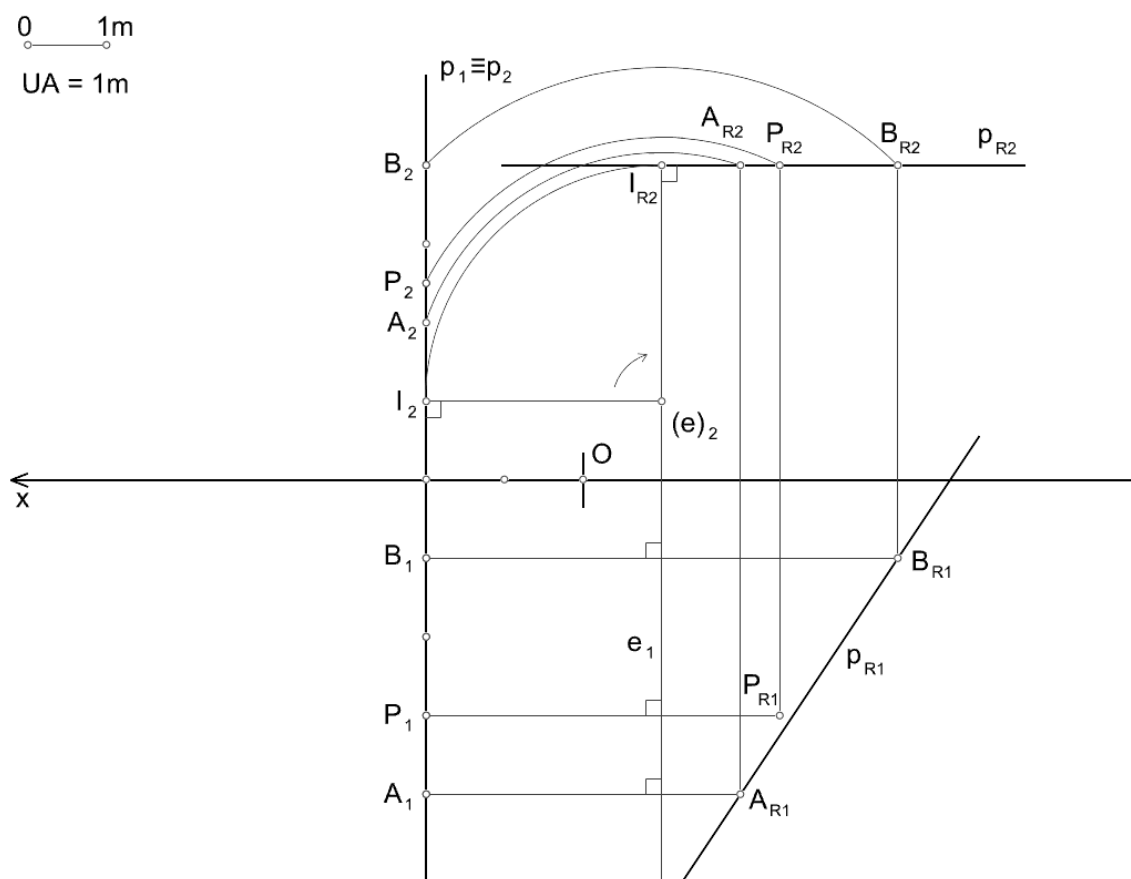


Fig. 1.57. Verificação de que ponto P não pertence à reta p através de uma rotação em torno de um eixo e de topo.

Um ponto pertence a um plano se pertencer a uma reta contida no plano. Assim, construir as projeções de um ponto que pertence a um plano significa construir as projeções de um ponto que pertence a uma reta contida no plano.

Uma reta está contida num plano se passar, pelo menos, por dois pontos do plano.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se o exercício de representação de pontos contidos em retas, e retas contidas em planos. Deste modo é possível entender que tipos de retas estão contidos em cada tipo de planos. E deverá tornar-se evidente que, se uma reta está contida num plano, os seus traços nos planos de projeção e nos planos bissetores estão contidos nos traços homólogos do plano. Sugere-se ainda a exploração dos métodos auxiliares da representação, em particular a mudança do plano de projeção (reorientação do referencial) e a rotação, de modo a transformar um tipo de retas noutro tipo de retas, e um tipo de planos noutro tipo de planos.

Paralelismo e perpendicularidade

Nesta secção irá colocar-se em prática a representação gráfica das relações de paralelismo e perpendicularidade entre retas e entre retas e planos que já abordámos anteriormente.

Condução de uma reta paralela a uma reta dada

Dada uma reta a , conduzir por um ponto P dado uma reta b paralela à reta a significa conduzir por P_1 a projeção $b_1 \parallel a_1$, por P_2 a projeção $b_2 \parallel a_2$, por P_3 a projeção $b_3 \parallel a_3$, etc. Excetua-se o caso em que a reta a é de perfil. Nesse caso não é suficiente conduzir b_1 e b_2 , que ficam coincidentes, e por isso não chegam para definir a reta b . Será necessário identificar mais um ponto da reta b , o que pode ser feito em termos muito semelhantes ao descrito nas figuras 1.56 e 1.57.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se conduzir retas paralelas aos vários tipos de reta.

Condução de uma reta paralela a um plano dado e vice-versa

Conduzir, por um ponto P dado, uma reta a paralela a um plano α dado reduz-se a conduzir uma reta paralela a uma reta contida no plano α . Ao contrário da situação anterior, se o plano α dado for de perfil isso não introduz qualquer limitação. Em todos os casos, é fácil perceber que pelo ponto P dado pode-se conduzir uma infinidade de retas paralelas ao plano dado. E o lugar geométrico dessas retas é o plano passante pelo ponto P paralelo ao plano α dado. A resolução do problema inverso não oferece dificuldades. Basta que o plano contenha uma reta paralela à reta dada.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se conduzir vários tipos de retas paralelas aos vários tipos de planos.

Sugere-se a inda o exercício inverso, conduzir vários tipos de planos paralelos aos vários tipos de retas.

Condução de um plano paralelo a um plano dado

Conduzir, por um ponto P dado, um plano π paralelo a um plano α dado, consiste em conduzir duas retas concorrentes s e t , respetivamente paralelas a duas retas concorrentes a e b , contidas no plano α dado. Estas duas retas s e t definem um plano que deve conter o ponto P dado, o que é facilmente conseguido se uma delas contiver o ponto P .

Atividade proposta:

Como prática sugere-se conduzir planos paralelos aos vários tipos de planos.

Condução de uma reta perpendicular a um plano dado e vice-versa

Dado um plano α , uma reta p perpendicular ao plano, conduzida por um ponto P dado, terá a sua projeção horizontal p_1 perpendicular à projeção horizontal de qualquer reta de nível do plano. E terá a sua projeção frontal p_2 perpendicular à projeção frontal de qualquer reta frontal do plano. No caso do plano α ser de rampa estas duas condições não chegam. Para que a reta fique definida é necessário determinar as projeções de um ponto Q pertencente à reta que

permita resolver a sua direção. Isso pode ser feito com qualquer um dos métodos auxiliares. No exemplo da figura 1.58 consideramos o rebatimento.

Como o plano α dado é de rampa, sabe-se que a reta p é de perfil, o que permite o traçado das suas projeções de forma imediata, perpendicularmente ao eixo x . De seguida considera-se um plano π de perfil auxiliar. Este plano contém a reta p , é perpendicular ao plano α , e intersesta-o segundo uma reta i . As retas p e i são perpendiculares entre si num ponto Q . Logo, os pontos P e Q definem a reta p sem ambiguidades. Em termos práticos considerou-se o rebatimento do plano π para o plano zx , em torno do seu traço frontal, a reta f_π . Este rebatimento permitiu resolver a perpendicularidade entre as retas p e i e consequentemente a perpendicularidade entre a reta p e o plano α . Como o rebatimento foi feito para um plano de projeção, neste caso o plano zx , a projeção horizontal da reta i_R fica coincidente com o eixo x (e por isso não se identifica para evitar excesso de notação). Apenas se representa a projeção frontal desta reta e, por essa razão, prescinde-se do índice 2 associado à sua representação. Com efeito, um critério semelhante aplica-se ao eixos coordenados e à origem O . Se aplicássemos a notação de forma exhaustiva deveríamos escrever $x_1 \equiv x_2$. Mas não o fazemos e escrevemos apenas x .

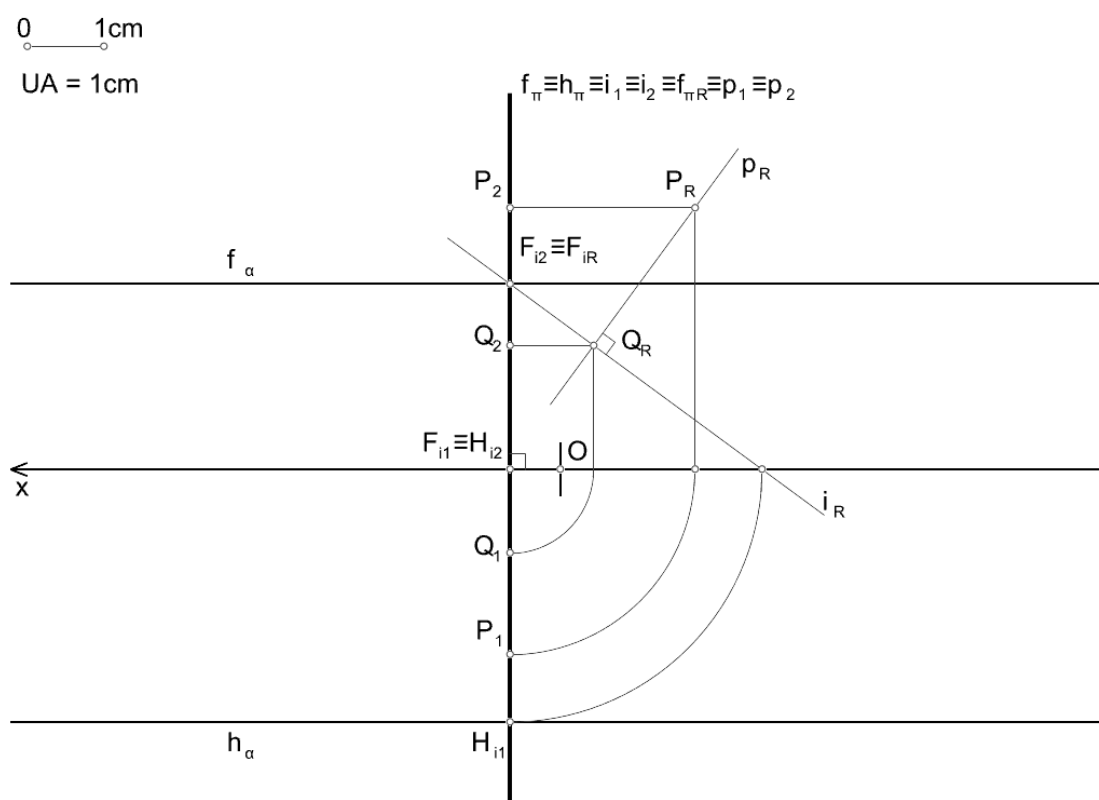


Fig. 1.58. Condução, por um ponto P dado, uma reta p perpendicular a um plano α de rampa dado.

A condução de um plano α perpendicular a uma reta p dada não difere muito do que já foi exposto. Se o plano estiver condicionado a incidir um ponto Q , a resolução da questão pode passar pela condução de um par de retas a e b pelo ponto Q , ambas ortogonais à reta dada, o que se consegue facilmente se as retas a e b forem uma horizontal e a outra frontal, respetivamente. Neste caso a reta a_1 é perpendicular à reta p_1 e a reta b_2 é perpendicular à reta p_2 . As retas a e b definem o plano α . De modo análogo ao caso anterior, se a reta p for de perfil, será necessário utilizar um método auxiliar da representação para resolver a questão.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a condução de retas perpendiculares aos vários tipos de planos. No caso do plano de rampa sugere-se a resolução através dos três métodos auxiliares.

Aborde também o problema inverso, isto é, a condução de planos perpendiculares aos vários tipos de retas. No caso da reta de perfil sugere-se a resolução através dos três métodos auxiliares.

Condução de um plano perpendicular a um plano dado

Conduzir, por um ponto P , um plano π perpendicular a um plano α dado é um exercício relativamente trivial. Conduzida por P uma reta p perpendicular ao plano α , qualquer plano π passante pela reta p é perpendicular ao plano dado α . Como é óbvio, existe uma infinidade de soluções para este problema. No caso de o plano estar sujeito a passar por uma reta s , o problema resolve-se conduzindo uma reta p perpendicular ao plano α por um ponto qualquer da reta s . As retas s e p definem o plano pretendido.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a condução de vários planos perpendiculares relativamente aos vários tipos de planos.

Interseções

A determinação gráfica de interseções entre dois planos, e entre uma reta e um plano, são operações fundamentais em geometria descritiva. Sobre estas operações fundam-se quase todos os traçados em operações mais complexas, como é o caso da determinação de secções planas, truncagens, interseções entre superfícies, e outros.

Interseção entre dois planos

Considerem-se dois planos, um plano α definido por três pontos A , B e C , e um plano β definido por uma reta d de maior declive relativamente ao plano xy (figura 1.59).

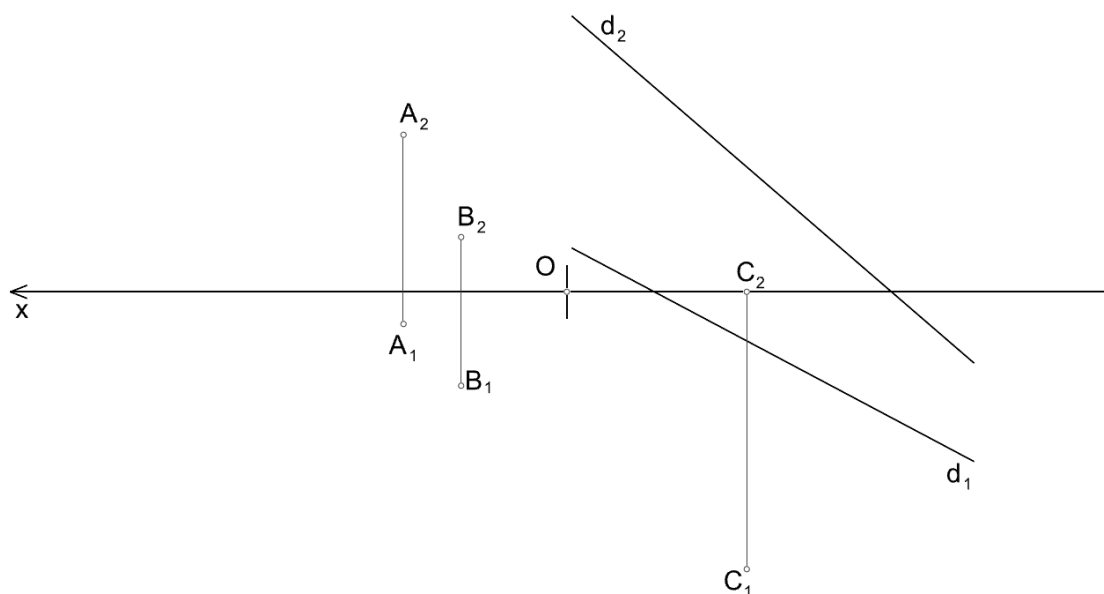


Fig. 1.59. Dois planos definidos em DPO. Plano α definido pelos pontos A , B e C , e plano β definido por uma reta d de maior declive relativamente ao plano xy .

Determinar a reta i de interseção entre os dois planos implica determinar dois pontos, I e J , comuns aos dois planos. Cada um desses pontos é determinado através da interseção entre duas retas concorrentes, uma contida no plano α e outra contida no plano β . Cada par de retas concorrentes nestas condições define um plano auxiliar que interseca os planos α e β .

Não há um critério único para a escolha destes planos auxiliares. Podem ser os planos coordenados, ou podem ser quaisquer outros planos que se mostrem convenientes.

Na resolução que propomos, os dois planos auxiliares utilizados são o plano xy e um plano π horizontal passante pelo ponto A (figura 1.60).

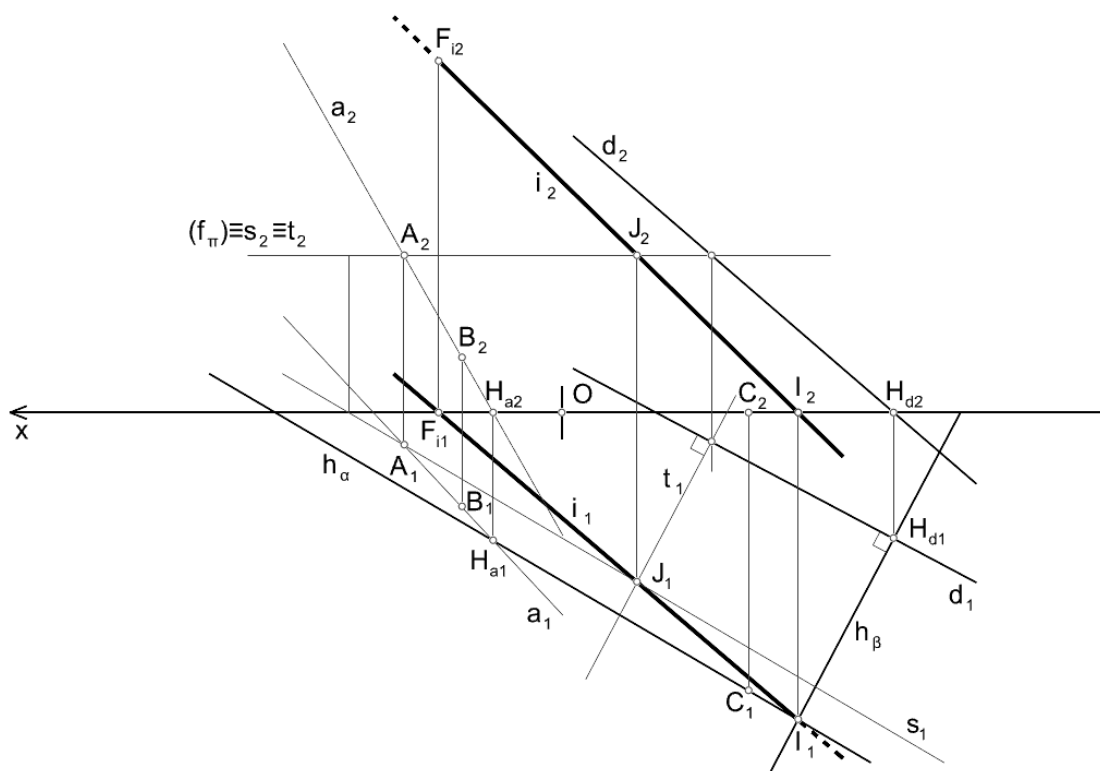


Fig. 1.60. Determinação da reta i de interseção entre os planos α e β .

Começamos por determinar as retas de interseção dos dois planos com o plano xy , isto é, os traços horizontais dos planos α e β . Determinou-se o traço horizontal da reta d , isto é, o ponto H_d , pelo qual passa o traço horizontal do plano β , isto é, a reta h_β . Como sabemos que a reta d é uma reta de maior declive, então a direção do traço horizontal também é conhecida por estar a 90° com a projeção d_1 . Como o ponto C tem cota 0 , então o traço horizontal do plano α passa pelo ponto C . Para o traçarmos precisamos determinar mais um ponto. Para o efeito considerámos o ponto H_a , traço horizontal da reta a definida pelos pontos A e B . O traço horizontal do plano α , isto é, a reta h_α , fica definido pelos pontos H_a e C . O ponto I , que pertence à reta i pretendida, é o ponto de interseção entre as retas h_α e h_β . Neste caso particular, o ponto I é o traço horizontal da reta i .

De seguida consideramos o segundo plano auxiliar, o plano π horizontal passante pelo ponto A . Por ser horizontal, este plano interseca os dois planos α e β segundo retas horizontais e, por isso, paralelas aos traços horizontais destes planos. Assim, a reta s , de interseção entre o plano π e o plano α é paralela ao traço h_α . E a reta t , de interseção entre o plano π e o plano β é paralela ao traço h_β . As suas retas, s e t , interseitam-se no ponto J , que pertence à reta i .

Por fim, constroem-se as projeções da reta i unindo as projeções homólogas dos pontos I e J .

Existe uma infinidade de configurações possíveis para dispor um par de planos e determinar a sua reta de interseção.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a combinação entre tipos de planos. Como há sete orientações de planos relativamente aos três planos coordenados, existem 28 formas possíveis de combinar dois planos do mesmo tipo ou tipos diferentes. E cada um dos planos, em cada uma das 28 combinações, pode ser definido de modos muito diversos. Assim, a prática que se pode desenvolver com este problema é extramente rica e variada.

Interseção entre uma reta e um plano

A determinação da interseção entre uma reta s e um plano β consiste na determinação do ponto I comum à reta e ao plano. A resolução deste problema passa pela condução de um plano auxiliar ρ passante pela reta s , pela determinação da reta i de interseção entre os planos β e ρ , e finalmente pela determinação do ponto I pretendido através da interseção entre as retas s e i . Assim, em termos práticos, a determinação da interseção entre uma reta e um plano implica sempre a determinação da interseção entre dois planos. Por isso, este problema está contido no problema tratado anteriormente.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a determinação de interseções entre os vários tipos de retas e os vários tipos de planos. Como existem sete tipos de retas e sete tipos de planos, existem 49 formas possíveis de combinar tipos de retas e tipos de planos. Por isso este problema é de grande riqueza e variedade.

Distâncias e ângulos

Mais que a resolução prática de problemas envolvendo a determinação de ângulos e distâncias, interessa-nos a oportunidade para raciocinar sobre as relações espaciais que podem estabelecer entre si pontos, retas e planos. O entendimento destas relações desenvolve a capacidade mental de raciocinar sobre o espaço e tem aplicação direta, por exemplo, no uso mais eficiente de ferramentas de modelação geométrica digital. Tantas e tantas vezes, uma dificuldade de modelação de uma figura é o reflexo de uma incapacidade de entender relações espaciais. É facto que o tratamento destas questões através dos métodos tradicionais da geometria descritiva pode parecer, e ser, por vezes penoso. Mas o benefício que daí se recolhe compensa o esforço.

Nos exemplos que se seguem iremos colocar os dados em DPO ou sistema cotado de forma indiferenciada. Interessa-nos sublinhar que isso é absolutamente indiferente para o que, espacialmente e visualmente é necessário invocar.

Determinação da distância entre dois pontos

A determinação da distância entre dois pontos A e B pode ser determinada analiticamente a partir das suas coordenadas por aplicação do teorema de Pitágoras. A determinação gráfica implica a colocação do segmento $[AB]$ numa posição paralela a um dos planos de projeção, o que pode ser feito aplicando um dos métodos auxiliares da representação. No exemplo da

figura seguinte, são dadas as projeções ortogonais dos pontos **A** e **B** no plano xy , e as suas cotas. A distância horizontal (DH) entre os pontos é **3.9cm**. A determinação da verdadeira distância entre os dois pontos foi obtida através do rebatimento do plano vertical π passante pelo segmento $[AB]$. Tomou-se por charneira o traço horizontal plano π . No movimento de rebatimento, os pontos **A** e **B** descreveram arcos contidos em planos perpendiculares à charneira, representados no desenho pelas retas perpendiculares a h_π passantes pelas projeções horizontais dos pontos **A** e **B**. Neste caso, os comprimentos dos arcos do rebatimento são iguais às cotas dos pontos. Assim, marcando sobre aquelas perpendiculares a h_π os comprimentos correspondentes às cotas, a partir das projeções horizontais de **A** e **B**, determinam-se os pontos A_R e B_R , respetivamente, ambos à cota **0**. A verdadeira grandeza do segmento $[AB]$ é dada pelo comprimento $\overline{A_R B_R}$.

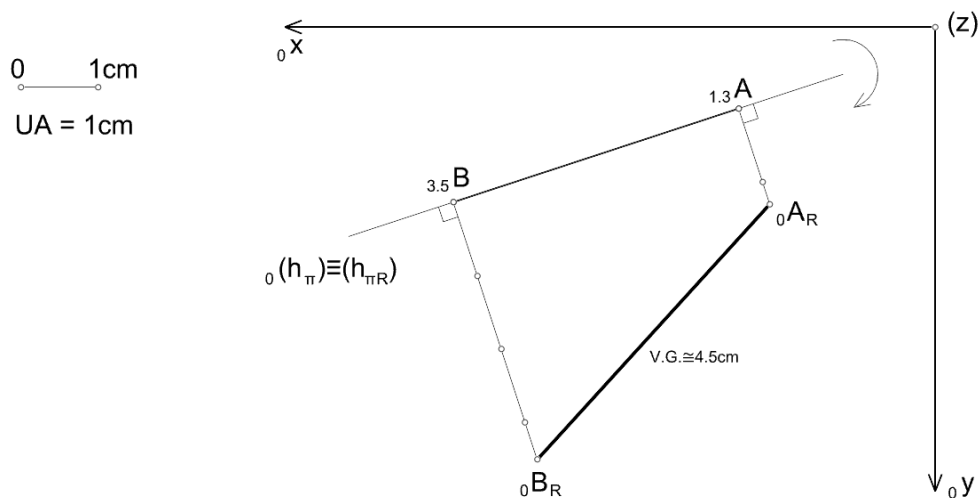


Fig. 1.61. Determinação da verdadeira grandeza de um segmento $[AB]$ dado no sistema cotado.

Note-se a resolução poderia ser exatamente a mesma se o segmento $[AB]$ fosse dado em DPO. Nesse caso, as cotas dos pontos **A** e **B** estariam dadas pelas distâncias entre as suas projeções frontais e a projeção frontal do eixo x . Observe que se o segmento definido pelo par de pontos for paralelo a um plano de projeção, a sua projeção nesse plano apresenta a verdadeira grandeza do segmento. Nos casos em que isso não acontece, é necessário aplicar um dos métodos auxiliares da representação.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se dispor vários pares de pontos no sistema cotado ou em DPO.

Determinação da distância entre um ponto e um plano

Determinar a distância entre um ponto **P** e um plano β implica conduzir pelo ponto **P** uma reta p perpendicular ao plano β , determinar o seu pé, **I**, nesse plano e, por fim, determinar a verdadeira grandeza do segmento $[PI]$. Na figura abaixo, o plano β fica definido pelos pontos **A**(0.5, 4, 5), **B**(4.5, 1, 1.5) e **C**(1, 1, 4), dados no sistema cotado. São também dadas as coordenadas (6, 2.5, 5) do ponto **P**.

A reta p terá a sua projeção horizontal perpendicular às projeções horizontais das retas horizontais do plano β . Determinado o ponto **R**, à cota **4**, pertencente à reta AB , este ponto define, com o ponto **C**, uma reta horizontal do plano β , à cota **4cm**. Note-se que, determinar o

ponto **R** implica dividir o segmento **[AB]** proporcionalmente à diferença de cotas entre estes dois pontos. Na prática, procedeu-se à graduação da reta **AB** entre os pontos **A** e **B**. Conduzida a projeção horizontal da reta **p**, simplesmente notada por **p** (note-se que neste caso, como os pontos foram dados no sistema cotado, não estamos a utilizar o índice **1** a seguir aos elementos para notar a projeção horizontal), perpendicular à projeção horizontal da reta de cota **4cm** do plano **β** , ficámos a conhecer a orientação em que devemos colocar o novo sistema de referência para obter uma projeção em que a perpendicularidade entre a reta **p** e o plano **β** se possa construir diretamente.

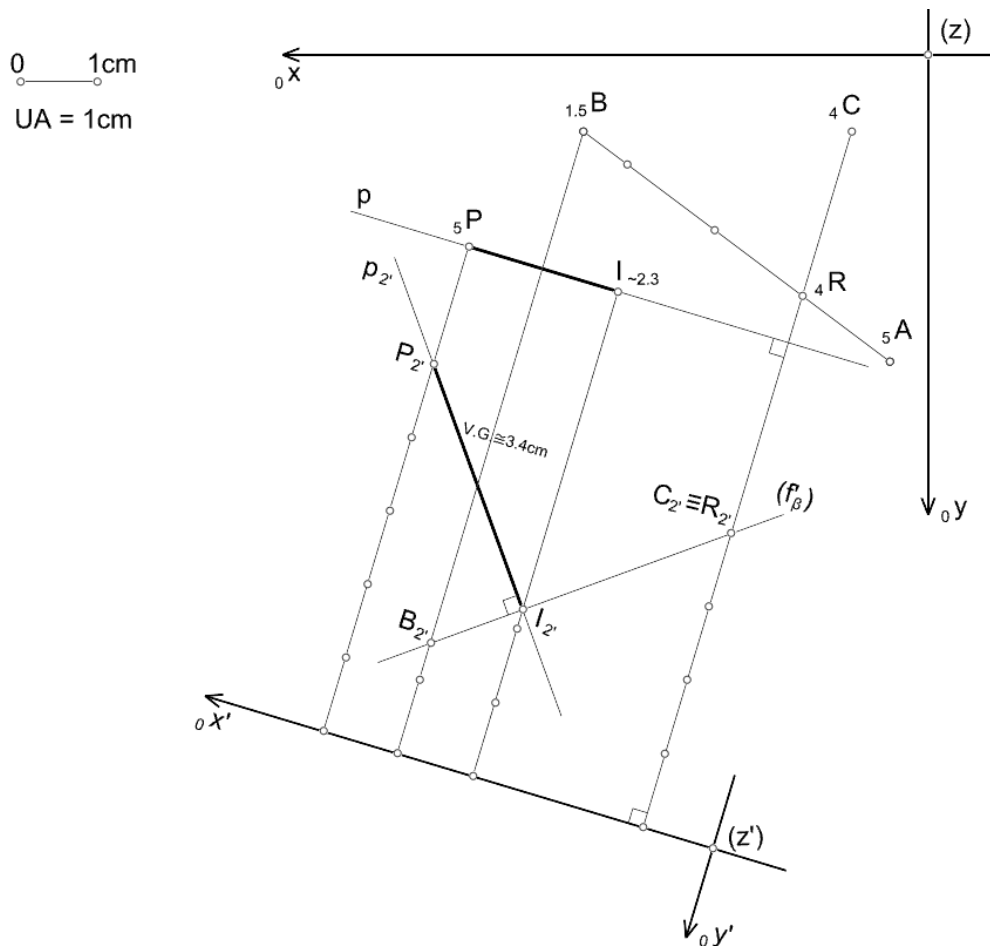


Fig. 1.62. Determinação da verdadeira grandeza da distância entre um ponto **P** e um plano **β** .

O novo sistema de referência foi posicionado de modo a que a reta **p** fique paralela ao plano **$z'x'$** e o plano **β** fique projetante. Representando a nova projeção frontal dos pontos **P**, **B**, **C** e **R**, a projeção **$p_{2'}$** fica perpendicular à reta **$B_{2'}C_{2'}$** no ponto **$I_{2'}$** . Nesta projeção é possível medir a cota do ponto **I** que deve ser aposta à sua projeção horizontal. Também nesta projeção fica a verdadeira grandeza da distância do ponto **P** ao plano **β** dada pelo comprimento **$\overline{P_{2'}I_{2'}}$** .

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a resolução deste problema para os vários tipos de planos, que podem ser definidos de formas variadas.

Determinação da distância entre duas retas enviesadas entre si

Sejam dadas duas retas a e b , enviesadas entre si, em DPO (figura 1.63). É sabido que a distância entre duas retas a e b é dada pelo comprimento de um segmento de reta contido na reta simultaneamente perpendicular às retas a e b . Sejam J e I os pontos de interseção dessa reta com as retas a e b , respetivamente. A verdadeira grandeza da distância entre as retas a e b é dada pelo comprimento do segmento do segmento $[IJ]$. Gráficamente isto implica colocar este segmento paralelo a um plano de projeção. A projeção nesse plano fica representada em verdadeira grandeza.

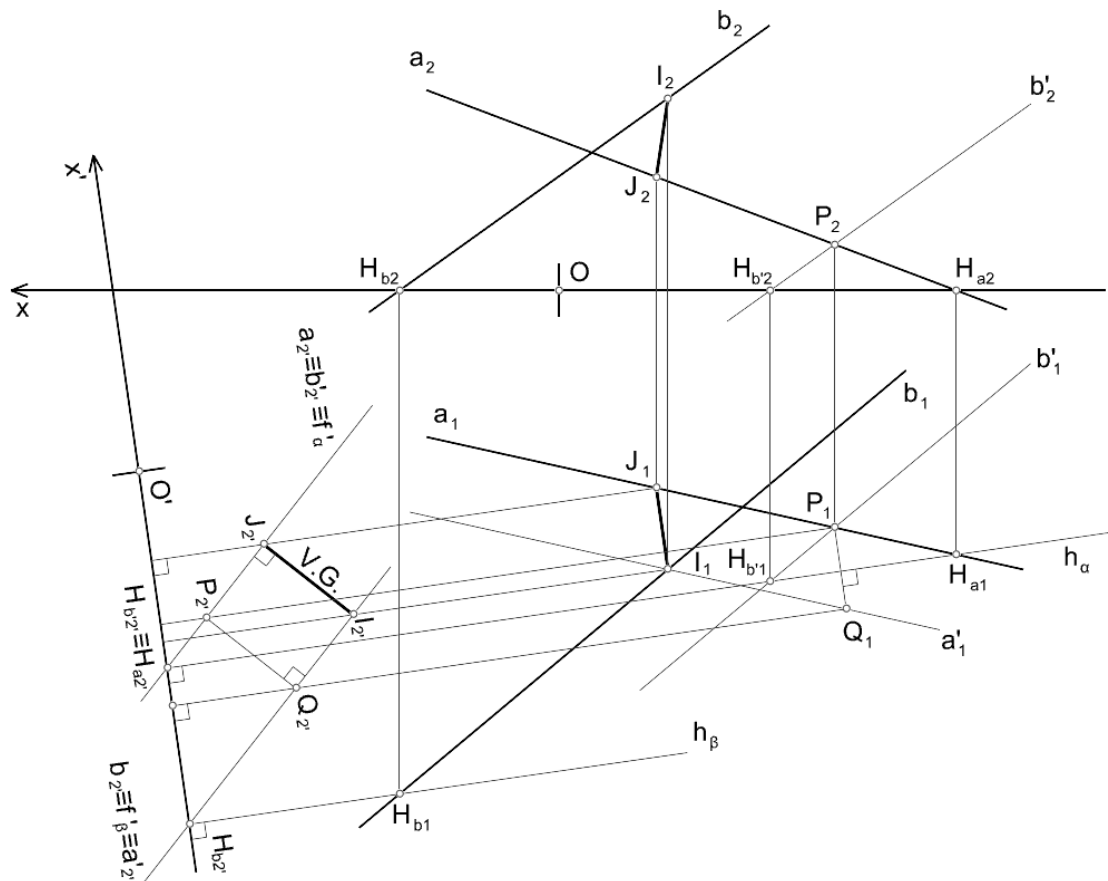


Fig. 1.63. Determinação da verdadeira grandeza da distância entre duas retas a e b .

Como a direção da reta IJ é ortogonal às direções das retas a e b , começamos por definir um plano α auxiliar cuja orientação contém as direções das retas a e b , e que, por isso, será perpendicular à reta IJ . Para o efeito, conduzimos, por um ponto P qualquer da reta a , uma reta b' paralela à reta b . As retas a e b' definem o plano α auxiliar. A distância entre a reta b e o plano α auxiliar é constante, porque a reta é paralela ao plano. Conduzimos agora um plano β , paralelo ao plano α , pela reta b . E de seguida projetamos a reta a ortogonalmente neste plano dando origem à reta a' , o que fizemos através da reta PQ perpendicular aos planos α e β . A reta a' passa pelo ponto Q . A reta a' intersesta a reta B no ponto I , um dos pontos pretendidos. O outro ponto obtém-se conduzindo a reta IJ paralela à reta PQ . A reta IJ intersesta a reta a no outro ponto pretendido, o ponto J . Em termos práticos utilizámos uma mudança do sistema de referência que tornou os planos α e β projetantes e as retas PQ e IJ paralelas ao novo plano frontal de projeção. Assim, a verdadeira grandeza do segmento $[IJ]$ mede-se nessa nova projeção frontal e é dada por $\overline{J_2'I_2'}$.

Atividade proposta:

Como há sete tipos de retas, há 28 combinações de duas retas de tipos diferentes ou do mesmo tipo. Com exercício prático, determine a distância entre duas retas explorando estas combinações.

Determinação da distância entre dois planos paralelos entre si

A distância entre dois planos β e θ paralelos entre si é dada pelo comprimento de qualquer segmento de reta $[IJ]$ contido numa reta p simultaneamente perpendicular aos dois, sendo os pontos I e J os pés dessa perpendicular nesses planos, respectivamente. Assim a resolução do problema passa por conduzir a reta p , determinar os pontos I e J , e por fim, colocar os segmento $[IJ]$ em verdadeira grandeza (figura 1.64).

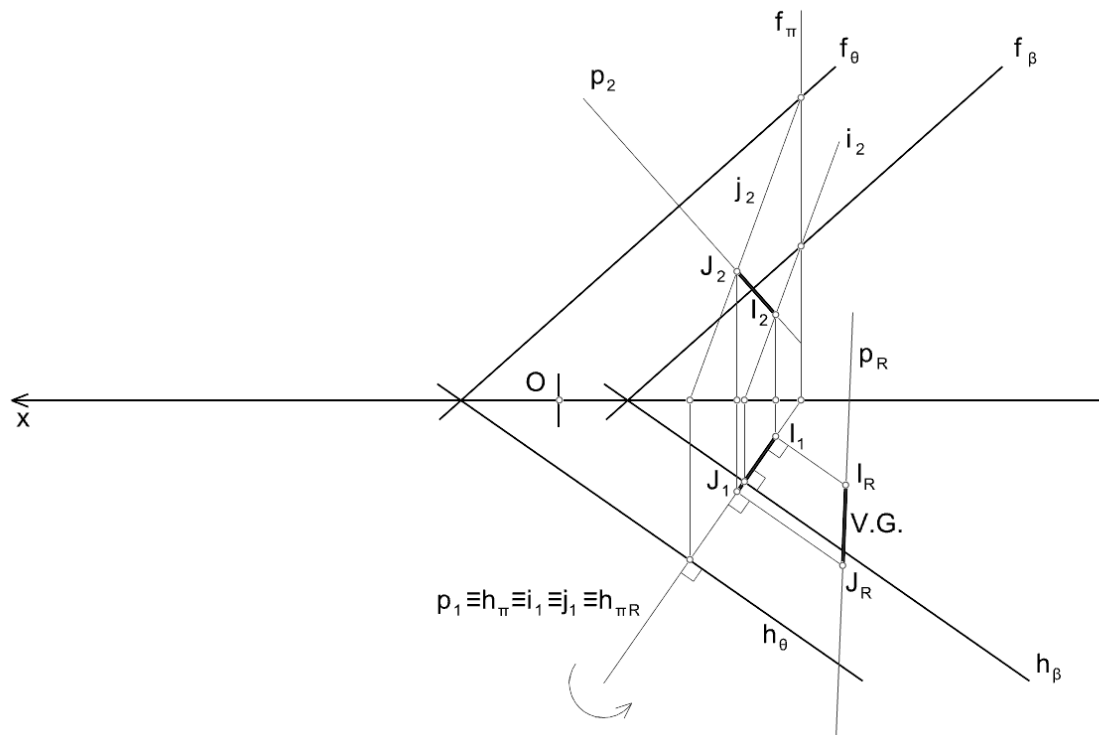


Fig. 1.64. Determinação da verdadeira grandeza da distância entre dois planos β e θ dados pelos seus traços nos planos xy e zx .

Como a reta p deve ser perpendicular a ambos os planos, e estes estão dados pelos seus traços nos planos xy e zx , temos que p_1 é perpendicular a h_θ e h_β e p_2 é perpendicular a f_θ e f_β . Para determinar a interseção da reta p com os planos dados, conduziu-se um plano π vertical passante pela reta. Este plano intersesta os planos β e θ segundo as retas i e j , respectivamente (os traços destas retas nos planos xy e zx não estão notados no desenho). Por sua vez, as retas i e j intersestam a reta p segundo os pontos I e J , respectivamente. Para colocar o segmento $[IJ]$ em verdadeira grandeza considerou-se o rebatimento do plano π , para o plano xy , em torno do seu traço horizontal. Deste modo determinou-se o segmento $[I_R J_R]$ cujo comprimento corresponde à verdadeira grandeza da distância entre os dois planos dados.

Atividade proposta:

Como prática sugere-se a resolução deste problema considerando os vários tipos de planos. Note que em alguns casos a distância entre os dois planos pode obter-se diretamente numa das projeções.

Determinação da inclinação relativa entre duas retas concorrentes ou enviesadas entre si

Se forem dadas duas retas **a** e **b** enviesadas entre si, a inclinação relativa entre elas é dada por um dos menores ângulos que uma delas pode formar com uma reta concorrente paralela à outra. Assim, verifica-se que o problema se reduz sempre a determinar a inclinação entre duas retas concorrentes. Sejam então dadas duas retas **c** e **d** concorrentes entre si num ponto **P**. Na figura 1.65 estas retas são dadas no sistema cotado. A reta **c** é definida pelos pontos **P** e **Q**, e a reta **d** é definida pelos pontos **P** e **R**. Note-se que, como os dados estão colocados no sistema cotado, embora não nos interesse a unidade de trabalho (pode ser centímetro, metro, etc), é preciso declarar graficamente a unidade de altura para dar significado aos números que representam as cotas dos pontos. Assim, a solução a esta questão assume um carácter geral.

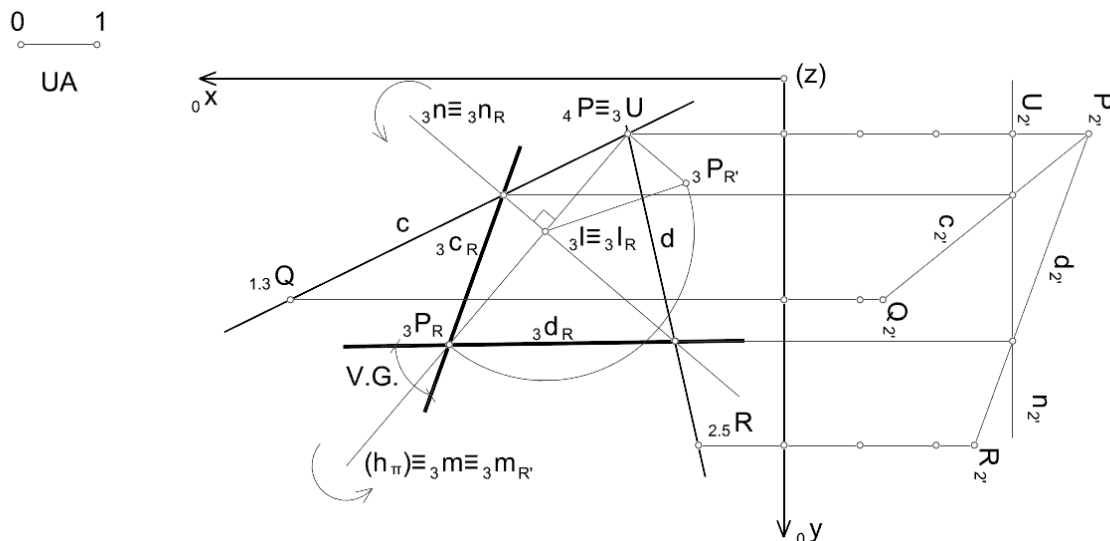


Fig. 1.65. Determinação da verdadeira grandeza do ângulo formado por duas retas **c** e **d** concorrentes.

Como as retas **c** e **d** são concorrentes, a inclinação entre elas pode ser medida no plano por elas definido. Para o efeito considerámos a operação de rebatimento do plano **cd** em torno da sua reta **n** horizontal à cota **3** definida por dois pontos, um pertencente à reta **c** e outro pertencente à reta **d**. Para determinarmos esses pontos (não notados no desenho) considerámos as projeções ortogonais das retas **c** e **d** no plano **yz**. Nessa projeção construímos os dois pontos à cota **3** referidos. Depois de os ter nessa projeção, construímos as suas projeções no plano **xy**. No movimento de rebatimento do plano **cd**, os pontos contidos na reta **n** são fixos, e o ponto **P** descreve um arco contido num plano **pi** perpendicular à reta **n**, isto é, perpendicular à charneira. Como a charneira é horizontal, o plano **pi** é vertical. O plano **pi** intersesta a charneira **n** no ponto **I**, centro do arco do rebatimento do ponto **P**. A verdadeira grandeza do raio do arco do rebatimento do ponto **P** é a hipotenusa **[PI]** do triângulo retângulo **[PIU]**. Para determinar a verdadeira grandeza desta hipotenusa considerou-o o rebatimento do plano **pi** para o plano horizontal à cota **3**, em torno da sua reta horizontal **m** à cota **3**. Deste

modo ficou determinado $\overline{P_R'I_R}$ que permite obter, por rotação, o ponto P_R à cota 3. Unindo o ponto P aos pontos fixos das retas c e d , determinam-se as retas c_R e d_R , isto é, as retas c e d rebatidas à cota 3. Como as retas c_R e d_R estão contidas num plano horizontal, a inclinação que formam entre si apresenta-se em verdadeira grandeza na projeção horizontal.

Atividade proposta:

Como há sete tipos de retas, há 28 combinações possíveis de duas retas do mesmo tipo ou de tipos diferentes. Este problema pode ser resolvido para cada uma das combinações. Este é o exercício que se sugere.

Determinação da inclinação entre uma reta e um plano

Este problema pode ser resolvido de dois modos. Sendo dados uma reta s e um plano α , a primeira solução para o problema passa por conduzir pela reta s um plano π perpendicular ao plano α dado. Os dois planos, π e α , interseitam-se segundo uma reta i concorrente com a reta s num ponto I . Neste momento o problema está reduzido ao anterior uma vez que a inclinação entre a reta s e um plano α é dada pela inclinação entre a reta s e a reta i . A segunda solução passa por conduzir, por um ponto P da reta s , uma reta p perpendicular ao plano α . A inclinação entre a reta s e o plano α é complementar da inclinação entre as retas s e p . Mais uma vez, temos o problema reduzido ao caso anterior.

Atividade proposta:

Como há sete tipos de retas e sete tipos de planos, há 49 combinações possíveis de um tipo de reta com um tipo de plano. Sugere-se a resolução deste problema para cada uma das combinações. Considere também a determinação da inclinação entre uma reta e os planos coordenados. Previamente à resolução gráfica através das projeções, elabore esboços que lhe permitam facilitar a visualização espacial do problema. Alternativamente elabore um modelo físico.

Determinação da inclinação relativa entre dois planos

Sejam dados dois planos α e β oblíquos entre si de que pretendemos determinar a inclinação relativa. Já vimos que a inclinação entre dois planos é dada por um ângulo designado por retilíneo. No caso considera-se o retilíneo de um dos menores diedros formados pelos planos. O retilíneo está contido num plano π perpendicular aos dois planos α e β , e por isso, perpendicular à reta i comum aos planos α e β . A primeira solução para o problema consiste em determinar a interseção do plano π com os planos α e β , dando origem às retas a e b , respetivamente. O retilíneo pretendido é um dos menores ângulos formados pelas retas a e b . A segunda solução passa por conduzir por um ponto P qualquer, duas retas p e q , perpendiculares aos planos α e β . Neste caso, a inclinação entre os planos α e β é dada por um dos menores ângulos formados pelas retas p e q . Assim, mais uma vez vemos que este problema se reduz ao caso da determinação da inclinação relativa entre duas retas.

Atividade proposta:

Como há sete tipos de planos, há 28 combinações possíveis de dois planos de tipos diferentes ou do mesmo tipo. Sugere-se a resolução deste problema para cada uma das combinações possíveis. Considere também a determinação da inclinação entre um plano e os planos coordenados. Previamente à resolução gráfica através das projeções, elabore

esboços que lhe permitam facilitar a visualização espacial do problema. Alternativamente elabore um modelo físico.

Representação de figuras geométricas simples

Por opção, não temos uma secção sobre representação de figuras planas. Passamos diretamente à representação de superfícies e sólidos porque estes implicam, quase sempre, a representação de figuras planas, por exemplo relativas a faces ou bases. Nesta secção iremos considerar a MPO e por vezes trataremos a projecção horizontal com as convenções e notações do sistema cotado. Até este ponto notámos os eixos de forma insistente. A partir de agora, podemos omitir a referência aos eixos. Não quer dizer que o façamos sempre. Fazemo-lo desde que seja clara a relação entre as várias projecções das figuras e desde que não seja importante a relação das mesmas com o sistema de coordenadas. Também a partir de agora deixamos de considerar os planos de projecção como sendo opacos.

O estudo das figuras geométricas através das suas projecções deve ser conduzido de modo a que as projecções coloquem em evidência as propriedades que se pretendem estudar. Se a figura pode ser colocada numa posição mais simples, então é essa a posição que deve ser privilegiada. O simples virtuosismo que pode permitir colocar uma figura em posições mais complicadas, não tem nada de útil. Isto não quer dizer que, por vezes, uma figura não tenha de ser colocada numa posição mais complexa. Isto pode acontecer, por exemplo, quando a figura está em relação com outra e não é possível colocar as duas simultaneamente na posição mais simples.

Esfera

A primeira figura geométrica que vamos considerar é a esfera. Na MPO, qualquer projecção ortogonal da esfera resulta numa região circular e, por isso, delimitada por uma circunferência. Na figura seguinte são dadas quatro projecções ortogonais distintas de uma esfera $[\Sigma]$, com centro num ponto $C_{(1, 4, 3)}$ e com **2m** de raio, articuladas entre si.

Recordando critérios e notação, podemos observar que começamos com o par de projecções **1** e **2**, respetivamente projecção no plano xy e projecção no plano zx .

O par de projecções **1'** e **2'** resultou de termos introduzido um novo sistema de referência em que o plano $x'y'$ coincide com o plano xy . Por essa razão as projecções **1** e **1'** coincidem. A projecção **2'** é produzida no plano $z'x'$. Da projecção **2** para a projecção **2'** são transferidas as cotas dos pontos.

O par de projecções **1''** e **2''** resultou de termos introduzido um novo sistema de referência em que o plano $z''x''$ coincide com o plano zx . Por isso as projecções **2** e **2''** coincidem. A projecção **1''** é produzida no novo plano $x''y''$. Da projecção **1** para a projecção **1''** são transferidos os afastamentos dos pontos.

Neste caso verificamos que ao notarmos as projecções de forma exaustiva as projecções da esfera podem ser lidas sem ambiguidades. Se não o fizessemos poderíamos ter dificuldade em interpretar a representação porque todas as projecções da esfera são iguais. Porém, nem sempre isto é necessário.

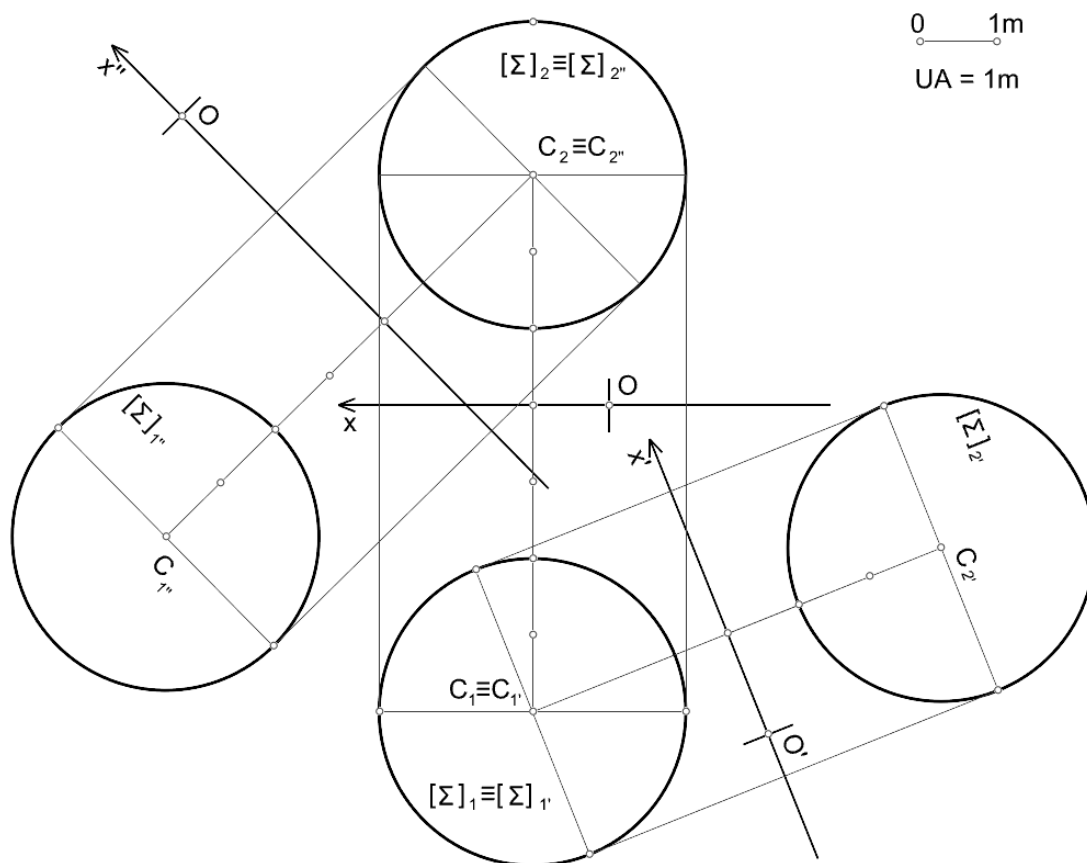


Fig. 1.66. Representação de uma esfera em MPO.

Na figura seguinte vamos considerar a representação de uma semiesfera $[\Sigma]$ com a base contida no plano xy . O raio da semiesfera mede **3.5cm**. Na projeção horizontal vamos representar as linhas de nível da superfície da semiesfera, isto é, as circunferências de cota inteira. Esta operação designa-se por graduação da superfície. E na projeção horizontal vamos considerar as convenções e notações das projeções cotadas.

Para efetuar a graduação da superfície da semiesfera considerámos um feixe de planos horizontais, a cotas inteiras, e intersetamo-los com a superfície da semiesfera. Isso deu origem a circunferências horizontais com cotas inteiras. Por uma questão de economia de notação apenas representámos a cota das linhas de nível. Estas circunferências são as linhas de nível de cota inteira da superfície da semiesfera. A título de exemplo, representámos um ponto **P**, com cota **3cm**, contido na superfície da semiesfera que, obviamente, está contido na linha de nível de cota **3cm**. Em geral, um ponto pertence à superfície se pertencer a uma linha da superfície.

Atividade proposta:

Experimente representar a semiesfera considerando a base frontal e a base de perfil. E em ambos os casos represente as suas curvas de nível de cota inteira.

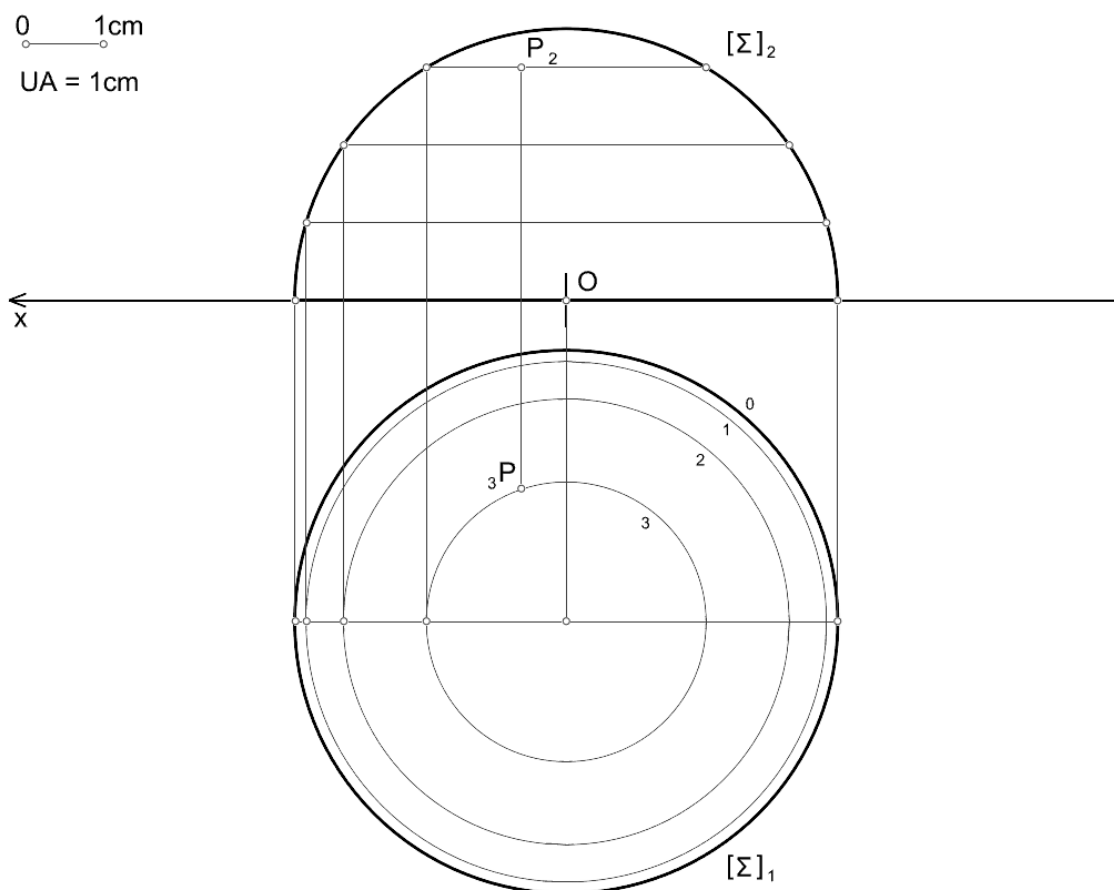


Fig. 1.67. Representação de uma semiesfera em DPO, notando a projeção no plano xy com as convenções das projeções cotadas.

Cone e cilindro

O cone é um sólido que fica delimitado por uma superfície cônica e por um plano. O cilindro é um sólido que fica delimitado por uma superfície cilíndrica e dois planos paralelos entre si. Enquanto a superfície cônica, cilíndrica, e o plano se estendem até ao infinito, as superfícies do cone e do cilindro são finitas. Por agora consideramos apenas cones e cilindros de bases circulares. Na figura seguinte estão representados dois cones e dois cilindros com bases paralelas a um dos planos de projeção. Um dos cones e um dos cilindros são de revolução (as duas figuras da esquerda). Estes sólidos também seriam fáceis de representar se as bases estivessem contidas em planos de perfil.

Suponhamos que pretendemos obter graficamente a verdadeira grandeza do segmento $[EV]$ relativo ao cone oblíquo ou a verdadeira grandeza do segmento $[FF']$ correspondente ao cilindro oblíquo. Julgamos que os exemplos precedentes tornam evidente a forma de proceder. Isto é, qualquer um dos métodos auxiliares da representação pode ser utilizado para o efeito. Da mesma forma, se pretendemos posicionar um ponto em alguma das superfícies, apenas temos de garantir que o ponto pertence a uma linha da superfície. A este respeito vamos considerar o caso do cilindro oblíquo em que pretendemos posicionar um ponto P na sua superfície. Suponhamos que o ponto pertence à geratriz $[ST]$ e que é dada a projeção P_2 .

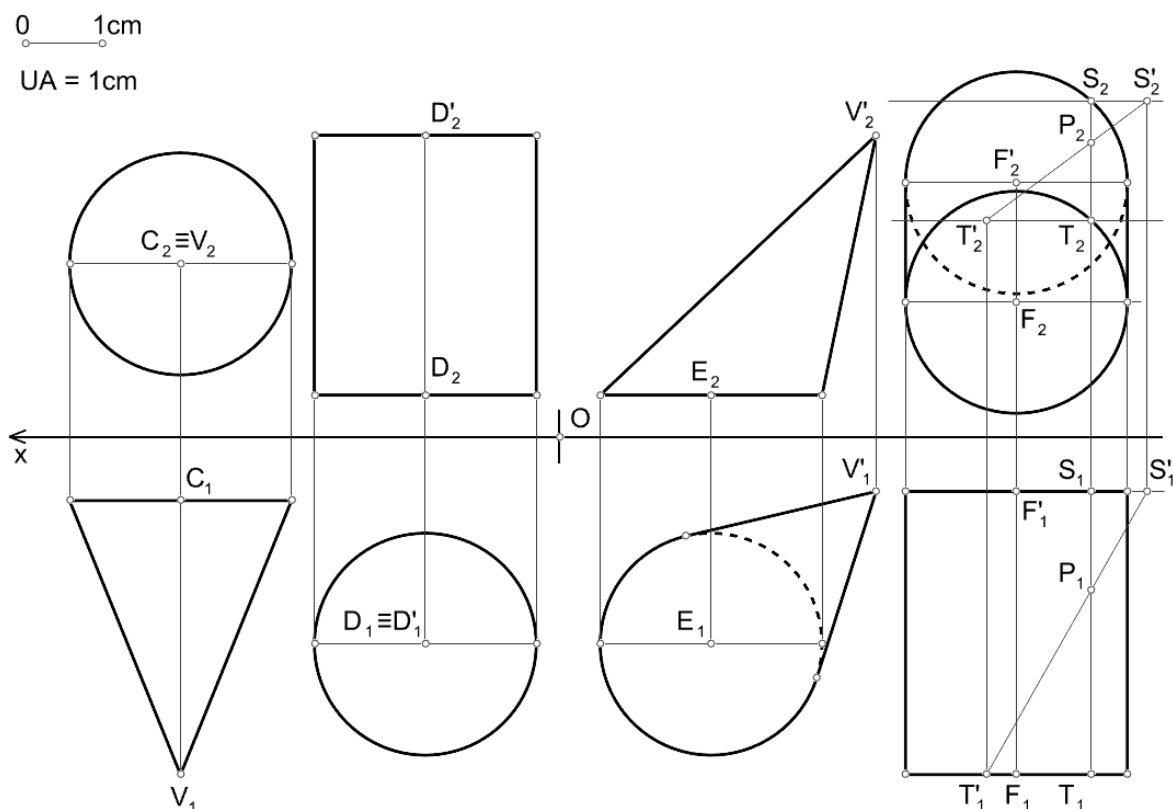


Fig. 1.68. Representação cones e cilindros em DPO.

Como a geratriz $[ST]$ é de perfil, não é possível obter de forma imediata a projeção P_1 . Porém podemos considerar um plano auxiliar passante pela reta ST . Trata-se do plano PSS' . Este plano intersesta o plano da base de maior afastamento segundo a reta TT' paralela à reta SS' , uma vez que os planos das duas bases são paralelos. Neste plano, a reta $S'T'$ passa pelo ponto P . Logo a projeção P_1 tem de pertencer à projeção horizontal da reta $S'T'$, ficando assim definido o ponto P . Poderíamos ter utilizado um dos métodos auxiliares da representação mas o problema pode ser resolvido deste modo.

Atividade proposta:

Experimente resolver as questões aqui discutidas nos casos em que as bases dos sólidos são de perfil. Nos casos em que as bases são horizontais, proceda à graduação das superfícies dos sólidos e represente-a na projeção horizontal.

Prisma e pirâmide

A representação dos prismas e pirâmides segue de perto a discussão que tivemos acima relativa a cones e cilindros. O cone de revolução está para a pirâmide reta de base regular da mesma forma que o cilindro de revolução está para o prisma reto de base regular.

Atividade proposta:

Procure resolver para os prismas e pirâmides o mesmo tipo de questões que foram discutidas relativamente ao cone e ao cilindro. Em cada uma das situações explore diferentes polígonos regulares como bases. Explore também polígonos irregulares como bases. Adicionalmente, para cada um dos casos, procure determinar a verdadeira grandeza das faces.

Poliedros regulares

Os poliedros regulares fornecem um exemplo que permite evidenciar como as projeções ortogonais são um meio muito eficaz para estudar as propriedades das figuras geométricas. Por essa razão iremos debruçar-nos sobre a totalidade dos cinco poliedros regulares. Propomos que acompanhe o estudo desta subsecção com modelos físicos dos poliedros.

Os poliedros regulares, tal como todos os poliedros topologicamente equivalentes a uma esfera apresentam uma relação especial entre o número de faces (F), o número de vértices (V), e o número de arestas (A) dada pela seguinte expressão $V + F = A + 2$. Esta fórmula foi deduzida por Leonhard Euler. Intuitivamente, dizemos que um poliedro é topologicamente equivalente a uma esfera se ao “insuflá-lo com ar” ele se deforma de modo a tornar-se como uma esfera. Na verdade, a fórmula de Euler é relativamente simples de explicar. Considere-se um poliedro qualquer topologicamente equivalente a uma esfera e remova-se uma face. De seguida deformem-se as restantes faces (como se a superfície fosse elástica) sem as rasgar nem se auto intersetarem de modo a ajustar a superfície ao plano, o que está representado como sendo a etapa 1 na (figura 1.69).

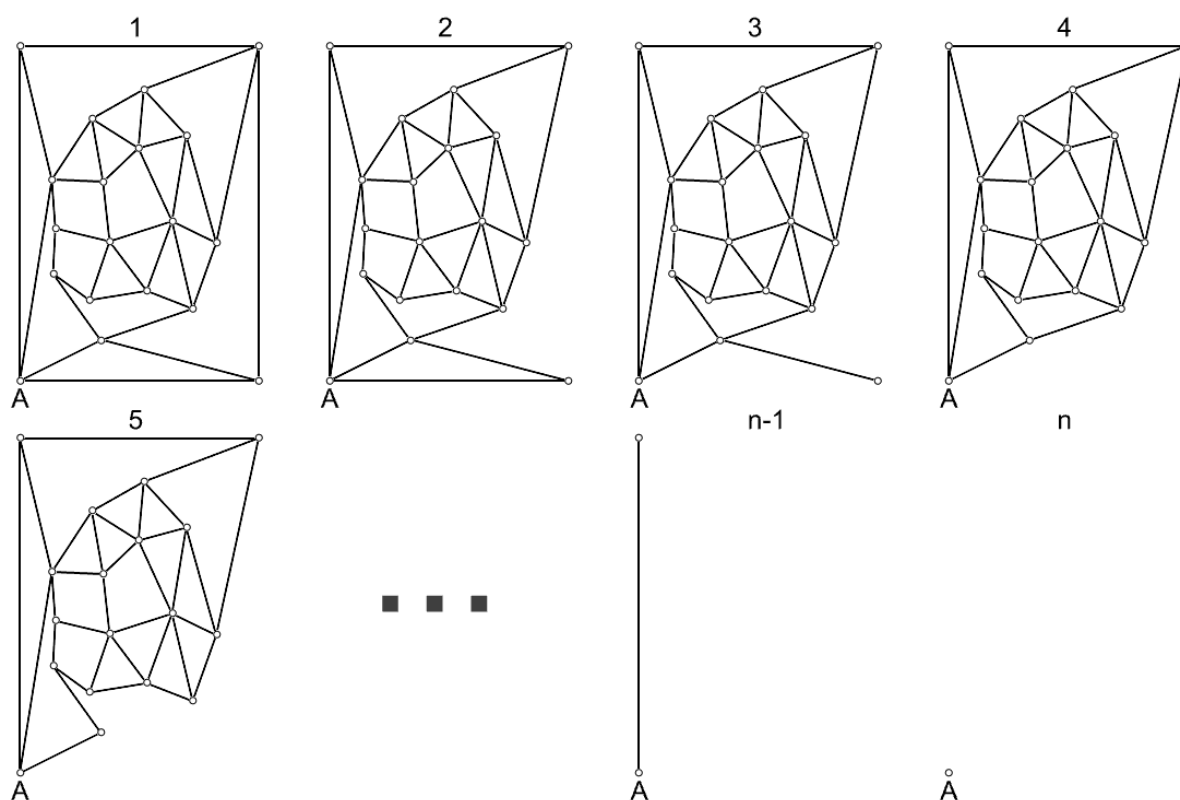


Fig. 1.69. Explicação da fórmula de Euler através de um processo de eliminação de faces, arestas e vértices.

Agora vejamos o que acontece de cada vez que removemos uma aresta. O leitor pode registar essas operações numa tabela. De 1 para 2 removemos uma aresta e com isso removemos também uma face. De 2 para 3 removemos outra aresta e, com isso, outra face foi removida. De 3 para 4 removemos uma aresta e um vértice. De 4 para 5 removemos uma aresta e uma face. Já está a perceber o padrão? De cada vez que removemos uma aresta, removemos também uma face ou um vértice. O estado anterior ao final ($n - 1$) é aquele em que ficamos apenas com uma aresta. De $n - 1$ para n removemos a última aresta e, se eliminarmos apenas um vértice para seguirmos a regra, resta-nos apenas um vértice, neste caso, o vértice A . Assim, à

parte deste vértice **A** e da face removida antes de distorcemos a superfície do poliedro, há uma paridade entre o número de arestas e a soma dos vértices e das faces. Para incluirmos o vértice final e a face inicialmente removida na relação, ficamos precisamente com a fórmula de Euler.

Os cinco poliedros regulares são o tetraedro, o cubo (hexaedro), o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Todos os poliedros regulares podem ser inscritos numa superfície esférica e, para cada poliedro, os diedros formados pelas faces são constantes. Os polígonos das faces são um de três polígonos regulares, o triângulo equilátero, o quadrado, ou o pentágono. Os poliedros regulares são convexos. Um poliedro é convexo se se situar na totalidade apenas para um dos lados do plano de qualquer face.

Para cada poliedro iremos representar três projeções ortogonais. Em todos os casos, a primeira projeção corresponde a considerar o plano de projeção paralelo a uma (ou duas) face do poliedro; a segunda projeção corresponde a considerar o plano de projeção perpendicular à reta passante pelos pontos médios de duas arestas opostas; por fim, a terceira projeção corresponde a considerar o plano paralelo a uma figura do vértice (a figura do vértice é um polígono cujos vértices estão contidos nas arestas que incidem no vértice e que estão a igual distância do vértice). Em todas essas projeções, quase sempre haverá arestas (uma ou mais) que se encontram em verdadeira grandeza (quais as exceções?). Designemo-las como **projeções notáveis** dos poliedros regulares.

É muito importante olhar para a construção de cada uma destas projeções sob uma lente de leitura espacial. Isto é, procure sempre interpretar os traçados como reflexo de operações espaciais.

Atividade proposta:

Estude a subsecção relativa às planificações para ver como pode construir modelos físicos dos cinco poliedros regulares. A manipulação e análise desses modelos ajudá-lo-á a melhor entender as propriedades que aqui vão ser discutidas. Nesta subsecção optamos por representar as projeções dos cinco poliedros de forma isolada. O desafio que se propõe é que, para cada poliedro, represente as três projeções dadas de forma articulada em MPO, começando por uma delas. Isto quer dizer que, para cada par de projeções ortogonais entre si deve haver linhas de chamada paralelas entre si a unir as projeções correspondentes dos vértices. Para além das projeções notáveis, deve adicionar outras.

Adicionalmente, e com o auxílio da fórmula de Euler, conte o número de vértices, faces e arestas dos poliedros regulares. Que relações entre os vários poliedros consegue perceber? Verifique que, dois a dois, o número de faces de um corresponde ao número de vértices do outro. Dois poliedros nestas condições dizem-se duais. Procure deduzir como pode obter um deles tendo o outro.

Com o auxílio dos modelos físicos e das projeções, para cada poliedro, procure quantificar todos os planos de simetria por reflexão e todos eixos, e respetivas rotações, que deixam o poliedro globalmente invariante (uma figura fica globalmente invariante após uma transformação se cada vértice, aresta e face ficar imóvel ou for ocupar o lugar de outro vértice, outra aresta ou outra face, respetivamente).

Tetraedro.

O tetraedro regular é um poliedro com quatro faces triangulares equiláteras. Na figura seguinte colocam-se a par as três projeções notáveis do tetraedro. No caso do tetraedro, coincidem a

primeira e terceira projeções notáveis acima mencionadas (figura 1.70.a), por isso acrescenta-se a projeção ortogonal num plano perpendicular a uma aresta (figura 1.70.c)

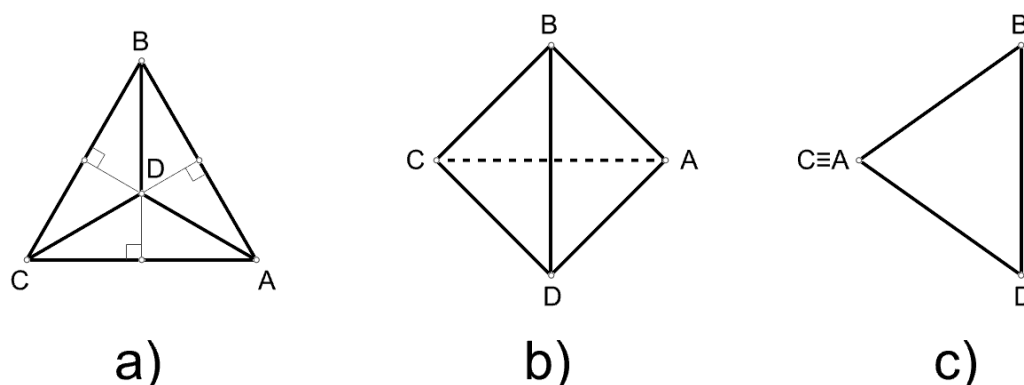


Fig. 1.70. Projeções notáveis do tetraedro: a) plano de projeção paralelo à face $[ABC]$, b) plano de projeção paralelo às arestas $[AC]$ e $[BD]$, e c) plano de projeção perpendicular a uma aresta.

Na primeira projeção (figura 1.70.a) a face $[ABC]$ fica representada em verdadeira grandeza e a projeção do ponto D é o centro da figura de projeção (no triângulo equilátero são coincidentes o ortocentro, o baricentro e o circuncentro). Na segunda projeção (figura 1.70.b), as arestas $[AC]$ e $[BD]$ são paralelas ao plano de projeção e, por isso, apresentam-se em verdadeira grandeza. Como as arestas $[AC]$ e $[BD]$ são ortogonais entre si, e face à simetria do poliedro, o contorno da projeção é um quadrado. Verifique que o lado do quadrado corresponde à verdadeira grandeza da distância entre pares de arestas opostas. Na terceira projeção (figura 1.70.c), a aresta $[BD]$ é paralela ao plano de projeção, e a aresta $[CA]$ é perpendicular ao plano de projeção e, por isso, a sua projeção reduz-se a um ponto. A distância entre esse ponto e a projeção da aresta $[CD]$, que se apresenta em verdadeira grandeza, corresponde à verdadeira grandeza da distância entre um par de arestas opostas já obtida na projeção anterior. Por simetria, a figura da projeção é um triângulo isósceles.

Atividade proposta:

Em cada uma das projeções estude as secções que é possível produzir no sólido por um plano paralelo ao plano de projeção. Como varia o perímetro de cada tipo de secção? Que poliedro se forma se unirmos os centros das faces? Na projeção dada na figura 1.70.a, qual a relação entre a distância $\overline{BD}$ e a distância de D ao ponto médio de $[AC]$? Justifique a sua resposta.

Hexaedro

O hexaedro, ou cubo, é o segundo poliedro regular que vamos estudar. É composto por seis faces quadradas que incidem, duas a duas, perpendicularmente sobre uma aresta. Em cada vértice incidem três arestas perpendiculares entre si. Na figura seguinte colocam-se lado a lado as três projeções notáveis do cubo.

Em relação à primeira projeção (figura 1.71.a) é fácil de concluir que a figura resultante é um quadrado cujo lado corresponde à verdadeira grandeza da aresta do poliedro. Também é fácil perceber que há quatro arestas e quatro faces perpendiculares ao plano de projeção. Relativamente à segunda projeção (figura 1.71.b), verifica-se que os planos dos retângulos

$[CDEF]$ e $[ABGH]$ são perpendiculares entre si, sendo o primeiro horizontal e vertical o segundo. E que são ambos perpendiculares aos planos verticais $[EADH]$ e $[BCGF]$.

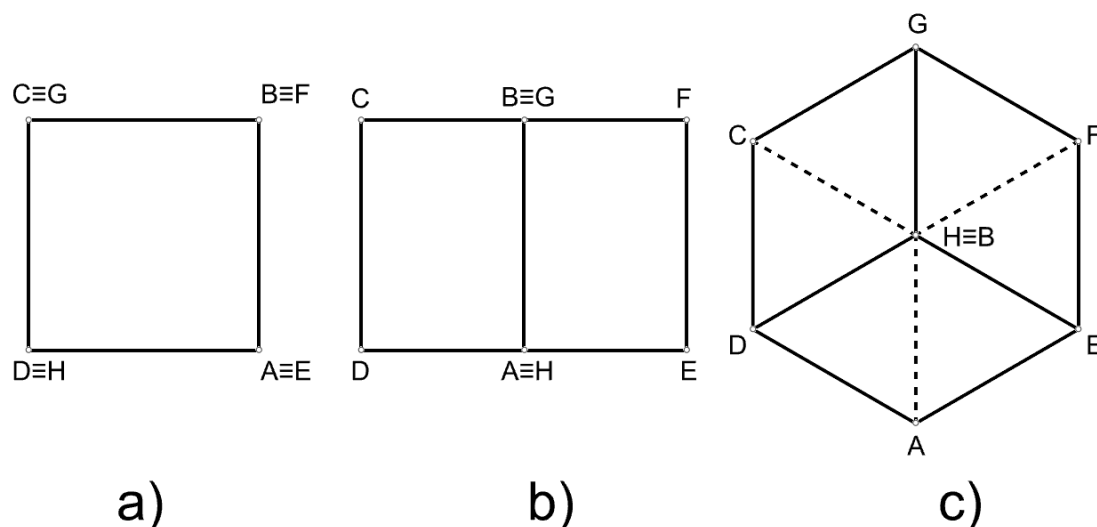


Fig. 1.71. Projeções notáveis do cubo: a) plano de projeção paralelo às faces $[ABCD]$ e $[EFGH]$, b) plano de projeção paralelo ao plano das arestas $[CD]$ e $[FE]$, e c) plano de projeção perpendicular à diagonal espacial $[HB]$.

Como o plano $[CDEF]$ é horizontal, o seu lado maior mede o comprimento da aresta multiplicado por $\sqrt{2}$. Assim, esta projeção é delimitada por um retângulo com a proporção $1:\sqrt{2}$. Como curiosidade, esta é a proporção dos formatos de papel normalizados A0, A1, ..., A3, A4, A5, A conveniência deste formato é que metade de um retângulo com esta proporção é um retângulo com a mesma proporção, isto é $1:\sqrt{2} = \sqrt{2}:2$. Relativamente à terceira projeção (figura 1.71.c), o plano de projeção é perpendicular à diagonal espacial $[HB]$ e paralelo aos planos DEG e ACF .

Atividade proposta:

Em cada uma das projeções estude as secções que é possível produzir no sólido por um plano paralelo ao plano de projeção. Como varia o perímetro de cada tipo de secção? Que poliedro se forma se unirmos os centros das faces? A diagonal $[HB]$ é cortada pelos planos DEG e ACF . Qual a proporção da divisão assim obtida? Justifique a resposta.

Octaedro

O octaedro é composto por oito faces triangulares. Em cada vértice incidem quatro faces. As arestas que incidem num vértice são alternadamente perpendiculares entre si. Um octaedro também é um antiprisma regular. Um antiprisma é um poliedro que tem duas bases, contidas em planos paralelos, com número idêntico de lados. Mas os lados de uma das bases não são paralelos aos da outra base. Por isso as demais faces do sólido são triângulos que ligam dois vértices de uma base a um vértice da outra de forma alternada. Na figura seguinte colocam-se lado a lado as três projeções notáveis do octaedro.

Na primeiro caso (figura 1.72.a), o plano de projeção é paralelo a duas faces do octaedro. Dadas as simetrias do poliedro a projeção é delimitada por um hexágono regular. No segundo caso (figura 1.72.b), a figura da projeção é delimitada por um losango cujas diagonais se relacionam na proporção $1:\sqrt{2}$, apresentando a menor a verdadeira grandeza do comprimento das arestas do poliedro.

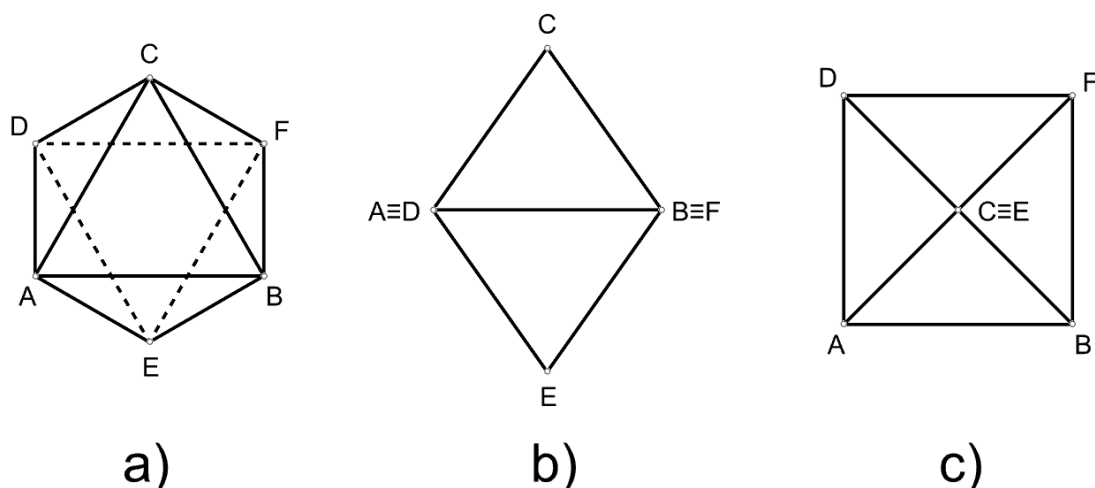


Fig. 1.72. Projeções notáveis do octaedro: a) plano de projeção paralelo às faces $[ABC]$ e $[DEF]$, b) plano de projeção perpendicular às arestas $[AD]$ e $[BF]$, e c) plano de projeção perpendicular à diagonal espacial $[CE]$.

No terceiro caso (figura 1.72.c), a figura da projeção é delimitada por um quadrado cujo lado corresponde à verdadeira grandeza das arestas do poliedro. E cujas diagonais têm o comprimento da diagonal maior do losango na segunda projeção.

Atividade proposta:

Em cada uma das projeções estude as secções que é possível produzir no sólido por um plano paralelo ao plano de projeção. Como varia o perímetro de cada tipo de secção? Que poliedro se forma se unirmos os centros das faces? Na primeira projeção, qual a relação entre o comprimento do lado do hexágono e o comprimento da aresta do poliedro? Como pode obter um octaedro a partir de um tetraedro?

Dodecaedro

O dodecaedro é composto por 12 faces pentagonais. Em cada vértice incidem três arestas e três faces. O dodecaedro regular (e também o icosaedro regular) está intimamente relacionado com o pentágono regular. Por essa razão vamos analisar primeiro o pentágono regular (figura 1.73) para melhor entendermos as proporções que vamos encontrar no dodecaedro e suas projeções (e o mesmo aplica-se ao icosaedro).

Por leitura da figura 1.73.a, podemos constatar que:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Leftrightarrow b^2 = a(a-b) \Leftrightarrow a^2 = b(a+b).$$

Dito por palavras, o segmento a é dividido de tal modo que a razão entre o todo e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a parte menor. Quando isto acontece, este rácio recebe a designação de **razão de ouro**, **média e extrema razão**, ou **proporção áurea**. Um retângulo cujo lado maior está para o lado menor nesta proporção, designa-se por **retângulo de ouro**. E um triângulo isósceles em que os dois lados maiores estão para o menor nesta proporção, designa-se por **triângulo de ouro**. Como podemos verificar, há uma relação entre o pentágono e esta proporção.

Por outro lado sabemos que, por relação a um triângulo inscrito numa semicircunferência (figura 1.73.b), temos $b^2 = xy$ ou $a^2 = xy$, consoante optemos por designar a altura do triângulo retângulo por a ou b .

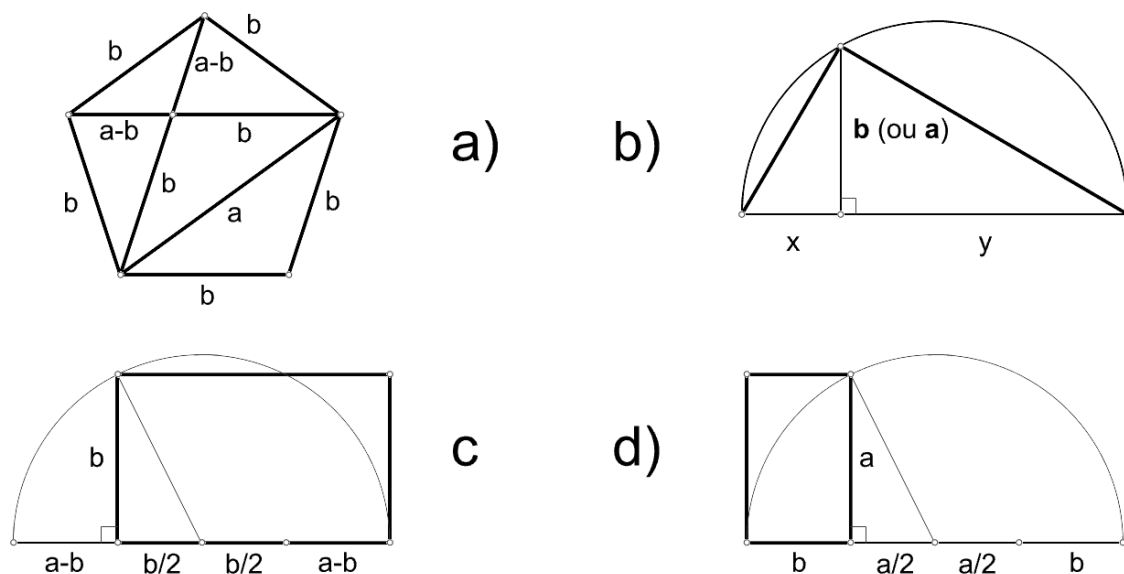


Fig. 1.73. A proporção áurea no pentágono regular e a construção do retângulo de ouro e do triângulo de ouro

Para que possamos construir a proporção áurea através de um triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência, se a altura for **b**, deve ser $y = a$ e $x = a - b$, e se a altura for **a**, deve ser $x = b$ e $y = a + b$. Seja qual for o caso, isso só se verifica se o centro da semicircunferência for o ponto médio do segmento **b** rodado para a horizontal (figura 1.73.c) ou o ponto médio do segmento **a** rodado para a horizontal (figura 1.73.d). Analisando estas duas figuras será fácil concluir que dado um retângulo de ouro, se dele retirarmos um quadrado, o retângulo que sobra também é um retângulo de ouro. Naturalmente, a partir do momento em que temos as proporções definidas é fácil construir um triângulo de ouro. E pela mesma ordem de ideias será fácil construir graficamente um pentágono regular.

Após esta discussão, estamos em melhores condições de entender a construção das projeções notáveis do dodecaedro (e do icosaedro).

Atividade proposta:

Face à discussão apresentada, procure explicar por que razão a proporção áurea pode ser representada pelas razões $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

Em relação ao primeiro caso (figura 1.74.a), o plano de projeção é paralelo às faces **[ABCDE]** e **[PQRST]**. Estas duas faces projetam-se em verdadeira grandeza segundo dois pentágonos com o mesmo centro **Z** e rodados 36° um em relação ao outro. Face à regularidade do poliedro, a figura que delimita a projeção é um decágono regular. A determinação dos seus vértices é simples de obter. Por exemplo, o vértice **J** fica graficamente na intersecção da reta **ZB** com a reta **CS**, graficamente perpendicular à reta **AB**. E de forma análoga podem ser determinados todos os vértices do decágono. Se prolongarmos as arestas que incidem nos vértices de uma face, por exemplo a face **[CLMND]**, e que não estão contidas na face, obtemos um ponto **X** comum a todas as arestas estendidas. A distância entre este ponto **X** a qualquer dos pontos da face está para a aresta do dodecaedro na proporção áurea.

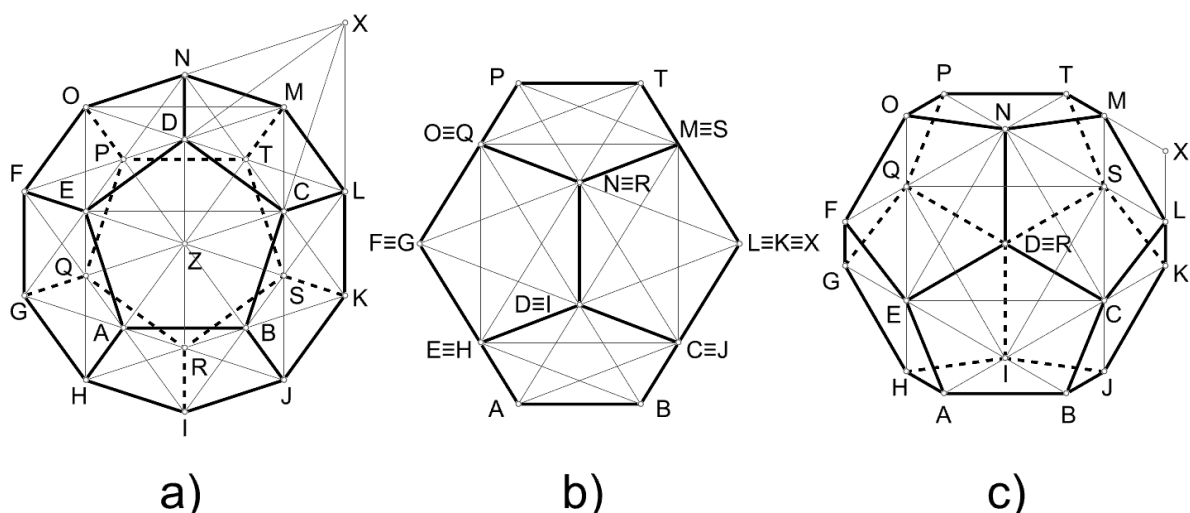


Fig. 1.74. Projeções notáveis do dodecaedro: a) plano de projeção paralelo às faces $[ABCDE]$ e $[PQRST]$, b) plano de projeção perpendicular às arestas $[FG]$ e $[LK]$, e c) plano de projeção perpendicular à diagonal espacial $[DR]$.

Em relação ao segundo caso (figura 1.74.b), tirámos partido de haver cubos inscritos no dodecaedro. Um desses cubos tem duas faces paralelas ao plano de projeção, $[OECM]$ e $[SQHJ]$. As projeções das arestas $[ND]$ e $[RI]$ ficam paralelas às projeções de dois dos lados de cada um dos quadrados mencionados, e adicionalmente ficam centradas no quadrado projeção; a relação do lado do quadrado com estas retas é dada pela proporção áurea. A partir deste momento a obtenção das projeções das arestas do dodecaedro é quase imediata. Basta para isso representar os pentagramas que estão contidos nas quatro faces visíveis do dodecaedro.

Finalmente, relativamente ao terceiro caso (figura 1.74.c), o plano de projeção é perpendicular à diagonal espacial $[DR]$. Neste caso o plano de projeção é paralelo aos planos ECN e QIS . É ainda paralelo às arestas $[AB]$, $[JK]$, $[LM]$, $[TP]$, $[OF]$ e $[GH]$ que se apresentam em verdadeira grandeza na projeção. A representação da projeção começou pela construção dos triângulos equiláteros ECN e QIS com lados na proporção áurea em relação às arestas do dodecaedro. Para construir as projeções de uma das arestas paralelas ao plano de projeção, por exemplo $[AB]$, prolongaram-se graficamente as retas EI e CI e construíram-se nestas os pontos B e A , respetivamente, de modo a que $[AB]$ tivesse a verdadeira grandeza da dimensão da aresta, que é conhecida, e a reta AB fosse graficamente perpendicular à reta DI . As restantes arestas nas mesmas condições podem ser construídas de forma idêntica.

Atividade proposta:

Em cada uma das projeções estude as secções que é possível produzir no sólido por um plano paralelo ao plano de projeção. Como varia o perímetro de cada tipo de secção? Que poliedro se forma se unirmos os centros das faces? Em relação à figura 1.74.a, porque é que o ponto J se pode determinar da forma indicada? Quantos cubos inscritos no dodecaedro é possível encontrar?

Icosaedro

O icosaedro é composto por 20 faces triangulares e em cada vértice incidem cinco arestas. Na figura seguinte colocam-se lado a lado as três projeções notáveis do icosaedro.

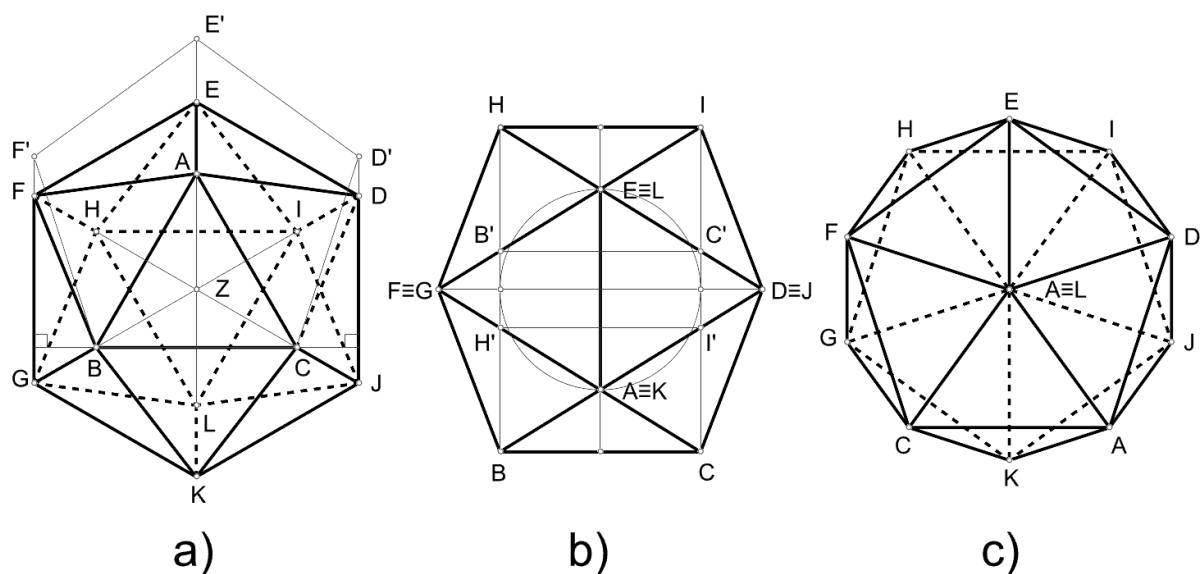


Fig. 1.75. Projeções notáveis do icosaedro: a) plano de projeção paralelo às faces $[ABC]$ e $[ILH]$, b) plano de projeção perpendicular às arestas $[FG]$ e $[DJ]$, e c) plano de projeção perpendicular à diagonal espacial $[AL]$.

No primeiro caso (figura 1.75.a), o plano de projeção é paralelo às faces $[ABC]$ e $[ILH]$. As projeções destas duas faces definem um hexagrama de centro Z . A construção da projeção teve início com a representação do hexagrama e do pentágono regular $[BCD'E'F']$. Como, dada a simetria rotacional do icosaedro, a projeção horizontal deve delimitada por um hexágono regular de centro Z e lados paralelos às diagonais do hexagrama, obtém-se, por exemplo, o vértice D pela interseção da reta ZI com a reta $D'D$, perpendicular à reta BC . Os restantes vértices do hexágono obtêm-se modo idêntico. Depois de representar o hexágono $[KJDEFG]$, as projeções das restantes arestas resultam da ligação entre vértices do hexagrama e vértices do hexágono.

No segundo caso (figura 1.75.b), o plano de projeção é perpendicular às arestas $[FG]$ e $[DJ]$, e é paralelo às arestas $[EA]$, $[KL]$, $[HI]$ e $[BC]$. Por essa razão as projeções destas quatro arestas (sendo as projeções $[EA] \equiv [LK]$) têm de se apresentar em verdadeira grandeza. Como o retângulo $[HICB]$ é paralelo ao plano de projeção e tem a proporção áurea, a sua projeção é um retângulo de ouro. A projeção do retângulo $[FGJD]$ reduz-se a um segmento de reta cujo comprimento é igual ao comprimento dos lados maiores do retângulo $[HICB]$ porque os segmentos $[FD]$ e $[GJ]$ são paralelos ao plano de projeção. Note-se que os pares de arestas $[FG]$ e $[DJ]$, $[EA]$ e $[KL]$, e $[HI]$ e $[BC]$, são ortogonais entre si. Sendo $[FG]$ e $[DJ]$ perpendiculares ao plano de projeção, as projeções dos outros dois pares são graficamente ortogonais entre si. Consideradas estas relações e atendendo à simetria de reflexão do poliedro, torna-se fácil a construção da sua projeção ortogonal a partir do momento em que se construiu o a projeção do retângulo de ouro $[HICB]$.

No terceiro caso (figura 1.75.c) tira-se partido do facto dos pentágonos regulares $[ADEFC]$ e $[KGHIL]$ serem paralelos ao plano de projeção e terem projeções com o mesmo centro, na projeção $A \equiv L$, rodadas 36° . A projeção do icosaedro é delimitada por um decágono regular.

Atividade proposta:

Em cada uma das projeções estude as secções que é possível produzir no sólido por um plano paralelo ao plano de projeção. Como varia o perímetro de cada tipo de secção? Que

poliedro se forma se unirmos os centros das faces? Por que razão, no caso da figura 1.75.b, os vértices B' e C' do quadrado $[BCC'B']$ estão contidos, respetivamente, nos segmentos $[IG]$ e $[HD]$?

Operações geométricas

Vamos agora exemplificar, através de algumas operações geométricas, o modo como as projeções ortogonais são úteis para raciocinar sobre a geometria do espaço e resolver problemas com esta relacionados. Por vezes pode-se pensar que a redução dos problemas do espaço a problemas no plano é uma limitação porque se perde a tridimensionalidade. Porém, isso pode ser precisamente a vantagem na medida em que, eliminando a terceira dimensão podem colocar-se em evidência os aspetos mais significativos de uma questão ou problema.

Planos tangentes

Genericamente, plano θ tangente a uma superfície num ponto T fica definido por duas retas concorrentes tangentes à superfície naquele ponto. Do ponto de vista prático a questão passa pela identificação ou determinação do ponto e de duas linhas $[a]$ e $[b]$ da superfície, passantes pelo ponto, a que seja fácil conduzir as retas tangentes s e t , respetivamente. Assim, na geometria descritiva, pretende-se que as linhas $[a]$ e $[b]$ da superfície sejam as mais fáceis possível de tratar graficamente. Vamos exemplificar com a superfície da esfera, do cone de base circular e do cilindro de base circular. E em cada um dos casos vamos considerar que o plano tangente deve passar por um ponto P da superfície ou por um ponto Q exterior à superfície.

Cone

Considere-se a superfície de um cone $[\Gamma]$ e um ponto P a ela pertencente. Já vimos que um ponto pertence a uma superfície se pertencer a uma linha da superfície. Neste caso, o ponto P , com 4.5 de cota, pertence a uma geratriz g da superfície do cone. O cone está definido pela sua base horizontal $[d]$ com centro D à cota 2, e vértice V , à cota 10 (figura 1.76).

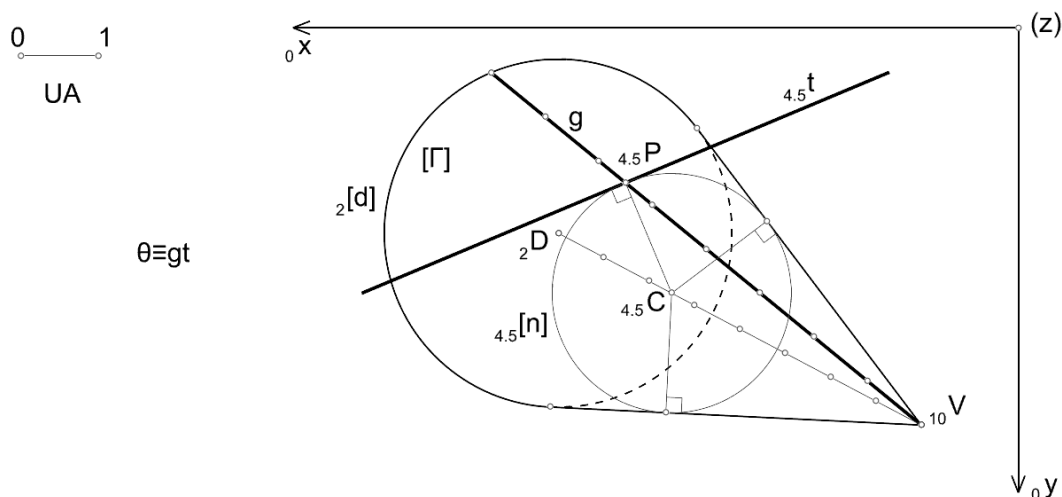
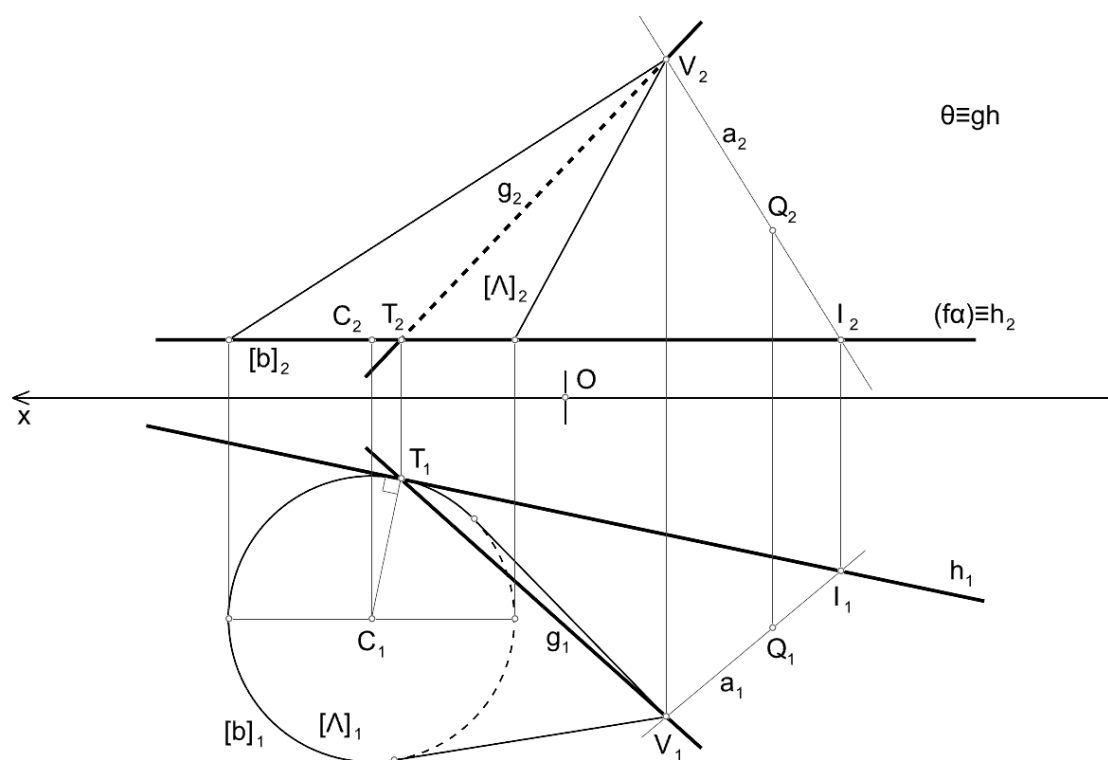


Fig. 1.76. Condução do plano tangente à superfície de um cone passante por um ponto P a ela pertencente. Problema resolvido no sistema cotado.

Como a geratriz g está contida na superfície do cone, está também contida no plano θ tangente à sua superfície. Para definir a outra reta tangente à superfície do cone em P ,

Vejam agora o caso de o plano estar obrigado a passar por um ponto Q exterior à superfície do cone. Claro que para haver solução a reta passante pelo ponto e pelo vértice não pode interseccionar a base do cone. Sejam dados o cone $[A]$ de vértice V , base circular horizontal $[b]$ com centro C , e o ponto Q (figura 1.77).



Como todos os planos tangentes à superfície de um cone passam pelo seu vértice, então o plano tangente deve conter a reta ***a*** definida pelo vértice ***V*** e pelo ponto ***Q***. Por outro lado, se um plano for tangente a uma superfície num ponto, em geral, se conduzirmos um plano qualquer por esse ponto, esse plano interseca o plano tangente e a superfície segundo uma reta e uma curva tangentes entre si nesse ponto. Assim, se considerarmos o plano ***α*** da base do cone, podemos concluir que esse plano interseca o plano ***θ*** tangente à superfície do cone segundo uma reta ***h*** tangente à circunferência do círculo [***b***] da base. E essa reta deverá passar pelo traço da reta ***a*** no plano ***α***, isto é, pelo ponto ***I***. Ora, pelo ponto ***I*** podem ser conduzidas duas retas que cumprem esta condição pelo que o problema tem duas soluções, podendo nós, se nada for dito em contrário, optar por uma delas. Assim, o plano ***θ*** tangente à superfície do cone ficou definido pela reta ***h*** e pela geratriz ***g*** passante pelo ponto ***T***. É claro que o plano tangente já estava definido pelas retas ***a*** e ***h***. Porém, por norma, no caso das superfícies cónicas e cilíndricas consideramos sempre a geratriz de contacto entre o plano tangente e a superfície.

Cilindro

O caso do plano tangente à superfície de um cilindro passante por um ponto da superfície é em tudo semelhante ao caso da superfície do cone. Vamos apenas considerar o caso de o plano estar condicionado a conter um ponto Q exterior à superfície cilíndrica. Para haver solução, uma reta paralela às geratrizes do cilindro, passante pelo ponto, não pode interseccionar a base do cilindro. A única diferença em relação ao caso do cone é que a reta a passante pelo ponto Q deve agora ser paralela às geratrizes do cilindro. A partir do momento em que está conduzida a reta a , todo o problema se resolve de forma análoga ao caso do cone.

Esfera

Veamos agora o caso do plano tangente à superfície esférica conduzido por um ponto T nela contido. Seja dada uma superfície esférica $[\delta]$ com centro num ponto $C_{(0, 3, 2.5)}$. Verifica-se que esta superfície é tangente ao plano xy . E pretende-se conduzir um plano θ tangente à superfície esférica num ponto T com **3.5cm** de cota, e **4.5cm** de afastamento, a ela pertencente (figura 1.78).

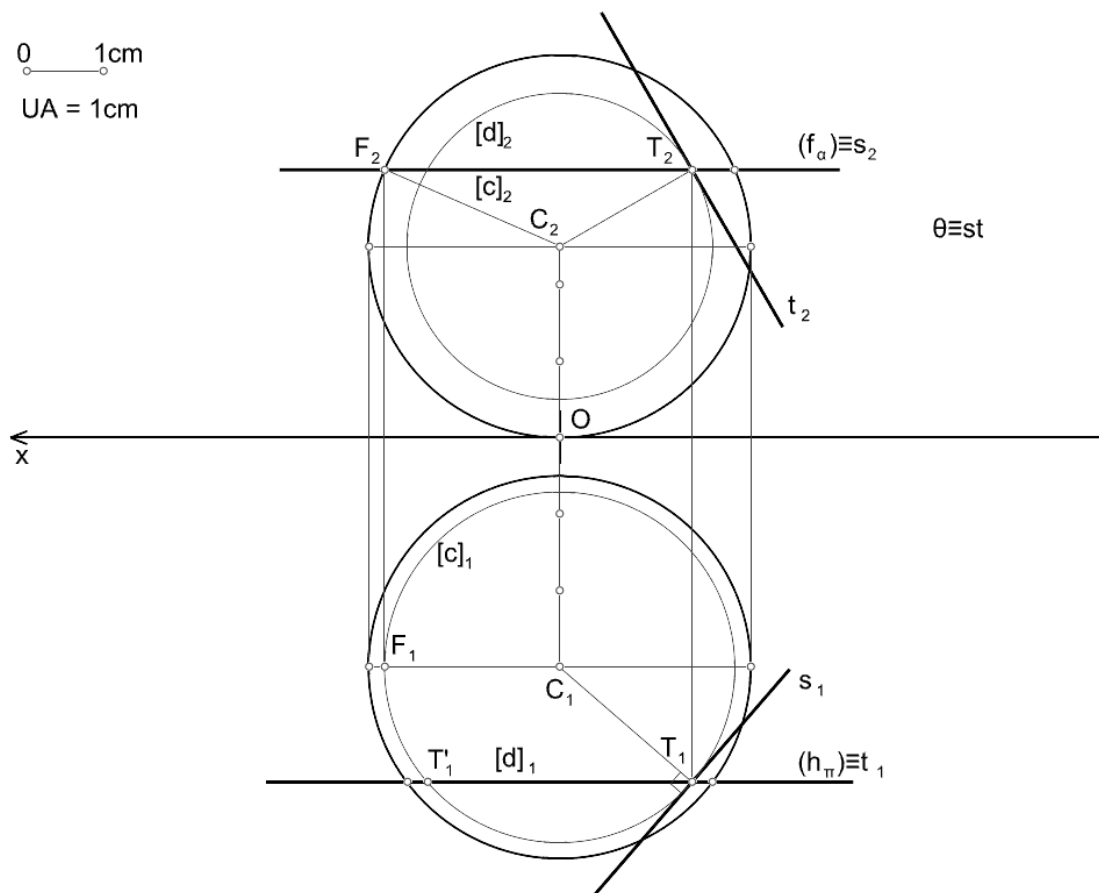
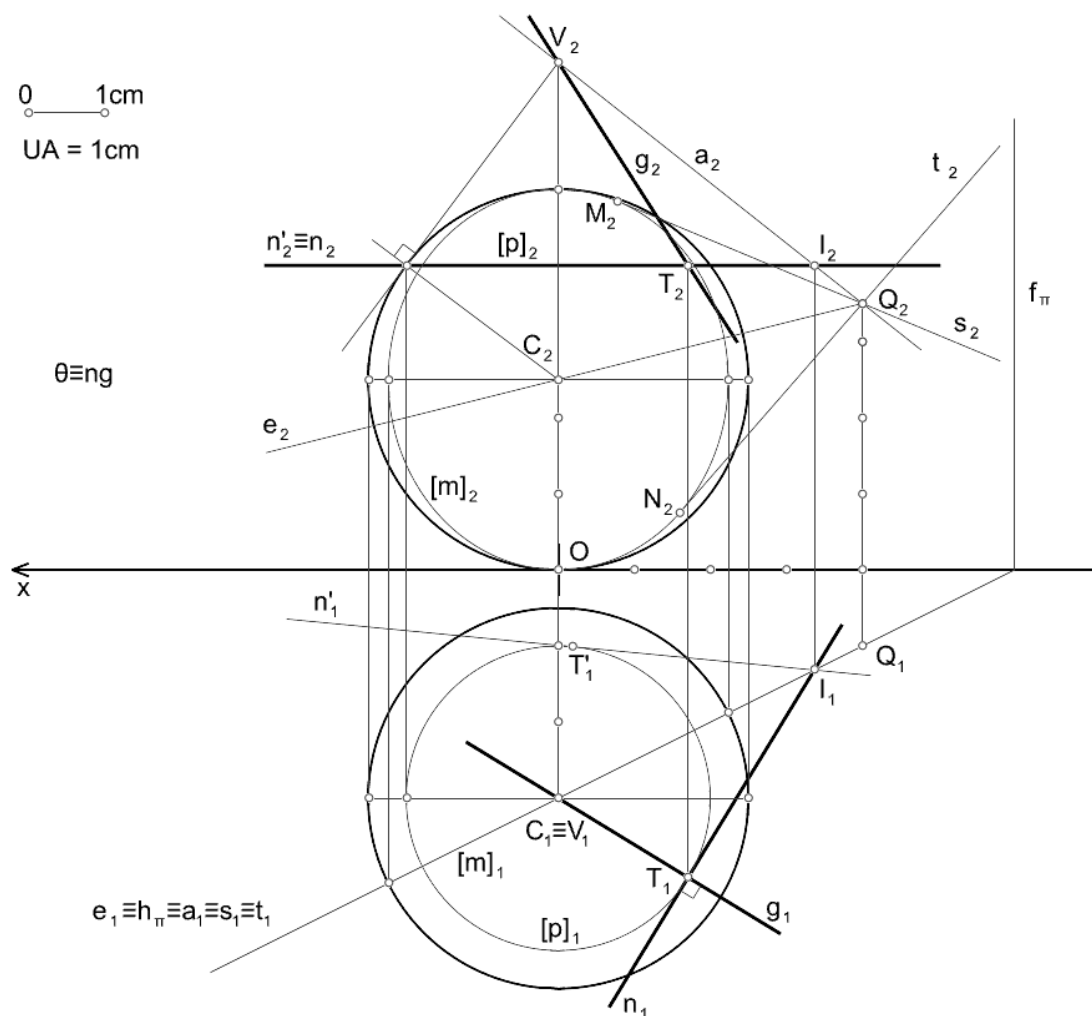


Fig. 1.78. Condução do plano tangente à superfície esférica por um ponto T nela contido. Problema resolvido em DPO.

A primeira questão que se coloca é a seguinte. Quantos pontos com aquele par cota/afastamento pertencem à superfície esférica? Conduzimos um plano α horizontal à cota **3.5cm**. Este plano intersecciona a superfície esférica segundo uma circunferência $[c]$ horizontal. Esta circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos da superfície esférica que têm **3.5cm** de cota. De seguida, conduzimos um plano π frontal com **4.5cm** de afastamento. Este plano intersecciona a circunferência $[c]$ em dois pontos, T e T' . Ambos os pontos cumprem a

Vamos agora analisar a situação em que o plano tangente à superfície esférica deve passar por um ponto Q exterior à superfície. Seja considerada a mesma superfície esférica $[\delta]$ do caso anterior, e o ponto $Q_{(-4, 1, 3,5)}$ (figura 1.79).



Quantas soluções existem para este problema? Como o ponto é exterior à esfera, então deve ser relativamente fácil concluir que existe uma infinidade de soluções. Com efeito, existe uma superfície cônica de vértice Q concordante com a superfície esférica ao longo de uma circunferência $[c]$. Esta circunferência, contida num plano perpendicular à reta QC , é o lugar geométrico dos possíveis pontos de tangência. Cada plano tangente é simultaneamente tangente à superfície esférica e à superfície cônica concordante. De todos esses planos, há quatro cujo traçado é praticamente imediato. Trata-se dos dois planos de topo e dos dois planos verticais tangentes à superfície esférica. Reduzir a questão a um plano tangente implica assumir uma restrição qualquer, por exemplo assumir que o plano é de determinado tipo, ou especificar uma coordenada do ponto de tangência. Se for este o caso, será que temos a

liberdade de escolher, por exemplo, uma cota qualquer para o ponto T de tangência entre o plano tangente e a superfície esférica? A resposta é não. Há um intervalo de cotas para o qual existem soluções. Esse intervalo é determinado pelos pontos de maior e menor cota da circunferência $[c]$. É relativamente simples concluir que estes dois pontos estão contidos no plano vertical π passante pelo eixo da superfície cônica concordante, isto é, pela reta QC . Este plano interseca a superfície esférica segundo uma circunferência máxima $[m]$. Os pontos de maior e menor cota, M e N , determinam-se conduzindo pelo ponto Q as retas s e t tangentes à circunferência $[m]$ nos pontos M e N , respetivamente.

A circunferência $[m]$, estando contida num plano vertical, tem a projeção horizontal reduzida a um segmento de reta e a projeção frontal é uma elipse. As projeções horizontais das retas s e t estão contidas em h_π . As projeções frontais das retas s e t são tangentes à projeção frontal da circunferência $[m]$. Isto é, s_2 e t_2 passam por Q_2 e são tangentes à elipse $[m]_2$ nos pontos M_2 e N_2 . Determinadas as projeções frontais dos pontos M e N , ficamos em condições de impor uma cota ao ponto de tangência T . Neste caso definiu-se, contida na superfície esférica, um circunferência $[p]$ qualquer cuja cota é menor que a de M e maior que a de N . O ponto T pretendido deverá pertencer a esta circunferência. Para o determinar, considerou-se uma superfície cônica, de vértice V , concordante com a superfície esférica ao longo da circunferência $[p]$. Como a superfície cônica é concordante com a superfície esférica, os planos tangentes à superfície cônica conduzidos pelo ponto Q também são tangentes à superfície esférica. O problema reduz-se agora ao problema já tratado anteriormente relativo à condução de um plano tangente à superfície cônica por um ponto exterior. Relativamente a este problema, há suas soluções que correspondem aos pontos T' e T . Para o efeito considerou-se o ponto T e o plano θ tangente à superfície esférica ficou definido pela geratriz g da superfície cônica, concordante de vértice V , e pela reta n tangente à circunferência $[p]$, ambas concorrentes no ponto T .

Vamos apenas fazer uma observação quanto a questões operativas práticas. Na resolução apresentada na figura, aparecem conduzidas diretamente as retas s_2 e t_2 tangentes à elipse $[m]_2$ nos pontos M_2 e N_2 .

Se o leitor estiver a resolver este problema utilizando meios analógicos, seguramente não é prático traçar a elipse para, de seguida conduzir as tangentes. Para incrementar a precisão do seu desenho, pode proceder de vários modos. Pode rodar o plano π até colocar a circunferência $[m]$ numa posição paralela a um dos planos de projeção. Neste caso, recomenda rodar-se o plano π em torno de um eixo passante pelo centro da esfera porque, ao fazê-lo, quando a circunferência $[m]$ ficar paralela a um dos planos de projeção, a sua projeção fica coincidente a projeção do contorno aparente da esfera nesse plano de projeção, o que reduz a quantidade de traçados. Estando a circunferência rodada $[m]_R$ paralela a um dos planos de projeção, a determinação dos pontos M e N rodados, isto é M_R e N_R , corresponde graficamente à condução de retas tangentes à circunferência $[m]_R$ pelo ponto Q rodado, isto é, Q_R . Se esta rotação for feita em torno de um eixo vertical passante pelo centro da esfera, é graficamente equivalente a uma afinidade. Outra hipótese, é determinar os focos da elipse $[m]_2$ e utilizar o traçado de tangentes à elipse por um ponto exterior.

Na nossa resolução tirámos partido de estar a produzir o desenho através de uma ferramenta de desenho digital. E nesse contexto, o traçado de tangentes a elipses é tão preciso quanto o traçado de tangentes a circunferências e pode ser executado diretamente. A razão de ser de

termos introduzido esta discussão, é contribuir para uma reflexão sobre as consequências (positivas e negativas) da utilização de ferramentas digitais de desenho geométrico.

Atividade proposta:

Nos casos estudados apenas considerámos o plano tangente passante por um ponto P da superfície e por um ponto Q exterior à superfície. Nas três situações, procure resolver o problema para o caso de o plano tangente estar condicionado uma direção, isto é, o plano tangente deve ser paralelo a uma reta dada. E no caso da superfície esférica considere ainda as situações em que o plano tangente deve conter uma reta dada ou ser paralelo a um plano dado. Quantas soluções possíveis há para cada uma destas situações?

Ainda a pretexto da questão dos planos tangentes a cones e cilindros, procure representar cones e cilindros com bases contidas em planos oblíquos a um, a dois ou aos três planos coordenados.

Intersecções, Secções e Truncagens

De alguma forma, já introduzimos o tema das intersecções. Já determinámos intersecções entre planos, e entre retas e planos. E também já representámos linhas de nível de superfícies que não são mais que intersecções produzidas por planos horizontais. E, no caso da superfície esférica também considerámos a intersecção com um plano vertical. A nossa intenção é, agora, generalizar a questão. E para o efeito vamos considerar as figuras geométricas que temos vindo a tratar, isto é, primas, pirâmides, cones, cilindros e esfera. Por agora vamos deixar os poliedros regulares de fora. Mais do que apresentar métodos gráficos para computar as intersecções, interessa-nos discutir a sua natureza. Isto por uma razão simples. Embora tenha um valor pedagógico e científico em si, a computação de intersecções, e outras operações relacionadas, é facilmente resolúvel através da utilização de ferramentas de modelação geométrica digital. O que essas ferramentas em geral não fazem é discutir a natureza das intersecções que tão facilmente aparentam produzir. E essa é a discussão realmente importante, até mesmo para uma utilização mais consciente daquelas ferramentas.

Prismas e pirâmides

Mas antes vamos estabelecer alguns métodos práticos para a determinação de intersecções planas em prismas e pirâmides, que podem, depois, ser adaptados a cones e cilindros. Em todos os casos consideramos a determinação da verdadeira grandeza da intersecção produzida.

Seja dada uma pirâmide oblíqua qualquer de vértice V e um plano α oblíquo secante qualquer. A base da pirâmide é o quadrângulo $[ABCD]$ contido num plano horizontal (figura 1.80). Em termos práticos, a determinação da intersecção produzida pelo plano secante na superfície da pirâmide obtém-se através da intersecção das arestas da pirâmide com o plano secante. Assim, este problema reduz-se à intersecção de uma reta com um plano.

Ora, recordando, a intersecção de uma reta com um plano resolve-se considerando a intersecção entre o plano secante e um plano auxiliar conduzido pela reta. Como neste caso temos várias arestas, há interesse prático em tornar a aplicação do processo o mais expedita possível. Para o efeito vamos considerar um feixe de planos passantes pelo vértice V da pirâmide. A intersecção deste feixe de planos com o plano secante corresponde a um feixe de retas, com centro num ponto I , que intersejam as arestas da pirâmide passantes pelo vértice V . O mesmo feixe de planos interseja o plano da base $[ABCD]$ segundo um feixe de retas, com centro num ponto J . Estas retas passam pelos vértices da base $[ABCD]$. Os raios homólogos dos dois

feixes interseçam-se em pontos contidos na reta m comum ao plano secante α e ao plano da base $[ABCD]$.

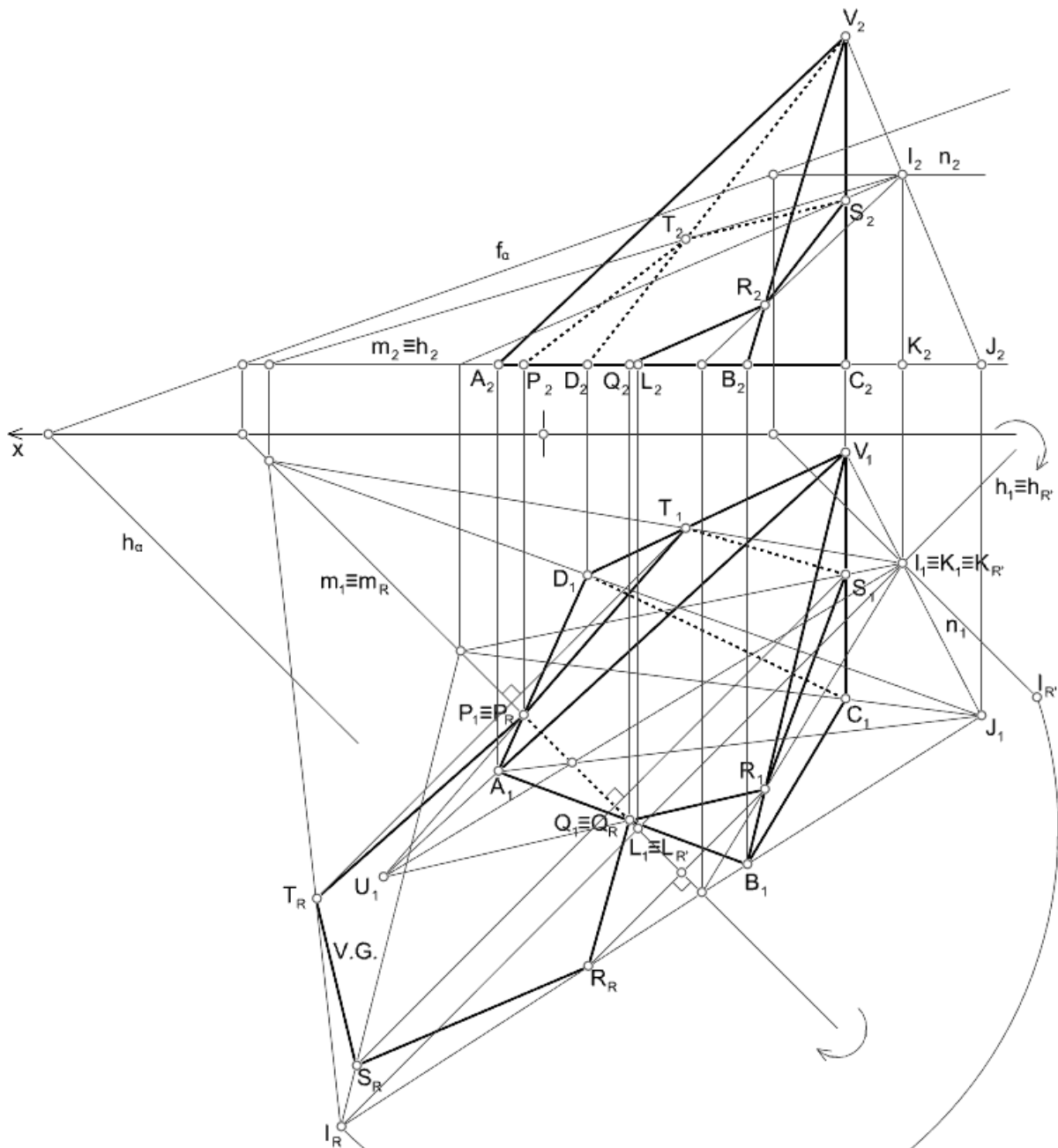


Fig. 1.80. Construção da interseção produzida por um plano numa pirâmide. Problema resolvido em DPO.

A resolução começa com a construção de um ponto I , qualquer, contido no plano secante α . Construído este ponto, a reta VI intersesta o plano da base $[ABCB]$ num ponto J . Para determinar um ponto de uma das arestas, por exemplo o ponto T da aresta $[VD]$, conduz-se a reta JD e, pelo ponto de interseção desta reta com a reta m , conduz-se a reta IT . O ponto T resulta da interseção desta reta com a aresta $[VD]$. Procede-se do mesmo modo para todas as arestas. Porém, verifica-se que o ponto U (apenas está representada a projeção horizontal), da reta VA , está fora da superfície da pirâmide. Isto significa que as arestas $[AD]$ e $[AB]$ interseçam o plano secante α . De facto essas interseções ocorrem sobre a reta m nos pontos P e Q , respetivamente. A linha $[PQRST]$ é o resultado da interseção produzida pelo plano

secante α na superfície da pirâmide. Esta linha delimita uma região plana que é a **secção** produzida pelo plano secante α na pirâmide. Se fosse pretendida a truncagem de uma das partes da pirâmide, na expressão gráfica do resultado final essa parte seria omitida.

Para determinar a verdadeira grandeza da região de secção, considerou-se um rebatimento do plano secante α para o plano horizontal da base $[ABCD]$ executado em torno da reta m . Neste movimento, todos os pontos da reta m são fixos, por isso, $P \equiv P_R$ e $Q \equiv Q_R$, embora apenas a projeção horizontal dos pontos rebatidos esteja representada, ou seja, no desenho temos apenas $P_1 \equiv P_R$ e $Q_1 \equiv Q_R$. Começou-se por determinar o ponto I_R pelo qual todas as retas do feixe de centro em I passam após o rebatimento. A distância do ponto I à charneira do rebatimento, a reta m , é dado pelo comprimento do segmento $[IL]$. Para determinar a verdadeira grandeza deste segmento, considerou-se o rebatimento do plano vertical da reta IL , para o plano horizontal do ponto K , em torno da reta h . Este rebatimento deu origem ao ponto $I_{R'}$ e a distância $\overline{I_{R'}L_1}$ corresponde à verdadeira grandeza do segmento $[IL]$. Com centro em $L_1 \equiv L_{R'}$ roda-se o ponto $I_{R'}$ até à reta h_1 , determinando o ponto I_R . A partir daqui, o restante traçado é simples. A título de exemplo, o ponto T_R determina-se na intersecção da reta $I_R T_R$ com a reta $T_1 T_R$, graficamente perpendicular à reta m_1 . Note-se que a região $[P_R Q_R R_R S_R T_R]$ que agora aparece em verdadeira grandeza está com a orientação invertida em relação à orientação da figura $[P_1 Q_1 R_1 S_1 T_1]$. A orientação podia ter sido preservada se o sentido do rebatimento do plano α tivesse sido o oposto. No entanto isso implicaria uma sobreposição de figuras que prejudicaria a leitura do desenho. Observe-se ainda que tinha sido possível transformar o plano secante α num plano projetante através de uma mudança do sistema de referência. Nesse caso, na projeção relativamente à qual o plano fica projetante a determinação da intersecção é imediata porque se reduz a um segmento de reta contido na reta que representa, nessa projeção, o plano secante.

Vamos agora considerar outro exemplo. Seja dado, no sistema cotado, um prisma oblíquo de bases pentagonais regulares e um plano secante α definido pelo seu traço horizontal, pela especificação da sua pendente e pela indicação do seu sentido ascendente (figura 1.81).

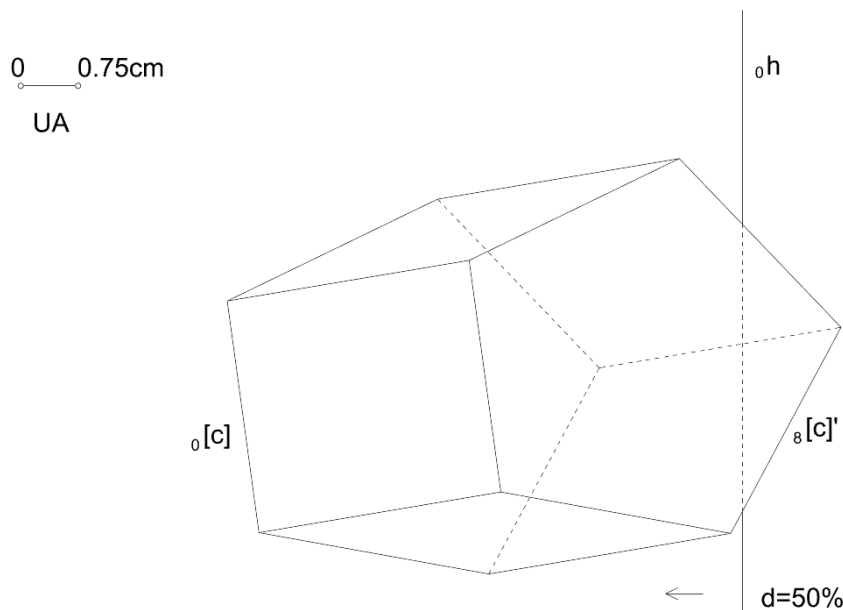


Fig. 1.81. Dados em sistema cotado: prisma oblíquo, traço horizontal do plano secante incluindo a especificação da pendente e sentido ascendente.

Seja pretendida a truncagem da parte do prisma acima do plano secante. Neste exemplo vamos omitir a representação do sistema e referência. Vamos ainda documentar o exemplo através de três desenhos. No primeiro incluem-se apenas os dados. No segundo incluem-se todas as construções e o resultado final. E no terceiro apenas se inclui o resultado final. Fazemo-lo por uma questão de clareza gráfica no sentido de facilitar o entendimento mas também porque às vezes, em contexto de aplicação prática, pode fazer sentido omitir construções auxiliares e apresentar apenas o resultado final. Seja como for, do ponto de vista pedagógico e em contexto de ensino e aprendizagem em geometria descritiva, o processo de construção é tão importante como o resultado, por isso, em geral, deve ser sempre apresentado. A resolução do problema passa por interseção do plano secante com os planos das faces do prisma. Isso pode ser feito nos mesmos termos que consideramos para o caso anterior. Em alternativa podemos utilizar um faixe de planos horizontais auxiliares. Em termos práticos isso significa graduar o plano secante e os planos das faces do prisma para determinar pontos comuns a ambos por meio das suas linhas de nível. Dito de outro modo, vamos utilizar planos de nível auxiliares para resolver a interseção. Para graduar o plano secante é necessário determinar o intervalo em que devem estar espaçadas, no desenho, as projeções horizontais das retas de nível. Isto pode ser feito graficamente ou através de um cálculo auxiliar (procedimento seguido). No caso das faces do prisma, pode proceder-se à graduação de uma aresta. A partir daí, como as bases são horizontais, são conhecidas as direções das retas de nível dos planos das faces. A interseção entre planos faz-se procurando interseções de linhas de nível de igual cota (figura 1.82).

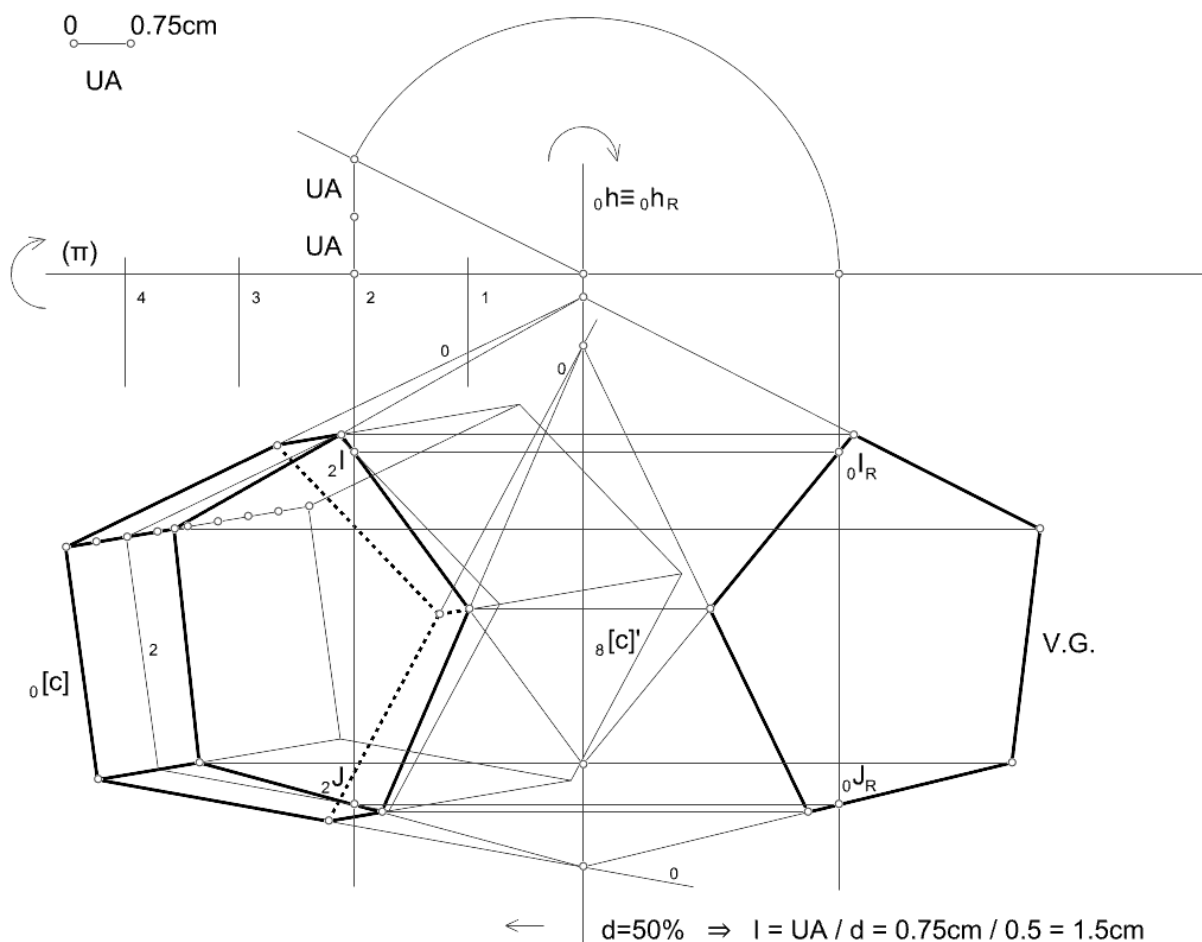


Fig. 1.82. Resolução da interseção e determinação da verdadeira grandeza da figura da secção produzida no prisma.

Neste caso, utilizaram-se dois planos horizontais auxiliares, um à cota **0cm** e outro à cota **1.5cm**, isto é, com **2UA** (2 unidades de altura). Determinados os pontos **I** e **J** à cota **1.5cm**, e determinadas as interseções entre a reta de nível de cota **0cm** do plano secante α com as retas de nível de cota **0cm** dos planos das faces do prisma, ficamos em condições de representar o polígono da secção. Para determinar a verdadeira da secção, efetuou-se um rebatimento do plano secante α em torno no seu traço horizontal. O procedimento de determinação da secção e respetiva verdadeira grandeza é em tudo análogo ao caso anterior relativo à pirâmide. Note-se que neste exemplo optámos por omitir a notação em relação à generalidade dos vértices e das retas da figura por entendermos que não há prejuízo para o entendimento da representação.

Na figura seguinte, isolamos a representação resultante da truncagem, incluindo a graduação das faces do sólido final.

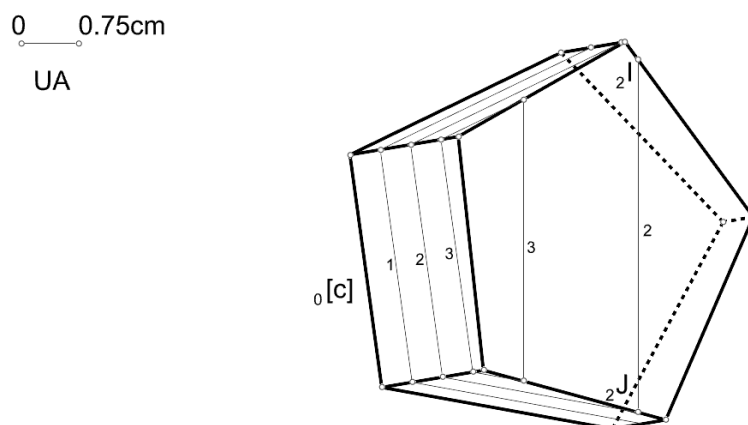


Fig. 1.83. Representação do sólido final incluindo a graduação das faces visíveis.

Atividade proposta:

Determine interseções planas em superfícies de prismas e pirâmides de vários tipos. Em todos os casos determine a verdadeira grandeza das interseções. Em alguns casos considere truncagens.

Cones e cilindros

Vamos agora discutir as interseções planas produzidas numa superfície cônica de revolução. Se o plano secante passar pelo vértice pode acontecer uma de três situações: i) o plano contém uma geratriz e é tangente à superfície cônica, ii) o plano contém duas geratrizes ou, iii) o plano não contém nenhuma geratriz. Se o plano secante não passar pelo vértice, pode ocorrer também uma de três situações: i) o plano é paralelo a um plano tangente e a interseção designa-se **parábola**, ii) o plano é paralelo a duas geratrizes e a interseção designa-se **hipérbole** ou, iii) o plano intersecta todas as geratrizes e a interseção designa-se **elipse**. Veremos adiante que isto pode ser generalizado à interseção plana produzida em qualquer superfície cônica de diretriz circular. Se o plano for perpendicular ao eixo da superfície cônica de revolução, a interseção é uma circunferência.

Vamos definir a hipérbole como uma interseção produzida numa superfície cônica de revolução $[\delta]$, com eixo i , por um plano π paralelo a duas geratrizes da superfície. Na figura 1.84, temos a projeção ortogonal da superfície $[\delta]$. O eixo i é paralelo ao plano de projeção e o plano π é perpendicular ao plano de projeção. A interseção produzida é a curva $[h]$ com dois ramos. Estão ainda representadas duas superfícies esféricas simultaneamente concordantes

com a superfície cônica, segundo as circunferências $[c]$ e $[d]$, e tangentes ao plano π , nos pontos F' e F'' . Os planos das circunferências $[c]$ e $[d]$ interseitam o plano π , segundo as retas d' e d'' , cada uma delas reduzida a um ponto na figura.

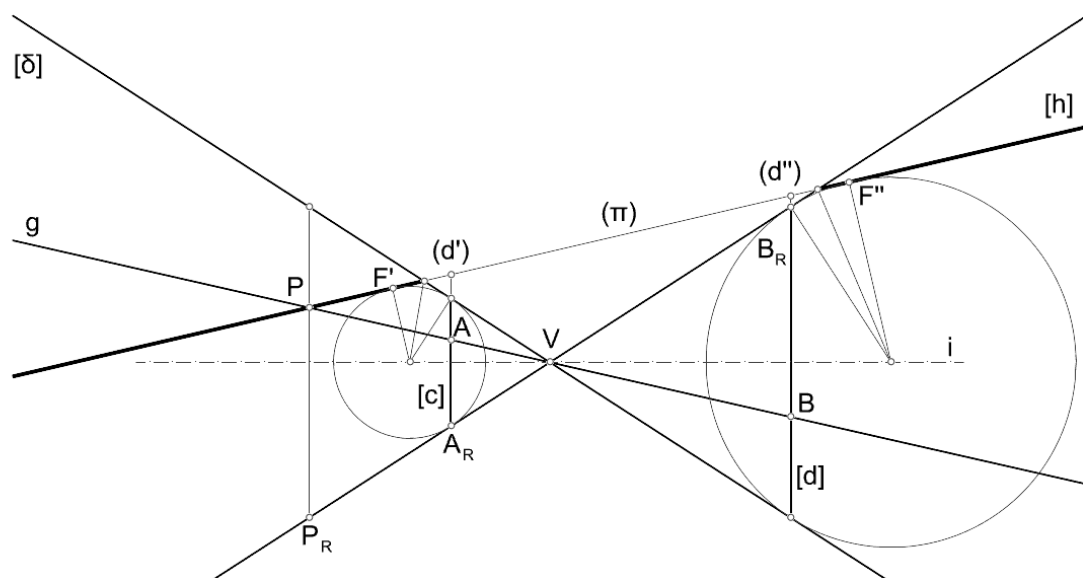


Fig. 1.84. Interseção hiperbólica produzida por um plano numa superfície cônica de revolução. Projeção ortogonal num plano paralelo ao eixo i da superfície cônica.

Considere-se uma geratriz g qualquer da superfície cônica. A geratriz g interseita o plano π num ponto P da curva $[h]$ e interseita as circunferências $[c]$ e $[d]$ nos pontos A e B , respectivamente. Independentemente da geratriz g , a distância espacial entre os pontos A e B é sempre a mesma e é igual a $K = \overline{A_R B_R}$. Assim, em relação às distâncias espaciais podemos escrever que $\overline{PB} - \overline{PA} = K$ ou, se o ponto P estiver no outro ramo da curva $[h]$, $\overline{PA} - \overline{PB} = K$. Por outro lado temos $\overline{PF'} = \overline{PA}$ e $\overline{PF''} = \overline{PB}$, considerando as distâncias espaciais. Isto porque ambos os segmentos, em cada uma das igualdades, correspondem distâncias contidas em retas tangentes às superfícies esféricas conduzidas por P . O que significa que, para qualquer ponto P pertencente à curva $[h]$ temos $\overline{PF''} - \overline{PF'} = K$ ou, se o ponto P estiver no outro ramo da curva $[h]$, $\overline{PF'} - \overline{PF''} = K$. Ora, esta é precisamente a definição de hipérbole, a curva plana tal que para qualquer ponto P da curva, a diferença das suas distâncias a dois pontos fixos F' e F'' , designados focos, é constante.

Mas desta configuração é ainda possível deduzir outras propriedades da curva.

Para qualquer ponto P , temos $\frac{\overline{P_R A_R}}{\overline{P(d')}}} = \frac{\overline{P_R B_R}}{\overline{P(d'')}}} = e$. Em que e é a excentricidade da curva que, no caso da hipérbole, é superior a 1.

A excentricidade pode ser ainda definida como $e = \frac{K}{(d')(d'')} = \frac{\overline{F'F''}}{K}$.

Em todos os casos estas propriedades relativas à excentricidade podem ser facilmente comprovadas através de semelhanças de triângulos. Uma análise da figura 1.84 permite-nos ainda perceber que a tangente t e a normal n à curva $[h]$ num ponto P são as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas PF' e PF'' . Vamos apresentar uma justificação para o caso da hipérbole (sugerindo ao leitor que estenda o argumento à parábola e à elipse) partindo da

definição da curva como o lugar geométrico dos pontos P tais que $\overline{PF'} - \overline{PF''} = K$ (ou, dependendo do ramo da curva, $\overline{PF''} - \overline{PF'} = K$).

Suponhamos que a reta t não é a tangente à hipérbole no ponto P e que a tangente é outra reta t' passante pelo ponto P , e contida no plano da hipérbole. Considere-se o ponto F''' como o reflexo do ponto F'' pela reta t' . Considere-se ainda o ponto I resultante da interseção da reta t' com a reta $F''F'''$. Neste caso, a diferença das distâncias $\overline{PF'}$ e $\overline{PF''}$ não é a maior que se pode obter para um ponto P pertencente à reta t' . Neste caso, a diferença menor que se pode obter é $\overline{IF'} + \overline{IF''}$ porque, sendo F''' o reflexo de F'' pela reta t' , $\overline{IF''} = \overline{IF'''}$. Isto significa que existe outro ponto P' pertencente à reta t' , e distinto de P , tal que $\overline{PF'} - \overline{PF''} = \overline{P'F'} - \overline{P'F''}$. Logo a reta t' , distinta da reta t , seja qual for, não pode ser tangente à curva. Daqui resulta que a reta t é a tangente à curva no ponto P .

Atividade proposta:

Elabore uma figura que ilustre a justificação pela qual a tangente t e a normal n à curva $[h]$ num ponto P de uma linha cônica são as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas PF' e PF'' . No caso da hipérbole, considere os dois ramos da curva.

No caso da hipérbole, devemos ainda considerar as assíntotas, isto é, as retas tangentes à curva nos seus pontos impróprios. Estas retas são paralelas a duas geratrizes da superfície cônica, isto é, aquelas a que o plano secante é paralelo. São determinadas através da interseção do plano secante com os planos tangentes à superfície ao longo daquelas duas geratrizes. Também se podem obter considerando o limite do processo da determinação das tangentes e normais como bissetrizes das retas PF' e PF'' . As assíntotas interseitam-se no centro da hipérbole.

A hipérbole goza ainda de outra propriedade interessante. Dadas as assíntotas e as tangentes à curva nos vértices, a distância do centro da hipérbole aos pontos de interseção das assíntotas com as tangentes é igual à distância do centro aos focos. Esta propriedade pode ser muito útil no traçado da curva.

Os resultados obtidos com o estudo desta configuração constituem corolários do teorema de Dandelin. Este teorema afirma que os focos de uma interseção plana produzida numa superfície cônica de revolução são os pontos de tangência, com esse plano, de duas superfícies esféricas igualmente concordantes com a superfície cônica.

O teorema de Dandelin permite mostrar que as interseções planas produzidas numa superfície cônica de revolução são as curvas que conhecemos como a elipse (curva plana cuja distância somada de qualquer dos seus pontos aos focos é constante), a parábola (curva plana cuja distância de qualquer dos seus pontos ao foco é igual à distância à diretriz) e a hipérbole (curva plana cuja diferença das distâncias de qualquer dos seus pontos aos focos é constante). A circunferência é um caso particular da elipse quando a excentricidade é igual a 0 . Estas linhas também designadas por **linhas cónicas** devido a poderem ser geradas a partir de superfícies cónicas.

Atividade proposta:

Sugere-se o estudo do Teorema de Dandelin para os casos em que, a curva $[h]$ é produzida por um plano paralelo a um plano tangente à superfície cônica (caso da parábola; verifique

que a parábola apenas tem um foco próprio), e em que a curva $[h]$ é produzida por um plano oblíquo a todas as geratrizes da superfície cônica (caso da elipse).

Proceda ainda ao estudo do Teorema de Dandelin no caso da superfície cilíndrica de revolução.

No caso da superfície cilíndrica de revolução, verifique ainda que a interseção circunferencial, que passa pelo eixo menor de uma interseção elíptica, determina com esta uma superfície cilíndrica oblíqua.

Porém o Teorema de Dandelin não é extensível às superfícies cônicas oblíquas de diretriz circunferencial. A questão que se coloca é a seguinte. Será que é possível mostrar que as interseções planas produzidas numa superfície cônica oblíqua são do mesmo tipo das produzidas numa superfície cônica de revolução? Adiante veremos que sim.

Mas antes vamos considerar uma superfície cônica $[\delta]$ oblíqua de diretriz circunferencial $[c]$ e vértice V dada em projeção ortogonal (figura 1.85), e vamos mostrar que nela existem duas orientações cíclicas, isto é, duas orientações de planos que a intersetem segundo circunferências. O eixo i da superfície cônica é paralelo ao plano de projeção.

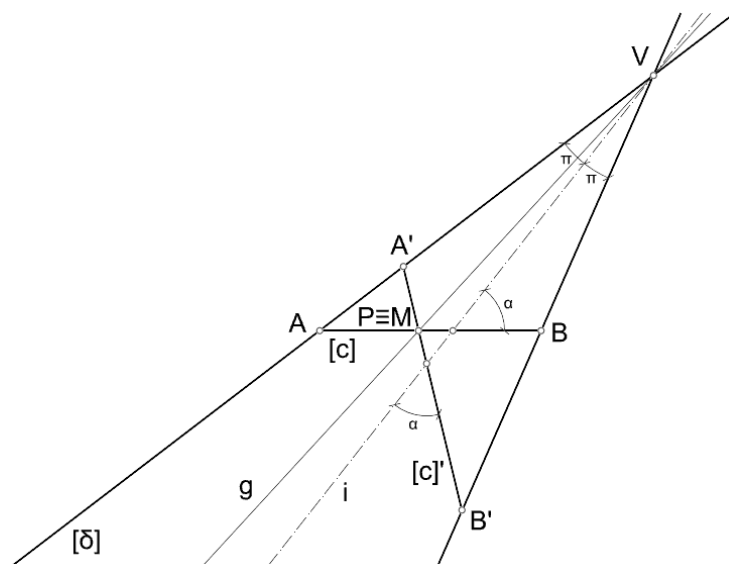


Fig. 1.85. Orientações cíclicas numa superfície cônica oblíqua de diretriz circunferencial.

Nesta figura, a projeção da circunferência $[c]$ reduz-se a um segmento de reta. Por homotetia, qualquer interseção plana na superfície cônica produzida por um plano paralelo ao da circunferência $[c]$ é outra circunferência. O segmento $[AB]$ é um diâmetro da circunferência $[c]$ paralelo ao plano de projeção. As geratrizes VA e VB de contorno da superfície cônica também são paralelas ao plano de projeção. É dada ainda a reta i , bissetriz do ângulo $\angle AVB$. A afirmação que vamos provar é que a linha $[c]'$, com orientação simétrica de $[c]$ em relação a plano projetante da reta i , também é uma circunferência contida na superfície cônica $[\delta]$. Designemos a reta i por eixo da superfície cônica.

A corda da circunferência $[c]$, passante pelo ponto P e perpendicular ao diâmetro $[AB]$, é também uma corda da curva $[c]'$. Seja M o ponto de interseção desta corda com o diâmetro $[AB]$. Como $[c]$ é uma circunferência temos $\overline{AM} \cdot \overline{MB} = \overline{PM}^2$.

Por outro lado, dada a semelhança entre os triângulos $[AMA']$ e $[B'MB]$, temos $\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{BM}}$.

O que é equivalente a dizer que $\overline{AM} \cdot \overline{MB} = \overline{A'M} \cdot \overline{MB'} = \overline{PM}^2$, o que é válido qualquer que seja a geratriz g e respetivo ponto P . Logo, a linha $[c]'$ também é uma circunferência. Daqui conclui-se que, numa superfície cônica oblíqua de diretriz circular, há duas orientações de planos que produzem interseções circunferenciais. E essas orientações, designadas por **orientações cíclicas**, são simétricas em relação ao plano projetante do eixo.

Atividade proposta:

Adapte a demonstração dada para o caso da superfície cilíndrica oblíqua de diretriz circular.

Verifique que quaisquer duas circunferências de orientações cíclicas distintas sobre uma superfície cônica ou cilíndrica determinam uma superfície esférica.

Atentemos agora nas configurações da figura 1.86. Como numa superfície cônica oblíqua há sempre duas orientações cíclicas, é sempre possível, passar, por projeção cônica, da configuração dada na figura 1.86.a para a configuração dada na figura 1.86.b, ambas correspondentes à construção da circunferência por interseção de raios homólogos de dois feixes de retas congruentes.

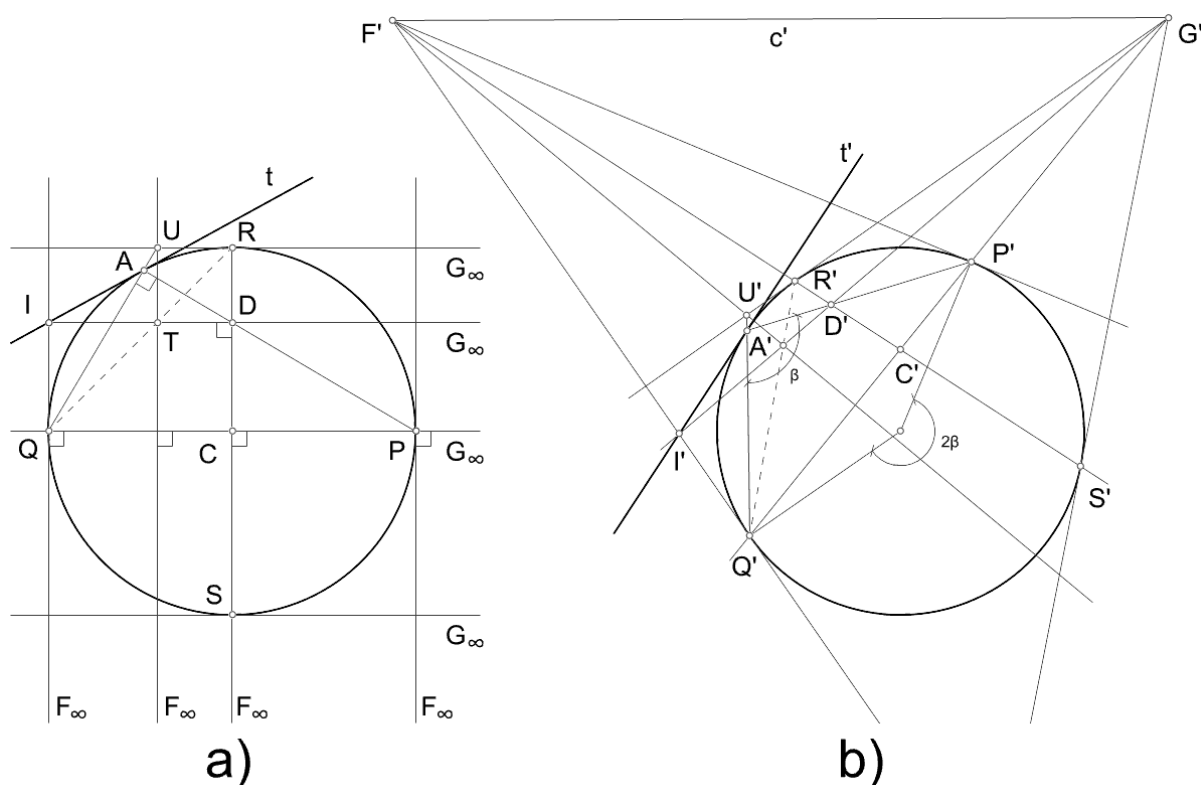


Fig. 1.86. Construção de um ponto de uma circunferência por interseção de feixes congruentes: a) os feixes têm centros nos pontos P e Q e retas homólogas (ex. PA e QA) intersectam-se a 90° ; b) os feixes têm centros nos pontos P' e Q' e retas homólogas intersectam-se a β° .

Nessa projeção, os pontos F' e G' correspondem aos pontos de fuga das retas que, na figura 1.86.a, convergem nos pontos impróprios F_∞ e G_∞ . Numa superfície cônica oblíqua ou de revolução, aquelas configurações (correspondentes à figura 1.86.a) projetam-se para os planos de qualquer interseção (correspondentes à figura 1.86.b). Porém, se as interseções deixarem de ser circunferenciais os feixes deixam de ser congruentes. Mas embora deixem de ser congruentes, continuam a ser projetivos, devido à invariância das razões anarmônicas que se

podem estabelecer para quaisquer quatro raios homólogos dos dois feixes. Por isso, pode ser definida uma **linha cônica como o lugar geométrico dos pontos de interseção dos raios homólogos de dois feixes de raios projetivos**. Generaliza-se assim a definição de linha cônica e verifica-se que, em geral, qualquer interseção plana produzida numa superfície cônica (ou cilíndrica) oblíqua ou de revolução gera uma linha cônica, ou seja, uma elipse (a circunferência como caso particular), parábola ou hipérbole, para além das cónicas degeneradas quando o plano secante passa pelo vértice da superfície cônica. Assumindo a invariância das razões cruzadas, é possível verificar que dada uma qualquer linha cônica como diretriz de uma superfície cônica é possível nela encontrar interseções planas de todos os tipos. Para além disso, tal como duas interseções planas numa pirâmide triangular podem ser projetadas num terceiro plano dando origem à configuração do Teorema de Desargues, também duas interseções planas numa superfície cônica podem ser projetadas num terceiro plano dando origem a uma homologia ou a uma afinidade planas (aplicação do Teorema de Desargues). Através destas transformações é sempre possível relacionar uma circunferência e outra linha cônica complanares, ou, de modo mais geral, relacionar duas linhas cónicas complanares.

Vemos ainda que uma elipse não tem pontos no infinito, uma parábola tem um, e uma hipérbole tem dois. As retas tangentes à hipérbole nos pontos do infinito designam-se assíntotas. Dada uma interseção cônica hiperbólica, as assíntotas são determinadas intersecando o plano secante com os planos tangentes à superfície cônica ao longo das geratrizes paralelas ao plano secante. Dada uma interseção parabólica, o eixo tem a direção da geratriz da superfície cônica contida no plano tangente paralelo ao plano secante.

Como, na afinidade, a reta imprópria é invariante, nesta transformação (ou na projeção cilíndrica) duas cónicas afins são sempre do mesmo tipo, isto é, uma elipse corresponde uma elipse, uma parábola corresponde a uma parábola e uma hipérbole corresponde a uma hipérbole. Este resultado é importante porque permite generalizar propriedades que tenham a ver com razões simples. Por exemplo, torna-se fácil perceber que numa hipérbole qualquer secante interseca as assíntotas em pontos simétricos relativamente ao ponto médio da corda correspondente, ou que, numa cônica, cordas paralelas entre si são bisetadas por um diâmetro.

Vamos introduzir a noção de polo e polar relativamente a uma linha cônica para definir o seu centro.

Se recordarmos as figuras 1.15 e 1.16, podemos reconhecer, na figura 1.86.a, por exemplo, que os pontos F_{∞} e C são conjugados harmónicos dos pontos S e R , e que os pontos G_{∞} e C são conjugados harmónicos dos pontos P e Q . E o mesmo, na figura 1.86.b, se verifica entre os pares de pontos F' e C' , e, S' e R' ; e entre os pares de pontos G' e C' , e, P' e Q' .

Relativamente à figura 1.86.a, dizemos que o ponto C é o polo da reta imprópria do plano e, reciprocamente, a reta imprópria do plano é a polar do ponto C . Dizemos que a reta PQ é a polar do ponto impróprio F_{∞} , e que este ponto é o polo da reta PQ . Analogamente, dizemos que a reta SR é a polar do ponto impróprio G_{∞} , e que este ponto é o polo da reta SR .

Verificamos assim que o centro de uma linha cônica é o polo da reta imprópria do plano. Como, a parábola é tangente a uma reta imprópria, e o seu polo é o ponto de tangência impróprio, não faz sentido falar em centro da curva.

No plano de uma linha cônica com centro próprio, duas retas passantes pelo centro da cônica têm direções conjugadas se cada uma delas bissecta todas as cordas paralelas à outra. No caso

da elipse (e da circunferência) dois diâmetros conjugados verificam o facto de que as tangentes à curva nos extremos de um deles são paralelas ao outro. No caso da hipérbole apenas uma das retas intersecta a curva. Os eixos de uma cónica são dados por um par de diâmetros conjugados perpendiculares entre si.

No exemplo seguinte vemos como podemos relacionar uma circunferência e uma elipse de centro O dada por um par de diâmetros conjugados $[AB]$ e $[CD]$.

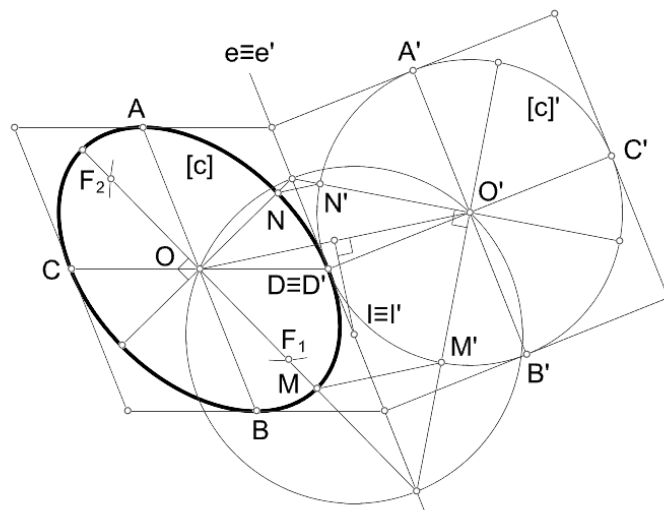


Fig. 1.87. Construção de uma elipse $[c]$, dada pelos diâmetros conjugados $[AB]$ e $[CD]$, através de uma afinidade com uma circunferência $[c']$.

Sejam dados os diâmetros conjugados $[AB]$ e $[CD]$ de uma elipse $[c]$ que se pretende representar através da determinação dos seus eixos principais e focos. Sabe-se que as retas tangentes à elipse nos extremos de cada um destes diâmetros são paralelas ao outro diâmetro. Deste modo é possível construir o paralelogramo circunscrito à elipse. De seguida assume-se, por exemplo, a reta tangente à elipse no ponto D como o eixo e de uma afinidade e constrói-se a circunferência $[c']$, com diâmetro igual a $\overline{AB}$, tangente à reta e no ponto $D \equiv D'$. Os pontos A' , B' e C' , resultam de desenhar o quadrado circunscrito à circunferência $[c']$ afim do paralelogramo circunscrito à elipse. A direcção a afinidade é dada pela reta OO' .

Os eixos principais da elipse, devem ser perpendiculares entre si, e são afins de dois diâmetros conjugados da circunferência, também perpendiculares entre si. Isto é, procuram-se dois pares de diâmetros conjugados, relativos à elipse e à circunferência, ambos perpendiculares entre si. Para o conseguirmos, consideramos a circunferência de centro I , na intersecção da mediatriz do segmento $[OO']$ com o eixo e , e raio igual a $\overline{IO} = \overline{IO'}$. Esta circunferência intersecta a circunferência $[c']$ nos pontos M' e N' , afins dos pontos M e N . Logicamente as retas $O'M'$ e $O'N'$ são perpendiculares entre si e as retas OM e ON também são perpendiculares entre si. Note-se que tanto o ponto fixo das retas $O'M'$ e OM , como o ponto fixo das retas $O'N'$ e ON , estão no diâmetro da circunferência auxiliar contido no eixo e . Os pontos M e N determinam-se a partir dos pontos M' e N' conduzindo, por estes, retas paralelas a OO' . O ponto M é extremo do eixo maior da elipse e o ponto N é extremo do eixo menor da elipse. Conhecidos estes pontos, os focos são de fácil determinação uma vez que $\overline{NF_1} = \overline{NF_2} = \overline{OM}$. A par dos eixos e dos focos, a afinidade permite construir qualquer ponto da elipse.

Atividade proposta:

Uma das vantagens da utilização de ferramentas de desenho geométrico digital é a possibilidade de automatizar procedimentos. Se estiver familiarizado com alguma ferramenta de desenho geométrico digital, verifique se essa ferramenta permite implementar a automatização deste procedimento.

Generalizando, numa cônica, dado um polo X e uma polar y , todas as retas que passam pelo polo X são polares de polos contidos na reta y . Um ponto de uma cônica tem por polar a reta tangente à cônica nesse ponto.

O Teorema de Dandelin permite a ainda mostrar que os focos de uma cônica são os polos das diretrizes.

Dada a superfície de cone oblíquo $[\Sigma]$ e um plano secante α , para além de determinar a linha de interseção ponto a ponto, o que é a componente menos interessante do problema, é importante saber como determinar os seus elementos notáveis, nomeadamente o centro (caso exista), o eixo e o(s) foco(s), bem como determinar a sua verdadeira grandeza. Vamos resolver este problema para o caso da interseção elíptica (o plano secante não passa pelo vértice nem é paralelo a nenhuma geratriz da superfície do cone). Como este problema pode ser sempre reduzido ao caso em que o plano secante é projetante, através de um reposicionamento do sistema de referência, vamos considerar um plano secante de topo (figura 1.88). Para além dos elementos notáveis da elipse, vamos também determinar os pontos da curva que pertencem às projeções dos contornos. Estes pontos são relevantes porque determinam, nas projeções, a passagem de visível a invisível no desenho da interseção.

Como o plano secante é de topo, a projeção da interseção $[e]$ no plano frontal de projeção é determinada de forma direta e fica contida em f_α entre as projeções das duas geratrizes de contorno aparente frontal. Os pontos A e B são os pontos de maior e menor cota da linha $[e]$ e, por isso, as tangentes a $[e]$ nestes pontos são horizontais, mais especificamente, de topo. Considerando o segmento $[AB]$ como um diâmetro conjugado, o par que lhe corresponde será o diâmetro $[CD]$ de topo passante por O , ponto médio de ambos os diâmetros e centro da elipse $[e]$. Obviamente, a projeção frontal dos pontos C e D é direta. Para determinar a projeção horizontal destes pontos, conduziu-se um plano horizontal que intersesta a superfície do cone segundo uma circunferência. Quando a projeção horizontal desta circunferência intersesta a projeção horizontal da reta de topo passante pelo ponto O , determinaram-se C_1 e D_1 , projeções horizontais dos pontos C e D , respetivamente. As tangentes à elipse $[e]$ nos pontos C e D são paralelas ao segmento $[AB]$. Temos agora definido um par de diâmetros conjugados da elipse. A projeção horizontal da elipse $[e]$, que é outra elipse $[e]_1$, terá $[A_1B_1]$ e $[C_1D_1]$ por diâmetros conjugados. Para determinar a verdadeira grandeza da elipse $[e]$, procedeu-se ao rebatimento do plano α para o plano xy em torno do seu traço horizontal. Assim, a elipse $[e]_R$ tem por diâmetros conjugados os segmentos $[A_RB_R]$ e $[C_RD_R]$. Em ambos os casos, as elipses podem ser construídas utilizando o procedimento descrito na figura 1.87. Mas note-se que os eixos maiores e menores destas elipses não são correspondentes entre si. Isto é, o eixo maior da elipse $[e]_R$ não corresponde ao eixo maior da elipse $[e]_1$, e o mesmo em relação ao eixo menor.

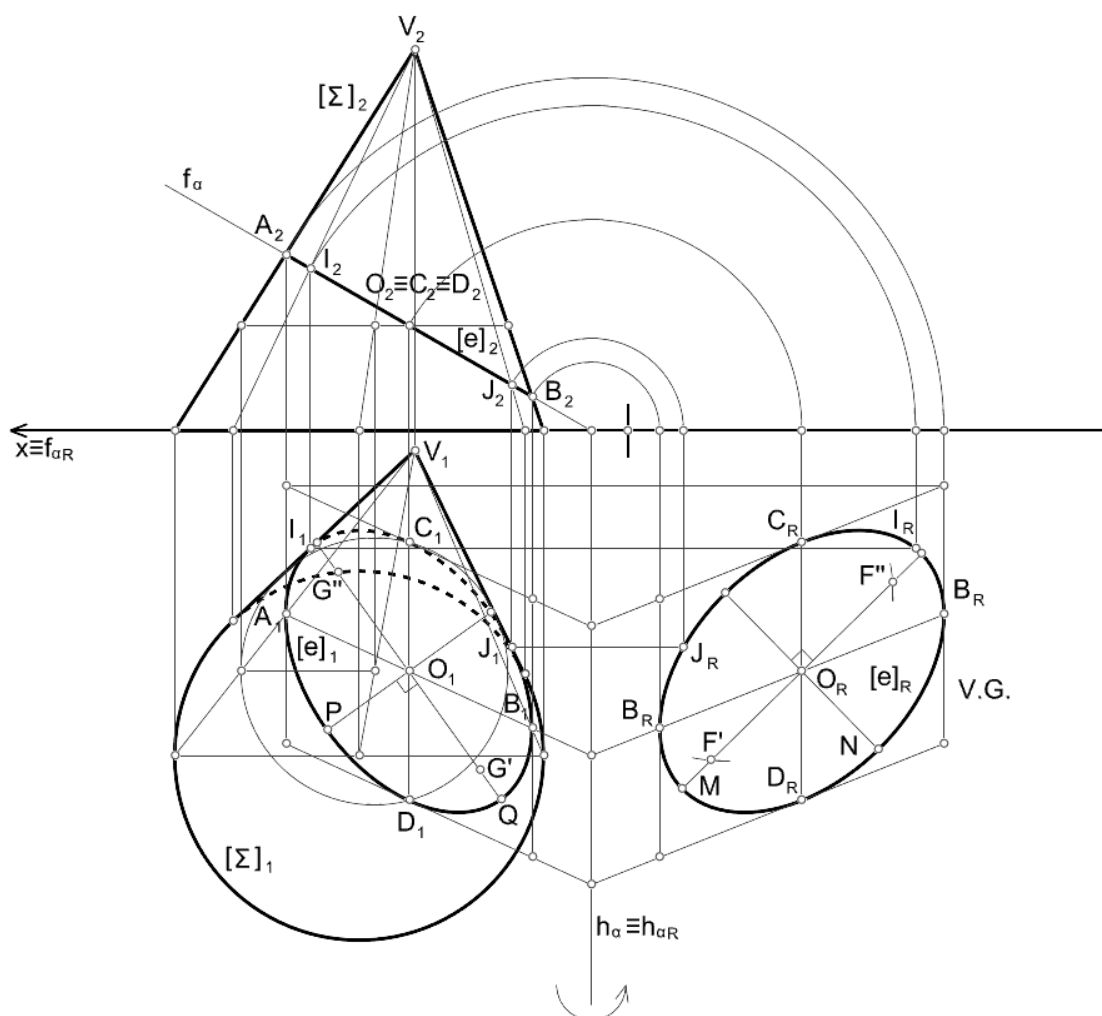


Fig. 1.88. Resolução de uma interseção elítica produzida por um plano secante na superfície de um cone oblíquo.

Para além destes pontos, considerou-se ainda a determinação dos pontos **I** e **J** comuns a **[e]** e às duas geratrizes de contorno aparente horizontal, cuja determinação não levanta dúvidas. A determinação destes pontos é direta na projeção frontal a partir do momento em que se constrói a projeção frontal das geratrizes de contorno aparente horizontal. A importância da determinação destes pontos reside no facto de que **I**₁ e **J**₁ são pontos em que a curva **[e]**₁ transita entre a representação a traço contínuo e traço interrompido.

Atividade proposta:

Procure resolver o problema das interseções cónicas considerando os vários tipos de superfície (oblíqua e de revolução) e os vários tipos de interseção (elipse, parábola e hipérbole). E em cada uma dos casos procure sempre determinar os pontos dos contornos aparentes e a verdadeira grandeza da interseção incluindo os seus elementos notáveis.

Operações booleanas

As operações booleanas devem a sua designação ao lógico e matemático George Boole. Essencialmente trata-se das operações de **união**, **interseção** e **diferença** entre conjuntos. A união entre dois conjuntos é um novo conjunto que reúne todos os elementos dos dois conjuntos iniciais; a interseção entre dois conjuntos é um novo conjunto que contém apenas os elementos comuns aos dois conjuntos iniciais; e a diferença entre dois conjuntos (que não é

uma operação comutativa) é um novo conjunto que contém os elementos do primeiro conjunto que não fazem parte do segundo conjunto. Se pensarmos num sólido como um conjunto de pontos, a aplicação deste tipo de operações à interação entre sólidos é de entendimento imediato. Na figura seguinte ilustram-se os três tipos de operação booleana entre um paralelepípedo e uma esfera, nomeadamente a união (figura 1.89.a), a interseção (figura 1.89.b) e a diferença (figura 1.89.c).

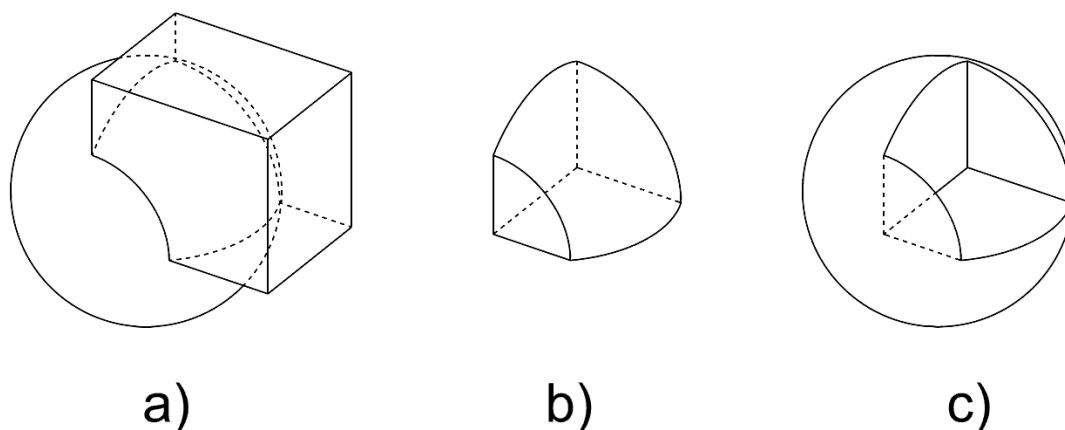


Fig. 1.89. Operações booleanas entre uma esfera e um paralelepípedo: a) união, b) interseção, c) diferença esfera-paralelepípedo.

As operações booleanas entre sólidos são uma das funcionalidades de qualquer ADMG3D. Por essa razão não nos deteremos muito sobre a resolução prática de operações deste tipo sobre sólidos complexos. Interessa-nos apenas entender alguns princípios fundamentais. A primeira observação que se pode fazer é que a resolução de qualquer dos casos implica a interseção de superfícies. Se ambos os sólidos contiverem apenas faces planas, em última análise o problema reduz-se à determinação de retas de interseção entre planos. Se só um dos sólidos tiver faces planas, o problema é equivalente a determinar interseções entre planos e superfícies de outro tipo. Por fim, se ambos os sólidos forem delimitados por superfícies não planas, então temos um problema geral de interseção de superfícies. A interseção entre duas superfícies quaisquer pode ser entendida como uma generalização da interseção entre dois planos. A este respeito, e com maior profundidade, voltaremos mais tarde na PARTE II deste trabalho. Mas seja qual for o caso, sempre que operarmos através da geometria plana, procedimento tradicional da geometria descritiva, a estratégia passa sempre por considerar um conjunto de superfícies auxiliares que nos facilitem a determinação gráfica de pontos da linha comum às superfícies dos sólidos relativamente aos quais pretendemos efetuar a operação booleana.

Por agora trataremos alguns casos que, pela sua simplicidade e disposição espacial, não carecem de grandes explicações teóricas. São apenas exemplos e não esgotam o tema de forma alguma.

Atividade proposta:

Repita, através de esboços, o esquema da figura para outros pares de sólidos. Este exercício ajudá-lo-á a desenvolver capacidades de visualização.

Um dos sólidos tem arestas projetantes

Vamos considerar o exemplo da subtração produzida numa pirâmide por um prisma com arestas projetantes. No exemplo da figura 1.90.a as arestas do prisma são de topo. Deve observar-se que se um dos sólidos for um prisma, é sempre possível, através de mudanças de planos de projeção, transformar a direção das arestas laterais do mesmo até serem projetantes.

Uma vez que as arestas laterais do prisma são de topo, também as suas faces laterais são perpendiculares ao plano zx . Deste modo a construção das várias interseções de planos fica facilitada uma vez que é direta na projeção frontal. No exemplo da figura considerámos dois planos horizontais auxiliares, α e β , um dos quais, o plano β , passante por uma das faces do prisma. Utilizámos ainda como planos auxiliares os planos de topo π e δ passantes por duas faces laterais do prisma. A resolução gráfica da questão não levanta questões novas e por uma questão de clareza gráfica não notámos os vértices das novas arestas que resultam das operações de interseção de planos. Apenas se requer algum esforço sistemático de visualização para representar corretamente o sólido final de acordo com o critério de se tratar de uma subtração.

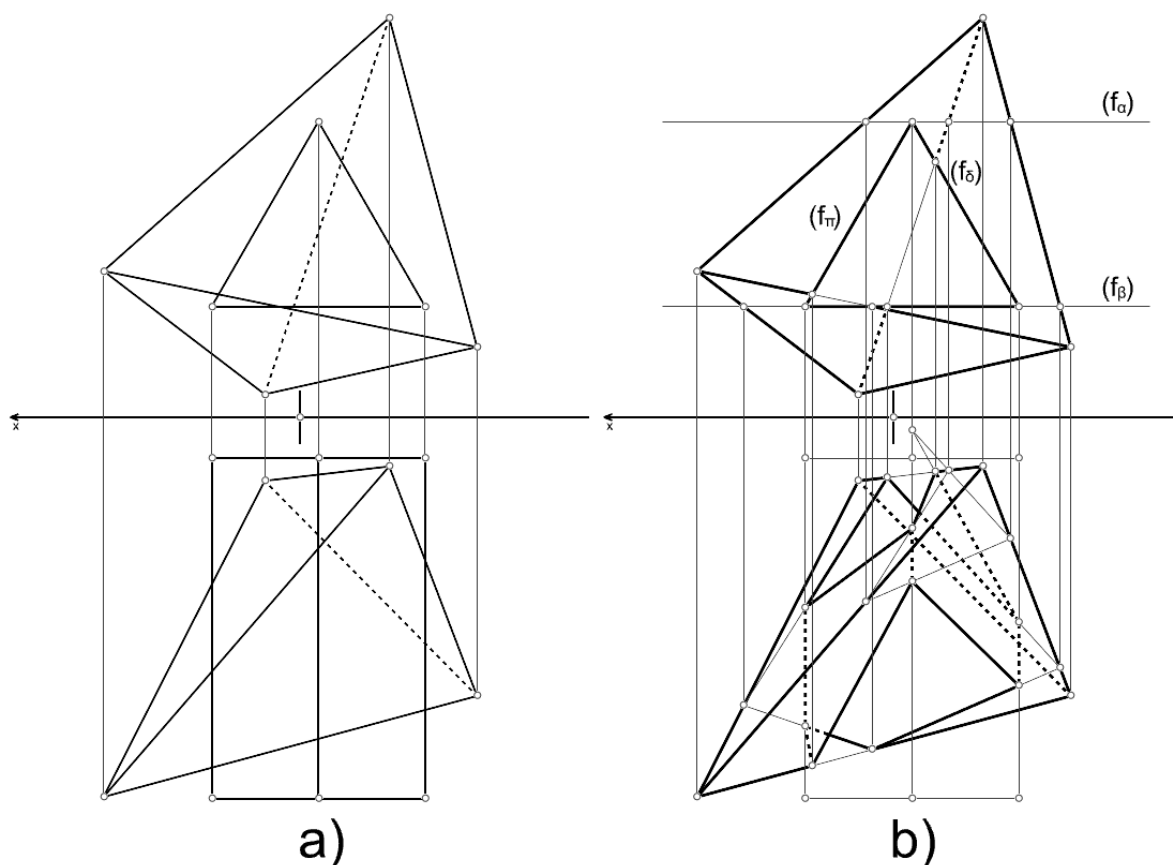


Fig. 1.90. Subtração produzida numa pirâmide por um prisma com arestas de topo: a) dados, b) resolução e resultado final.

Atividade proposta:

Considere pares de sólidos em condições similares às descritas e resolva os vários tipos de operação booleana.

Um dos sólidos é delimitado por superfícies curvas

Vamos considerar o caso de uma união entre um cone de revolução de base horizontal e um paralelepípedo com faces horizontais, frontais e de perfil (figura 1.91). Face à disposição do paralelepípedo relativamente ao cone, é possível concluir que, da linha comum às superfícies dos dois sólidos, fazem parte dois troços de duas hipérboles (porque dois dos planos das faces do paralelepípedo são paralelos, cada um deles, a duas geratrizes da superfície do cone), um troço de circunferência (porque o plano da face superior do paralelepípedo é perpendicular ao eixo da superfície do cone), dois troços de geratrizes da superfície do cone (porque o plano da face de menor afastamento do paralelepípedo passa pelo eixo do cone), e ainda dois segmentos de reta fronto-horizontais e um segmento de reta de topo, na face de menor cota do paralelepípedo.

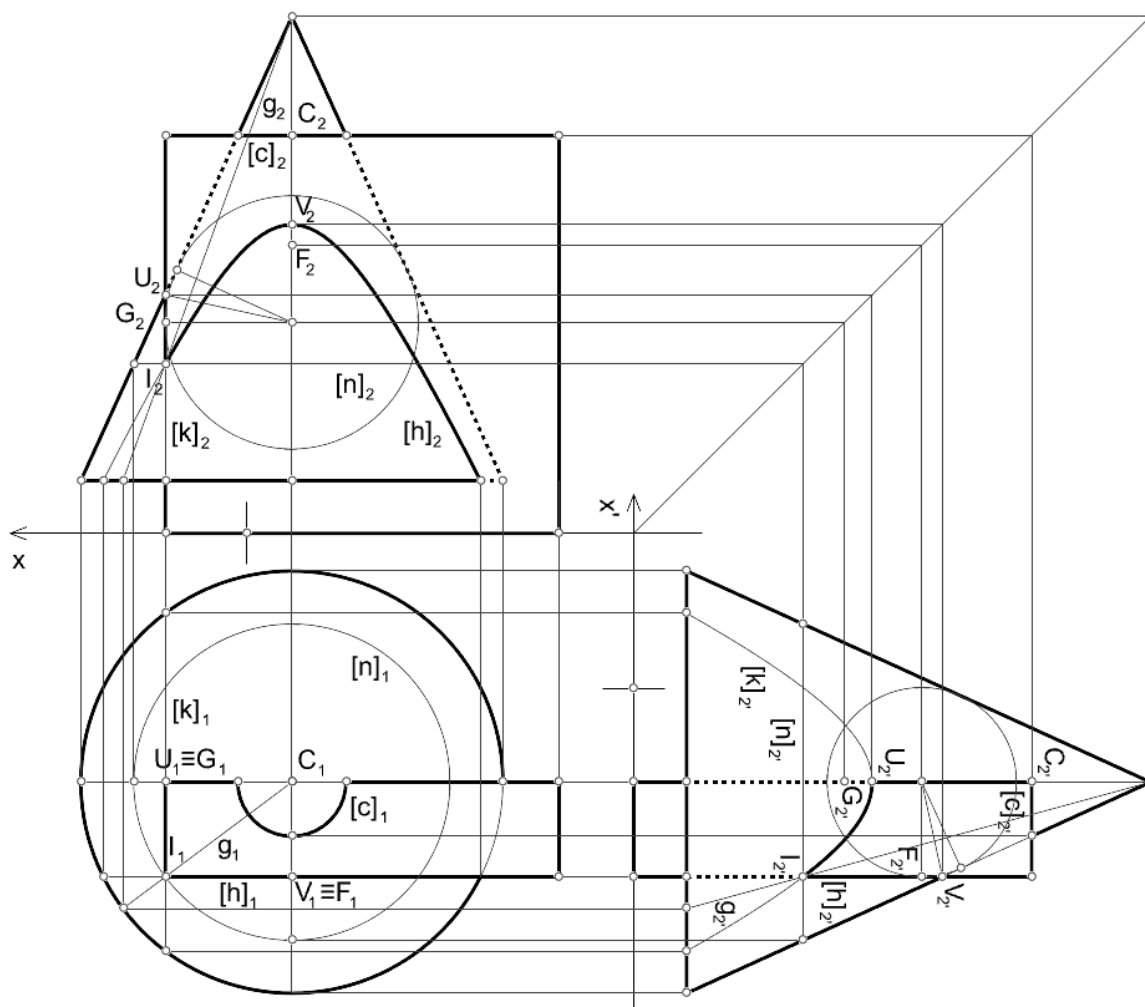


Fig. 1.91. União entre um cone de revolução de base horizontal e um paralelepípedo com faces horizontais, frontais e de perfil.

A determinação das projeções de um ponto qualquer de uma das hipérboles, por exemplo o ponto I , pode ser obtida considerando a sua pertença a uma linha da superfície cone passante pelo ponto, por exemplo a geratriz g ou a circunferência de nível $[n]$. Como a hipérbole $[k]$ está contida num plano de perfil e o eixo da superfície do cone é vertical, na projeção frontal pode aplicar-se o Teorema de Dandelin para determinar os seus focos, dos quais se determinou apenas um, G . Um dos vértices, U , é de determinação direta na projeção no plano zx e no plano xy . A hipérbole $[k]$ (da qual se considerou apenas um dos ramos e um dos focos)

aparece representada em verdadeira grandeza na projeção no plano yz . As assíntotas da hipérbole $[k]$ são paralelas às geratrizes de perfil da superfície do cone e, na projeção $[k]_2'$ no plano yz , correspondem às projeções daquelas geratrizes de perfil.

De forma análoga, determina-se um dos focos, F , e um dos vértices, V , da hipérbole $[h]$. Esta aparece em verdadeira grandeza na projeção $[h]_2$ no plano zx . As assíntotas da hipérbole $[h]$ são paralelas às geratrizes frontais da superfície do cone, e na projeção $[h]_2$ no plano zx , correspondem às projeções daquelas geratrizes frontais.

Note-se que se os planos das hipérboles forem oblíquos aos planos de projeção, os seus focos e vértices não correspondem aos focos e vértices das hipérboles projeção.

Atividade proposta:

Considere pares de sólidos em condições similares às descritas e resolva os vários tipos de operação booleana.

Os dois sólidos são delimitados por superfícies curvas

Finalmente vamos considerar o caso de uma interseção entre dois sólidos em que ambos são delimitados, pelo menos parcialmente, por superfícies curvas (figura 1.92), para o efeito uma esfera e um cilindro de revolução de eixo horizontal. O recurso a uma terceira projeção permite o controlo da representação do cilindro e, nesta projeção, a interseção é imediata uma vez que, relativamente a esta projeção, as geratrizes são projetantes.

Para resolver a interseção utiliza-se um feixe de planos auxiliares paralelos às geratrizes do cilindro. Deste modo, as interseções que produzem na superfície do cilindro são retas. A escolha para este feixe pode ser variada. Os planos podem passar todos por uma reta, por exemplo pelo eixo do cilindro, ou podem ser todos paralelos entre si. No caso em apreço, considerou-se um feixe de planos horizontais. Cada plano intersesta a superfície esférica segundo uma circunferência horizontal e a superfície do cilindro segundo uma ou duas geratrizes. Para cada um destes planos de nível, os pontos da linha comum às superfícies do cilindro e da esfera, encontram-se nas interseções destas linhas. De entre os planos que se podem conduzir, devemos eleger sempre aqueles permitem determinar pontos nos contornos. Esses planos são os dois planos horizontais tangentes à superfície do cilindro (permitem determinar os pontos das geratrizes de contorno aparente frontal), e o plano horizontal passante pelo eixo do cilindro (permite determinar os pontos das geratrizes de contorno aparente horizontal). Para além destes casos, é ainda importante construir as projeções, caso existam, dos pontos que pertencem ao contorno aparente da esfera, isto é, que pertencem à circunferência máxima contida no plano frontal passante pelo centro da esfera. Isto significa intersestar esta curva com a superfície do cilindro. A interseção do plano desta curva com a superfície do cilindro corresponde a uma elipse $[e]$, cujo semieixo menor mede o mesmo que o raio do cilindro, e é dado pelo segmento $[CM]$, e cujo semieixo maior é dado pelo segmento $[CN]$. Assim, estes pontos (não notados no desenho) resultam da interseção da elipse $[e]$ com a circunferência de contorno aparente frontal.

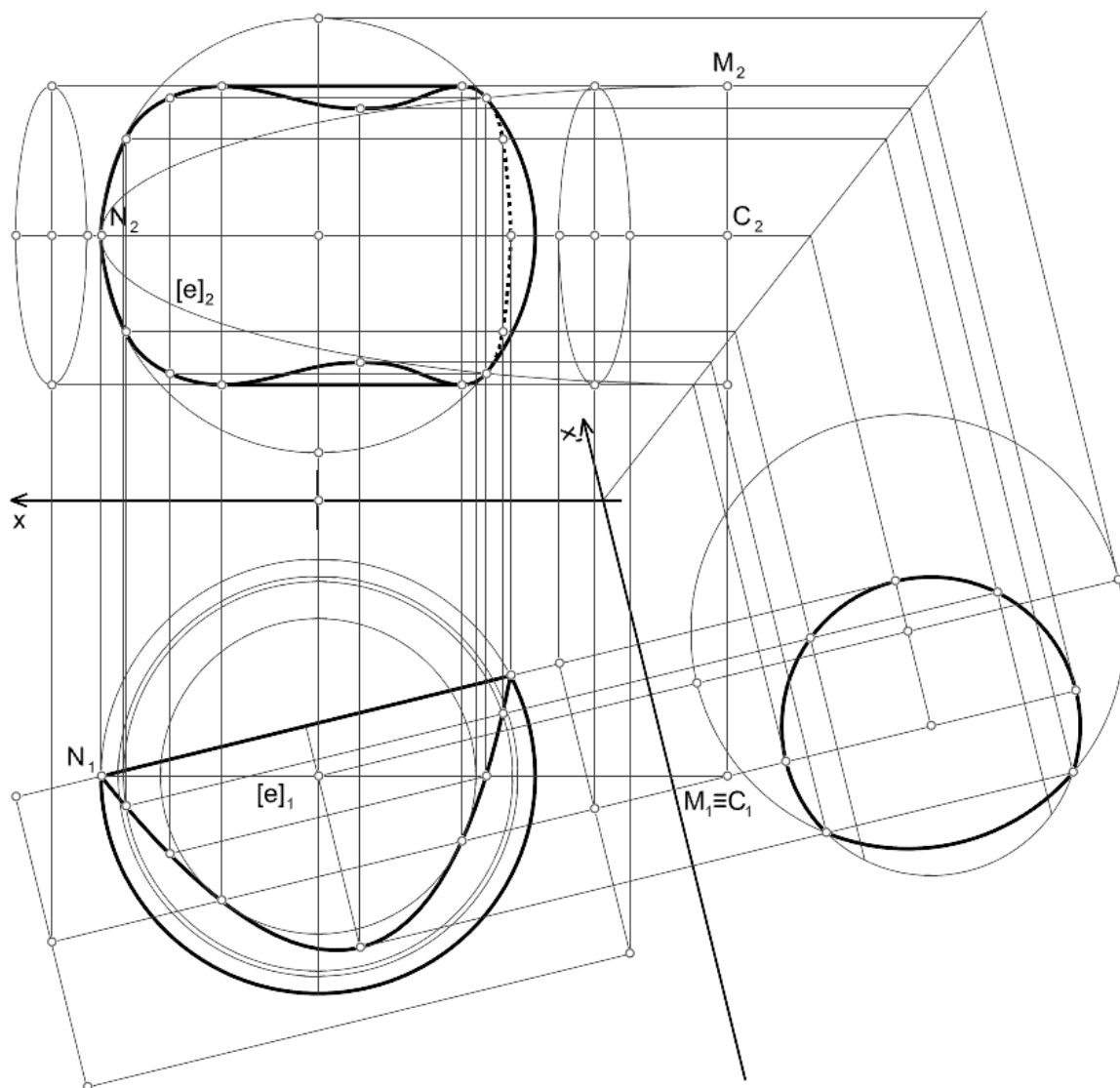


Fig. 1.92. Interseção entre uma esfera e um cilindro de revolução com eixo horizontal.

Atividade proposta:

Considere pares de sólidos em condições similares às descritas e resolva os vários tipos de operação booleana.

Aplicação das transformações geométricas

Em geometria descritiva as transformações geométricas podem ser utilizadas como recurso auxiliar da representação, como forma de manipular as figuras geométricas no espaço e como forma de resolver problemas. Com este pressuposto em mente, nesta secção vamos dar exemplos variados da utilização das transformações geométricas. Não se trata de fazer um estudo sistemático das transformações geométricas mas sim dar pistas sobre a sua utilidade que possibilitem ao leitor encetar uma investigação mais aprofundada. O tema das transformações geométricas voltará a ser abordado na PARTE II deste texto.

Atividade proposta:

Procure idealizar situações problemáticas que dependam de uma transformação geométrica ou de uma combinação de transformações geométricas para a sua resolução.

Rotação

A rotação é uma transformação geométrica que já tivemos oportunidade de explorar. O rebatimento é um caso particular de uma rotação. Mesmo a mudança do sistema de coordenadas pode ser interpretada como uma rotação. No exemplo seguinte vamos utilizar uma sequência de rotações para resolver a posição de uma dada figura no espaço.

Seja dada uma diagonal $[AC]$ de um quadrado $[ABCD]$ de que se sabe que o vértice B tem cota 0cm (figura 1.93). Pretende representar-se um cubo $[ABCDEFGH]$ de que o ponto B é o vértice de menor cota. Considerem-se as coordenadas $(5, 4, 3)$ e $(1, 7, 1)$ para os pontos A e C , respetivamente.

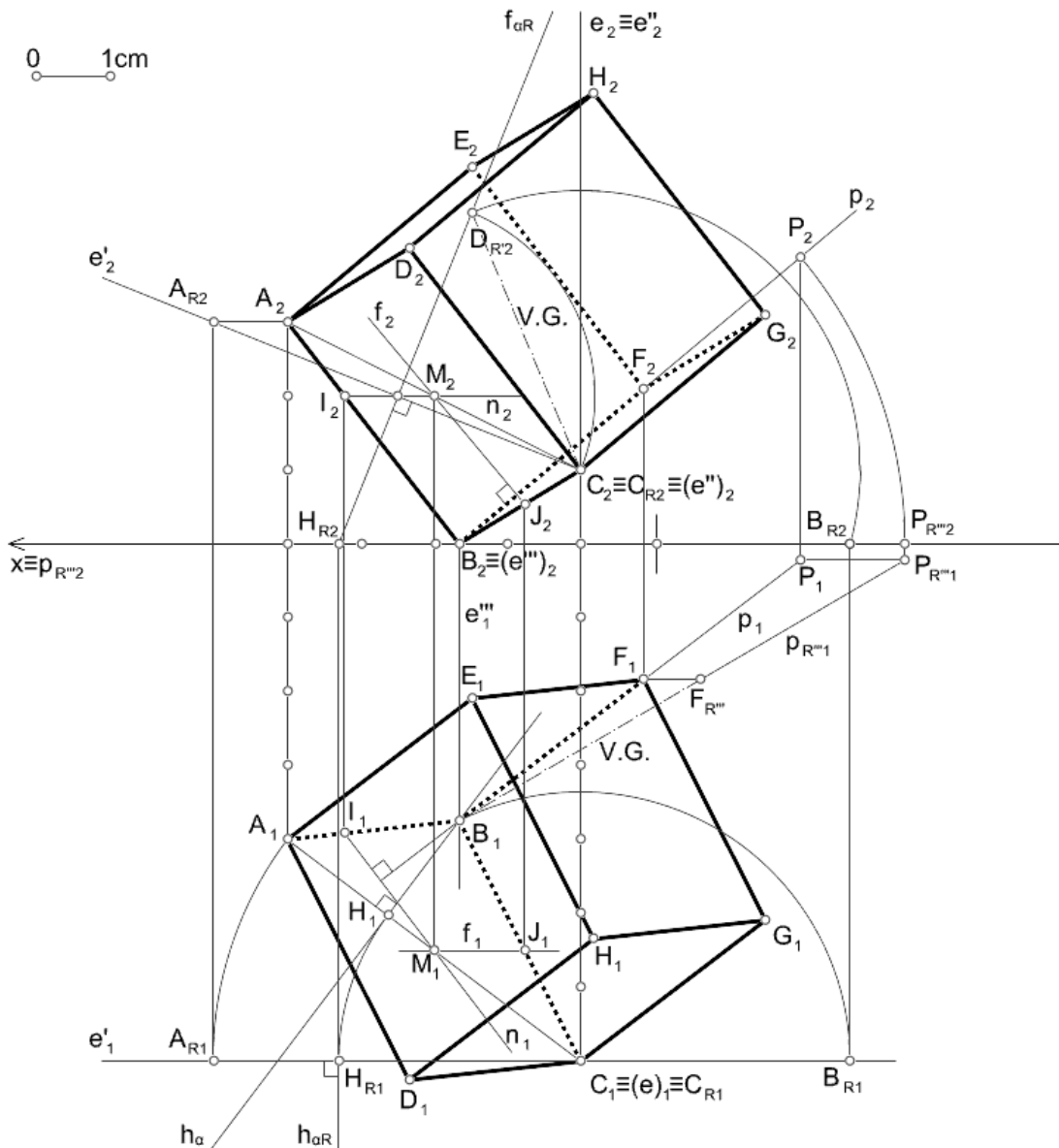


Fig. 1.93. Utilização sistemática de rotações para resolver a construção de um cubo.

Dados os pontos A e C , sabe-se que os pontos B e D devem estar contidos num plano α perpendicular à reta AC , passante pelo seu ponto médio, pertencendo o ponto B ao seu traço horizontal h_{α} . Considerando um eixo e vertical passante pelo ponto C , é possível transformar a reta AC numa reta frontal, $e' \equiv A_R C_R$. Considerando agora o eixo e' , é possível considerar uma

rotação do quadrado $[ABCD]$ que o deixa na posição vertical. Desta rotação apenas se representou a projeção frontal do vértice D rodado, isto é, o ponto $D_{R'2}$. O comprimento $\overline{D_{R'2}C_2}$ dá-nos a verdadeira grandeza das arestas do cubo. Considerando um eixo e'' de topo passante pelo ponto C , é possível rodar o ponto $D_{R'2}$ até que o arco da sua rotação intersete o eixo x no ponto B_{R2} . A distância do ponto B_{R2} até à linha de chamada do ponto C corresponde ao comprimento da projeção horizontal da aresta $[BC]$ (e da aresta $[AD]$). Assim, rodando o ponto B_R em torno do eixo e , é possível encontrar o ponto B quando o arco da rotação intersear a reta h_α . Note-se que há duas posições possíveis para o B , tendo sido considerada apenas uma delas. Determinado o ponto B , por paralelismo determina-se também o ponto D .

Precisamos agora de construir as arestas perpendiculares ao plano do quadrado $[ABCD]$. Para o efeito representaram-se duas retas passantes pelo ponto M , centro do quadrado $[ABCD]$, n e f , uma horizontal e outra frontal, ambas contidas no plano do quadrado. A partir destas duas retas foi possível determinar as projeções de uma reta p perpendicular ao plano do quadrado e passante pelo vértice B . Efetuando uma rotação desta reta em torno de um eixo e''' de topo passante pelo ponto B , coloca-se esta reta na posição horizontal, p_R , sobre a qual se representa o ponto $F_{R'''}$ uma vez que é conhecida a verdadeira grandeza do comprimento das arestas. Efetuando agora a contra rotação determina-se o ponto F e, com isso, aresta $[FB]$. Estando representada esta aresta, as outras são de simples determinação por serem paralelas a esta aresta e com o mesmo comprimento.

Translação

A translação corresponde a uma deslocação com um dado comprimento, sentido definido, numa dada direção.

No exemplo da figura 1.94 pretende-se representar um cubo com **3.5cm** de aresta, com faces horizontais e verticais. Esse cubo deve ter duas arestas, da face de menor cota, contidas numa superfície semicilíndrica $[\beta]$ dada acima do plano xy . O eixo e da superfície é uma reta contida no plano xy a **60°**, abertura para a esquerda, com o eixo x . A diretriz é uma semicircunferência $[c]$ frontal com **2.5cm** de raio e afastamento **0cm**. As posições da superfície cilíndrica e do cubo (à parte da sua orientação) são arbitrárias.

Como se sabe que as duas arestas que devem estar contidas na superfície cilíndrica têm de ter a mesma cota e distar entre si **3.5cm**, começa-se por efetuar uma translação de **3.5cm** da diretriz $[c]$ na direção horizontal normal à direção das geratrizes da superfície cilíndrica. O sentido desta translação é indiferente. O resultado é a semicircunferência $[c']$ (da qual se representou apenas a projeção horizontal). De seguida, efetua-se nova translação Δ da semicircunferência $[c']$, na direção das geratrizes da superfície cilíndrica, até esta ficar contida no plano zx . O resultado é a semicircunferência $[c'']$. Pelo ponto G , de interseção das semicircunferências $[c]$ e $[c'']$, passa a geratriz g da superfície cilíndrica que deverá conter uma das arestas do cubo. Como a primeira translação teve o valor de 3.5cm, a geratriz g pode ser considerada como a translação de uma geratriz j também contida na superfície cilíndrica e à mesma cota. Logo, a outra aresta do cubo está contida na geratriz j . Arbitradas as posições de duas arestas nas geratrizes g e j , procedeu-se à construção das projeções do cubo (cujos vértices não estão notados no desenho). Na verdade, após construída a face inferior do cubo, pode considerar-se que a face superior é obtida por translação de **3.5cm**, na direção vertical e sentido ascendente, da face inferior.

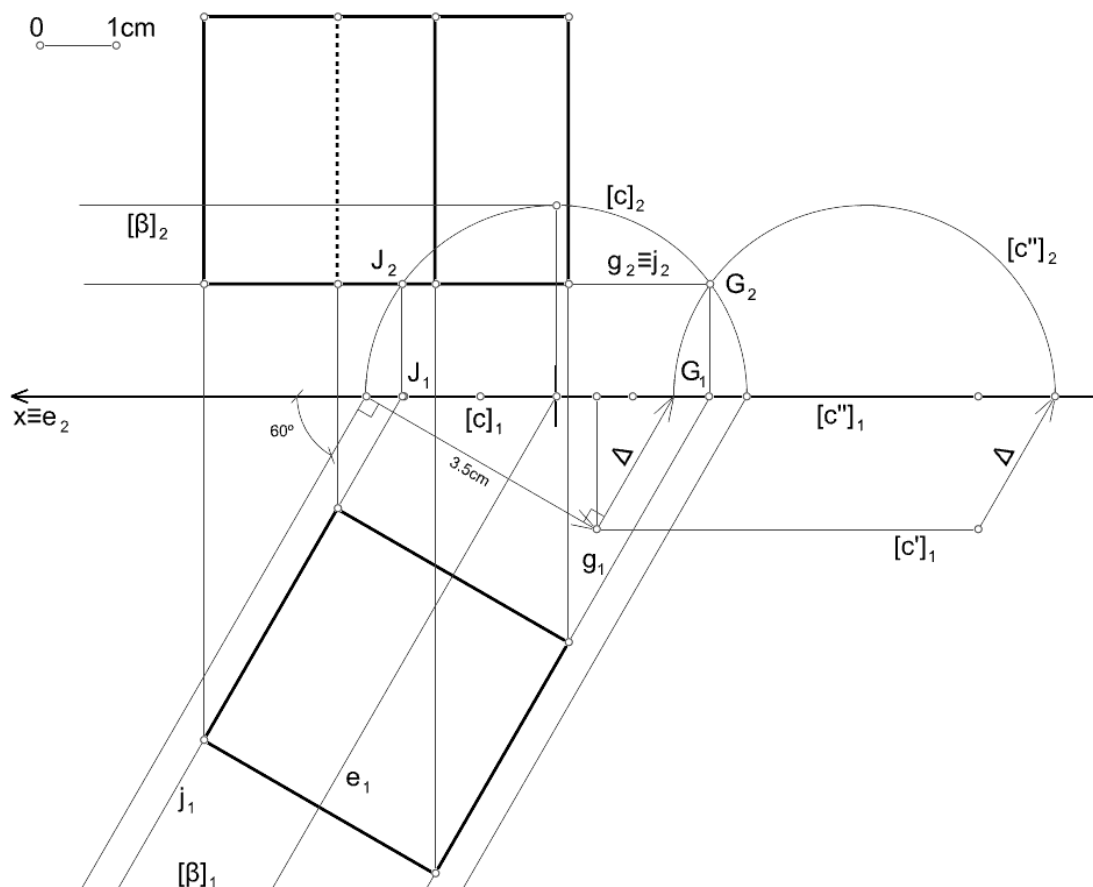


Fig. 1.94. Utilização sistemática de translações para resolver a construção de um cubo.

Reflexo

O reflexo é a transformação que, na linguagem corrente, se costuma designar por simetria ou simetria bilateral. Porém, esta designação não deve ser usada porque o termo simetria tem outro significado em geometria. O reflexo pode ser efetuado a partir de um ponto central, a partir de um eixo, ou a partir de um plano. No exemplo que vamos dar consideramos o caso tridimensional. Assim, em termos práticos, dada uma figura qualquer, o seu reflexo relativamente a um plano é outra figura cujos pontos estão a igual distância do plano mas no outro lado do mesmo.

Considere-se o triângulo equilátero $[ABC]$ com 3cm de lado de que se conhecem as coordenadas $(0, 6, 0)$ do ponto A , vértice de maior afastamento e menor abscissa. Sabe-se que o lado $[AB]$ é de topo. O triângulo $[ABC]$ é a face, de menor cota de um tronco de prisma. As arestas oblíquas que incidem nos pontos A , B e C , têm projeção frontal a 70° com o eixo x , abertura para a esquerda, e projeção horizontal a 60° com o eixo x , abertura para a direita. O vértice B' , da aresta $[BB']$, tem 2cm de afastamento. Os pontos médios das arestas $[AA']$, $[BB']$ e $[CC']$ definem um plano α perpendicular a estas arestas. Pretende-se a construção das projeções do tronco de prisma (figura 1.95).

Da descrição fica evidente que as duas bases do tronco de prisma, $[ABC]$ e $[A'B'C']$, são o reflexo uma da outra por relação ao plano α . Fez-se uso de uma terceira projeção num plano relativamente ao qual as retas AA' , BB' e CC' são paralelas. Nesta projeção a condução do plano α é imediata, ficando representado pela reta f'_α passante pela projeção $M_{2'}$ do ponto

O reflexo também pode ser estudado como efeito visual. Por exemplo, ao observarmos uma superfície refletora, um espelho, temos a impressão de visualizar um mundo simétrico daquele em que nos encontramos. Geometricamente isso pode ser representado através desta transformação.

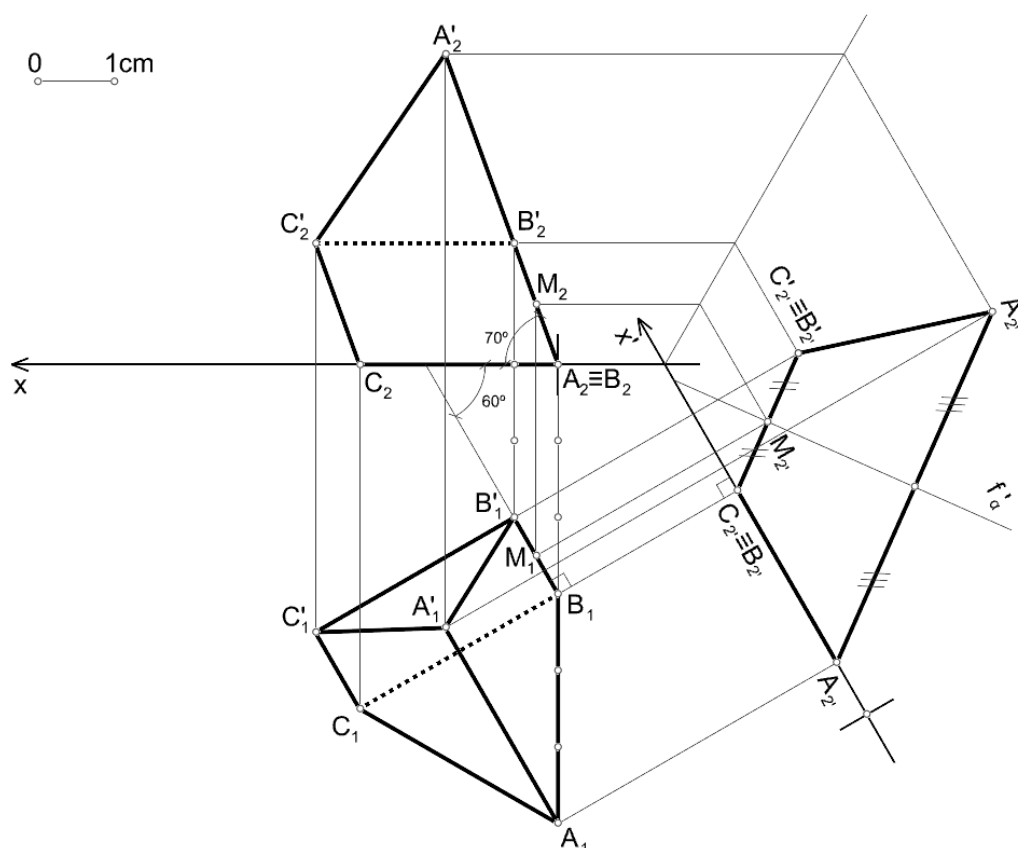


Fig. 1.95. Construção de um tronco de prisma utilizando o reflexo.

A homotetia é uma transformação de escala a partir de um ponto fixo. O ponto fixo é o centro da homotetia. A escala é definida por um fator diferente de zero, podendo ser positivo ou negativo. No exemplo seguinte vamos ilustrar como a homotetia pode ser utilizada para resolver problemas espaciais.

Seja dada a superfície cônica de revolução $[\omega]$ definida pelo seu vértice V e diretriz $[c]$ de centro C . Seja dado ainda um ponto P interior à superfície cônica. Pretende conduzir-se pelo ponto P uma superfície esférica $[\alpha]$ concordante com a superfície cônica (figura 1.96).

A superfície esférica pretendida deverá ter uma circunferência em comum com a superfície cônica, ao longo da qual, todos os planos tangentes a uma são tangentes à outra (condição de concordância). Todas as superfícies esféricas concordantes com a superfície cônica são homotéticas a partir do vértice V . Isto é, é possível transformar cada uma delas em cada uma das outras utilizando um fator de escala apropriado. Mas mais importante, consideradas duas

superfícies esféricas homotéticas, há uma correspondência entre cada ponto de uma e cada ponto da outra. Pontos correspondentes incidem sobre uma reta passante pelo centro da homotetia, neste caso, pelo vértice V .

Assim, se conduzirmos uma superfície esférica $[\alpha']$ qualquer, de centro O' , concordante com a superfície cônica, deverá haver nesta superfície um ponto P' correspondente ao ponto P dado. E esses dois pontos definem uma reta PP' passante pelo vértice V . Como a homotetia preserva o paralelismo, teremos ainda que a reta $O'P'$ será paralela à reta OP . Temos assim o caminho aberto para a resolução do problema.

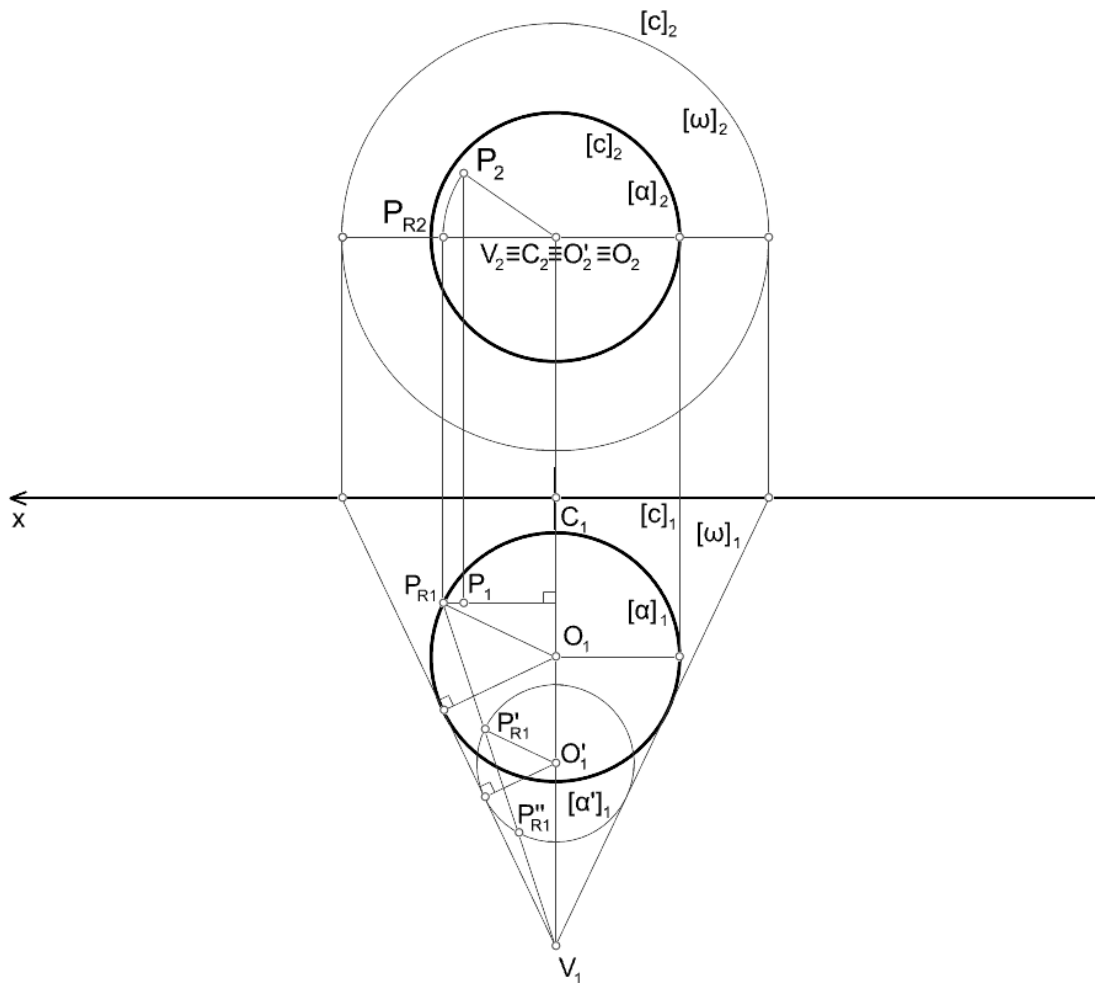


Fig. 1.96. Construção de uma superfície esférica concordante com uma superfície cônica de revolução através da utilização de uma homotetia.

Note-se que a reta VP intersesta a superfície esférica $[\alpha']$ em dois pontos, P' e P'' . Isto significa que há duas soluções possíveis para o problema, das quais podemos selecionar qualquer uma. Assim, escolhemos a que corresponde ao ponto P' . No processo de resolução considerámos a rotação da reta VP , até ficar horizontal, em torno de um eixo de topo (não identificado no desenho) passante pelo vértice V . Deste modo fica facilitada a determinação da interseção da reta com a superfície esférica, que se resolve no contorno aparente horizontal. No desenho não estão representadas as linhas de concordância entre as superfícies esféricas e a superfície cônica.

Afinidade

Já tivemos alguns exemplos da utilização da afinidade, por exemplo no caso da determinação das projeções e verdadeira grandeza de uma secção cónica elítica. Devemos ainda ser capazes de identificar a afinidade na operação de rebatimento de uma secção produzida por um plano num prisma ou de um cilindro. Neste caso, a afinidade estabelece-se, por exemplo, entre uma projeção da secção e o seu rebatimento no plano dessa projeção (desde que a projeção não se reduza a um segmento de reta). O que vamos ver agora é que esta transformação também pode ser utilizada para resolver problemas espaciais.

Sejam dadas as projeções horizontais de três arestas $[AB]$, $[AD]$ e $[AE]$ de um paralelepípedo incidentes no seu vértice A de menor cota. Sabe-se que as cotas dos pontos B e D são iguais entre si e a metade da cota do ponto E . A cota do vértice G , de maior cota do paralelepípedo, é conhecida e é dada pelo plano horizontal α . Pretende representar-se as projeções do sólido nos planos xy e zx (figura 1.97).

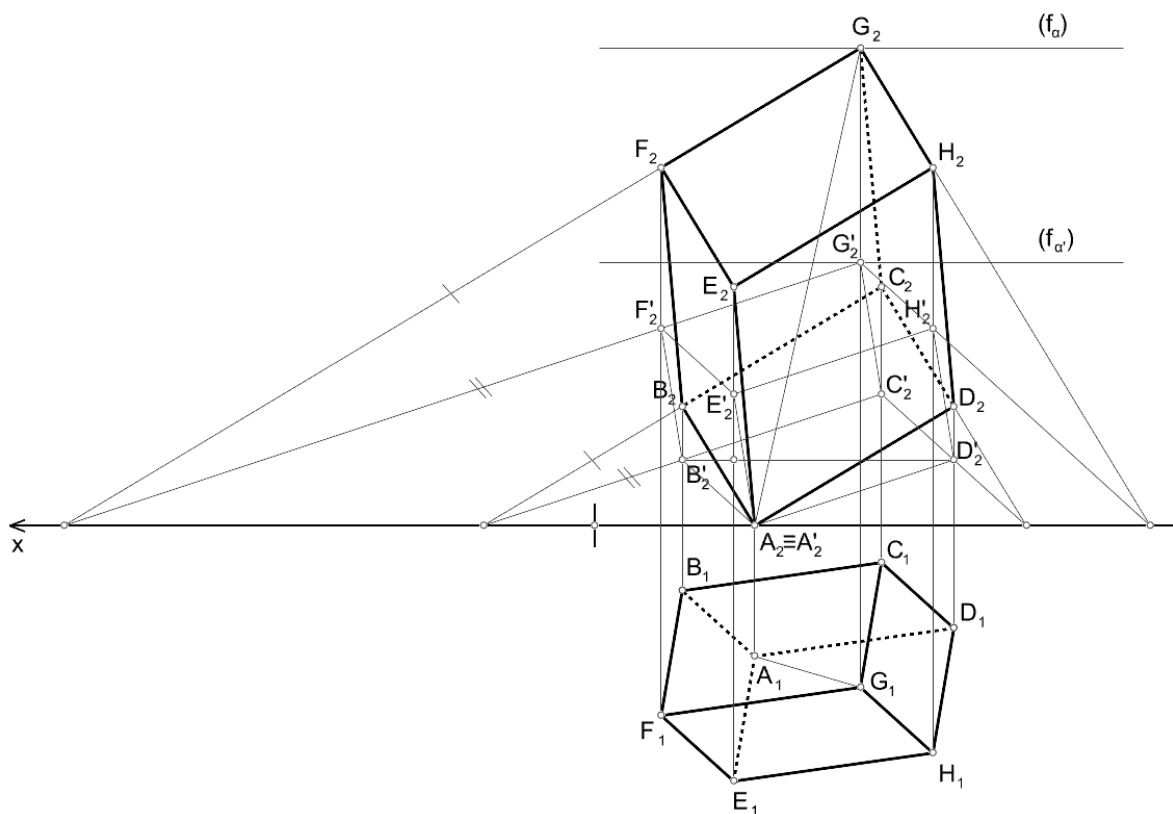


Fig. 1.97. Representação de um paralelepípedo através da utilização de uma afinidade.

Como são dadas as projeções horizontais de três arestas incidentes num vértice, a construção da projeção horizontal do paralelepípedo executa-se facilmente considerando o paralelismo entre as arestas. Encontrada a projeção horizontal do vértice G , a projeção frontal determina-se sobre f_α .

Como apenas se conhecem as relações entre as cotas dos pontos B , D e E , constrói-se a projeção frontal de um paralelepípedo que admita a projeção horizontal já construída e que tenha as cotas dos vértices B' , D' e E' , correspondentes àqueles, na relação dada. As projeções frontais destes pontos podem ser quaisquer desde que se respeite a relação entre as cotas. A partir destas projeções constrói-se a projeção frontal de um paralelepípedo afim do

paralelepípedo pretendido. Note-se que o vértice G' desse paralelepípedo tem de pertencer à reta vertical que passa por G . A afinidade que relaciona os dois paralelepípedos tem o plano xy como o lugar geométrico dos pontos fixos da transformação. A direção da transformação é vertical. De modo informal, é como se o espaço encolhesse na direção vertical enquanto o plano xy se mantém fixo. Nesta transformação o plano horizontal α corresponde ao plano horizontal α' . Assim, a determinação de um vértice do paralelepípedo pretendido, por exemplo F , faz-se conduzindo a reta $G'F'$, determinando o seu ponto fixo no plano xy , pelo qual passa a reta FG . A projeção frontal do ponto F está na mesma linha de chamada das projeções do ponto F' . Os restantes pontos determinam-se de forma idêntica. Como a afinidade preserva o paralelismo para cada direção de retas, pode tirar-se partido desse facto na determinação dos outros vértices. Graficamente temos uma afinidade de eixo x entre as projeções frontais dos dois paralelepípedos. E a direção ortogonal a x , no desenho, corresponde à direção desta afinidade.

Homologia

Enquanto que na afinidade todos os pontos correspondentes são ligados por retas paralelas entre si, no caso da homologia os pontos correspondentes são ligados por retas concorrentes num ponto, o centro da transformação. Esta transformação, em geral, não preserva o paralelismo. Continua a haver um plano como lugar geométrico dos pontos fixos. Agora, ao plano impróprio corresponderá um plano paralelo ao plano dos pontos fixos. Tal como a afinidade no espaço, também a homologia no espaço pode ser utilizada para resolver problemas tridimensionais.

O exemplo que se segue é inspirado na cenografia. Vamos definir uma forma que parece outra maior quando observada de um dado ponto de vista O . Trata-se do tema da perspectiva acelerada ou espaço acelerado. Neste caso (figura 1.98) pretende transformar-se a forma dada de modo a que a forma homóloga fique entre os planos α e β . Apenas estão representados os vértices necessários para suportar as explicações essenciais quanto à resolução da questão (figura 1.99).

Sendo $\alpha \equiv \alpha'$, e não sendo nenhum destes planos passante pelo ponto O , verifica-se que se trata do lugar geométrico dos pontos fixos da transformação. Isto é, os pontos contidos neste plano coincidem com os seus transformados, por isso temos $A \equiv A'$ e $B \equiv B'$.

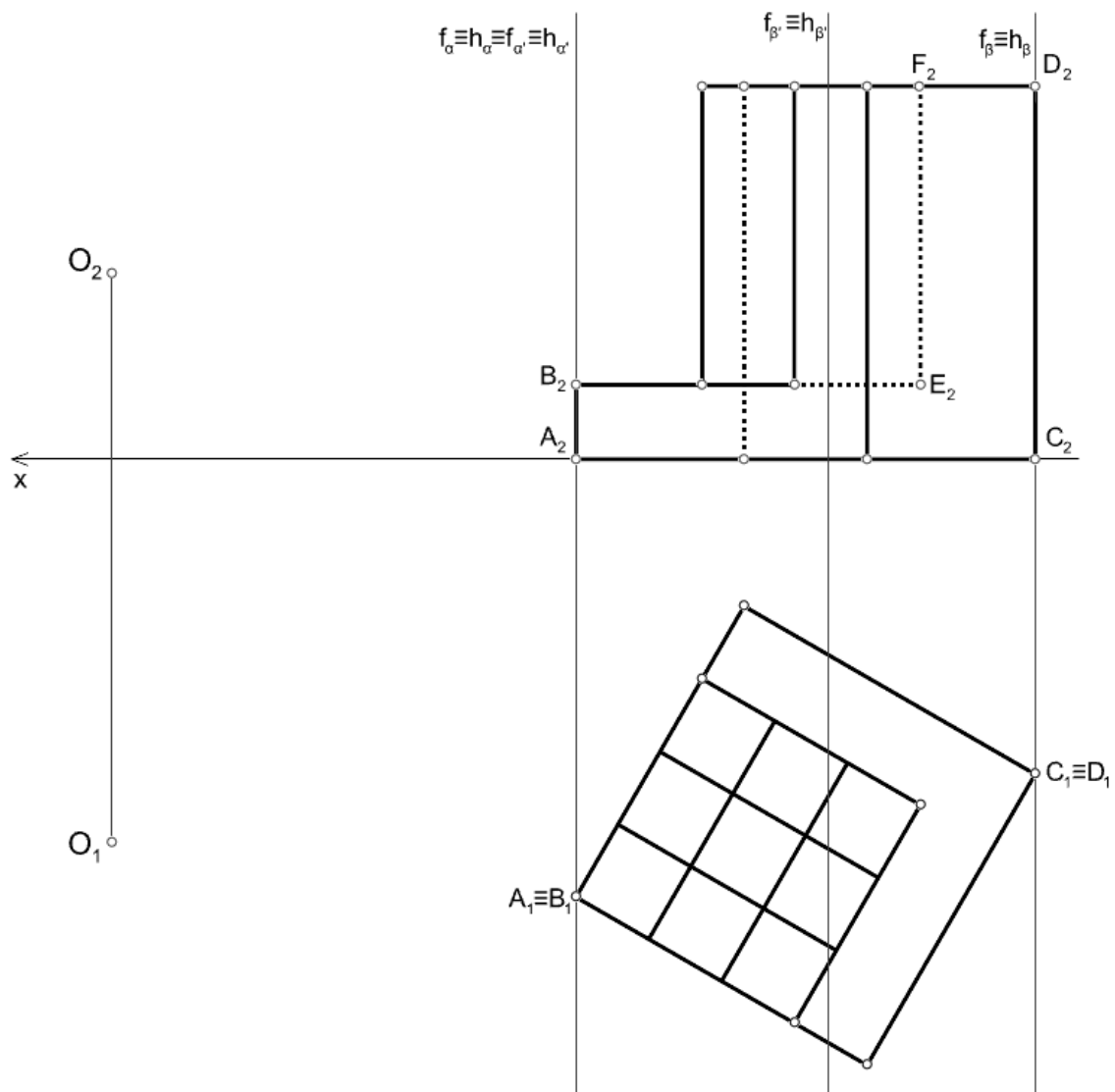


Fig. 1.98. Objeto a transformar em função do ponto de vista O e dos planos $\alpha \equiv \alpha'$, β e β' .

Por outro lado está definida a relação entre os planos β e β' . Conduzindo as retas OC e OD , determinam-se os pontos C' e D' na interseção destas retas com o plano β' . O plano horizontal passante pelos pontos D e F é transformado num plano de topo passante pelos pontos D' e F' , e a reta de topo comum a estes dois planos é também comum ao plano $\alpha \equiv \alpha'$. Do mesmo modo, o plano horizontal passante pelo ponto C é transformado no plano de topo passante pelo ponto C' , e a reta de topo comum a estes dois planos é também comum ao plano $\alpha \equiv \alpha'$. Embora, em geral, a homologia não preserve o paralelismo, se as retas forem paralelas ao plano fixo, este é preservado. Por isso a reta $F'E'$ é paralela à reta FE . O ponto E' determina-se conduzindo a reta OE e intersecando-a com a vertical passante pelo ponto F' . Os restantes pontos determinam-se de forma idêntica, tirando partido, sempre que possível dos pontos fixos da transformação.

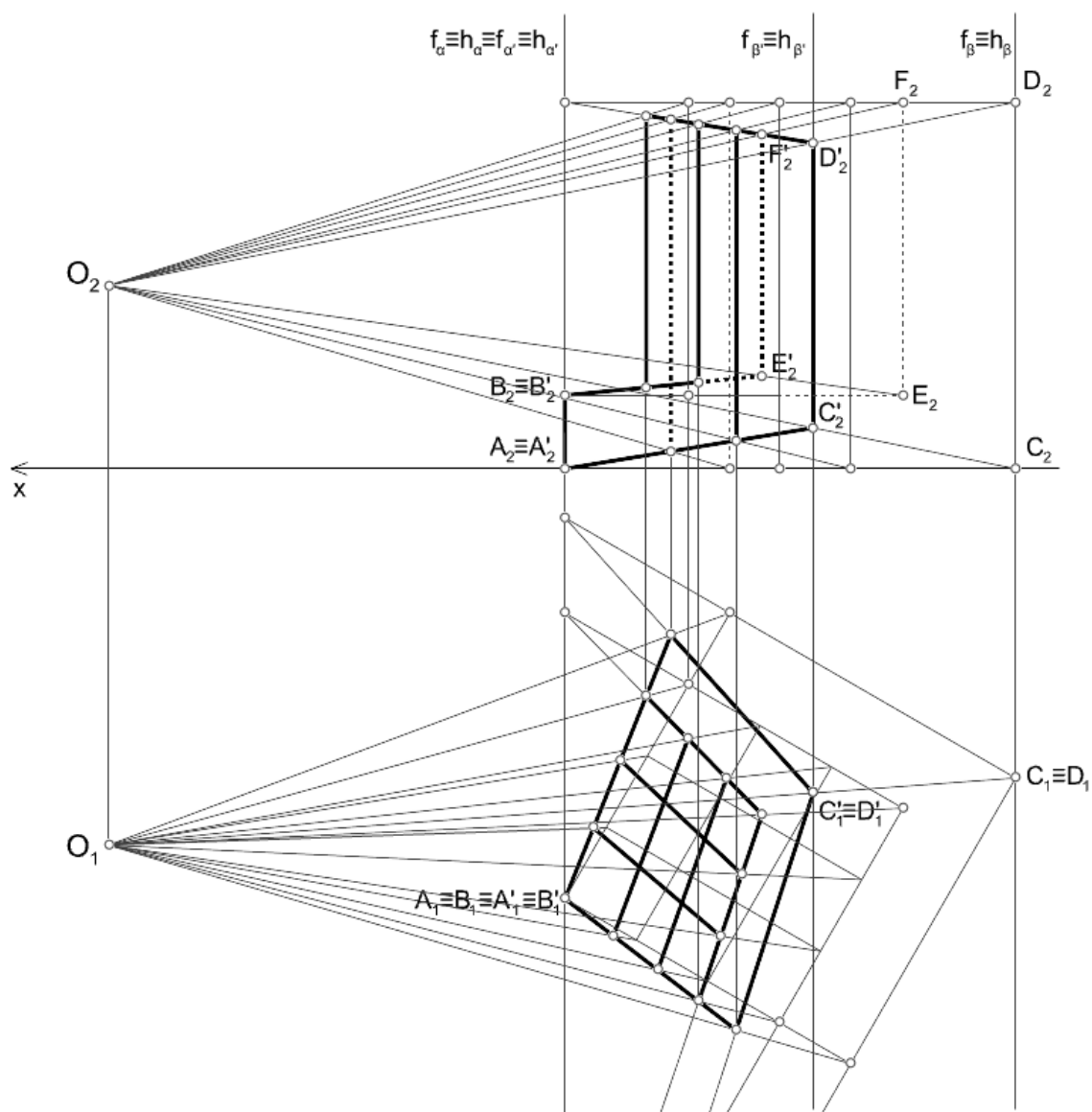


Fig. 1.99. Objeto transformado em função do ponto de vista O e dos planos $\alpha \equiv \alpha'$, β e β' .

Planificações

Intuitivamente, pode entender-se a planificação como uma operação geométrica que permite transformar, num plano, uma superfície não plana sem introduzir “pregas” ou “rasgos”. É claro que nem todas as superfícies são planificáveis. Por exemplo a superfície de uma esfera não pode ser transformada num plano sem a “rasgar”. Se esta operação for possível para uma superfície então as dimensões e as inclinações relativas dos elementos nela contidos são preservados. Para uma superfície ser planificável deve ser regrada, isto é, gerada pelo movimento de uma linha reta, embora esta condição não seja suficiente. A planificação está relacionada com o conceito de curvatura gaussiana de uma superfície, a ser estudado mais tarde na PARTE II deste texto.

Por agora vamos considerar apenas a planificação das superfícies dos poliedros regulares, de pirâmides, de prismas, de cones e de cilindros. E vamos entender a planificação das superfícies dos cones e dos cilindros como casos limite da planificação das superfícies de pirâmides e prismas, respetivamente.

A planificação tem uma aplicação prática óbvia que se relaciona com a produção de objetos tridimensionais a partir de materiais que são disponibilizados em chapas planas ou enroladas.

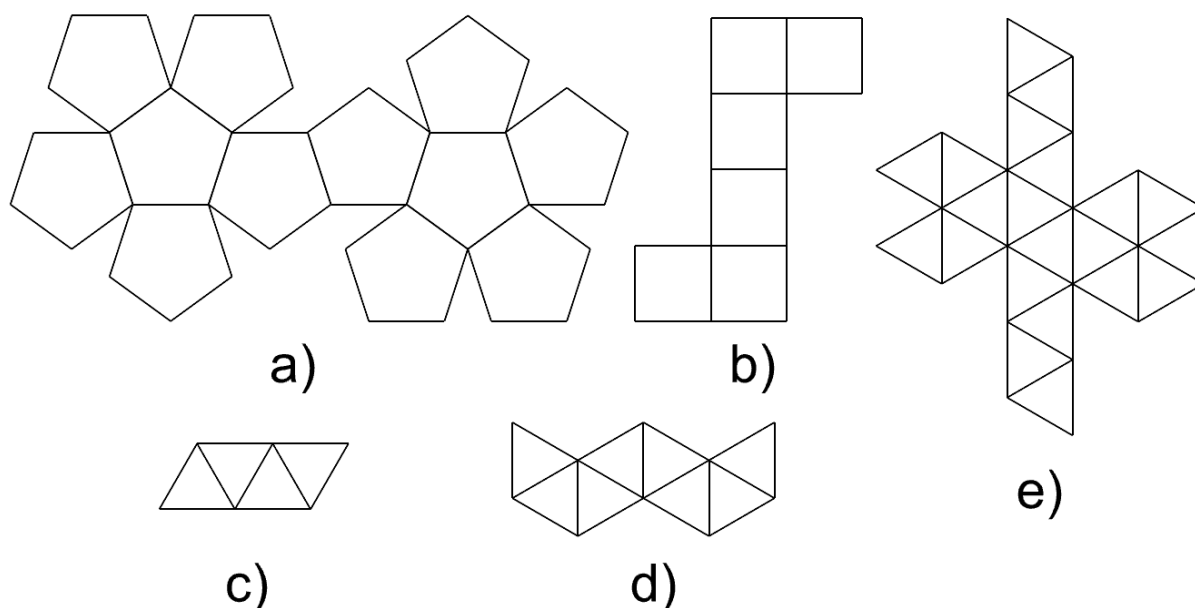


Fig. 1.100. Planificações das superfícies dos poliedros regulares.

Começamos com uma passagem pela planificação das superfícies dos poliedros regulares. Conhecendo o comprimento da aresta de um poliedro, a planificação consiste num arranjo consistente de polígonos regulares. Na figura 1.100 acima deixámos, sem identificação, uma possibilidade de planificação para cada um dos poliedros regulares.

Atividade proposta:

Identifique o poliedro regular que corresponde a cada uma das figuras dadas. Para cada um dos poliedros regulares, procure alternativas à configuração da planificação. A partir da planificação construa uma maquete físicas de cada um dos poliedros regulares, por exemplo em cartolina.

Vamos agora estudar o caso de uma pirâmide reta de base quadrada contida num plano frontal (figura 1.101).

Como a base da pirâmide está contida num plano frontal, as arestas da base estão representadas em verdadeira grandeza na projeção frontal. Porém, nenhuma das arestas laterais da pirâmide se apresenta em verdadeira grandeza em nenhuma das projeções. Considerando um eixo e de topo passante pelo vértice C , rodou-se a aresta $[VC]$ até à posição horizontal, ficando assim a sua verdadeira grandeza dada pela projeção horizontal $[C_{R1}V_{R1}]$. Como todas as faces laterais da pirâmide são triângulos isósceles iguais, a planificação reduz-se à construção de quatro destes triângulos, em que dois dos lados medem $\overline{C_{R1}V_{R1}} = \overline{V'C'}$ e o outro lado mede, por exemplo, $\overline{A_2D_2} = \overline{A'D'}$. Depois acrescenta-se um quadrado de lado igual a $\overline{A_2D_2} = \overline{A'D'}$.

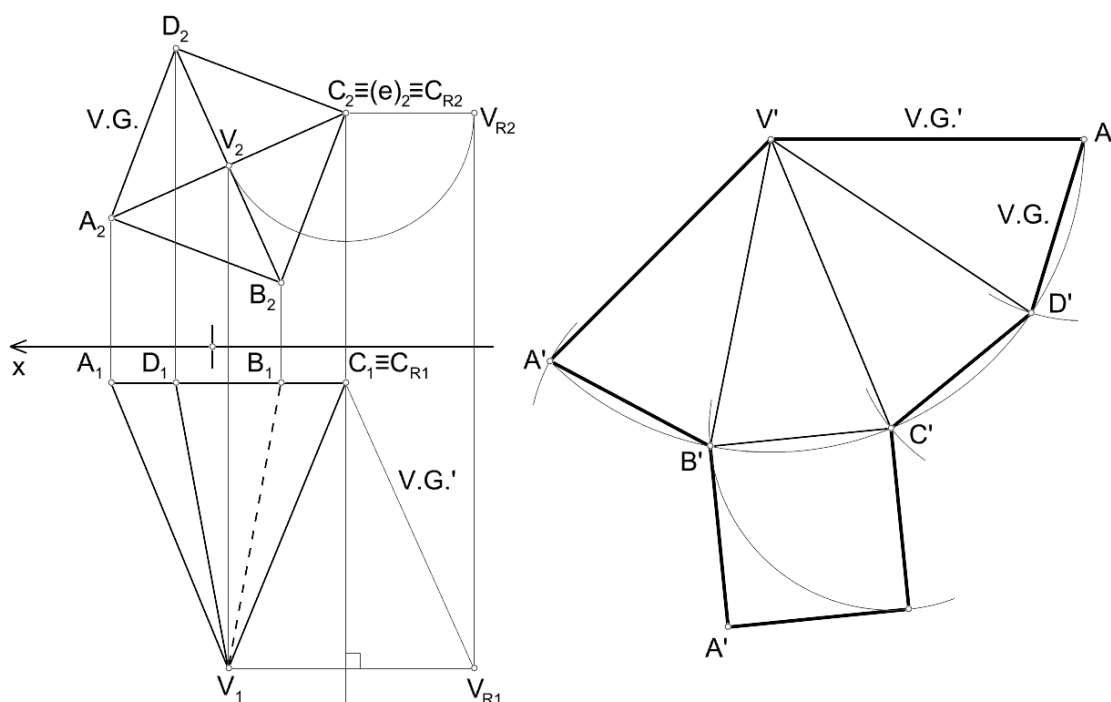


Fig. 1.101. Planificação da superfície de uma pirâmide reta de base quadrada contida num plano frontal.

O caso do prisma reto é mais simples. Por exemplo, se a base estiver contida num plano frontal, então as arestas laterais são de topo, estando a verdadeira grandeza dada pela projeção horizontal das mesmas. Assim, a planificação reduz-se à construção de um conjunto de retângulos adjacentes em que dois dos lados têm o comprimento das arestas laterais da pirâmide e os outros dois têm o comprimento do lado do polígono da base. Na figura da planificação, a estes retângulos acrescem dois polígonos iguais aos da base do prisma.

Também o caso da superfície do cilindro de revolução é muito simples. A planificação da superfície lateral do cilindro reduz-se a um retângulo em que dois dos lados medem $2\pi R$, sendo R o raio da base do cilindro, e os outros dois medem o comprimento das geratrizes da superfície do cilindro. Na figura da planificação, a este retângulo acrescem dois círculos iguais aos das bases do cilindro.

O caso da superfície do cone de revolução também é de resolução muito simples. A planificação da superfície lateral do cone corresponde a um setor circular subtendido por um ângulo $\alpha = 360^\circ(R/G)$, em que R é o raio da base do cone e G é o comprimento das geratrizes da superfície do cone. Na figura da planificação, a este setor circular acresce um círculo igual ao círculo da base do cone.

Vejamos agora o caso da superfície de uma pirâmide oblíqua de base octogonal regular horizontal (figura 1.102).

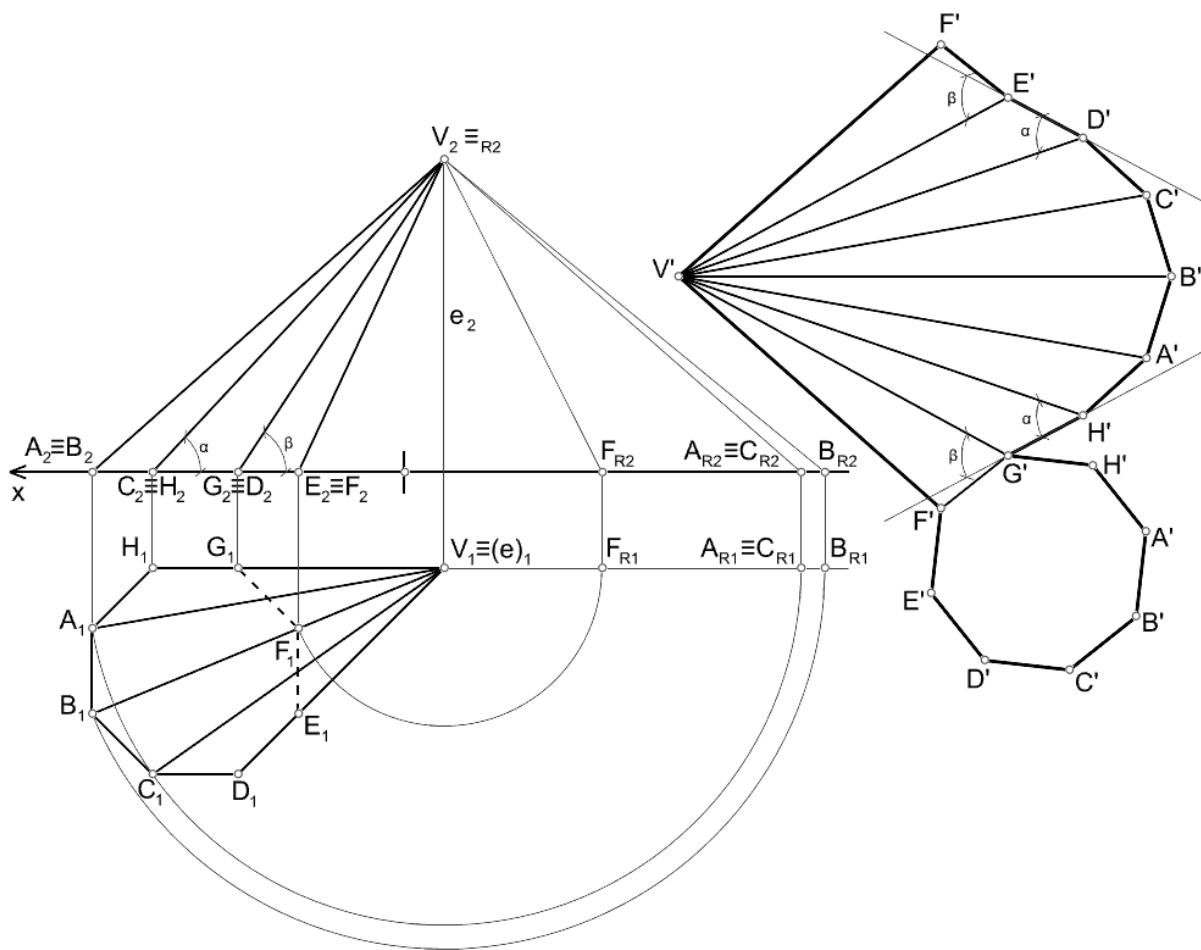


Fig. 1.102. Planificação da superfície de uma pirâmide oblíqua de base octogonal regular contida num plano horizontal.

O primeiro passo para obter a planificação é a determinação da verdadeira grandeza das arestas. Em relação às arestas da base, a verdadeira grandeza é dada pela projeção horizontal porque a base está contida no plano xy . Em relação às arestas incidentes em V , verifica-se que as arestas $[VH]$ e $[VG]$ se apresentam em verdadeira grandeza na projeção frontal porque são paralelas ao plano zx . Verifica-se ainda que há duas faces verticais, $[VHG]$ e $[VDE]$, que o plano $[VBF]$ é um plano de simetria da pirâmide por reflexão, de onde, as arestas e faces de um lado têm as mesmas dimensões das do outro lado. Para determinar a verdadeira grandeza das arestas que não são paralelas a nenhum dos planos de projeção, consideraram-se rotações em torno de um eixo e vertical passante pelo vértice V . Nestas rotações as arestas foram colocadas paralelas ao plano zx pelo que a projeção frontal das arestas rodadas representa a sua verdadeira grandeza. Construir a figura da planificação equivale a construir as verdadeiras grandezas dos triângulos das faces da pirâmide, o que é um exercício trivial. Na figura da planificação, aos triângulos acresce o octógono correspondente à base. Note-se que os ângulos, que fazem entre si as arestas, por exemplo α e β , se mantêm na planificação. Note-se ainda o facto de que os pontos F' e A' estão em lados opostos em relação à reta $G'H'$. E o mesmo sucede para os pontos F' e C' em relação à reta $E'D'$. O que há de particular nesta situação é o facto de os planos $[VHG]$ e $[VDE]$ serem verticais e, por isso, perpendiculares ao plano da base da pirâmide.

O caso do prisma oblíquo tem poucas diferenças. A primeira diferença reside no facto de que todas as arestas laterais têm o mesmo comprimento. A segunda diferença tem a ver com o

facto de as faces laterais serem paralelogramos em vez de triângulos. Por fim, como não existe um vértice V no qual incidam todas as arestas laterais, é necessário considerar um plano β , perpendicular às arestas laterais, que intersesta a superfície do prisma segundo uma linha cuja **transformada** é uma linha reta. Esta linha transformada funciona como uma referência a partir da qual se marcam as distâncias d, d', d'' e d''' . Por uma questão de conveniência considerou-se frontal a direção das arestas laterais do prisma (figura 1.103).

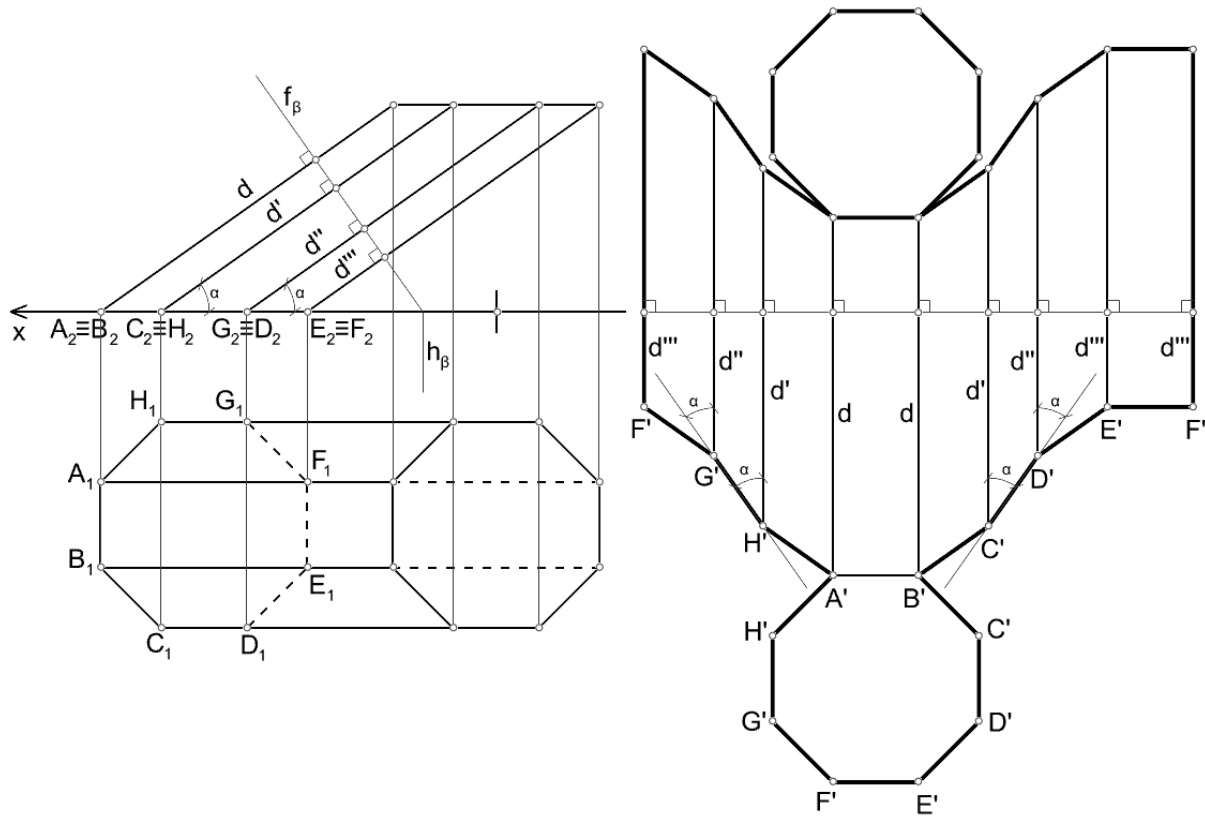


Fig. 1.103. Planificação da superfície de um prisma oblíquo de bases octogonais regulares contidas em planos horizontais.

Note-se que através de uma mudança do sistema de coordenadas é sempre possível colocar as arestas laterais do prisma paralelas ao plano de projeção. À semelhança do caso da pirâmide oblíqua, a verdadeira grandeza das arestas das bases está representada na projeção horizontal das mesmas. Assim, construir a verdadeira grandeza das faces laterais do prisma é um exercício simples. Note-se que os ângulos, que fazem entre si as arestas, por exemplo α , se mantêm na planificação. Note-se ainda o facto de que os pontos F' e A' estão de lados opostos em relação à reta $G'H'$. E o mesmo sucede para os pontos B' e E' em relação à reta $C'D'$. O que há de particular nesta situação é o facto de planos verticais dos segmentos $[HG]$ e $[CD]$ serem planos de faces laterais do prisma perpendiculares aos planos das bases. Tal como no caso da pirâmide, o entendimento deste facto terá importância na determinação dos pontos de inflexão das **transformadas** das linhas que delimitam as bases de cones e cilindros.

Nos casos das superfícies do cone oblíquo e do cilindro oblíquo não há solução gráfica exata. A forma de proceder consiste em considerar uma aproximação piramidal ao cone e uma aproximação prismática ao cilindro resolvidas nos exatos termos dos casos acima tratados (figura 1.104).

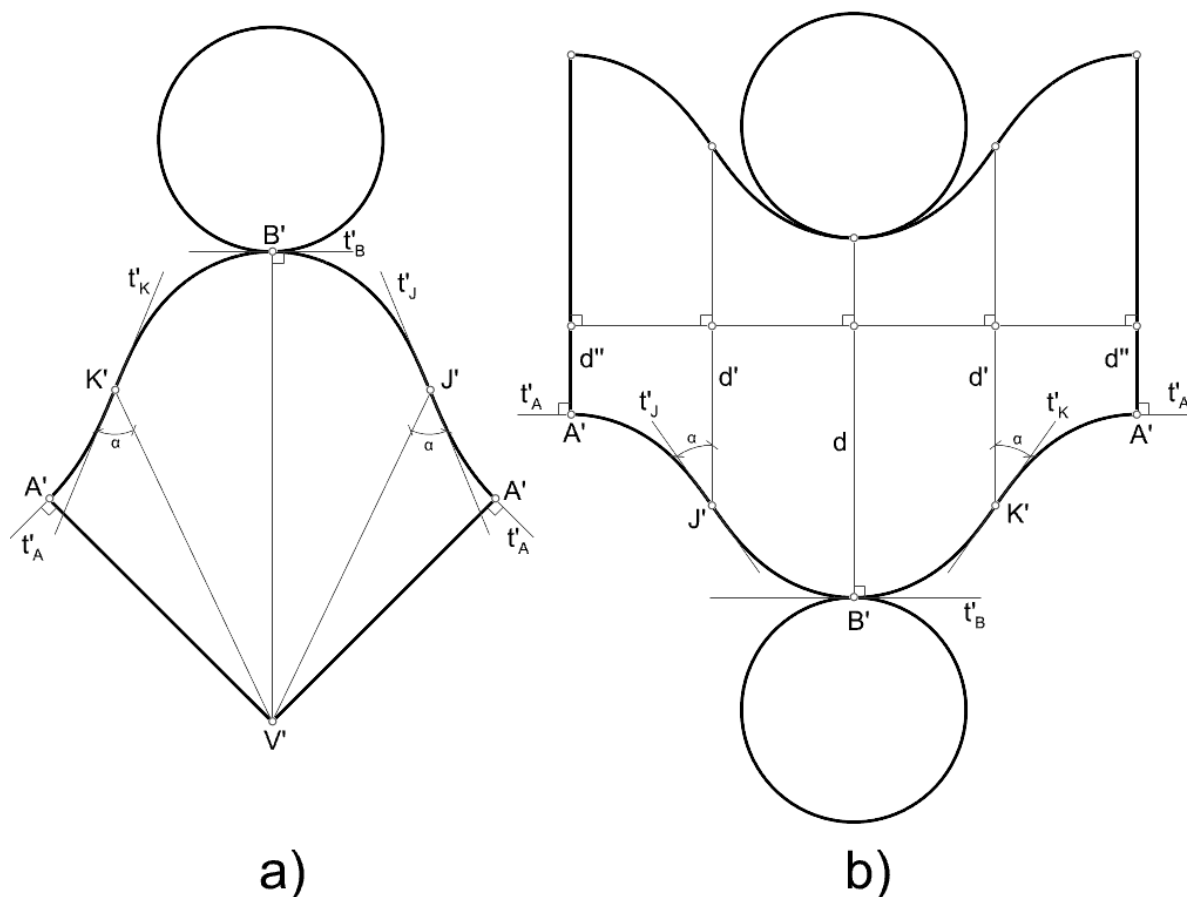


Fig. 1.104. Planificação da superfície de um cone oblíquo (a) e de um cilindro oblíquo (b).

No caso do cone oblíquo (figura 1.104.a), para além de todas as geratrizes que se quiser considerar na aproximação à superfície piramidal, há a considerar quatro geratrizes principais. As geratrizes $[VA]$ e $[VB]$ são as geratrizes de menor e maior extensão da superfície do cone, respetivamente. As retas t_A e t_B tangentes à circunferência do círculo da base nos pontos A e B , respetivamente, são perpendiculares a estas geratrizes. As geratrizes $[VK]$ e $[VJ]$ são geratrizes de contacto entre a superfície cónica e planos tangentes perpendiculares ao plano da base. Estes planos tangentes interseitam o plano da base segundo as retas t_K e t_J tangentes à circunferência do círculo da base. Estas tangentes formam com as geratrizes correspondentes ângulos de amplitude α que se mantêm na planificação. Acresce que, pelo **teorema de Olivier**, os pontos K e J são os pontos de inflexão da linha transformada da circunferência do círculo da base por planificação da superfície lateral do cone. A justificação deste teorema pode ser facilmente entendida se considerarmos a planificação da superfície do cone como um caso limite da planificação da superfície de uma pirâmide com o número de faces a tender para o infinito. O caso da planificação da superfície do cilindro oblíquo (figura 1.104.b) é em tudo semelhante e pode ser encarado como um caso limite da planificação da superfície de um prisma com o número de faces a tender para o infinito. A aproximação será tanto melhor quanto maior o número de faces da pirâmide ou prisma que forem utilizadas. No entanto, em termos práticos, há um número razoável que depende das dimensões e escala do desenho.

Atividade proposta:

Represente várias pirâmides, prismas, cones e cilindros e proceda à planificação das suas superfícies. Pode ainda considerar interseções planas produzidas nas superfícies desses sólidos ou operações booleanas. E se for o caso, na planificação deve considerar as linhas transformadas correspondentes a essas interseções. De seguida construa modelos físicos correspondentes aos casos que estudou.

Aplicações da MPO (incluindo a DPO e sistema cotado)

As aplicações que vamos considerar não são exaustivas mas correspondem a situações que se podem encontrar na prática na representação em arquitetura ou design. Até aqui, todas as representações seguiram de forma mais ou menos rígida as convenções dos métodos das projeções. Porém, atingida uma certa familiaridade com esses métodos, podemos agora libertar-nos de algumas amarras e tratar a representação de um modo mais flexível, porém rigoroso.

Composição de volumes

O cerne da atividade do arquiteto é a organização do espaço. E para organizar o espaço é preciso dar forma aos seus limites. Também o designer ou o engenheiro tem na manipulação das formas parte do cerne da sua ação. E isso é feito através da geometria e das operações geométricas que temos vindo a descrever.

Na figura 1.105 estão representadas três projeções de uma composição de quatro volumes.

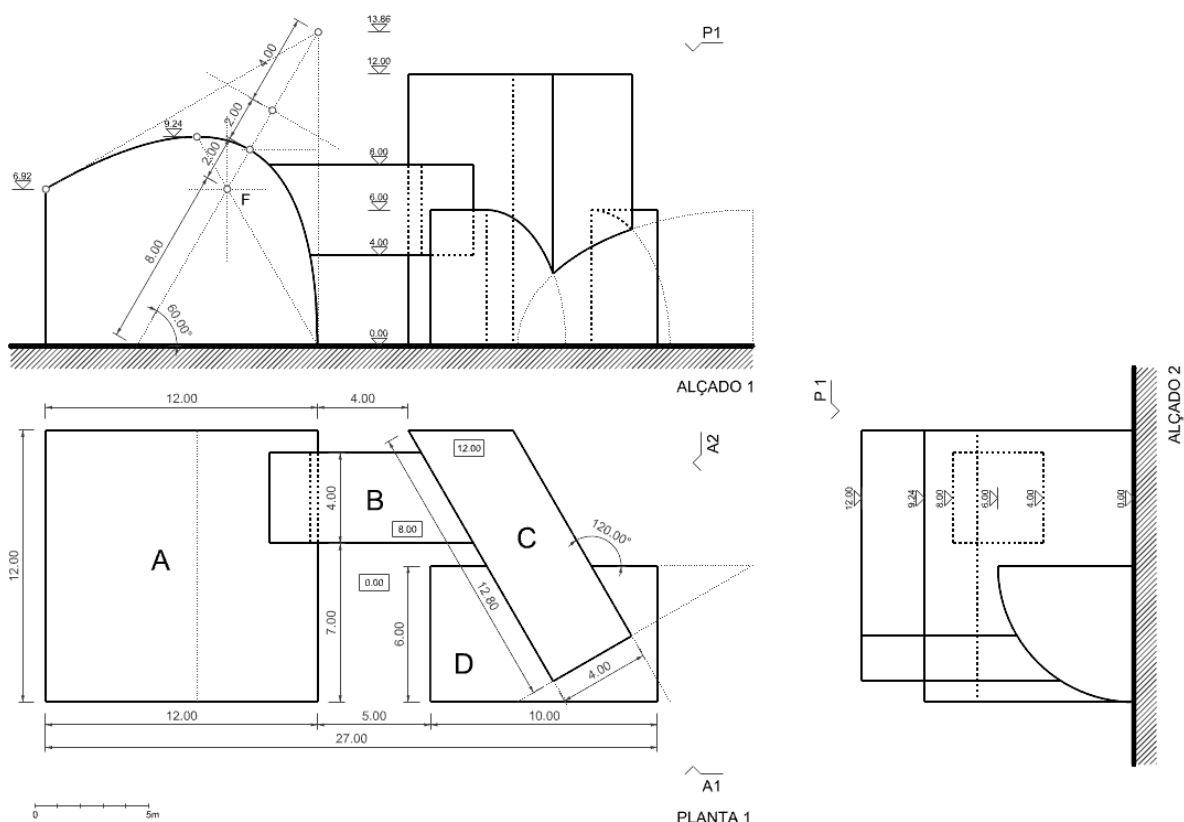


Fig. 1.105. Composição de volumes e aproximação do desenho de arquitetura através de Planta e Alçados.

Esta composição pode ser interpretada como uma união dos volumes. O volume **A** é delimitado por quatro faces planas e uma superfície cilíndrica parabólica. Os volumes **B** e **C** podem ser interpretados como prismas. E o volume **D** corresponde a um quarto de cilindro de revolução.

Os desenhos da figura 1.105 não são verdadeiramente desenhos de arquitetura. Porém estão incorporadas algumas convenções e elementos que fazem uma aproximação a esse tipo de desenho e que passamos a discutir sem com isso querermos entrar nos detalhes do Desenho Técnico de Arquitetura ou de Design. E estamos convencidos que o aprofundamento da representação técnica deve evoluir a par e passo com o estudo dos sistemas construtivos e com a sua aplicação no projeto. Não é por isso uma matéria estrita da geometria descritiva embora se possam estabelecer algumas pontes iniciais.

A projeção horizontal está referida como **Planta** e as projeções produzidas em planos verticais estão identificadas como **Alçados**. Na planta estão referenciados os alçados com **A1** e **A2** junto de símbolos que representam tanto o sentido da projeção como a própria localização dos planos da projeção (na verdade, os planos de projeção podem ter localização indefinida, embora estas localizações correspondam sempre a planos de corte/secção). A mesma coisa acontece nos alçados em que está referenciada a planta com **P1** junto de um símbolo. A planta e os alçados estão representados de forma articulada para permitir a transposição mais direta de informação de entre eles. O que se passa nas plantas propaga-se para os alçados e vice-versa.

Sob os alçados aparece uma trama representada com tracejado. Isto acontece assim porque um objeto arquitetónico não flutua, isto é, está sempre assente num terreno. Assim, o que o tracejado representa é a secção nesse terreno, neste caso hipoteticamente considerado horizontal. E uma vez que na representação dos alçados se considera que há uma secção no terreno, na representação de arquitetura, os alçados também são **Cortes**, isto é, num alçado deve considerar-se que há sempre um plano que produz uma secção no terreno, e esse plano pode ser considerado como o plano de projeção do alçado. Por isso, a linha de corte está representada com uma espessura superior.

Estes desenhos contêm **cotagem**. A cotagem é uma representação das medidas do objeto que visa, em última análise, possibilitar a implantação do objeto no terreno com vista a uma construção. Essas medidas devem ser as necessárias e as suficientes para permitir um entendimento das dimensões do objeto. A cotagem representa medidas lineares, ângulos e cotas de nível. As cotas de nível, ou **cotas altimétricas**, estão representadas nos alçados (e cortes) sobre um símbolo triangular, e na planta dentro de um pequeno retângulo. Não há uma convenção única para estas representações. Espera-se que o leitor, se for estudante de arquitetura, possa adotar a convenção que melhor sirva os propósitos da representação. Pode familiarizar-se com as convenções através da leitura e análise de desenhos de arquitetura, exercício que se recomenda.

O desenho contém também umas linhas a pontilhado que visam representar o completamento de algumas linhas de interseção ou elementos notáveis dos elementos sob representação como eixos de elipses ou da parábola do volume **A**. Estas linhas não são estritamente necessárias num desenho final mas ajudam a perceber a natureza dos segmentos representados explicitamente.

Mas, mas importante que tudo isso, esta representação é um desenho de geometria descritiva com todas as operações geométricas que a sua produção implicou. Não nos devemos deixar distrair pelas roupagens ligeiramente diferentes relativamente aos desenhos que apresentámos até aqui. E sobretudo não devemos deixar que essas roupagens levem o leitor a pensar que este tipo de representação está fora do âmbito da geometria.

0 5m

CORTE A-A'

CORTE B-B'

PLANTA À COTA 2.50

É importante mencionar que a representação em corte obedece a algumas convenções que é importante notar. O corte é como se fosse uma truncagem do objeto. Porém essa truncagem apenas se representa num dos elementos desenhados, aquele em que o plano que secciona é o plano de projeção (ou paralelo ao plano de projeção). Também por essa razão, num corte a secção aparece sempre em verdadeira grandeza. O que se refere ao corte, aplica-se de igual modo à planta. Nestes desenhos utilizou-se o pontilhado para representar elementos aquém do plano do corte, e o traço interrompido para representar elementos invisíveis para além do plano do corte. Neste exemplo, a planta corresponde a um corte produzido por um plano à cota **2.5m** e o sentido da vista é de cima para baixo. Se o sentido da vista fosse de baixo para cima, o elemento gráfico designar-se-ia por **planta de teto**.

175

que as operações que ela requer podem ser estudadas, analisadas e entendidas. E vemos que a representação contém sempre uma dimensão que vai para além das operações geométricas. Trata-se de um conjunto de símbolos (por exemplo setas que indicam sentido de subida de escadas, símbolos para assinalar a localização dos cortes, cotagens, anotações, legendas, tramas com significados variados, diferentes tipos e espessuras de linhas com significados distintos, entre muitas outras coisas) que são próprios da linguagem da disciplina em que nos inserimos, seja a arquitetura, o design ou as engenharias.

Atividade proposta:

Utilizando como repertório as figuras geométricas estudadas, proponha composições de três ou quatro e represente-os através de projeções. Note que as projeções não devem ser escolhidas ao acaso. Deve eleger as projeções que são, de alguma forma, úteis para ajudar na resolução dos problemas espaciais como as interseções. Por exemplo, uma projeção que coloque de topo as geratrizes da superfície de um cilindro facilita a resolução de qualquer interseção com esse cilindro.

Procure, por exemplo em revistas ou na internet, exemplos de desenhos de arquitetura ou design e procure decodificá-los tanto do ponto de vista da simbologia utilizada bem como da reconstituição de uma imagem mental tridimensional dos edifícios que estão representados.

Modelação de coberturas com superfícies de pendente constante

Um subtópico da composição de volumes é a resolução de coberturas de edifícios. Mais concretamente a resolução de coberturas com superfícies de pendente constante (ou variável). Um problema típico corresponde a definir o volume de uma construção através do seu contorno, dado em planta, especificando as cotas dos vértices desse contorno, e indicando a pendente que a cobertura deve ter (**125%** neste caso), conforme a figura 1.107. Neste caso é ainda dada a cota altimétrica do nível sobre o qual assenta o edifício. O que significa que a altura do edifício é **7.5m**.

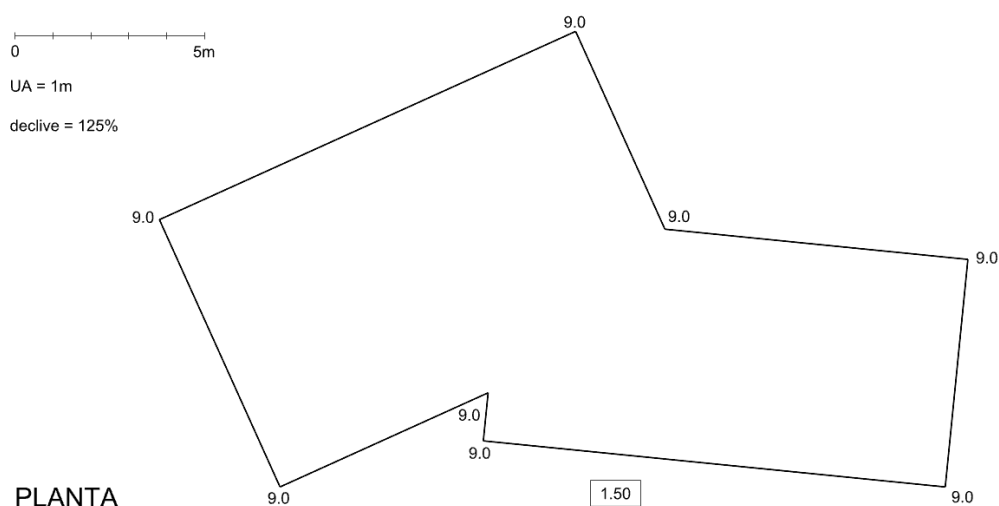


Fig. 1.107. Limite de um edifício dado em planta, a cota do nível em que assenta, as cotas de arranque da cobertura, e a pendente da mesma.

Uma vez que a pendente é constante e as cotas dos vértices do polígono limite da cobertura são todas iguais, assume-se que o limite é horizontal. Isso significa que estão dadas as

0 ———— 5m

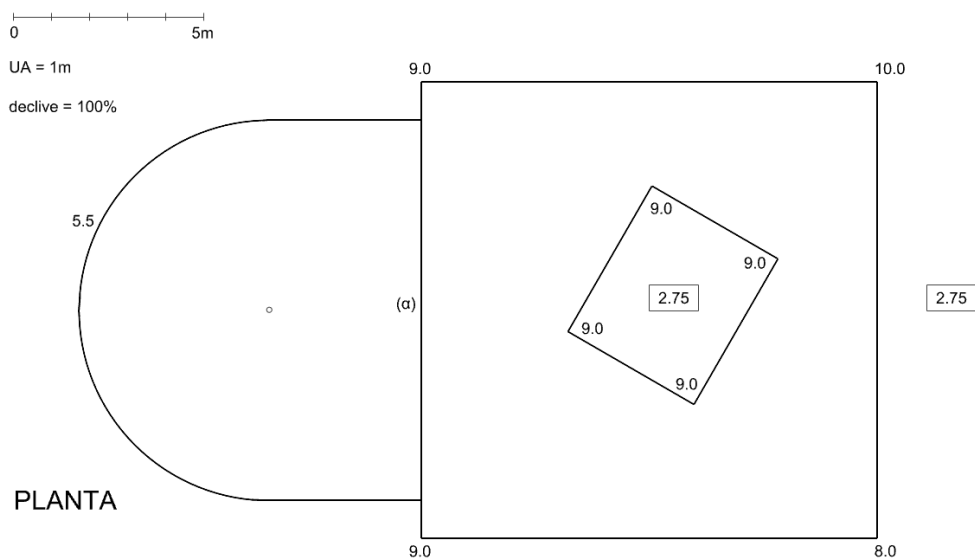
UA = 1m

declive = 125% ⇔ I = 0.8m

9.0 10 11 12 13 9.0 9.0 9.0 9.0 9.0 9.0 12 1.50

PLANTA

No caso seguinte, as cotas do polígono envolvente da cobertura não são todas iguais e o volume da cobertura é vazado interiormente, o que leva ao aparecimento de um novo polígono interno (figura 1.109). Adicionalmente, parte do perímetro da cobertura é curvo.



177

O limite da cobertura que contém a parte curva está a uma cota menor, o que levará a que parte da cobertura desse lado seja limitada pelo plano vertical α . Na parte em que a cobertura exceder a cota **9.0m**, vai avançar sobre a cobertura do volume adjacente. Nos casos em que o limite do arranque da cobertura não é horizontal, conduzir os planos das faces da cobertura por esses limites equivale a resolver um problema de tangência entre plano e superfície cônica de revolução. Após estarem determinadas as linhas de nível das várias superfícies da cobertura, resolvê-la significa determinar as linhas de interseção entre as mesmas. Observe-se que parte da cobertura será uma superfície cônica tangente a duas faces planas (figura 1.110). E neste caso, como o limite da cobertura está à cota **5.5m**, a primeira linha de nível, à cota **6m**, dista do limite da cobertura, em projeção, uma fração do intervalo proporcional à diferença de cotas, neste caso, metade do intervalo.

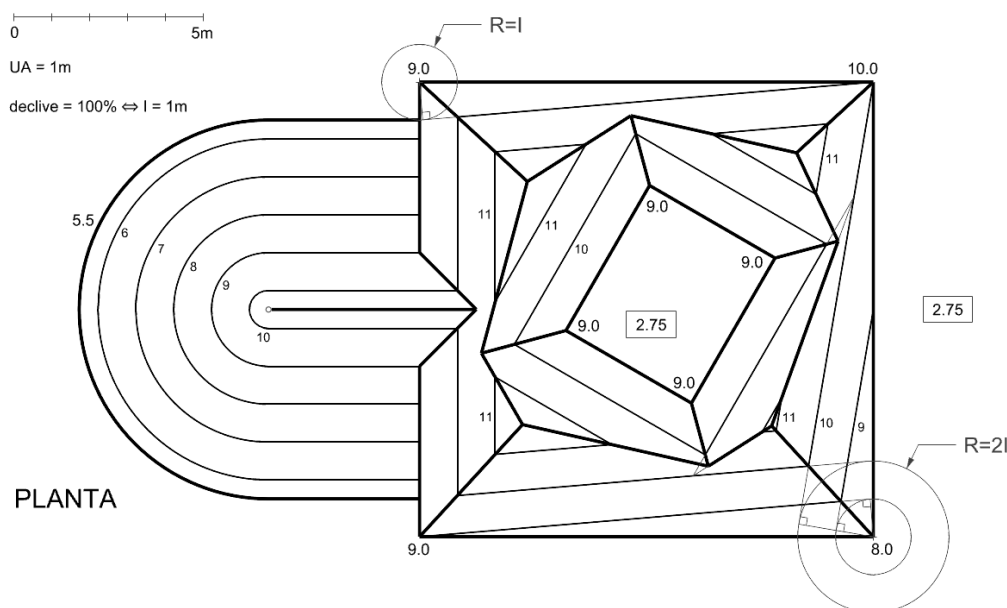


Fig. 1.110. Resolução da cobertura, em planta.

Atividade proposta:

Defina várias configurações correspondentes a limites de edifícios. As cotas dos vértices do polígono limite podem ser todas iguais ou podem variar. As pendentes das várias superfícies da cobertura podem ser todas iguais ou podem variar. Resolva as coberturas e determine as verdadeiras grandezas das faces planas da mesma e, no caso de ter considerado superfícies planificáveis, determine também a verdadeira grandeza dessas superfícies. Pode ainda representar os sólidos finais obtidos através de projeções em planos frontais, isto é, alçados. Finalmente, construa modelos físicos dos volumes obtidos, por exemplo em cartolina.

Modelação de terrenos

Em arquitetura, raramente o local em que assenta uma construção é exatamente plano. Isso implica que o local de implantação de um edifício tenha de ser modelado para acomodar o novo volume. Isso pode ser feito dos mais variados modos.

Como os terrenos não têm definição geométrica, a sua representação é sempre dada através de uma aproximação por curvas de nível. Localmente, uma curva de nível pode ser sempre interpretada como a interseção produzida numa superfície topográfica (terreno) por um plano horizontal a uma dada altura ou cota.

Embora extravase um pouco o âmbito estrito da geometria descritiva, fazemos aqui algumas considerações sobre a representação de terrenos, que são mais próprias da geografia. Genericamente, a designação da representação de um terreno, mais ou menos extenso, faz-se através de plantas (escala maior ou igual a 1/10.000), cartas (escala entre 1/25.000 e 1/100.000) e mapas (escala inferior a 1/100.000). A classificação não é estanque e pode variar ligeiramente de autor para autor. No contexto da arquitetura interessam-nos as plantas. Escalas comuns de trabalho variam entre 1/1000 e 1/100. Escalas superiores, por exemplo 1/50 ou 1/20, são utilizadas para pormenorização.

Como uma planta é a representação de um terreno e o terreno existe algures no mundo, é comum declarar-se numa planta a sua localização e orientação, através de um sistema de coordenadas normalizado. Por exemplo, em Portugal utiliza-se o sistema de coordenadas retangulares ETRS89/PT-TM06. Este sistema têm dois eixos de coordenadas planimétricas designados por **Perpendicular** e **Meridiana**. Intuitivamente, a Perpendicular corresponde ao eixo x , e a Meridiana aponta aproximadamente para Norte e corresponde ao eixo y . As coordenadas planimétricas de um ponto são dadas pela distância à Meridiana (M) e pela distância à Perpendicular (P), como se fossem as coordenadas X e Y . Às coordenadas planimétricas acresce a coordenada altimétrica (H) que representa uma altitude ortométrica tendo por referência o nível médio das águas do mar, em relação a uma referência preestabelecida. No caso português é o *datum* altimétrico do marégrafo de Cascais. A coordenada H corresponde à coordenada Z . Na figura 1.111 ilustra-se este sistema de coordenadas que tem a sua origem num ponto próximo do centro geodésico de Portugal.

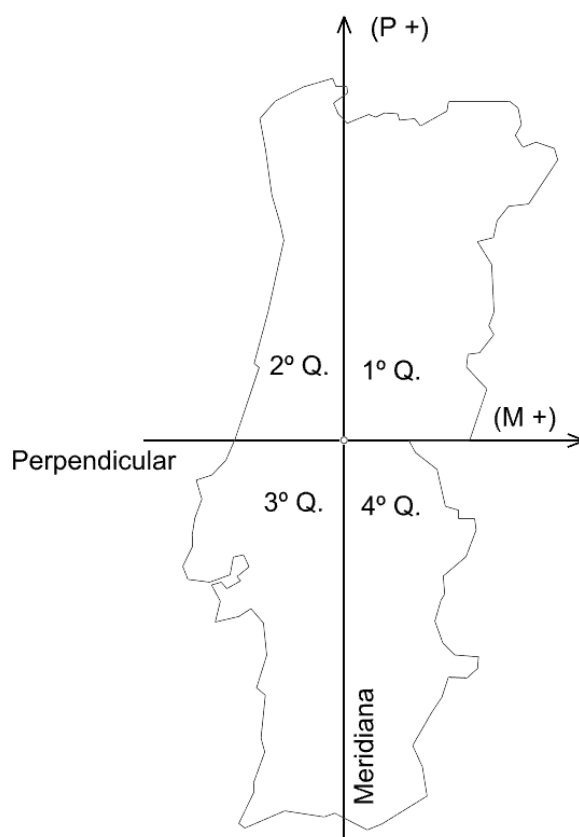


Fig. 1.111. Ilustração do sistema de referência ETRS89/PT-TM06.

Este sistema divide o território português em quatro quadrantes. Por exemplo, a zona de Lisboa fica no terceiro quadrante o que implica que as coordenadas planimétricas em Lisboa sejam

sempre negativas. Não importa agora entrar em detalhes (o que faremos na PARTE III deste texto). Mas importa perceber que as plantas de dois locais distintos nunca apresentam as mesmas coordenadas planimétricas

Estas explicações têm apenas o objetivo de alertar o leitor para alguns cuidados que deve ter quando precisa manipular informação que lhe é transmitida neste sistema de coordenadas, sobretudo se lhe for dada em formato digital. A primeira regra é nunca deslocar os elementos de sítio. Isso altera-lhes as coordenadas e pode fazer-lhe perder o vínculo geográfico.

No nosso caso, no contexto da geometria descritiva, interessa-nos mostrar que há uma analogia entre o sistema cartesiano de coordenadas retangulares que temos vindo a usar e este sistema de referência. Isto deve-nos levar a concluir que se era possível utilizar aquele sistema como base para a representação de figuras e operações geométricas, o mesmo deve ser possível em relação a este. Ou seja, quando em arquitetura trabalhamos vinculados a um sítio, não é por isso as operações que realizamos deixam de ter um carácter geométrico.

Na figura seguinte temos uma representação típica de um terreno (fictício). Os dois pontos indicados na parte inferior da planta têm as suas coordenadas planimétricas expressas no sistema ETRS89/PT-TM06. A porção de terreno representada tem altitude ortométrica aproximadamente entre os **16m** e os **28.21m**, cota do ponto mais alto assinalado.

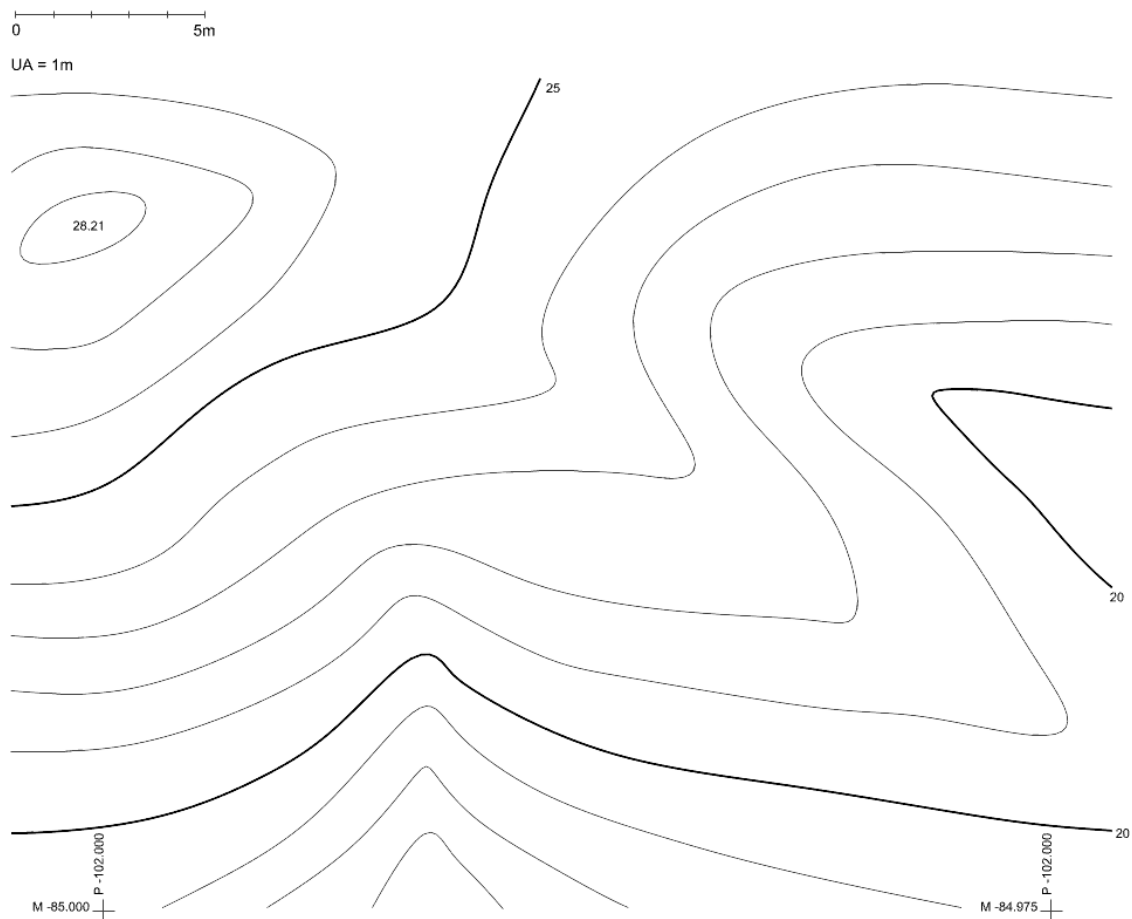


Fig. 1.112. Representação de um terreno em planta no sistema ETRS89/PT-TM06.

Uma leitura típica de um terreno passa por identificar as linhas de talvegue (linhas de água), as linhas de fecho (cumeeira), as elevações (pontos mais elevados do terreno onde o plano tangente é horizontal) e as depressões (pontos menos elevados do terreno onde o plano

tangente é horizontal). Também é possível classificar as formas dos terrenos segundo um léxico próprio, porém não nos preocupamos com isso no âmbito deste texto.

Atividade proposta:

Represente na planta dada as linhas de festo e talvegue, e identifique elevações e depressões, caso existam. Repita o exercício para outras representações de terrenos em planta.

O que vamos mostrar no exemplo da figura seguinte é uma situação que típica as operações de **aterro e escavação** que se podem utilizar para acomodar a implantação de uma plataforma num terreno. Numa escavação há remoção de terreno; num aterro há aposição de terreno ao terreno existente. Neste caso temos duas plataformas, uma à cota **23m** e a outra à cota **21m**. Temos ainda uma ligação em rampa entre as duas plataformas. Pretende-se acomodar as plataformas ao terreno através de operações de escavação e de aterro.

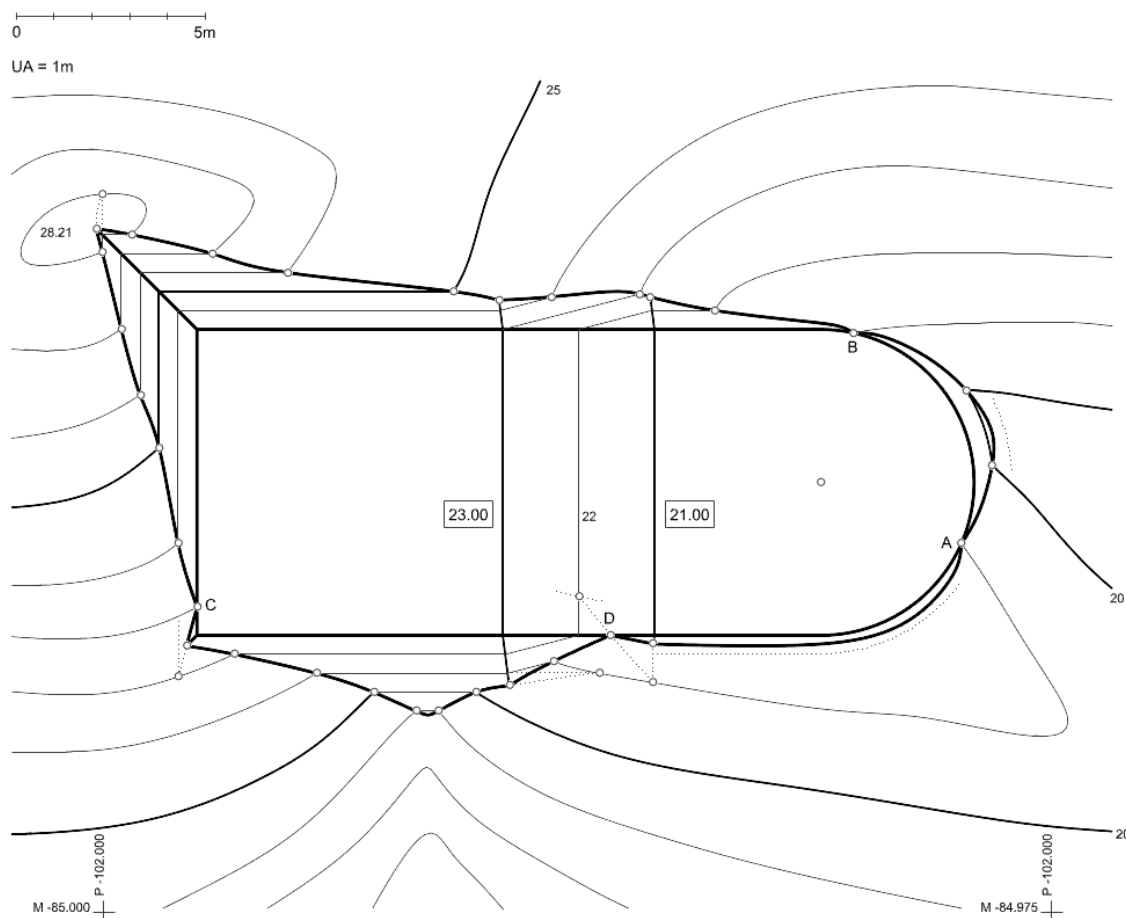


Fig. 1.113. Resolução da implantação de plataformas num terreno através de escavações e aterros.

O primeiro passo na resolução passa por determinar a interseção dos limites das plataformas com o terreno. Analisando as cotas das plataformas, os pontos **A**, **B** e **C** são de determinação direta. Os pontos **A** e **B** resultam da interseção do limite da plataforma, à cota **21m**, com a curva de nível à cota **21m**. De forma análoga, o ponto **C** resulta da interseção do limite da plataforma, à cota **23m**, com a curva de nível à cota **23m**. Já o ponto **D** resultou da interseção do limite da rampa com o terreno. Como a rampa é plana, o ponto **D** pertence à linha de interseção entre o plano da rampa e o terreno. Note-se que esta linha de interseção (a

pontilhado no desenho) em geral não é reta porque o terreno não é plano. O que estes quatro pontos têm de especial é permitirem dividir o limite das plataformas (incluindo a rampa) em troços que, face à configuração inicial do terreno, estão acima ou abaixo deste. No sentido anti-horário, o troço entre **A** e **B** está acima do terreno, o troço entre **B** e **C** está abaixo do terreno, o troço entre **C** e **D** está acima do terreno, e o troço entre **D** e **A** está abaixo do terreno.

Para introduzir a nova forma, dada pelas plataformas e rampa, é necessário recorrer a operações de escavação ou de aterro. Naturalmente, escava-se para retirar matéria e aterra-se para colocar matéria. Estas operações dão origem a superfícies que ligam os limites das plataformas (incluindo a rampa) ao terreno. Estas superfícies designam-se por **taludes**. Os taludes podem resultar de operações de aterro ou escavação. Se os limites das plataformas forem retos, os taludes são planos. No caso do limite dado por um semicircunferência, os taludes resultantes têm a forma de superfície cônica. A especificação dos taludes é dada através da imposição de um declive. No exemplo da figura considerou-se uma pendente constante de **200%** a que correspondeu um intervalo de **0.5m**. A interseção das superfícies dos taludes com o terreno é uma curva que interpola os pontos de interseção das suas curvas de nível com as curvas de nível do terreno. A interseção entre superfícies de taludes adjacentes é um exercício trivial de interseção entre superfícies definidas pelas suas curvas de nível.

No caso da forma a implantar ter um contorno curvo não horizontal, a superfície do talude fica definida como a envolvente de uma família de superfícies cónicas de revolução de eixo vertical que têm os seus vértices sobre aquele contorno (figura 1.114).

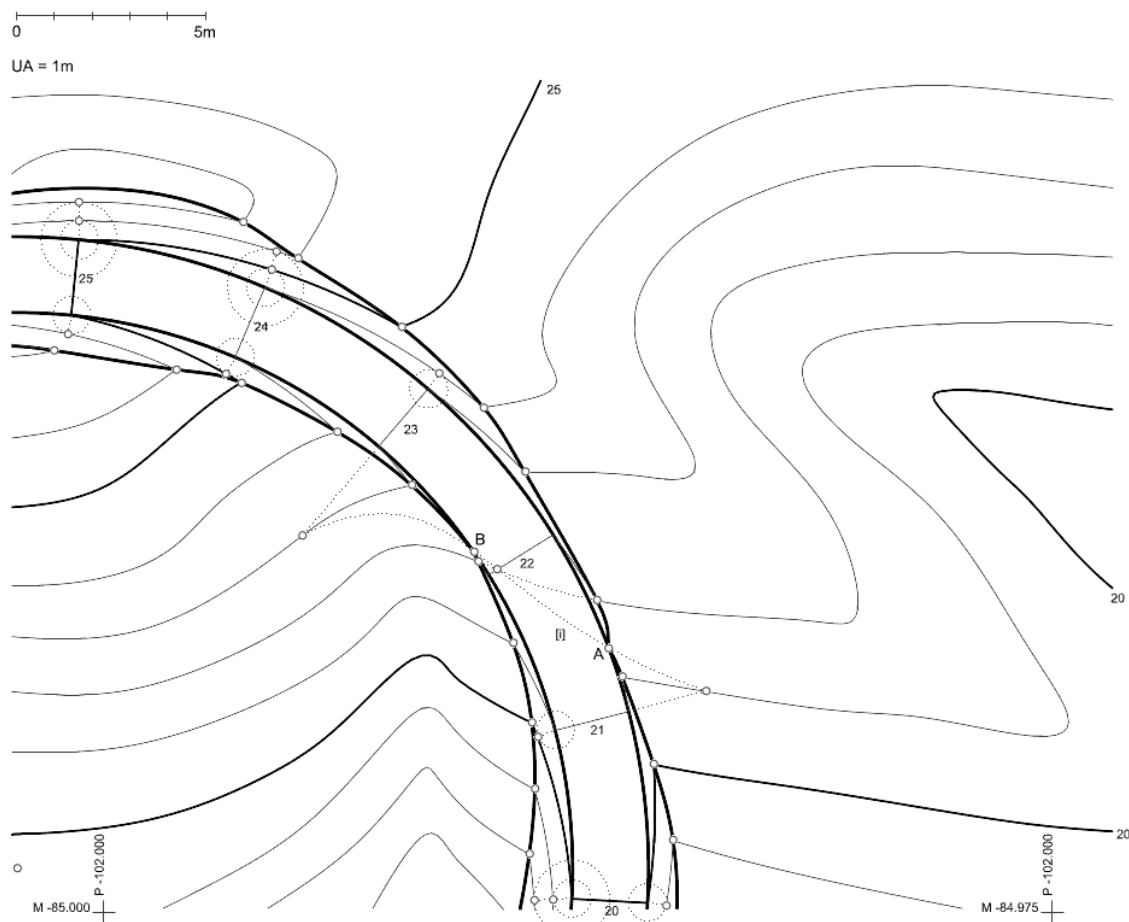


Fig. 1.114. Resolução da implantação de um caminho rampeado curvo.

O primeiro passo na resolução do problema é a determinação da interseção da superfície da forma a implantar com a superfície do terreno. No exemplo da figura, essa interseção é dada pela parte da curva $[i]$ compreendida entre os pontos **A** e **B**, correspondendo estes às interseções dos limites da forma curva com o terreno. Estes pontos marcam a transição entre escavações e aterros. A linha $[i]$ obtém-se intersetando as linhas de nível da forma curva com as linhas de nível do terreno. Para efeitos práticos foi suficiente determinar a porção da linha $[i]$ entre as cotas **21m** e **23m**. Para determinar o traçado das curvas de nível dos taludes, após especificação da pendente, que neste caso foi de **200%**, e a que corresponde o intervalo de **0.5m**, consideraram-se superfícies cônicas de revolução de eixo vertical e geratrizes com pendente **200%**, com vértices nos pontos de cota inteira dos limites da forma a implantar. Cada uma dessas superfícies cônicas é intersetada, pelos planos de nível de cota inteira, segundo circunferências de cota inteira. As linhas de nível dos taludes devem ser tangentes as essas circunferências. Determinadas as linhas de nível, a interseção das superfícies dos taludes com o terreno faz-se nos mesmos termos do exemplo anterior.

Note que, por vezes, a determinação das interseções entre o terreno e os limites das formas a implantar pode ser resolvida de modo eficiente através de um perfil. Na prática, um perfil é um corte produzido na superfície do terreno por uma superfície plana vertical ou cilíndrica de geratrizes verticais. No caso de ser uma superfície cilíndrica, a representação do perfil implica a sua planificação.

Atividade proposta:

Utilizando a planta dada, ou outra planta qualquer, crie situações idênticas às aqui estudadas e resolva os taludes de escavação e aterro.

Movimento

No contexto deste ponto interessa-nos mostrar que nem todas as aplicações da geometria correspondem a situações estáticas. Por exemplo, num edifício, uma porta varre um volume de espaço no seu movimento. Para ela funcionar livremente, esse volume tem de estar desimpedido, isto é, nenhum outro objeto o pode ocupar. Um candeeiro de secretária com três articulações pode, em potência, ocupar uma determinada região. Fixada uma articulação, o extremo da seguinte pode ocupar parte de uma superfície esférica cujo raio corresponde à sua extensão. Um elemento saliente na superfície lateral plana de uma roda sujeita a rolamento descreve uma *roulette*. Os exemplos são incontáveis. Uns são mais simples e outros mais complexos. Mas mesmo os mais complexos podem ter um tratamento gráfico aproximado. Vamos dar dois exemplos.

No primeiro caso (figura 1.115), imagine-se um retângulo vertical em que os seus lados verticais podem deslizar sobre duas linhas horizontais **a** e **b** perpendiculares entre si. Nesse movimento, o retângulo envolve uma superfície cilíndrica cuja diretriz é uma curva designada astroide. A astroide é uma curva da família das *roulletes*. Na figura seguinte limitamo-nos a representar um conjunto de posições sucessivas do retângulo dadas em projeção horizontal pelos segmentos $[A_i B_i]$ de comprimento constante. Imaginando um movimento contínuo, o leitor conseguirá visualizar mentalmente a linha que representa a superfície cilíndrica. No desenho, essa linha deverá ser tangente a todos os segmentos desenhados. Repare que um movimento uniforme do ponto **A** não corresponde a um movimento uniforme do ponto **B**.

No segundo caso (figura 1.116), imagine-se um mecanismo em que uma haste de comprimento fixo $\overline{AC}$ pode deslizar sobre uma articulação O de modo a que outro ponto B fixo na haste pode deslizar numa calha a . O ponto A , sujeito a estas restrições, desloca-se descrevendo uma curva $[c]$ designada conchoide.

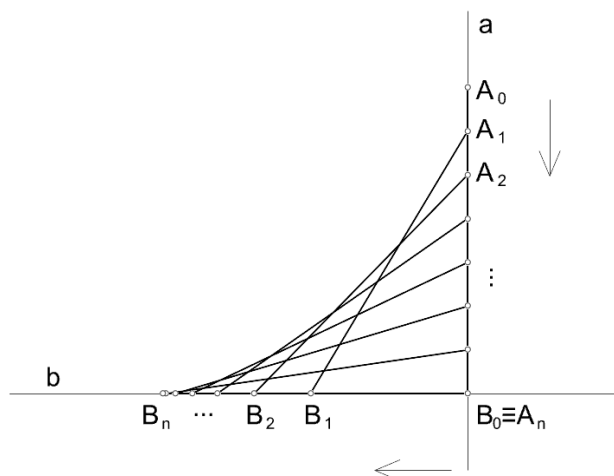


Fig. 1.115. Movimento de um retângulo vertical sobre duas linhas horizontais a e b , em projeção horizontal.

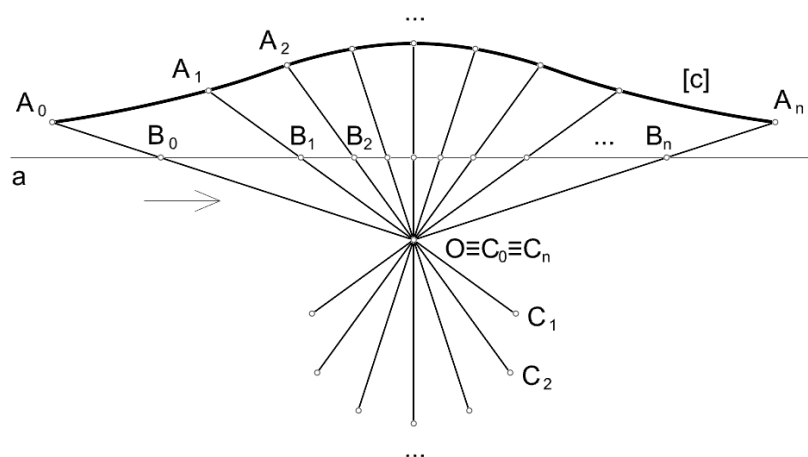


Fig. 1.116. Mecanismo que gera uma curva designada conchoide.

Atividade proposta:

Estude variantes dos exemplos dados. Em relação ao primeiro exemplo experimente variar a inclinação entre as retas a e b . Em relação ao segundo exemplo imagine que em vez de ter um segmento de reta $[A_i C_i]$ tem uma reta $A_i O$. Como se estende a curva $[c]$? E se variar a posição do ponto A_i relativamente ao ponto B_i ? Imagine outros mecanismos e procure visualizar que linhas ou superfícies podem ser geradas.

Sombras

Na natureza, existem sombras porque existe luz. A luz ao incidir sobre a superfície dos corpos é parcialmente refletida por estes. As reflexões podem ser de vários tipos desde as puramente especulares até às puramente lambertianas. A luz refletida volta a incidir noutros corpos num corupio de reflexões em múltiplas direções. Um corpo é mais ou menos iluminado consoante a inclinação dos raios luminosos relativamente à sua superfície. Há corpos que ocluem a

passagem da luz e com isso impedem-na de chegar a outros corpos. Nesse processo, as suas formas podem ser recortadas nesses outros corpos definindo zonas iluminadas e zonas sombreadas. A atmosfera também produz efeitos na forma como os corpos são iluminados. E acima disto tudo há que contar com as cores e as texturas dos materiais. O percurso aparente do sol, fonte de toda a luz natural no nosso planeta, não é igual em todos os pontos do globo terrestre. Assim sendo, parece que o fenómeno da luz e da sombra é particularmente rico e complexo. E de facto assim é.

Atualmente, toda a física desse fenómeno pode ser simulada em toda a sua riqueza e complexidade através das ferramentas de modelação tridimensional. Se assim é, qual é a pertinência de considerar o estudo das sombras como uma parte da geometria descritiva, e em particular, através dos seus métodos tradicionais de desenho bidimensional?

O nosso ponto de vista é que o entendimento dos princípios geométricos básicos subjacentes ao fenómeno das sombras permite uma simulação rápida, através do desenho, do efeito da luz sobre os corpos que é facilitador da leitura e entendimento espacial das situações representadas, e apresenta utilidade nos processos de ideação, por exemplo em arquitetura. Assim, para o que nos interessa para já, o cálculo de sombras não é mais que a aplicação de operações já estudadas anteriormente. Entre estas encontram-se as tangências, as interseções de planos, as interseções planas e, eventualmente, as interseções entre superfícies cónicas ou cilíndricas com outro tipo de superfícies. Vamos apenas considerar uma pequena parte do fenómeno que consiste na determinação e separação de zonas iluminadas e em sombra de objetos sujeitos a uma fonte de luz direta. Por isso, não vamos considerar reflexões, efeitos atmosféricos ou gradientes nas superfícies. Esses aspetos seriam de tratamento moroso através de procedimentos gráficos bidimensionais e os resultados pouco adiantariam às capacidades que se podem desenvolver através da prática do desenho de observação. Na verdade, pensamos que este tema pode ser um pretexto para cruzar a disciplina do desenho, dito artístico, com o desenho, dito geométrico.

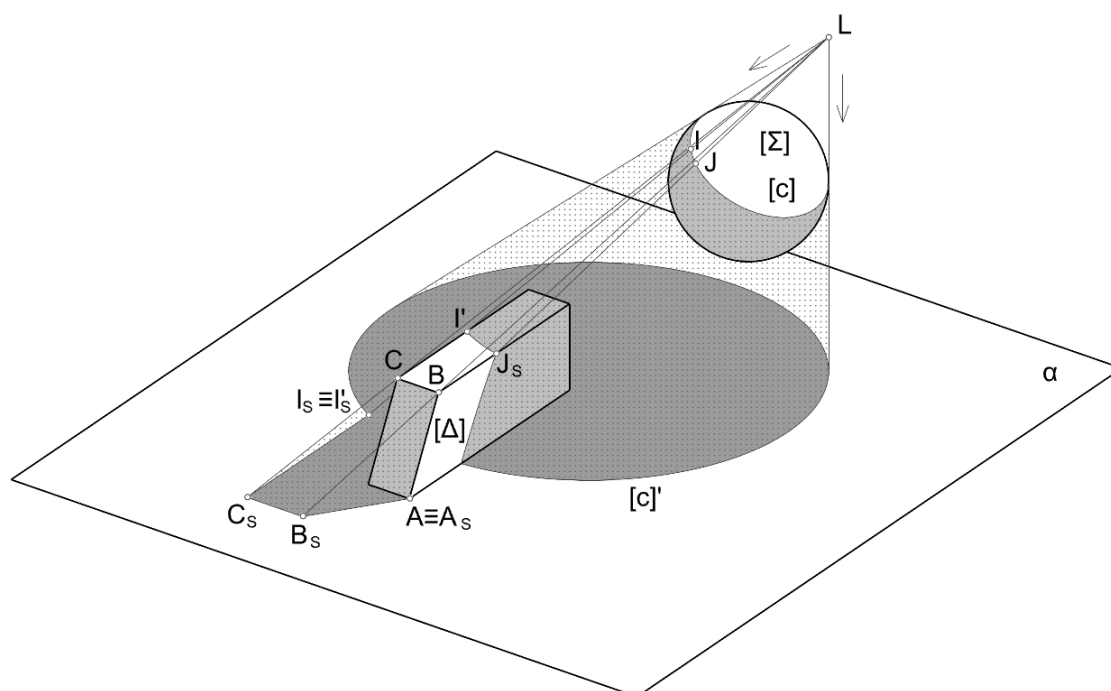


Fig. 1.117. Mecanismo que gera uma curva designada conchoide.

Assim, esquematizando, considere-se uma fonte luminosa L e dois corpos, uma esfera $[\Sigma]$ a flutuar no espaço e um tronco de prisma $[\Delta]$ assente numa superfície horizontal α (figura 1.117).

A partir da fonte luminosa emana uma infinidade de **raios luminosos** $\vec{LA}$, $\vec{LB}$, ..., $\vec{Ln}$.

Relativamente à superfície da esfera, há uma superfície cónica de vértice L concordante com a superfície esférica ao longo da circunferência $[c]$, separatriz luz/sombra. A partir da linha $[c]$, a superfície cónica separa um **espaço iluminado** de um **espaço não iluminado** (zona a pontilhado na figura). Se ignorarmos a esfera, algo idêntico acontece com o prisma. Mas agora, em vez de uma superfície cónica, temos uma superfície piramidal de vértice L . A superfície piramidal é **rasante** à superfície do prisma ao longo de algumas das suas arestas. O conjunto dessas arestas define também uma linha separatriz luz/sombra. A **sombra produzida** pelo conjunto sobre a superfície horizontal α é a reunião das duas regiões que ficam definidas na interseção desta superfície horizontal com as superfícies cónica e piramidal. Se a fonte luminosa estivesse a distância infinita, em vez de superfície cónica e superfície piramidal, teríamos superfície cilíndrica e superfície prismática, respetivamente. Se estas duas regiões se intersectarem, o que acontece no caso ilustrado na figura, isso significa que um dos sólidos, neste caso a esfera, produz sombra sobre o outro, o prisma. O recorte da sombra produzida da esfera sobre o prisma é dado pela interseção da superfície cónica com os planos das faces do prisma. Se considerássemos a esfera e o prisma como um conjunto, poderíamos referir-nos a esta última sombra como **sombra autoproduzida**. Das superfícies que não recebem luz direta, por não estarem orientadas para a fonte luminosa, diz-se que estão em **sombra própria**. Deve distinguir-se o caso em que uma superfície não recebe luz direta devido à sua orientação (sombra própria) do caso em que uma superfície não recebe luz direta porque há um corpo que se interpõe (sombra produzida ou sombra autoproduzida). Reduzindo tudo isto à figura elementar, a sombra de um ponto A sobre uma superfície $[\beta]$ é o traço, A_s , produzido na superfície $[\beta]$ pelo raio luminoso $\vec{l}$ passante pelo ponto A . Vemos que as sombras não são mais que projeções cónicas ou cilíndricas.

No caso da aplicação das sombras em arquitetura pode ter interesse considerar a localização e orientação geográfica do edifício. Deste modo, pode simular-se a direção luminosa numa dada coordenada temporal e geográfica. Isso pode ser extraído de uma **carta solar**. De uma carta solar extraem-se dois ângulos, um referido ao plano horizontal de referência, designado por **azimute**, e outro relativo à pendente da direção luminosa, designado por **altura**. No caso da utilização de ferramentas de modelação tridimensional, normalmente esta é uma funcionalidade embebida na aplicação.

Outro caso é a utilização de sombras com direção luminosa convencionada. Nestas situações o objetivo é quase perspetico. Isto é, a utilização de sombras visa facilitar o entendimento da volumetria dos objetos representados num desenho e não simular uma condição específica da direção luminosa condicionada por uma dada localização.

Por exemplo, em arquitetura, é comum considerar uma direção luminosa a 45° com o plano da projeção. No caso de uma representação em planta (projeção horizontal) isto torna fácil inferir as alturas dos objetos, como vemos no exemplo da figura 1.118, em que se assumiu apenas um nível de implantação aproximadamente horizontal. De entre os edifícios assinalados com as letras A , B e C , consegue facilmente perceber-se que esta é a ordem crescente das suas alturas. Em relação ao volume assinalado com a letra D percebe-se que tem uma parte central mais elevada com cobertura inclinada e uma zona vazada no meio. Em relação ao aglomerado

assinalado com a letra **E**, percebe-se que se trata de um conjunto de edifícios mais baixos com cobertura inclinada. Note-se que a escolha do tom de cinzento nas manchas correspondentes às sombras não obedece a nenhuma regra específica. A título de exemplo assinalámos as alturas de alguns pontos dos volumes que se podem ler na sombra produzida no plano horizontal de referência. A direção luminosa é arbitrária mas poderia ter sido extraída de uma carta solar. Claro que nesse caso, a pendente seria diferente de **100%**. Aí, o objetivo seria simular com precisão o comportamento das sombras num determinado local atendendo às volumetrias presentes.

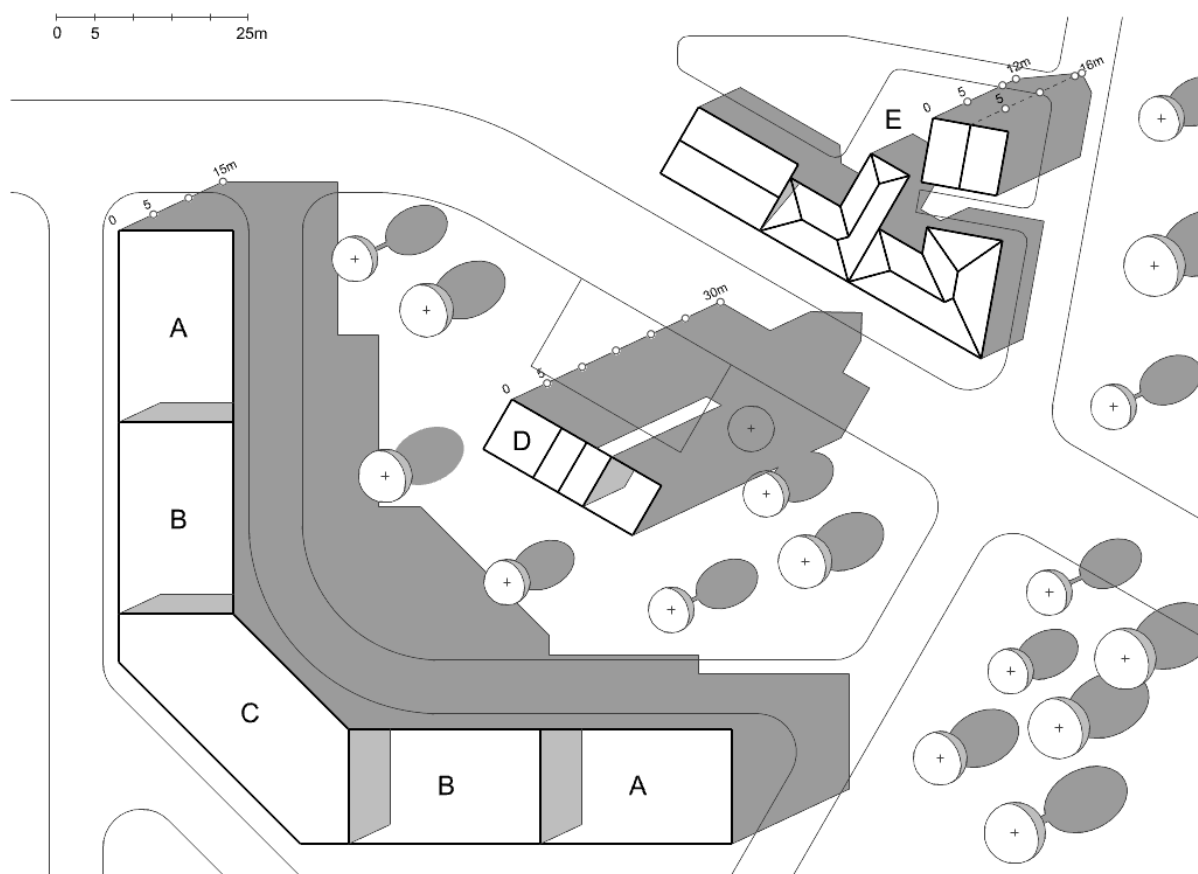


Fig. 1.118. Exemplo da representação de sombras numa planta atendendo a uma direção luminosa com pendente de **100%**.

No exemplo seguinte (figura 1.119) apresentamos o cálculo das sombras de um volume adossado a duas superfícies planas, uma frontal α , assumida como a superfície de menor afastamento, e outra horizontal β , assumida como a superfície de menor cota. O volume é delimitado, para além das superfícies planas α e β , por seis faces planas (quatro de perfil, uma frontal e uma horizontal), três superfícies cilíndricas (duas com eixo vertical e uma com eixo de topo), e um quarto de superfície esférica concordante com a superfície cilíndrica com eixo de topo.

Existe um troço de sombra própria e autoproduzida na zona da superfície cilíndrica com eixo de topo concordante com o quarto de superfície esférica. Existe um troço de sombra própria e autoproduzida na zona, à direita, das faces de perfil e superfície cilíndrica com eixo vertical. E existe ainda um troço de sombra produzida sobre as superfícies planas α e β .

Interessa-nos detalhar a forma como as sombras foram determinadas e salientar que as operações realizadas são, para todos os efeitos, aplicações das operações de interseção de

que falámos anteriormente. Uma vez que as explicações seguintes se referem a este exemplo específico, o que se espera do leitor é que consiga entender os princípios com o objetivo de conseguir aplicá-los mais tarde em contextos similares. Note que as projeções não estão distinguidas com os índices **1** e **2** como habitualmente, isto porque se entende que não há risco de confundir uma projeção com a outra.

Começando pelo ponto **B**, a sombra determina-se pela interseção da reta luminosa que o contém com a superfície cilíndrica de diretriz $[a]$. A projeção frontal deste ponto é de determinação direta e a projeção horizontal permite-nos constatar que a sombra do ponto **B** está, de facto no troço de superfície cilíndrica que delimita o volume dado. Já a sombra do ponto **D** não se encontra nesta superfície cilíndrica, mas sim na superfície esférica.

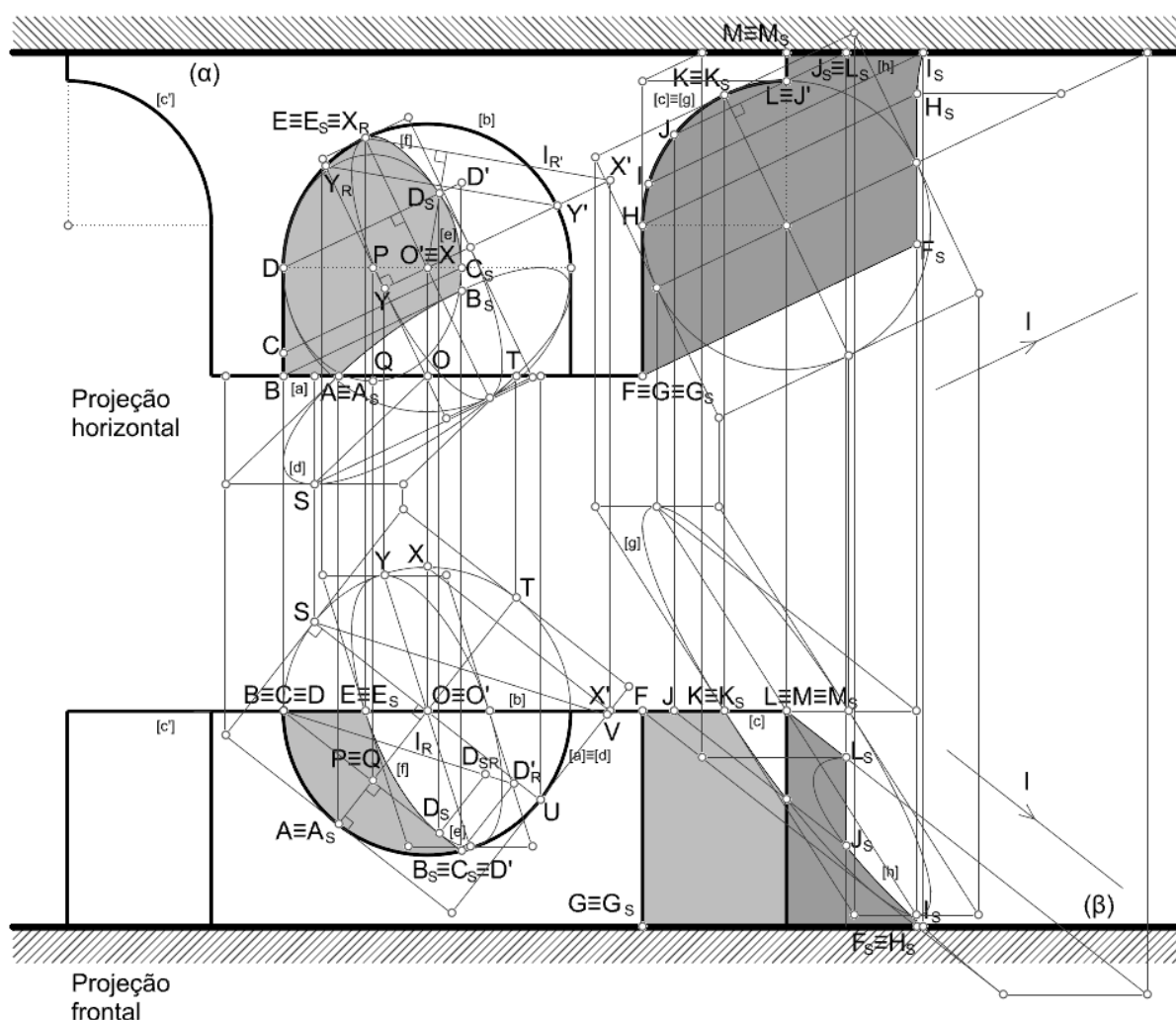


Fig. 1.119. Determinação das sombras de um volume adossado a duas superfícies planas $[\alpha]$ e $[\beta]$ dada uma direção luminosa I .

Se se encontrasse nesta superfície, seria dada pelo ponto **D'** que, está fora dos limites da superfície cilíndrica enquanto delimitadora do objeto dado. Assim, a sombra do ponto **D**, isto é, o ponto **D_s**, está contida no quarto de superfície esférica. Para determinar o ponto **D_s**, considerou-se o plano de topo, paralelo à direção luminosa, passante pela aresta $[BD]$. Este plano intersesta a superfície esférica segundo uma circunferência $[e]$ de centro no ponto **P**. A projeção frontal desta circunferência reduz-se a um segmento de reta (porquê?) e a projeção horizontal é uma elipse cujo semieixo maior é dado pela projeção horizontal do segmento $[PQ]$, cujo comprimento é igual ao da projeção frontal do segmento $[BQ]$. Desta elipse interessa-nos

o troço (o menor deles) compreendido entre C_S e D_S que é sombra da porção da aresta $[BD]$, entre os pontos C e D . A porção entre os pontos B e C tem sombra sobre a superfície cilíndrica, e como a sua direção é a mesma das geratrizes, o segmento $[B_S C_S]$ é paralelo ao segmento $[BC]$.

Relativamente a esta parte, prosseguimos para a determinação da sombra da porção (a menor delas) da circunferência horizontal $[b]$ de centro O' , entre os pontos D e E . O ponto E , coincidente com a sua sombra E_S , é determinado conduzindo um plano vertical paralelo à direção luminosa tangente à superfície esférica. A sombra do arco compreendido entre os pontos D e E corresponde à sua projeção sobre a superfície esférica. Note-se que esta projeção corresponde a um arco de uma circunferência máxima $[f]$ da superfície esférica, isto porque, sendo $[f]$ a projeção de $[b]$ (também uma circunferência máxima da superfície esférica) sobre a superfície esférica a partir da direção l , em termos práticos, as curvas $[f]$ e $[b]$ correspondem às direções cíclicas da superfície cilíndrica projetante de $[b]$ sobre a superfície esférica. O ponto D_S é um ponto de tangência entre as circunferências $[e]$ e $[f]$. Para determinar o ponto Y , ponto de maior cota da circunferência $[f]$, começou por determinar-se $l_{R'}$, na projeção horizontal (correspondente ao rebatimento do plano luminoso em torno da sua reta horizontal passante por O'), após o que se conduziu, pelo ponto Y' uma paralela a esta reta, resultando no ponto Y_R sobre a projeção horizontal de $[b]$. A distância $\overline{Y_R Y}$ corresponde à cota do ponto Y relativamente ao plano horizontal da circunferência $[b]$ (porquê?).

Finalmente, resta-nos a determinação da sombra da porção (a menor delas) da circunferência frontal $[a]$ compreendida entre os pontos A e B . O ponto A determina-se conduzindo um plano de topo, paralelo à direção luminosa, tangente à superfície cilíndrica com eixo de topo. A sombra do arco compreendido entre os pontos A e B está contido na projeção, segundo a direção luminosa, da circunferência $[a]$ sobre a superfície cilíndrica com eixo de topo. A projeção da circunferência $[a]$ corresponde a uma elipse $[d]$ (porquê?) de semidiâmetros conjugados $[OS]$ e $[OT]$. A distância do ponto S ao plano frontal do ponto A é dada pelo comprimento $\overline{UV}$ em que, na projeção frontal, SV é paralela a l_R (porquê?).

No que concerne à parte direita do sólido, a sombra do ponto F não é mais que o traço, no plano β , da reta luminosa que o contém. A sombra da aresta $[FG]$ está contida no traço horizontal do plano luminoso vertical que a contém. A sombra $[F_S H_S]$ é paralela à aresta $[FH]$ (porquê). O arco de circunferência da circunferência $[c]$ tem uma parte de sombra no plano β e outra parte no plano α . A parte do plano β é circunferencial (porquê?) e a parte do plano β é elíptica (porquê?). As restantes sombras determinam-se de forma idêntica ao que já foi descrito.

Atividade proposta:

Os exemplos apresentados não estão detalhados no que diz respeito às construções geométricas de suporte. Mas uma vez que o cálculo das sombras consiste na aplicação de operações já estudadas anteriormente, procure estudar as sombras de formas básicas como prismas, pirâmides, cones, cilindros e esferas, primeiro individualmente e depois em pares ou conjuntos maiores.

Procure responder aos “porquê” do texto.

Perspetiva

Neste texto designaremos por perspectiva toda aquela representação que de algum modo pode simular o modo como percebemos os objetos na nossa experiência do dia a dia, e que é própria do contexto da arquitetura, engenharia e design. Assim, incluímos nesta designação a axonometria, que designaremos por **perspetiva axonométrica**, e a projeção cônica, que designaremos por **perspetiva linear**. Trata-se apenas de uma convenção conveniente que, querendo, se pode substituir por outra sem qualquer espécie de problema.

Tratamos aqui a perspectiva axonométrica e a perspectiva linear de forma autónoma porque, em cada um destes sistemas é possível considerar procedimentos específicos que os tornam operativos independentemente do sistema da MPO, sem prejuízo de, como já vimos, haver transversalidades entre os vários sistemas de representação.

Perspetiva axonométrica

A perspectiva axonométrica, ou simplesmente axonometria, é um sistema de representação que resulta da associação das figuras a um referencial cartesiano tridimensional com eixos e planos coordenados que, depois, se projeta sobre um plano, o **plano axonométrico**, de modo a que a projeção de nenhum dos eixos se reduza a um ponto ou que as projeções de dois eixos coincidam (na verdade, dois eixos podem coincidir dando origem a sistemas axonométricos particulares). Embora o termo axonometria tenha aparecido em meados do século XIX, com a obra “Lehrbuch der axonometrischen Projektionslehre” de L. e H. Meyer, a representação que podemos reconhecer como axonométrica remonta à antiguidade clássica e foi acontecendo de formas e em contextos variados até à atualidade. O teorema de Pohlke-Schwarz, formulado em 1853, é de importância fundamental para a axonometria. Este declara que três segmentos $[OX]$, $[OY]$ e $[OZ]$ contidos num plano podem sempre tomar-se por projeção paralela de três segmentos $[O'X']$, $[O'Y']$ e $[O'Z']$ iguais entre si, com um ponto O comum, e dois a dois perpendiculares desde que os quatro pontos O, X, Y e Z não sejam todos colineares (figura 1.120).

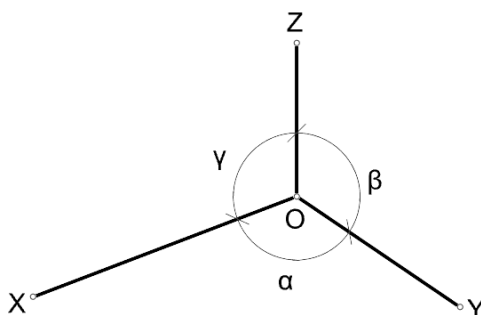


Fig. 1.120. Teorema de Pohlke-Schwarz.

As razões $\frac{\overline{OX}}{\overline{O'X'}} = c_x$, $\frac{\overline{OY}}{\overline{O'Y'}} = c_y$ e $\frac{\overline{OZ}}{\overline{O'Z'}} = c_z$ designam-se por **coeficientes axonométricos**. E os ângulos α , β e γ são os ângulos axonométricos. No fundo, a escolha dos três segmentos iniciais estabelece um sistema de coordenadas que, no âmbito deste texto se considera sempre de mão direita.

Se os coeficientes axonométricos, forem todos iguais entre si, a axonometria diz-se uma **isometria**, se forem dois iguais, diz-se uma **dimetria** e se forem os três diferentes diz-se uma **trimetria**.

Uma disposição de eixos feita nos termos do teorema de Pohlke-Schwarz corresponderá geralmente a uma de quatro projeções, oblíquas ao plano de projeção, possíveis (duas se considerarmos apenas referenciais de mão direita). Se, por acaso a direção for ortogonal ao plano axonométrico, então corresponde a uma de duas (uma se considerarmos apenas referenciais de mão direita). No primeiro caso temos o que se designa por **axonometria oblíqua** (ou **axonometria clinogonal**), e no segundo o que se designa por **axonometria ortogonal**.

Por terem algumas especificidades operativas distintas, tratamos estes dois tipos de axonometria de forma distinta.

Axonometria oblíqua ou clinogonal

A importância teorema de Pohlke-Schwarz reside no fato de legitimar a livre escolha da disposição dos **eixos axonométricos** no plano do desenho bem como a definição das escalas relativas a cada um deles. Dada uma destas configurações, há duas direções espaciais possíveis que resultam na figura dada em projeção, e para cada uma dessas direções há duas orientações espaciais possíveis para o referencial (uma de mão direita e uma de mão esquerda). Assim, no total há quatro orientações possíveis para os três segmentos $[O'X']$, $[O'Y']$ e $[O'Z']$ que, em todos os casos, têm sempre o mesmo comprimento (duas de mão direita e duas de mão esquerda).

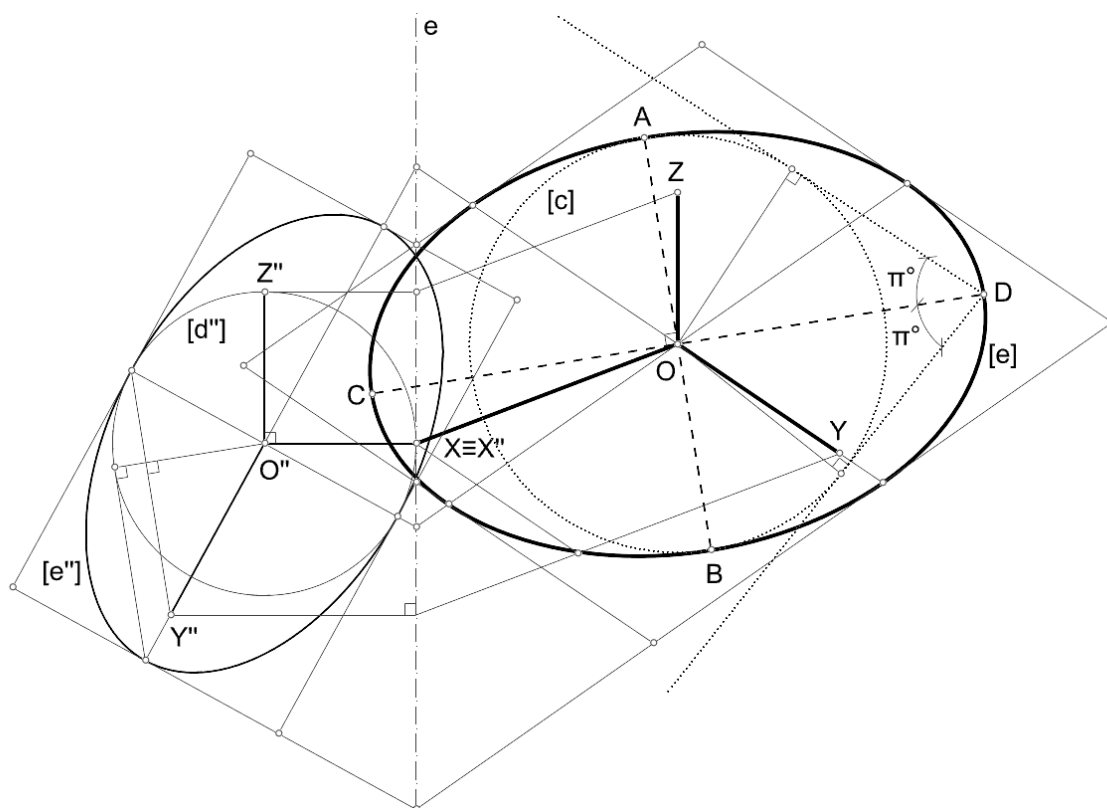


Fig. 1.121. Determinação das direções de projeção. Para o efeito considerou-se uma afinidade de eixo e .

A determinação das direções de projeção, pode ser feita através da determinação da elipse $[e]$ de centro O , simultaneamente tangente às três elipses que têm, cada uma delas, um par de segmentos como semidiâmetros conjugados (figura 1.121). O comprimento do eixo menor desta elipse, $\overline{AB}$, corresponde ao diâmetro da superfície esférica de centro O' passante pelos pontos X' , Y' e Z' . Se assumirmos que os pontos O e O' são coincidentes, a projeção ortogonal desta esfera, no plano da elipse $[e]$, é dada pelo círculo $[c]$. E a direção do eixo maior $[CD]$ corresponde à projeção ortogonal, da direção de projeção, sobre o plano da elipse. Em suma, determinada a elipse, a orientação do referencial passa por determinar uma superfície esférica de que aquela elipse admita ser projeção cilíndrica. As direções de projeção estão a π° com o plano da elipse $[e]$. Em termos práticos, a construção utilizou uma afinidade de eixo e que transforma a elipse $[d]$ (não representada no desenho), com semieixos conjugados $[OX]$ e $[OZ]$, na circunferência $[d'']$.

Embora esta construção seja relativamente simples, não é suficientemente expedita para poder ser usada na prática. O teorema legitima a escolha arbitrária de quaisquer três segmentos a serem tomados como definidores da projeção cilíndrica (axonométrica) de um referencial cartesiano. Assim, dados três segmentos nos termos do teorema, todos reportados a uma medida unitária, assume-se que ficam definidas três **escalas axonométricas**, e_x , e_y e e_z , isto é, fica estabelecida uma forma de relacionar as medidas com a sua representação. E toda a representação pode desenrolar-se, sem conhecer as direções de projeção, recorrendo à afinidade como procedimento base auxiliar. O efeito prático é que o desenho produzido nestes termos corresponderá, em geral, a uma combinação de uma projeção cilíndrica com um fator de ampliação ou redução. Isto é, as escalas axonométricas correspondem ao produto dos coeficientes axonométricos por um escalar. E uma representação obtida deste modo é globalmente uma ampliação ou redução daquela que se obteria considerando apenas a projeção. Mas isto não introduz nenhuma espécie de limitação porque as proporções globais da representação são mantidas. Veremos que em relação à axonometria ortogonal se podem fazer considerações semelhantes.

Assim sendo, por exemplo, todas representações da figura 1.122 podem todas ser consideradas como representações legítimas de cubos.

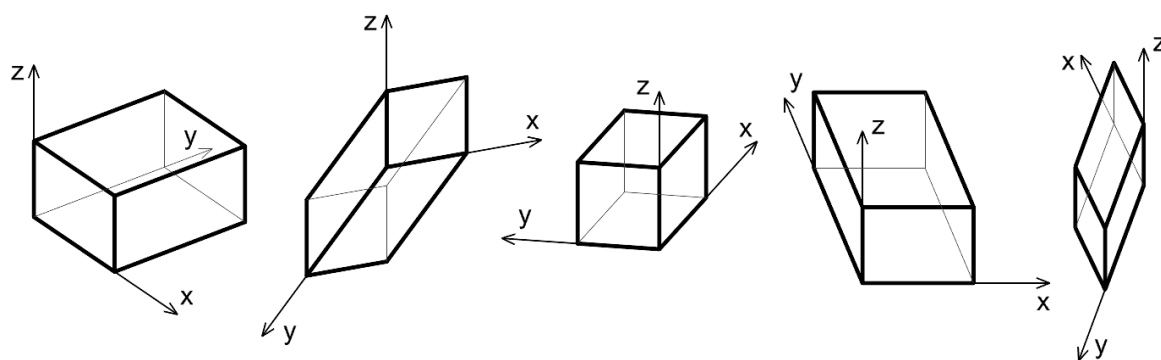


Fig. 1.122. Representações axonométricas de cubos.

No entanto, do ponto de vista percetivo teremos dificuldade em aceitar que algumas o sejam de facto. Como convencionámos designar a axonometria como um tipo de representação perspética, é importante que as proporções do desenho sejam tais que o possamos aceitar como tal. Essa deve ser uma preocupação fundamental ao produzir uma perspectiva

axonométrica. Com este sentido, apenas o desenho central é convincente como representação de um cubo.

Atividade proposta:

Em esboços à mão levantada represente vários cubos nos termos do teorema de Pohlke-Schwarz e verifique quais das representações são visualmente convincentes como representações de cubos.

Não existe um modo objetivo único de garantir essa “correção visual”. Isso vem com a prática e passa por escolher adequadamente as direções para as direções dos eixos axonométricos e a combinação de escalas. Para todos os efeitos, à parte de uma escala geral da representação (por exemplo $1/100$, ou $1/50$), as escalas axonométricas devem ser escolhidas, cada uma delas, de modo a serem iguais ou inferiores a 1.

Na prática, operar com coeficientes axonométricos ou com escalas axonométricas consiste em utilizá-los como fator de redução na representação de medidas. Por exemplo, num desenho à escala $1/100$, pretende-se representar uma medida de $8m$ alinhada com o eixo x cujo coeficiente é 0.7 . A medida a representar no desenho é igual $0.7(8m/100) = 0.056m = 5.6cm$. À parte de uma escala geral do desenho, recomenda-se que pelo menos uma das escalas seja igual a 1, porque isso facilita a representação.

Note-se que, quando se desenha uma axonometria à mão levantada, é assim que se procede, ainda que de modo informal, isto é, sem declarar explicitamente os valores numéricos dessas escalas.

Na figura 1.123 apresentamos três representações de cubos, considerando sempre os mesmos ângulos axonométricos. À esquerda temos uma **isometria oblíqua** (as três escalas axonométricas são iguais entre si), ao centro temos uma **dimetria oblíqua** (duas escalas axonométricas são iguais entre si) e à direita temos uma **trimetria oblíqua** (as três escalas axonométricas são diferentes entre si). Note-se que, independentemente dos ângulos axonométricos, temos toda a liberdade para escolher as escalas axonométricas. O cuidado a ter é o de procurar produzir representações perceptivamente convincentes, já que, geometricamente, quaisquer que sejam as escalas e ângulos axonométricos, a representação é sempre correta do ponto de vista da lógica projetiva.

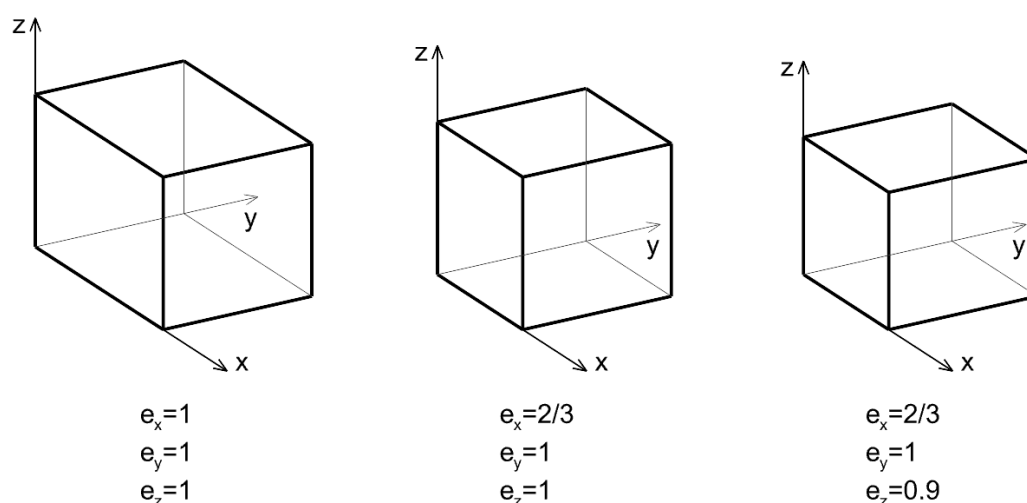


Fig. 1.123. Representação de cubos em axonometria oblíqua isométrica (esquerda), axonometria oblíqua dimétrica (centro) e axonometria oblíqua trimétrica (direita).

Uma forma prática de estabelecer uma axonometria oblíqua é definir o eixo axonométrico z e respetiva escala e_z correspondente a uma medida unitária U , e considerar uma elipse $[e]$, com focos F e F' , contida no plano axonométrico e centrada na projeção da origem (figura 1.124). Esta elipse pode ser considerada como a projeção de uma circunferência $[e']$ com centro na origem do sistema de referência, raio igual à medida unitária U , e contida no plano coordenado xy . Quaisquer dois semidiâmetros conjugados da elipse $[e]$ podem definir as escalas e_x e e_y . Para definir um par de diâmetros conjugados, marca-se um ponto X na elipse e define-se a tangente à elipse em X . O semidiâmetro conjugado de $[OY]$ tem a direção dessa tangente. Outro modo de proceder é através de uma afinidade. A vantagem da afinidade é permitir maior precisão gráfica se estivermos a utilizar meios analógicos de representação.

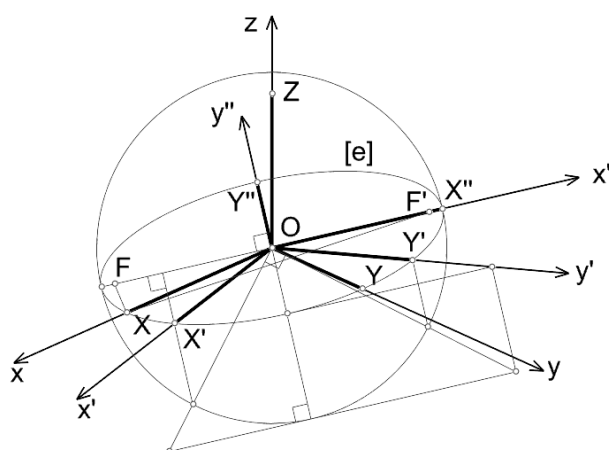


Fig. 1.124. Definição de um sistema axonométrico oblíquo a partir da definição de uma elipse $[e]$ cujos semieixos conjugados permitem definir as direções dos eixos coordenados x e y .

Este modo de proceder é particularmente adequado quando existe uma variedade de objetos referidos ao plano coordenado xy mas com pares de direções ortogonais entre si distintas. O inconveniente deste procedimento é não ser prática a definição de valores racionais para as duas escalas e_x e e_y . Com as devidas adaptações isto é válido para os planos coordenados yz e zx .

Repare-se que, para uma dada elipse $[e]$, define-se um eixo axonométrico z e uma infinidade de possibilidades para os pares de eixos axonométricos, x e y , x' e y' , x'' e y'' , etc. Verdadeiramente, é como se os eixos coordenados x e y rodassem em torno do eixo z . Assim se recupera o sentido original do termo axonometria que é composto pelos termos gregos $\alpha\chi\omega\nu$ (axôn), que significa eixo, e, $\tau\omicron\mu\epsilon\tau\rho\nu$ (metron), que significa medida. O primeiro sentido da palavra $\alpha\chi\omega\nu$ significa o eixo de uma roda, o eixo do freio de um cavalo, ou o eixo de um sólido de revolução (Aubert, 1996).

A vantagem da definição de um sistema axonométrico oblíquo deste modo é permitir representar de forma relativamente expedita dispoendo objetos com diferentes orientações associadas ao plano coordenado xy . Por exemplo, na figura 1.125 representam-se vários cubos, com diferentes orientações e todos eles com uma face contida no plano xy . Com efeito, ao representar vários pares possíveis para os eixos coordenados deste plano, é como se tivéssemos várias axonometrias embebidas no mesmo desenho.

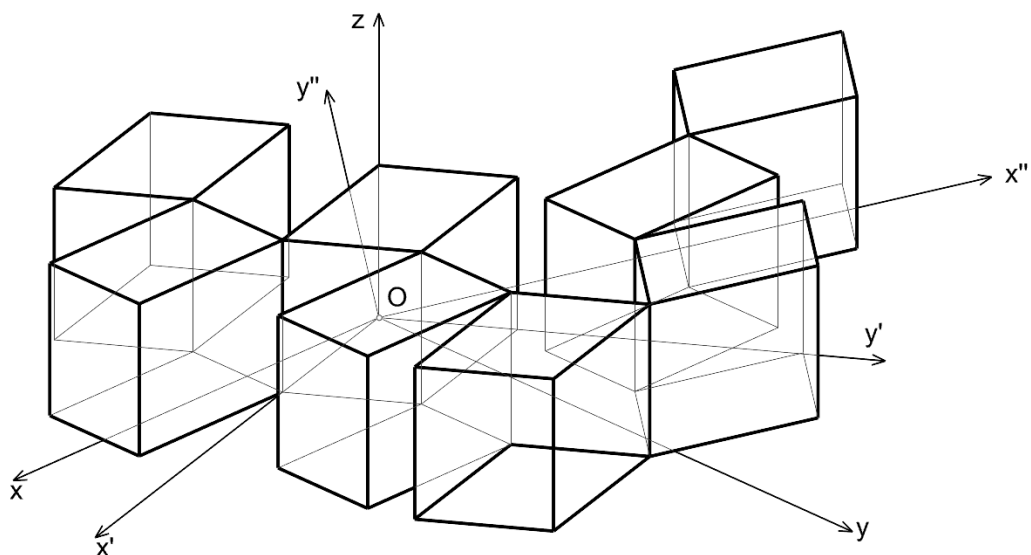


Fig. 1.125. Representação de vários cubos com distintas orientações, cada um deles com uma face no plano xy .

O que acabámos de descrever corresponde ao **caso geral da axonometria clinogonal**.

Atividade proposta:

Estabeleça subsistemas axonométricos oblíquos através da escolha livre de ângulos axonométricos e escalas axonométricas e, nestes, represente prismas, pirâmides, e os poliedros regulares. Note que pode ser necessário articular a representação axonométrica com a representação em MPO. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada.

Mas há alguns subsistemas que, pela sua simplicidade, importa destacar. Trata-se dos casos em que um dos planos coordenados é paralelo ao plano axonométrico (o que significa que um dos eixos coordenados é perpendicular ao plano axonométrico). Neste caso, as projeções das figuras contidas em planos paralelos a esse plano coordenado apresentam-se em verdadeira grandeza (à parte de uma escala global da representação). São casos particulares da axonometria clinogonal.

Se for o eixo coordenado z perpendicular ao plano axonométrico, o subsistema designa-se por **axonometria planométrica** ou **axonometria militar**. No caso de ser um dos outros eixos, o subsistema designa-se por **axonometria cavaleira**. Em termos práticos opera-se com ambos os subsistemas do mesmo modo.

Os coeficientes relativos aos eixos paralelos ao plano de projeção são sempre iguais a **1**. O coeficiente relativo ao eixo perpendicular ao plano projeção depende da inclinação das retas projetantes relativamente ao plano axonométrico. Para evitar distorções exageradas, considera-se sempre que esta inclinação é maior ou igual a **45°** e menor que **90°**. De forma correspondente, o coeficiente correspondente a esse eixo é menor ou igual a **1** e sempre maior que **0**. No caso da cavaleira e da planométrica, o coeficiente corresponde à cotangente da inclinação das retas projetantes.

Na figura 1.126 representam-se vários cubos em axonometria cavaleira (fiada superior) e axonometria militar (fiada inferior) com diferentes coeficientes axonométricos (apenas está indicado o coeficiente correspondente ao eixo perpendicular ao plano de projeção uma vez que os outros dois coeficientes são iguais a **1**) e diferentes ângulos axonométricos.

Nesta figura, repare-se que na axonometria cavaleira tanto pode ser o eixo coordenado x , como o eixo coordenado y , a estar na perpendicular ao plano axonométrico. E na axonometria planométrica é sempre o eixo z que é perpendicular ao plano axonométrico.

A primeira representação da primeira fiada é uma **cavaleira isométrica**, e cada uma das restantes é uma **cavaleira dimétrica**. A primeira representação da segunda fiada é uma **planométrica isométrica**, e cada uma das restantes é uma **planométrica dimétrica**. Evidentemente não é possível haver uma cavaleira trimétrica ou uma planométrica trimétrica uma vez que dois coeficientes são sempre iguais **1** obrigatoriamente.

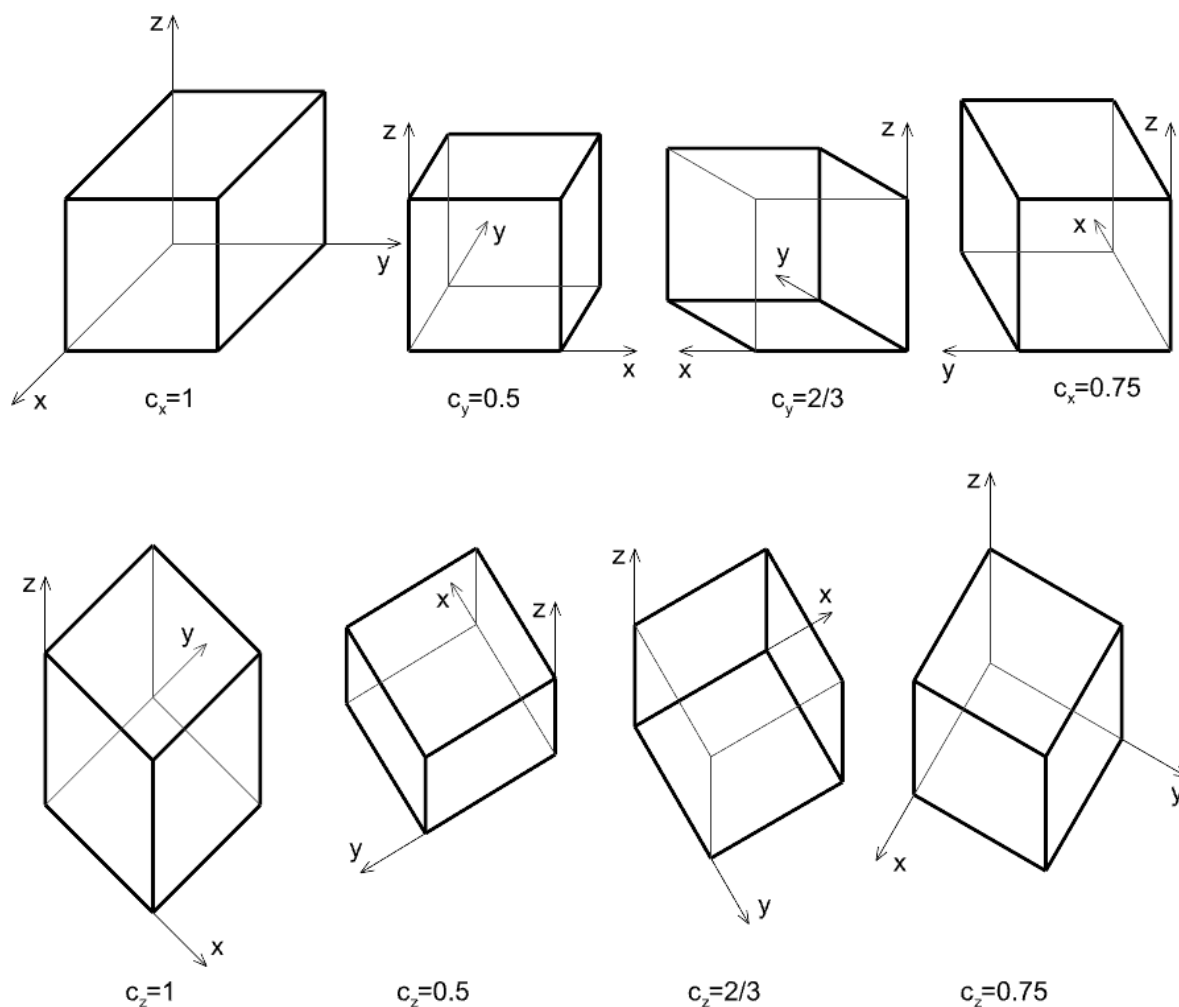


Fig. 1.126. Representações de cubos em axonometria cavaleira (fiada superior) e em axonometria militar (fiada inferior).

Mais uma vez, sublinha-se que, nas axonometrias cavaleira e planométrica, o que condiciona o coeficiente axonométrico, correspondente ao eixo perpendicular ao plano de projeção, é a inclinação das projetantes relativamente ao plano axonométrico e não os ângulos axonométricos que a sua projeção forma com os outros dois eixos axonométricos.

Atividade proposta:

Represente, em axonometria cavaleira e planométrica, prismas, pirâmides, e os poliedros regulares. Note que pode ser necessário articular a representação axonométrica com a representação em MPO. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada.

Axonometria ortogonal

Na axonometria ortogonal as retas projetantes são perpendiculares ao plano de projeção. Por essa razão, considera-se quase sempre que os eixos coordenados são oblíquos ao plano de projeção, situação que motiva a que os três coeficientes sejam menores que **1**. A exceção refere-se a um tipo de axonometria designada por **axonometria de Hejduk**, assim designada em homenagem ao arquiteto americano John Hejduk (1929-2000), que a popularizou nos seus desenhos de arquitetura. Trata-se de uma axonometria ortogonal em que um dos eixos coordenados é considerado paralelo ao plano axonométrico (a que corresponde um coeficiente igual a **1**), o que leva a que os outros dois definam um plano coordenado perpendicular ao plano axonométrico.

Na axonometria clinogonal os coeficientes, e as escalas, são independentes dos ângulos axonométricos. Na axonometria ortogonal essa independência já não se verifica. Isto quer dizer que, se forem dados os eixos axonométricos, não se pode impor os coeficientes, e vice-versa.

Na figura 1.127, é dada uma disposição de retas de suporte dos eixos axonométricos. Para todos os efeitos trata-se da projeção das arestas de um triedro trirretângulo.

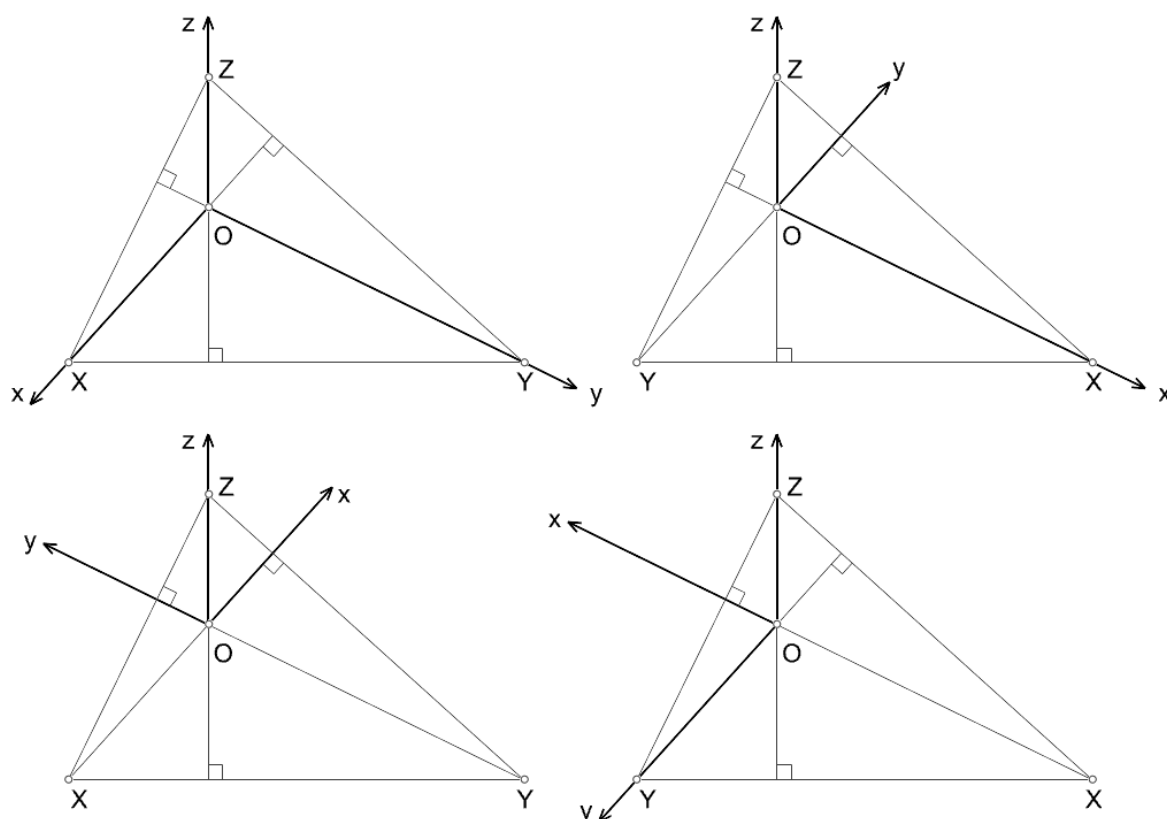


Fig. 1.127. Axonometria ortogonal e triângulo fundamental.

Por essa razão, as direções dos traços dos planos coordenados no plano axonométrico são também conhecidas, uma vez que cada plano coordenado é perpendicular a um eixo coordenado. E sabe-se que a projeção da origem do referencial é o ortocentro do triângulo formado pelos traços, **X**, **Y** e **Z**, dos eixos coordenados, **x**, **y**, e **z**, no plano axonométrico, respetivamente. Assim, arbitrando o traço de um dos eixos coordenados, por exemplo o ponto **X**, torna-se possível determinar os outros dois traços, os pontos **Y**, e **Z**. O triângulo **[ABC]**, sempre acutângulo, é o que se designa por **triângulo fundamental da axonometria**. Note-se

que, fixado o eixo z , a mesma configuração de triângulo fundamental admite quatro orientações distintas do plano coordenado xy , correspondentes a rotações de múltiplos de 90° em torno de z .

A forma de relacionar a verdadeira grandeza das medidas alinhadas com os eixos coordenados com as suas projeções, e com isso a determinação dos coeficientes, pode ser feita através do rebatimento dos planos projetantes dos eixos ou através do rebatimento dos planos coordenados, conforme se ilustra na figura 1.128.

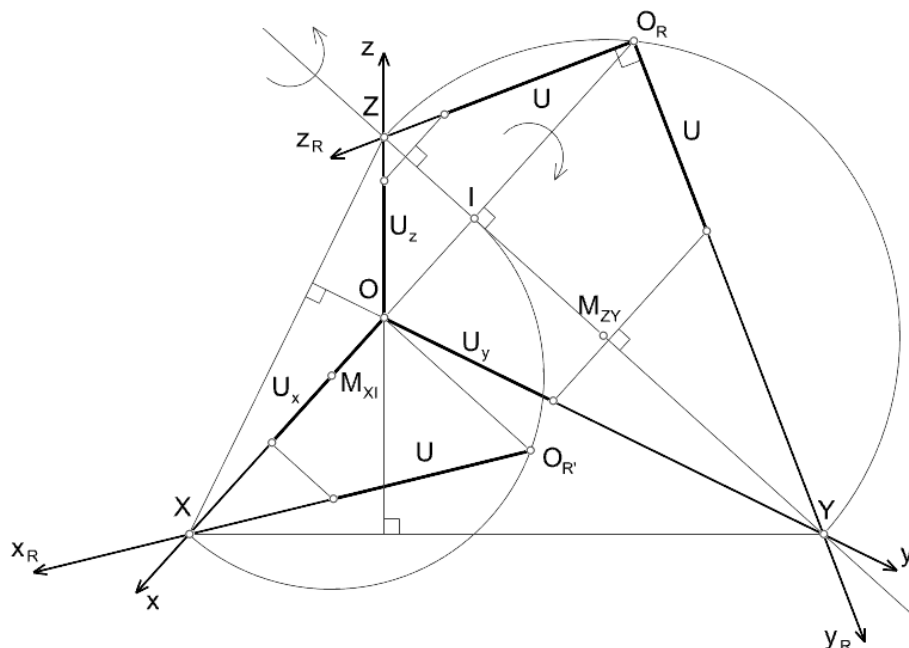


Fig. 1.128. Axonometria ortogonal determinação da verdadeira grandeza dos eixos coordenados.

Na figura está rebatido o plano coordenado yz em torno da reta YZ e o plano projetante do eixo x em torno da reta IX . Note-se que em cada um dos rebatimentos pode optar-se por um de dois sentidos possíveis para a rotação. Dada uma medida U , ficam determinados os coeficientes $c_x = \frac{U_x}{U}$, $c_y = \frac{U_y}{U}$ e $c_z = \frac{U_z}{U}$. O procedimento indicado dá também o modo para proceder graficamente à produção da axonometria. Na verdade, estabelecido um subsistema axonométrico ortogonal arbitrando os eixos axonométricos ou o triângulo fundamental, a forma gráfica de proceder é a mais conveniente porque os coeficientes serão, em princípio, valores de manuseamento trabalhoso. A exceção é o caso da **isometria ortogonal** em que, sendo os coeficientes iguais entre si, se torna possível estabelecer as três escalas iguais a **1**. Ao proceder deste modo, na prática, a representação é ampliada por um fator igual ao inverso dos coeficientes.

Há uma relação entre o triângulo fundamental e os subsistemas axonométricos ortogonais. A um triângulo equilátero corresponde uma isometria ortogonal (os três coeficientes axonométricos são iguais entre si), a um triângulo isósceles corresponde uma **dimetria ortogonal** (dois coeficientes axonométricos são iguais entre si), e a um triângulo escaleno corresponde uma **trimetria ortogonal** (os três coeficientes axonométricos são diferentes entre si).

No exemplo da figura 1.129 vamos representar um conjunto de cubos, com **2cm** de aresta, num subsistema axonométrico dimétrico, com as arestas alinhadas com os eixos

coordenados. Para o efeito começamos por definir um triângulo fundamental isósceles $[XYZ]$ em que $\overline{XY} = \overline{YZ}$. Isto significa que serão iguais os coeficientes c_x e c_z . Por essa razão, o controlo das medidas pode ser feito recorrendo apenas ao rebatimento do plano coordenado xy .

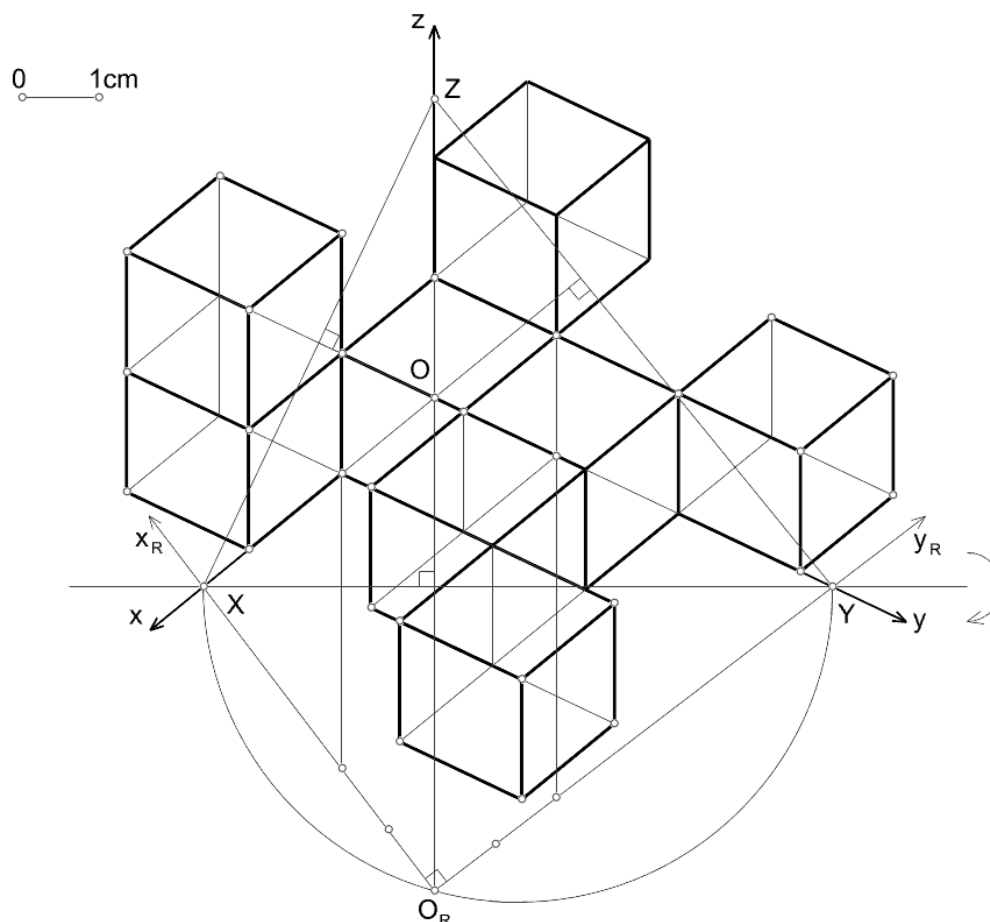


Fig. 1.129. Representação de um conjunto de cubos num subsistema ortogonal dimétrico.

Repare-se que, pelo facto de estarmos a representar cubos alinhados com os planos coordenados, e pelo facto de serem iguais dois coeficientes, é projetante, para cada cubo, um dos planos que passa por duas arestas opostas (paralelas ao eixo y). Isto gera algumas sobreposições de linhas que, em algumas circunstâncias, pode ser inconveniente. Se fosse uma isometria, todos os planos passantes por pares de arestas opostas seriam projetantes.

Atividade proposta:

Utilizando diversos subsistemas axonométricos ortogonais, represente primas, pirâmides, poliedros regulares, cones, cilindros e esferas, utilizando para o efeito, e quando necessário, o rebatimento de planos coordenados ou de planos projetantes dos eixos. Pode ser necessário articular a representação com a MPO.

O controlo da axonometria através de escalas também é possível mas não é um processo tão direto como no caso da axonometria oblíqua, com a exceção da isometria, como já referimos.

Na axonometria ortogonal, a soma dos quadrados dos coeficientes é sempre igual a **2**, o que significa que dados dois coeficientes, o terceiro fica determinado. Como cada coeficiente é inferior a **1**, a soma dos quadrados de dois coeficientes quaisquer deve ser superior a **1**. As

razões entre as escalas são as mesmas que se podem estabelecer entre os coeficientes. Por isso, definidas três escalas, é possível obter os coeficientes que lhes correspondem. E conhecendo os coeficientes é possível estabelecer a relação entre estes e os ângulos axonométricos ou entre estes e a relação entre os lados do triângulo fundamental (Mateus, 2004). A relação entre os coeficientes pode ser exemplificada graficamente através da figura seguinte, adaptada de Asensi (2000). É possível começar a construção a partir de qualquer um dos coeficientes. Neste caso começou-se por c_z .

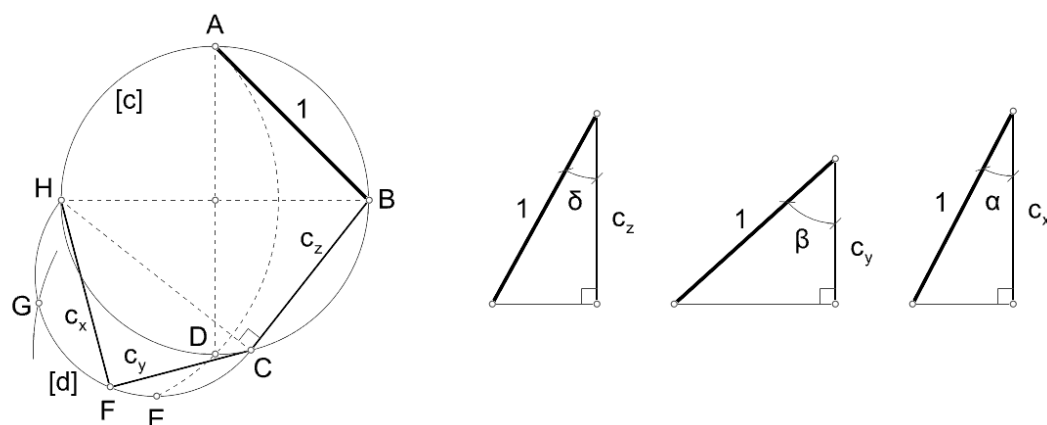


Fig. 1.130. Relação entre os coeficientes na axonometria ortogonal.

Considerando a medida unitária, 1 , o segmento $[BC]$ correspondente a c_z deve ser marcado na circunferência $[c]$ de modo a que o ponto C pertença ao menor dos arcos delimitados pelos pontos B e D , garantindo que $c_z < 1$. De seguida define-se a semicircunferência $[d]$ de diâmetro $[CH]$. O segmento $[CF]$ correspondente a c_y deve ser marcado sobre a semicircunferência $[d]$ de modo a que o ponto F esteja compreendido entre os pontos E e G , garantindo que $c_y < 1$ e $c_x < 1$. Note-se que $\overline{CG} = \overline{HE} = 1$. Definidos os coeficientes c_z e c_y , o coeficiente c_x resulta automaticamente. Os ângulos α , β e δ correspondem às inclinações dos eixos coordenados x , y e z relativamente ao plano axonométrico, respetivamente.

Estabelecidas estas relações, é possível construir os eixos coordenados e, consequentemente, os ângulos axonométricos. Como as relações entre os coeficientes são as mesmas que se podem estabelecer entre as escalas, se forem dadas as escalas, a construção é efetuada pela ordem inversa, isto é, começa-se por um par de escalas, por exemplo e_x e e_y , para definir o diâmetro $[HC]$. Acrescenta-se a escala e_z de modo a definir o diâmetro $[HC]$ da circunferência $[c]$. De seguida determina-se o valor unitário U , que não será igual a 1 . Por fim, deve verificar-se se as escalas são compatíveis entre si, o que se valida nos termos das restrições impostas à figura para garantir a validade da relação entre os coeficientes. Também se podem validar previamente os valores das escalas se o quadrado de cada uma delas for menor que metade da soma dos quadrados de todas e se a soma dos quadrados de quaisquer duas for superior àquela metade.

Atividade proposta:

Procure deduzir uma construção gráfica que permita, a partir que está dado na figura 1.130, obter os eixos axonométricos. Utilize os valores dados a seguir para validar a sua construção gráfica.

Nos casos dados na figura seguinte foram calculados os ângulos axonométricos considerando as seguintes combinações de escalas ($e_x = 1, e_y = 0.5, e_z = 1$; $e_x = 0.9, e_y = 0.6, e_z = 1$; $e_x = 0.8, e_y = 0.9, e_z = 1$)

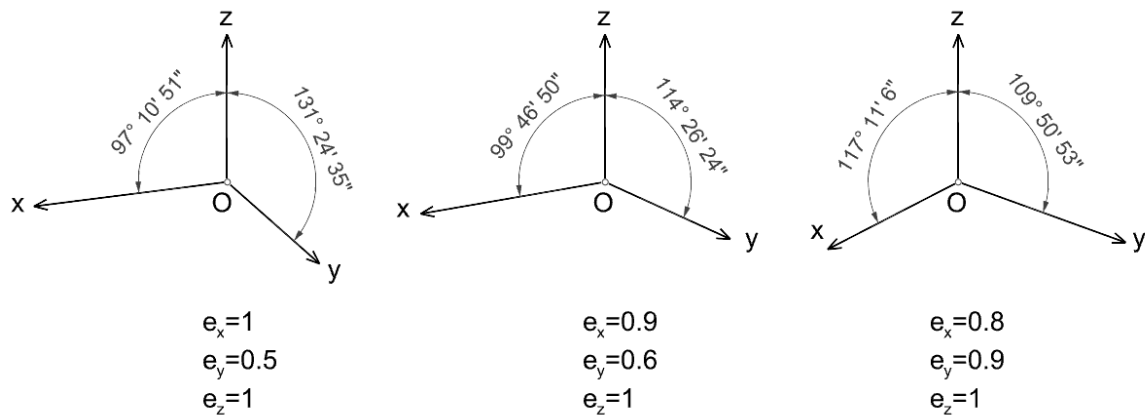


Fig. 1.131. Determinação dos eixos e ângulos axonométricos dadas as escalas axonométricas.

Estabelecido um subsistema axonométrico nestes termos, operar com as escalas é em tudo igual ao que já expusemos no caso das axonometrias clinogonais.

À semelhança do que fizemos para a axonometria oblíqua, outra forma de estabelecer uma axonometria ortogonal passa por começar por considerar uma elipse $[e]$, com focos F e F' , como projeção ortogonal de uma circunferência $[e']$ (figura 1.132).

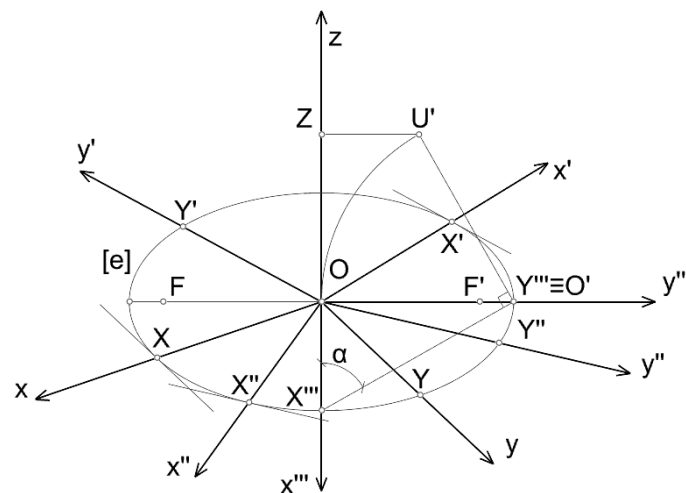


Fig. 1.132. Definição de um sistema axonométrico ortogonal a partir da inclinação α de um plano coordenado relativamente ao plano axonométrico.

Dois dos eixos axonométricos, por exemplo x e y , ficam definidos a partir de dois semidiâmetros conjugados da elipse e o terceiro, o eixo z , passa pelo centro da elipse com a direção do seu eixo menor.

A determinação dos semieixos conjugados pode ser feita de vários modos. Por exemplo, dado o ponto X , pode definir-se a tangente à elipse $[e]$ através de uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas FX e $F'X$; a direção do eixo axonométrico y é a mesma desta tangente. Outra possibilidade (não representada no desenho) é utilizar, por exemplo, uma afinidade, de eixo OO' , entre a elipse $[e]$ e uma circunferência de centro O e raio igual a OO' .

O semieixo maior, $[OO']$, da elipse corresponde à verdadeira grandeza do segmento unitário de referência. A relação entre o eixo menor e o eixo maior da elipse permite definir a inclinação α do plano coordenado xy relativamente ao plano axonométrico. A inclinação do eixo coordenado z , que lhe é perpendicular, é complementar desta.

O caso em que x''' está no alinhamento de z , e y''' está perpendicularmente àqueles dois, corresponde a uma axonometria de Hejduk.

Os segmentos $[OX]$, $[OX']$, ..., $[OY]$, $[OY']$, ..., $[OZ]$, todos representam projeções de segmentos com comprimento unitário $\overline{OU'}$.

Da figura percebe-se bem que, dada uma elipse $[e]$ qualquer, pode ser definida uma infinidade de trimetrias, apenas algumas dimetrias (há apenas uma disposição possível para localizar um par de retas passantes pelo ponto O de modo a que $\overline{OX} = \overline{OZ}$, e o mesmo acontece de modo a que $\overline{OX} = \overline{OY}$), e nenhuma isometria (porquê?). Note-se que uma trimetria corresponde a uma situação em que os três eixos coordenados têm inclinações distintas relativamente ao plano axonométrico, e uma dimetria corresponde a uma situação em que dois eixos coordenados têm a mesma inclinação relativamente ao plano axonométrico. Obviamente, no primeiro caso todos os coeficientes são diferentes e no segundo caso dois deles são iguais.

A vantagem da definição de um sistema axonométrico ortogonal deste modo é permitir representar objetos de forma relativamente expedita com diferentes orientações associadas ao plano coordenado xy . Por exemplo, na figura seguinte representam-se vários cubos, com diferentes orientações e todos eles com uma face contida no plano xy .

Embora se tenham elegido os eixos x' e y' para definir a orientação do plano coordenado, na verdade, podia ter-se escolhido qualquer outro par. Por isso, em termos práticos, e quando se representam objetos com várias orientações, as designações rígidas dos subsistemas axonométricos deixam de fazer sentido.

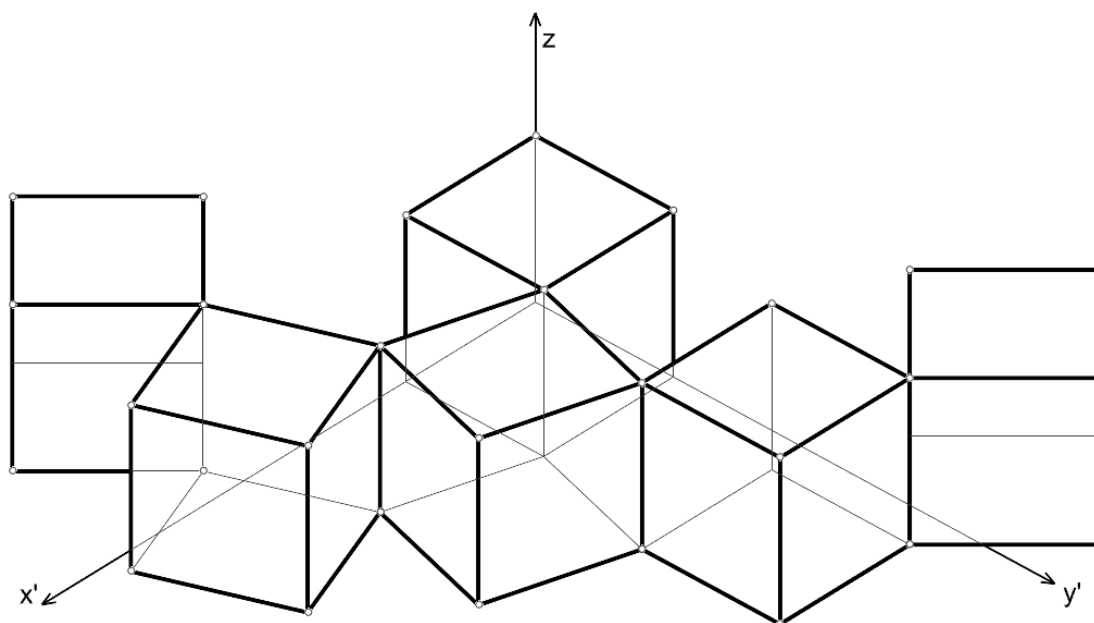


Fig. 1.133. Representação de vários cubos com distintas orientações, cada um deles com uma face no plano xy .

Elas fazem mais sentido quando um objeto a representar, ou conjunto de objetos, tem uma orientação dominante, como é o caso da figura seguinte.

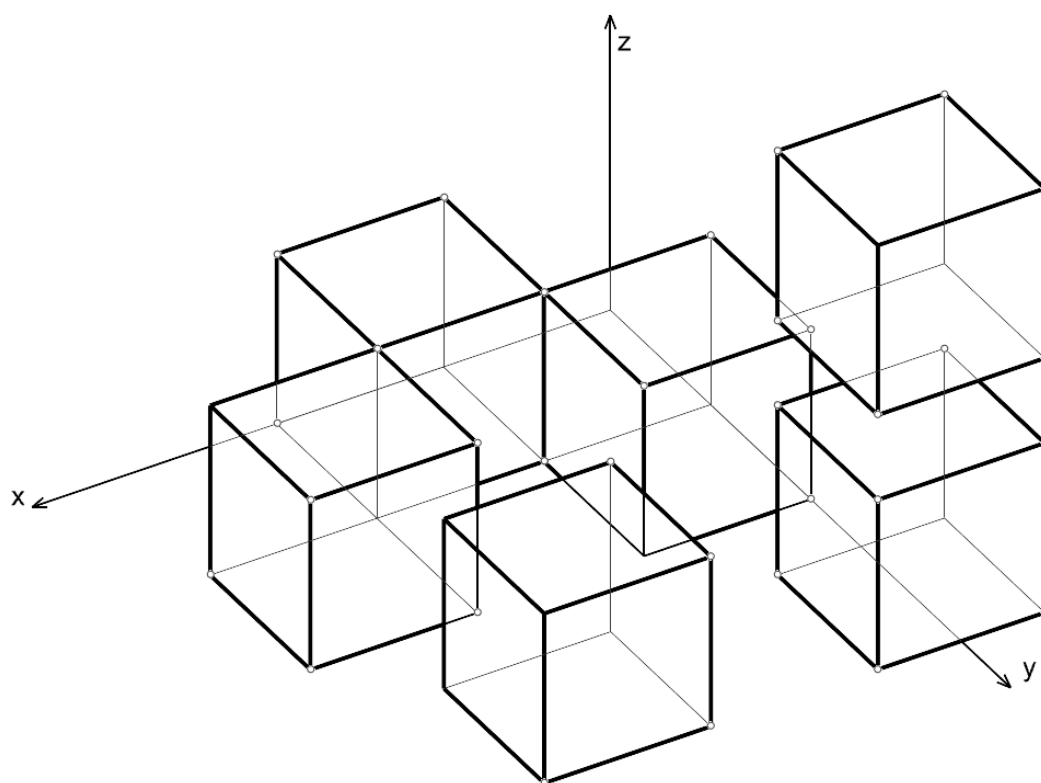


Fig. 1.134. Representação de vários cubos com a mesma orientação.

Nesta figura, assume-se que a maioria dos cubos tem uma face, a inferior, no plano xy . Mas há um cubo que está, forçosamente, com a face inferior acima do plano xy (qual e porquê?).

Atividade proposta:

Procure responder aos “porquê?” do texto.

Continue a prática sugerida na atividade anterior.

Representação do ponto, reta e plano

A representação de objetos cúbicos feita nos exemplos precedentes é um pretexto para explorar um espaço de coordenadas. Ao representar um cubo no primeiro octante com as faces contidas nos planos coordenados, e cujas arestas expressam uma medida unitária $\mathbf{1}$, na prática está a representar-se um ponto de coordenadas $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$, oposto ao vértice que coincide com a origem do referencial. Generalizando, a representação de qualquer ponto $\mathbf{P}$ de que se conheçam as coordenadas é equivalente a representar um paralelepípedo com faces contidas nos planos coordenados e cujo vértice oposto a $\mathbf{P}$ é a origem $\mathbf{O}$ do referencial.

Embora seja possível proceder ao estudo sistemático da representação do ponto, reta, plano bem como resolver todo o tipo de operações relacionadas com estes elementos, tal como fizemos para a MPO, entendemos que esta não é a principal vocação da representação axonométrica. Por isso, apenas daremos um exemplo demonstrativo, resolvido numa axonometria ortogonal trimétrica, para depois passarmos à representação perspetiva axonométrica de formas tridimensionais, o que é a principal vocação do sistema. Também o

fazemos por entendermos que não é necessário refazer tudo sempre que se muda de sistema de representação. Como os princípios são os mesmos, o que se aprendeu com a MPO pode ser vertido na axonometria.

No exemplo da figura seguinte, um plano α é definido pelos pontos A , B e C , com as coordenadas $(1, 5, 3)$, $(2, 3, 2)$ e $(0, 0, 2)$, respetivamente. Pretende conduzir-se pelo ponto P , de coordenadas $(4, 5, 0)$, uma reta p perpendicular ao plano α e determinar a sua interseção I com esse plano (figura 1.135).

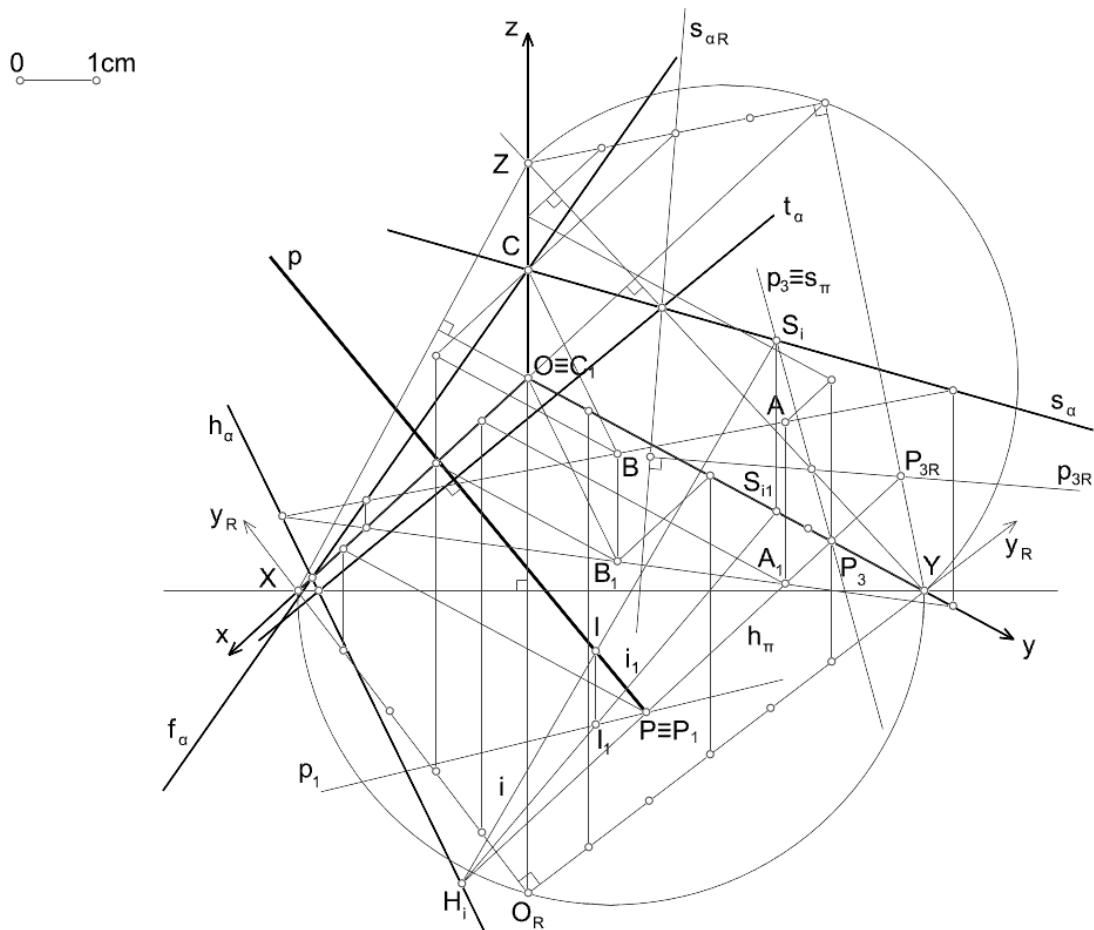


Fig. 1.135. Condução de uma reta p , passante por um ponto P , perpendicular a um plano α definido pelos pontos A , B e C , e determinação do ponto I de interseção da reta p com o plano α .

A complexidade do desenho é quase auto justificativa do facto de não ser costume utilizar a axonometria como sistema de representação para o estudo das relações métricas e direcionais e das operações de interseção. Porém, as construções são muito simples de entender. Determinou-se o traço horizontal da reta AB e por esse ponto conduziu-se o traço horizontal h_α paralelo à reta BC (porque a reta BC é horizontal). Pelo traço da reta AB no plano yz conduziu-se a reta s_α de interseção do plano α com o plano yz . Esta reta passa pelo ponto C (porque o ponto C pertence ao eixo z). O traço frontal f_α conduziu-se pelo ponto C e pelo ponto de interseção do eixo x com h_α . A reta t_α , de interseção do plano α com o plano axonométrico (plano do triângulo fundamental $[XYZ]$), contém os pontos de interseção da reta s_α com a reta YZ , de interseção da reta h_α com a reta XY , e de interseção da reta f_α com a reta ZX . A projeção da reta p no plano axonométrico é perpendicular à reta t_α (porquê?). A projeção da reta p sobre cada um dos planos coordenados é perpendicular, respetivamente, a cada um dos traços do plano α em cada um dos planos coordenados. No exemplo, foi conduzida a projeção

p_3 , no plano yz , perpendicular ao traço s_α . Para o efeito, considerou-se o rebatimento do plano coordenado yz para o plano axonométrico, em torno da reta YZ . De seguida, conduziu-se o plano π pela reta p e pela reta p_3 , e determinou-se a sua interseção i com o plano α . O ponto I pretendido é a interseção entre a reta i e a reta p .

Representação de formas geométricas simples

Formas geométricas como prismas e pirâmides são de fácil representação. Com efeito, numa série de exemplos anteriores representámos vários cubos. Se pretendermos representar uma forma cujas arestas não são todas paralelas aos eixos coordenados, o modo de proceder passa por decompor a forma de modo a ser possível representá-la por meio de medidas alinhadas com os eixos.

No exemplo da figura seguinte pretende-se a representação de um prisma pentagonal oblíquo, com as bases pentagonais regulares horizontais. O lado do pentágono mede $2m$. É conhecida a altura do prisma, $5m$, sabe-se uma face lateral é vertical, e sabe-se que a inclinação das arestas laterais relativamente ao plano xy é 60° . Foi considerado um subsistema clinogonal dimétrico.

A representação do pentágono da base inferior pode ser controlada através de uma afinidade, por exemplo de eixo y . Também a inclinação das arestas pode ser controlada através de uma afinidade, neste caso de eixo e . Note-se que, sendo omissa a informação sobre qual a face lateral vertical, temos liberdade para escolher uma qualquer.

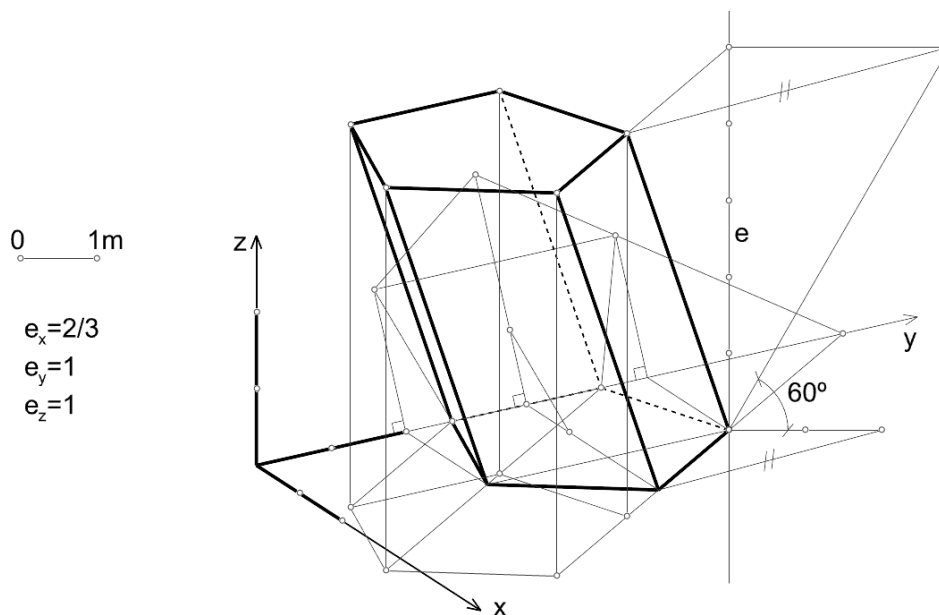


Fig. 1.136. Axonometria clinogonal isométrica de um tronco de cone oblíquo com uma base sobre a face superior de um prisma quadrangular.

A representação de formas curvas pode ser sempre feita com recurso à afinidade ou a rebatimentos, como se ilustra no exemplo da figura 1.137 em que se considerou a representação de um prisma e de um tronco de cone numa axonometria clinogonal isométrica.

Note-se que o rebatimento pode ser sempre interpretado como uma afinidade mas a afinidade nem sempre corresponde a rebatimento. No caso da figura, é apenas uma transformação bidimensional no plano do desenho que permite representar as tangentes externas comuns às

duas elipses que representam as bases do tronco de cone. Essas retas tangentes correspondam às geratrizes de contorno aparente da superfície do tronco de cone, isto é, correspondem aos dois planos projetantes tangentes à superfície do tronco de cone.

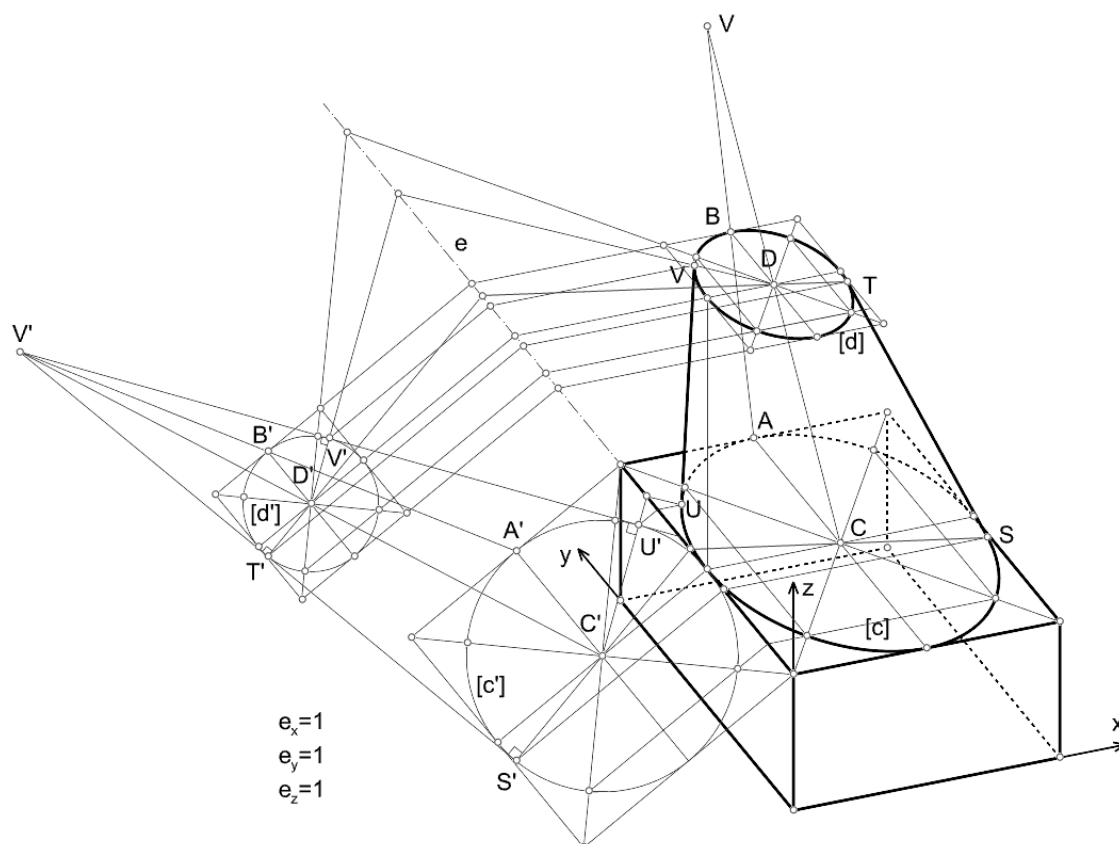


Fig. 1.137. Axonometria clinogonal isométrica de um tronco de cone oblíquo com uma base sobre a face superior de um prisma quadrangular.

Considerou-se uma afinidade de eixo e . Esta afinidade relaciona a elipse $[c]$ de centro C com a circunferência $[c']$ de centro C' , e a elipse $[d]$ de centro D com a circunferência $[d']$ de centro D' . As duas elipses $[c]$ e $[d]$ são homotéticas com centro em V . E as duas circunferências $[c']$ e $[d']$ são homotéticas com centro em V' . Pelo ponto V' conduzem-se as tangentes externas comuns às duas circunferências. Uma das tangentes passa pelos pontos T' e S' e a outra passa pelos pontos V' e U' . Estas duas retas são afins das projeções das retas ST e UV , que contêm as geratrizes de contorno da superfície do tronco de cone.

Consideremos agora o caso da circunferência na axonometria ortogonal. Por se tratar de uma projeção ortogonal, a representação de uma circunferência contida num plano coordenado reduz-se a uma elipse cujo eixo maior tem a direção ortogonal ao eixo axonométrico oposto. O eixo maior da elipse corresponde à verdadeira grandeza do diâmetro da circunferência, se estivermos a operar com coeficientes. Caso estejamos a operar com escalas, o eixo maior da elipse, embora corresponda ao diâmetro da circunferência paralelo ao plano axonométrico, está representado ampliado (porquê?). A representação axonométrica ortogonal de uma esfera é um círculo. Por um raciocínio análogo, se estivermos a operar com coeficientes, o diâmetro desse círculo corresponde à verdadeira grandeza do diâmetro da esfera.

Atividade proposta:

Utilizando subsistemas axonométricos clinogonais e ortogonais, represente cones, cilindros e esferas. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada.

Para representar formas mais complexas é comum decompor-se a posição dos vértices através das suas coordenadas. Isto pode ser feito ponto a ponto ou de uma forma mais estruturada através de formas envolventes, por exemplo paralelepípedicas.

Operações geométricas

Mais uma vez, todas as operações geométricas referidas a propósito da MPO podem, em princípio, ser executadas na axonometria. Os próximos dois casos servem como exemplos.

A título de exemplo veremos o caso de uma truncagem de um cilindro de revolução e uma operação booleana entre dois prismas retos.

No primeiro, numa axonometria cavaleira, consideramos truncagem de um cilindro de revolução de eixo vertical inscrito num cubo com **4m** de aresta. O eixo axonométrico **x** está horizontal no desenho e o sentido positivo é da esquerda para a direita. O eixo axonométrico **z** está vertical no desenho e o sentido positivo é de baixo para cima. O semieixo axonométrico **y** positivo faz **48°**, no sentido anti-horário, com o semieixo axonométrico **x** positivo. Os coeficientes a aplicar nos eixos axonométricos **x**, **y** e **z** são **1**, **0.5** e **1**, respetivamente (figura 1.138).

As faces do cubo envolvente estão contidas nos planos coordenados. O cilindro está localizado no terceiro octante. O plano que produz a truncagem está definido por duas retas **a** e **b** paralelas ao eixo **x**. A reta **a** está contida no plano coordenado **zx** e tem **3m** de cota. A reta **b** tem **1m** de cota e **-4m** de afastamento. Após a truncagem pretende-se o tronco de cilindro com base no plano **xy**.

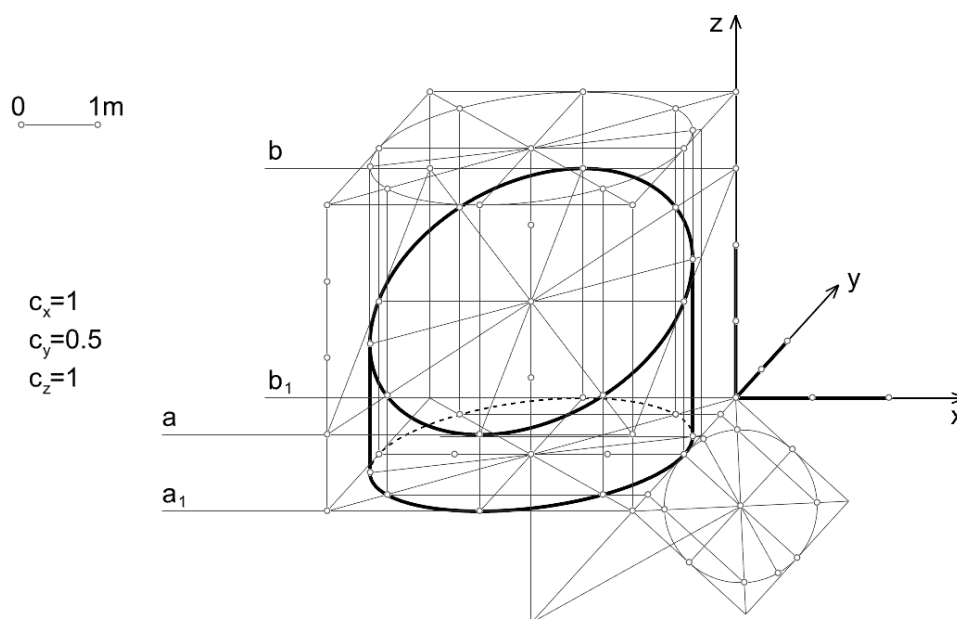


Fig. 1.138. Truncagem de um cilindro de revolução de eixo vertical.

O traçados expressos na figura são relativamente evidentes e não carecem de grandes explicações. O controlo do desenho da base fez-se através de uma afinidade de eixo y . Esta afinidade permitiu ainda determinar com precisão os pontos por onde passam as geratrizes de contorno aparente da superfície do cilindro. Em relação à secção, determinou-se o retângulo envolvente da mesma que, no desenho, fica representado como um paralelogramo. As medianas do retângulo correspondem, no desenho, aos eixos conjugados da projeção da secção. Os pontos da curva de intersecção obtêm-se a partir dos pontos das bases do cilindro.

No segundo exemplo, numa axonometria ortogonal trimétrica, de que se conhecem as escalas axonométricas (ver subsistema ao centro na figura 1.131), pretende-se resolver a subtração produzida por um prisma quadrangular reto num prisma hexagonal reto. O prisma quadrangular tem as arestas laterais paralelas ao eixo x e base quadrada contida no plano yz . Uma das diagonais da base é vertical e a outra é horizontal. O centro da base tem $6m$ de afastamento e $3m$ de cota. O vértice de menor cota da base tem $1m$ de cota. Este prisma atravessa completamente o outro (figura 1.139).

O prisma hexagonal tem $6m$ de altura e a sua base de menor cota é um hexágono regular à cota $0m$. Um dos lados da base está contido no eixo y , e o vértice de menor afastamento da base tem $3cm$ de abcissa e pertence ao eixo x .

A representação da base do prisma quadrangular é direta e não oferece dificuldades.

Para controlo da representação da base hexagonal do segundo prisma, foi utilizada uma afinidade de eixo x .

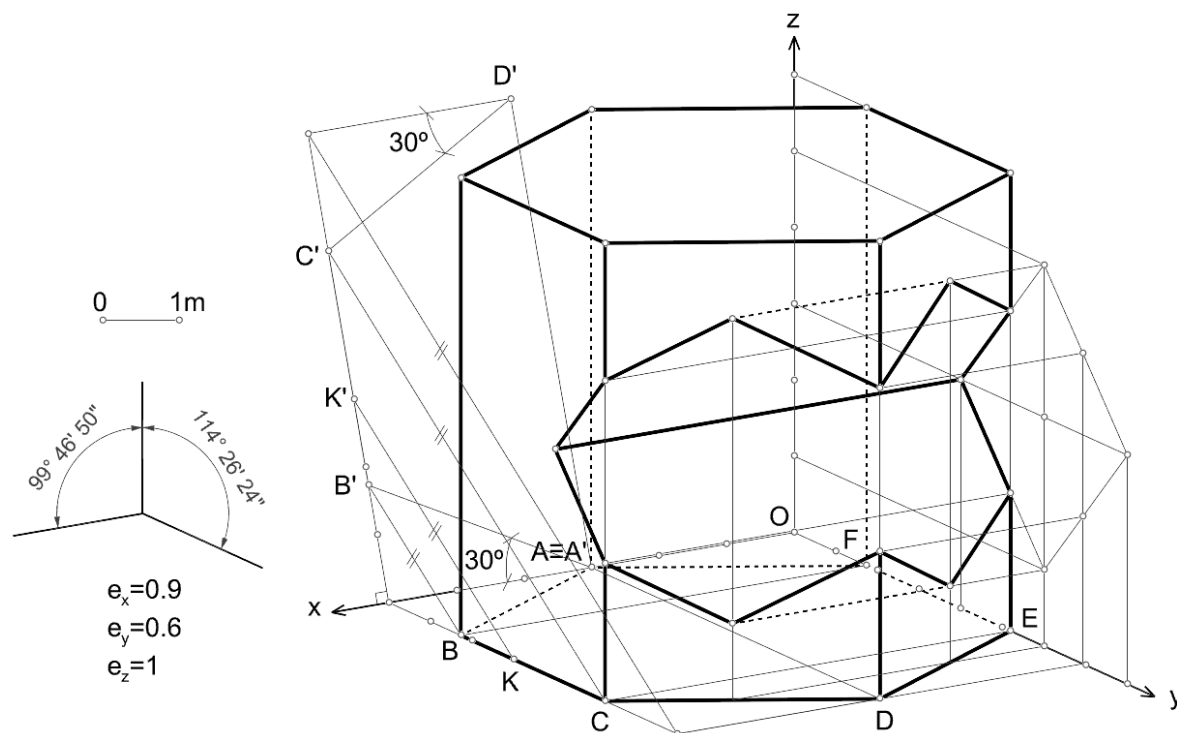


Fig. 1.139. Subtração de um prisma quadrangular reto a um prisma hexagonal reto.

Para determinar a intersecção entre as superfícies dos dois prismas foi considerado um feixe de planos paralelos ao plano zx . Esta orientação de planos contém as direcções das arestas laterais dos dois prismas, o que facilita a determinação dos vértices da linha comum às duas

superfícies, já que planos assim orientados interseccionam os prismas segundo retas paralelas às arestas laterais dos mesmos.

Atividade proposta:

Utilizando subsistemas axonométricos clinogonais e ortogonais, execute operações de secção nos vários tipos de sólidos até aqui estudados. Considerando pares de sólidos, execute operações booleanas entre eles. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada porque entre as duas formas de desenho desenvolve-se a razão e a intuição.

Aplicações da perspectiva axonométrica

A axonometria é aplicada em variadas áreas. Vemos representações, que hoje reconhecemos como axonométricas, na arte da antiguidade clássica, na pintura medieval, na pintura oriental chinesa e japonesa, na ilustração de tratados de matemática ou de História da Arquitetura, como é o caso do tratado do séc. XIX de Auguste Choisy, na arte suprematista russa, com nomes como El Lissitzky, ou na arquitetura moderna, com nomes como Theo van Doesburg, Cor van Eesteren ou Alberto Sartoris. A representação axonométrica é ainda utilizada amiúde em disciplinas como a física, matemática ou computação. Para nós interessa-nos salientar o seu potencial perspetivo como um compromisso entre uma visualização da tridimensionalidade das formas e a manutenção de um conjunto de invariantes que também são comuns à MPO, como seja a preservação das proporções para cada direção espacial ou a preservação do paralelismo. Uma vez que a axonometria de uma forma pode ser muito facilmente obtida a partir de um modelo tridimensional digital, interessa-nos por contraponto, salientar também o seu potencial em processos de desenho manual, nos quais devem ser vertidos alguns princípios até aqui discutidos e a discutir adiante.

Composição de volumes

O trabalho do arquiteto e do designer passa inevitavelmente pelo controlo da forma. Se é verdade que a MPO permite um controlo efetivo da forma, a axonometria empresta à leitura da forma uma clareza visual que a MPO não tem. O elogio à representação axonométrica fica bem patente nas palavras proferidas pelo arquiteto holandês Theo van Doesburg na exposição De Stijl, citado por Bois (1984):

“Já então se demonstra o novo princípio de uma nova arquitetura espacial e funcional desenhada segundo o método axonométrico. Este método de representação permite a leitura simultânea de todas as partes da casa, vista nas suas justas proporções, isto é, sem pontos de fuga perspetivos. Ao contrário, segundo a representação bidimensional, o desenho é imediatamente percebido sob o perfil volumétrico, na sua dimensão cúbica. A planta desaparece e dá lugar a um sistema de leitura em que se poderão ter claramente quer as medidas quer as estruturas necessárias. Compreende-se que todo o projeto, dos alicerces ao teto, deverá ser também elaborado axonometricamente.”

Em última análise, a composição de volumes é uma aplicação das operações de interação entre figuras geométricas como as tangências, concordâncias, interseções, operações booleanas, transformações geométricas, e outras. Dêmos que o objetivo final do estudo individualizado destas operações é capacitar o estudante, o designer, o arquiteto ou o engenheiro para as poder utilizar livremente, consoante necessário e em diversos tipos de

desenho com diferentes níveis de precisão. No exemplo da figura seguinte, são exemplificadas tangências, uniões e subtrações.

Note-se que, num esboço, não é necessário construir todos os pontos de forma precisa nem é necessário emular construções que apenas fazem sentido no desenho manual de precisão. De alguma maneira, é como se o desenho manual de esboço axonométrico à mão levantada traduzisse uma espécie de adestramento conseguido à custa de uma prática continuada.

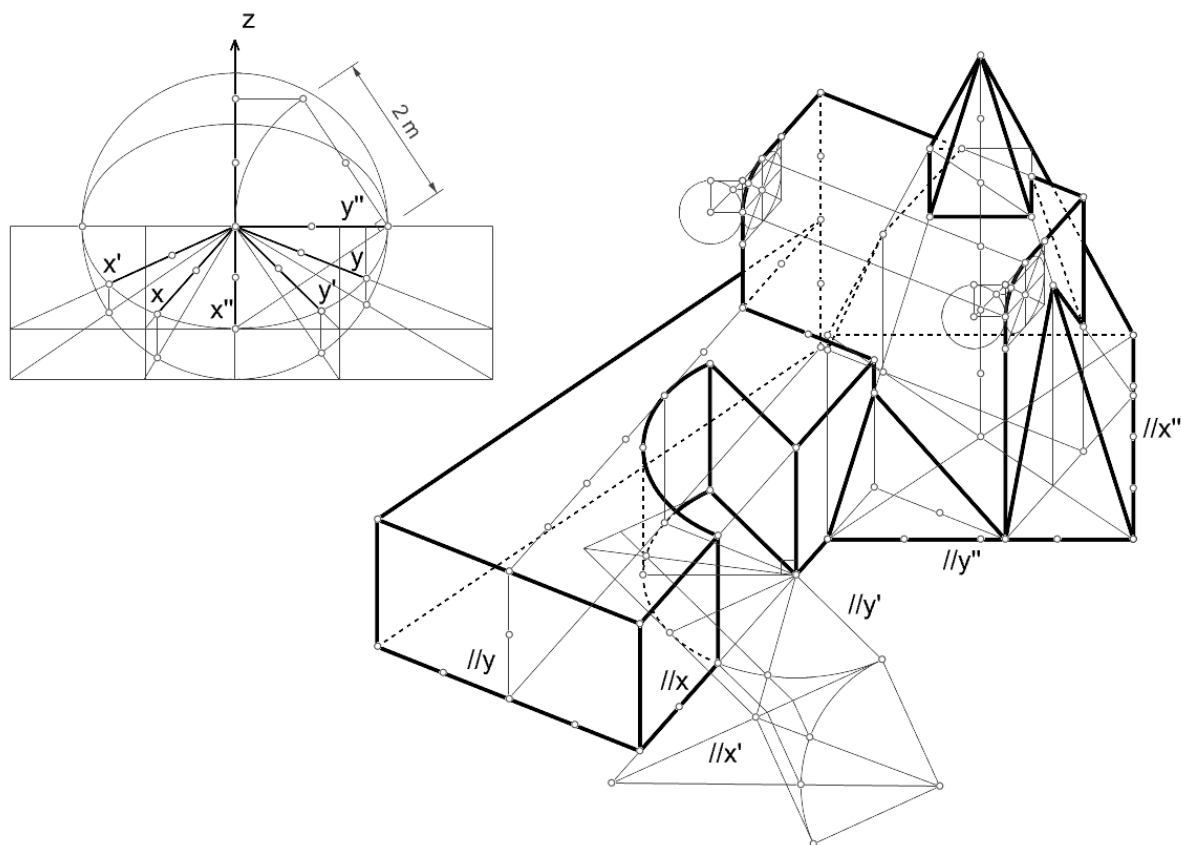


Fig. 1.140. Composição de volumes em axonometria.

Atividade proposta:

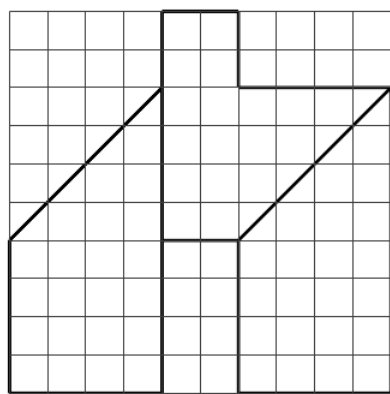
Utilizando subsistemas axonométricos clinogonais e ortogonais, elabore composições de volumes recorrendo às operações geométricas já estudadas. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada porque entre as duas formas de desenho desenvolve-se a razão e a intuição.

Representação de volumes descritos em MPO

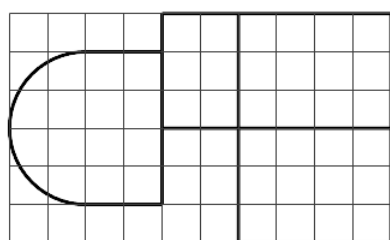
Muitas vezes a representação axonométrica é feita a partir de desenhos dados noutros sistemas de representação, por exemplo em MPO. Por vezes essa informação é lacónica e permite mais que uma interpretação, outras vez não. Por vezes a interpretação é simples e outras vezes requer maior esforço. Mas seja como for, quando um objeto é dado em MPO, a sua compreensão volumétrica passa, quase invariavelmente, pela produção de um esboço em axonometria. Mesmo que esse esboço não seja feito, arriscaríamos dizer que que visualização que surge nas nossas mentes vem sob a forma de uma axonometria. Assim, parte do esforço que é necessário fazer para traduzir uma representação em MPO numa representação axonométrica traduz-se em interpretação e visualização.

Na figura 1.141, são dados dois objetos através de duas projeções ortogonais. Em linguagem arquitetônica, diríamos dados em planta e alçado. Sugerimos ao leitor que, considerando que a unidade da quadrícula é **1m** (na verdade, neste exemplo a proporção é mais importante que a dimensão), olhe para as projeções dos objetos e tente entender os seus volumes antes de avançar na leitura.

Optámos por dar apenas duas projeções de cada objeto. Ter apenas duas projeções obriga a um esforço mental maior na interpretação, e esse é o principal objetivo.

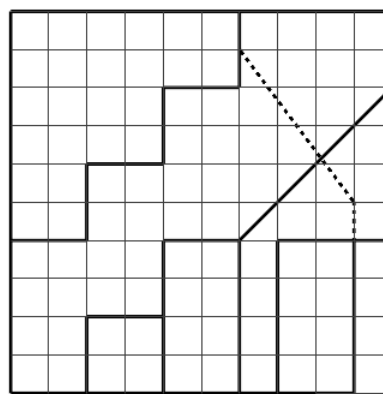


Projeção Frontal

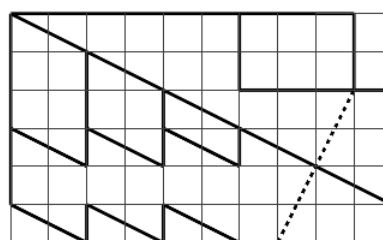


Projeção Horizontal

a)



Projeção Frontal



Projeção Horizontal

b)

Fig. 1.141. Dois objetos dados em DPO.

A nossa experiência diz-nos que a tendência natural (será natural ou será não adestrada?), quando olhamos para este tipo de representação e procuramos entender a sua espacialidade, é a de conceber mentalmente a forma como se as operações gerativas fossem extrusões relativamente aos planos de projeção. E, com efeito, essa abordagem resulta no caso do objeto dado na figura 1.141.a. Porém, a mesma abordagem já não funciona para o objeto dado na figura 1.141.b, porque há faces do mesmo que não são paralelas nem perpendiculares aos planos de projeção. E por vezes isso causa algumas dificuldades de interpretação e visualização.

Neste tipo de situação, a estratégia mais adequada passa por considerar o **paralelepípedo envolvente** do objeto. Depois, a obtenção da forma é uma espécie de processo subtrativo. Uma pista importante para ajudar a decodificar a informação dada em DPO é verificar se alguma região de uma projeção pode ser considerada como uma transformação afim, com direção vertical, de outra região dada na outra projeção. Se isso for verdade, provavelmente essas duas regiões correspondem à mesma face do objeto que estará orientada obliquamente aos planos de projeção. Isso acontece no objeto dado na figura 1.141.b. Nas representações axonométricas omitimos a construção das curvas através da afinidade uma vez que isso já foi

explicado anteriormente. Em ambos os casos (figuras 1.142.a e 1.142.b) considerámos axonometrias clinogonais isométricas embora tenhamos também omitido a notação dos eixos. Note-se que esta forma de representar a axonometria está muito próxima do que se faz no desenho à mão levantada. Com efeito, o propósito deste tipo de exercício é muito mais o exercitar da interpretação e visualização mental do que produzir uma axonometria precisa.

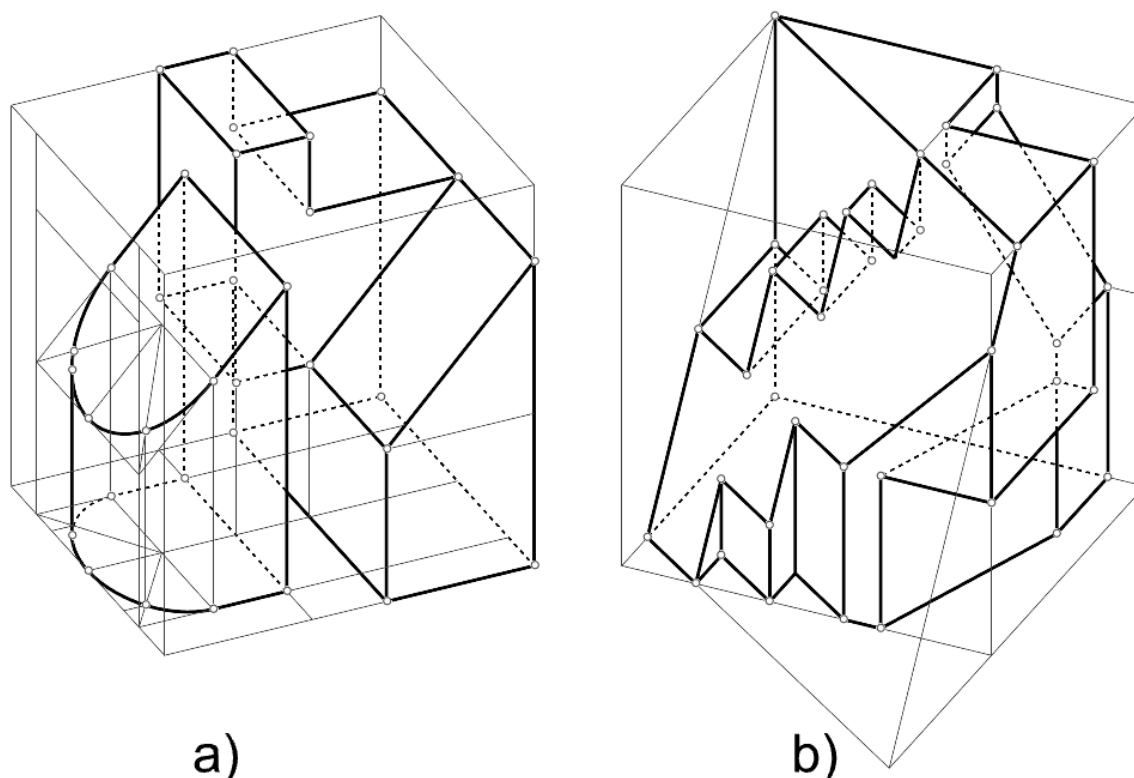


Fig. 1.142. Representação axonométrica clinogonal isométrica dos dois objetos dados em DPO na figura anterior.

Atividade proposta:

Utilizando várias formas de desenhar, desde o desenho de precisão ao desenho manual à mão levantada, interprete através de axonometrias, representações dadas em MPO. Para o efeito pode recorrer a publicações de arquitetura ou design. O exercício inverso é igualmente importante, isto é, executar a representação em MPO a partir de representações axonométricas.

Axonometria explodida

Uma das aplicações mais interessantes e mais comuns da axonometria é o que se designa por **axonometria explodida**. A axonometria explodida pode ser utilizada como instrução para a montagem de um equipamento, como forma de representar simultaneamente os vários pisos de um edifício ou como forma de explicar as várias camadas de um processo construtivo. Em termos práticos é como se as várias partes de um objeto fossem deslocadas no espaço de modo a aparecerem separadas, porém articuladas entre si como se vê no exemplo da figura 1.143. As linhas a pontilhado representam as direções do movimento que devem fazer as várias partes constituintes da assemblagem para que recuperem as suas posições relativas. Note-se que, perante um determinado objeto, não há uma única forma de proceder à representação em axonometria explodida. No entanto deve evitar-se, tanto quanto possível que as várias partes apareçam sobrepostas porque isso introduz ruído na representação. No desenho da figura

optou-se por deixar ficar a traço fino a representação das arestas invisíveis. Podiam ter-se omitido estas linhas. Normalmente quando se produz uma axonometria explodida, cada uma das partes constituintes foi perfeitamente definida e representada previamente. Por isso, num desenho deste tipo não está em causa o entendimento de cada uma das peças mas si o modo como se articulam.

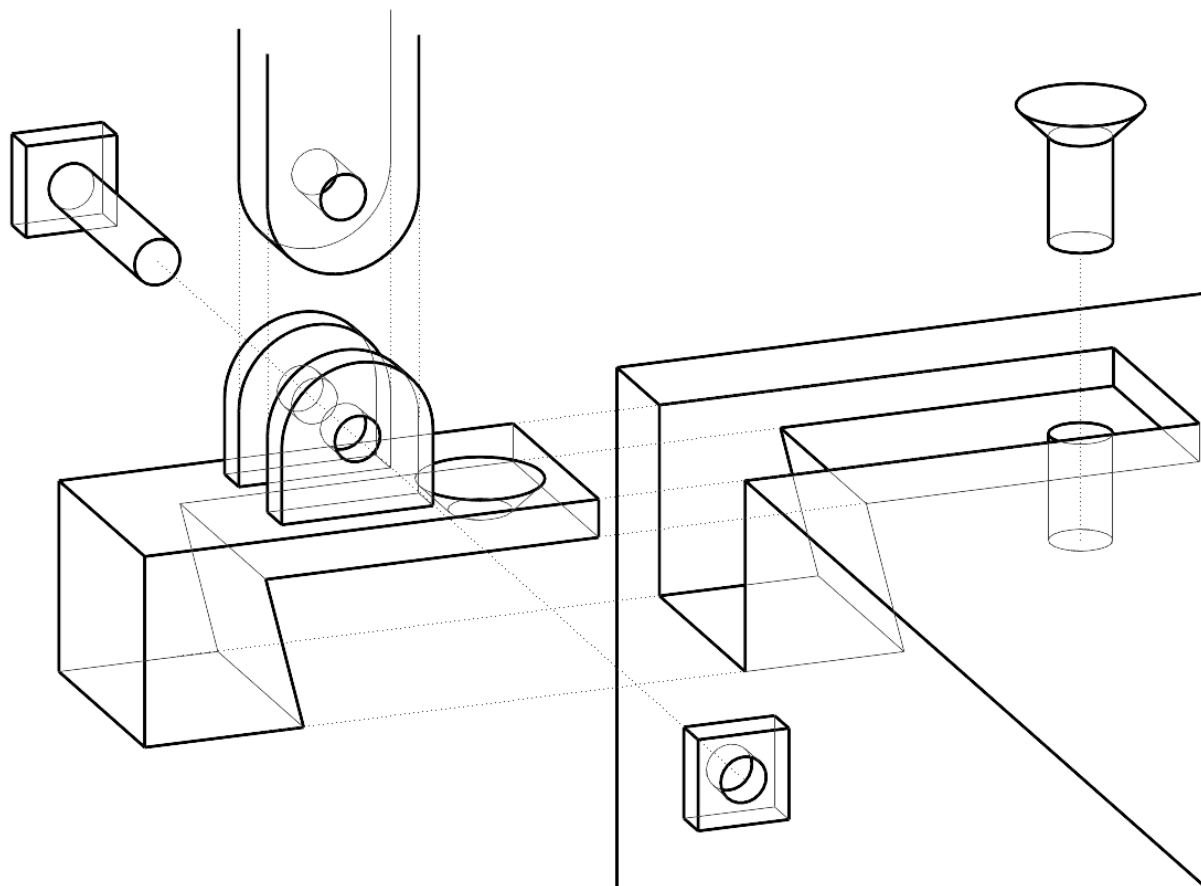


Fig. 1.143. Representação axonométrica explodida de uma assemblagem.

Atividade proposta:

Interprete objetos do quotidiano, com dimensões variadas, através de representações em axonometria explodida.

Sombras

Como é óbvio, o que foi dito acerca das sombras a propósito da MPO mantém a validade quando se trata de outros sistemas de representação. A utilização de sombras em axonometria é uma forma de reforçar a perceção da tridimensionalidade na representação. No exemplo da figura seguinte temos um volume que nos faz lembrar um edifício. Em termos práticos, neste caso a determinação das sombras consiste em resolver interseções entre planos, interseções entre planos e superfícies cilíndricas, interseção entre superfícies cilíndricas, e tangências. Note-se que se uma aresta é paralela ao plano em que a sombra está a ser produzida, então a sua sombra mantém a direção e a dimensão. Se a questão se colocar relativamente a uma curva, também a sombra é uma curva igual; é o caso do volume cilíndrico. Em relação à superfície do cilindro as geratrizes separatrizes luz/sombra correspondem a conduzir planos tangentes à superfície do cilindro paralelos à direção luminosa. Nesta representação omitimos

as arestas invisíveis para não sobrecarregar o desenho. No entanto, para o cálculos das sombras, em alguns casos, tiveram de ser consideradas.

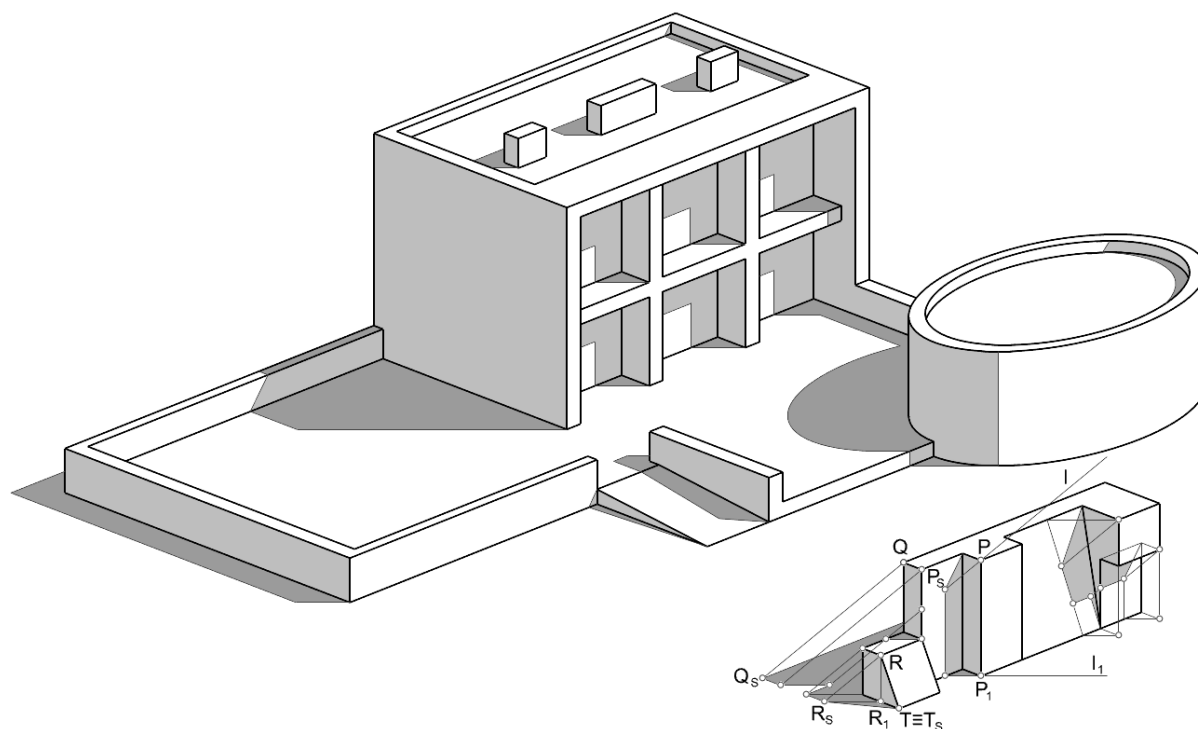


Fig. 1.144. Representação axonométrica de uma volumetria e respetivas sombras dada uma direção luminosa L .

Atividade proposta:

Considerando direções luminosas diversas ou focos luminosos a distância finita, represente as sombras de conjuntos de objetos dados em axonometria.

Perspetiva cónica

A perspetiva cónica é um sistema de representação que tem por base a projeção central ou cónica. Neste tipo de representação são fundamentais os conceitos de ponto de fuga e linha de fuga. É a partir da aplicação destes conceitos que toda a representação se estrutura.

Na perspetiva cónica é costume designar o plano de projeção por **quadro** (Q). Talvez uma reminiscência da origem da perspetiva na pintura. À projeção ortogonal do observador, O , no plano de projeção, chamamos **ponto principal** da perspetiva e notamo-lo com a letra P . A direção OP é a **direção principal do olhar**. A distância entre o observador e o quadro, também designada por **distância principal** (dp), fica representada por uma circunferência $[d]$ de centro em P , com raio igual a $\overline{OP}$. Esta recebe a designação de **circunferência de distância**.

Podemos definir um **sistema de referência interno** a esta estrutura (embora não seja estritamente necessário). Para o distinguir de um qualquer **sistema de referência externo**, associamos um apóstrofe à notação dos eixos. A forma de o estabelecer é a seguinte. Os eixos x' e z' estão contidos no quadro e interseitam-se no ponto P . E o observador pertence ao eixo y' a uma dada distância do plano $z'x'$ no semieixo y' negativo. O plano paralelo ao quadro, e passante pelo observador, recebe a designação de **plano neutro** (PN) porque as figuras nele contido não têm projeção cónica própria. O quadro e o plano neutro dividem o espaço em três regiões (exclui-se daqui o plano impróprio): o **espaço real** (ER; para lá do quadro), o **espaço**

intermédio (EI; entre o quadro e o plano neutro) e o **espaço virtual** (EV; para trás do plano neutro). Este aparato designa-se **perspetógrafo** (figura 1.145).

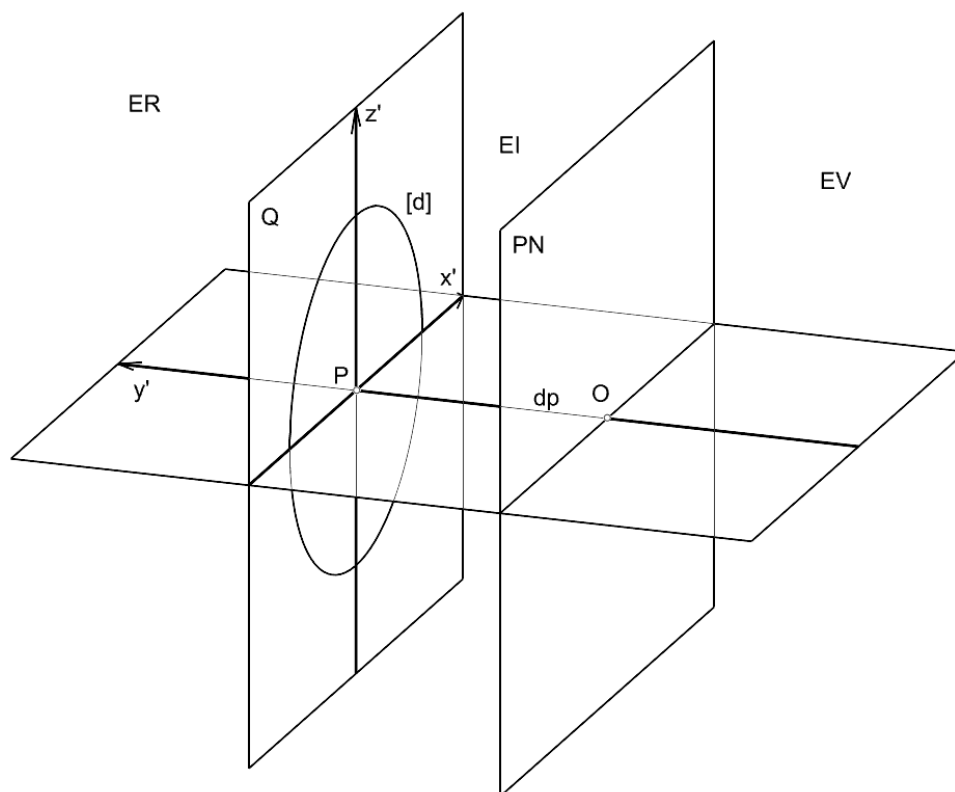


Fig. 1.145. Perspetógrafo.

Em certo sentido, o perspetógrafo é um mecanismo utilizado para a produção de perspetivas. É uma espécie de precursor da máquina fotográfica.

Uma perspetiva é a seção produzida pelo quadro na pirâmide visual de vértice no observador. Ou seja, uma perspetiva é uma projeção cônica. Embora se possa considerar a projeção cônica de qualquer elemento do espaço, apenas representaremos a perspetiva das figuras ou da parte das figuras que se situem no espaço real ou intermédio. E mesmo desta região, apenas é legítimo falar de perspetiva de figuras ou parte de figuras que fiquem representadas na zona central do desenho (porque as demais terão uma distorção muito acentuada). No entanto, restituem-se as proporções se o desenho em perspetiva for observado a partir do ponto **O**.

O ponto **P** é o ponto de fuga das retas perpendiculares ao quadro. A circunferência **[d]** é o lugar geométrico dos pontos de fuga das direções de retas a **45°** com o quadro. Retas com inclinação superior a **45°** com o quadro têm ponto de fuga no círculo delimitado por **[d]**. Retas com inclinação inferior a **45°** com o quadro têm ponto de fuga fora do círculo. E retas paralelas ao quadro não têm ponto de fuga próprio.

Definido um sistema de referência externo, pode-se falar de uma orientação horizontal. A correspondente linha de fuga, caso exista, designa-se por **linha do horizonte** (LH) e é o traço, no quadro, do plano projetante com a orientação horizontal, isto é, paralelo ao plano **xy**. Este plano designa-se por **plano do horizonte** (PH). Definido um plano horizontal à cota **0**, isto é, o plano **xy**, o seu traço no quadro, caso exista, designa-se por **linha de terra** (LT). Este plano designa-se por **geometral**.

No sistema de referência interno, o quadro é, em certo sentido, sempre um plano frontal, o eixo x' é uma espécie de linha do horizonte. Mas, em geral, trata-se de uma falsa linha do horizonte que passa sempre pelo ponto P . Designamo-la por LH'. A direção principal do olhar é, em certo sentido, sempre de topo. Uma reta vertical num sistema de referência externo apenas é vertical no sistema interno se for paralela ao eixo z' . Mas se, por exemplo, a direção principal do olhar for de perfil no sistema externo, então a reta vertical no sistema interno passa a ser de perfil, oblíqua ou horizontal no sistema interno consoante a direção do eixo x' no sistema externo for fronto-horizontal, oblíqua ou de perfil.

Quando definimos um sistema de referência externo admitimos que o quadro possa ser um plano de qualquer tipo. Por exemplo, se a direção principal do olhar for vertical, então o quadro é horizontal (caso em que não há LH nem LT); se a direção principal do olhar for de perfil, então o quadro é de rampa; se a direção principal do olhar é horizontal, então o quadro é vertical; etc. Nestes casos, o sistema de referência é externo e não depende do observador nem da direção principal do olhar. Por exemplo, uma reta vertical é sempre uma reta vertical independentemente da forma como está orientado o quadro.

Embora o sistema de referência interno não seja, em geral, muito cómodo para expressar por coordenadas os vértices de figuras referidas num sistema externo, é bastante cómodo como modo de organizar as direções de retas e as orientações de planos em termos relativos. Retas consideradas horizontais no sistema interno têm sempre ponto de fuga pertencente a x' , isto é, em LH'; retas consideradas de perfil no sistema interno têm sempre ponto de fuga pertencente a z' ; retas com ponto de fuga em P são sempre consideradas de topo no sistema interno; retas paralelas ao quadro são sempre consideradas frontais, fronto-horizontais ou vertiais no sistema interno; todas as demais direções são consideradas oblíquas no sistema interno. No sistema interno, o eixo x' é a linha de fuga dos planos considerados horizontais; o eixo z' é a linha de fuga dos planos considerados de perfil; uma linha de fuga passante por P corresponde a uma orientação de topo no sistema interno; uma linha de fuga paralela a x' corresponde a uma orientação de rampa no sistema interno; uma linha de fuga paralela a z' corresponde a uma orientação vertical no sistema interno; uma linha de fuga que não passe em P nem seja paralela a x' ou z' corresponde a uma direção oblíqua no sistema interno; e a orientação do quadro é frontal.

Os eixos x' e z' dividem o quadro em quatro regiões. Se um ponto de fuga fica acima de x' , isto é, com coordenada Z' positiva, diz-se que corresponde a uma **direção ascendente**, caso contrário corresponde a uma **direção descendente**; se um ponto de fuga ficar à direita do eixo z' , isto é, com coordenada X' positiva, diz-se que corresponde a uma direção com **abertura para a direita com o quadro**, caso contrário corresponde a uma direção com **abertura para a esquerda com o quadro**. No que diz respeito às direções paralelas ao quadro, a abertura considera-se em relação ao plano $x'y'$ e mede-se acima de x' (cota Z' positiva) entre a projeção cónica e o semieixo x' positivo, no sentido anti-horário, considerando-se abertura para a direita ângulos entre 0° e 90° e abertura para a esquerda ângulos entre 90° e 180° .

Uma orientação é caracterizada nos mesmos termos em função do ponto de fuga da sua direção de maior inclinação em relação ao quadro. No caso de orientações ortogonais ao quadro aplica-se o mesmo que às direções paralelas ao quadro.

O quadro corresponde ao plano do desenho. À parte de um fator de escala geral de um desenho (por exemplo $1/100$), considera-se que o quadro é o lugar geométrico das verdadeiras

grandezas. Isto é, uma figura contida no quadro será coincidente com a sua perspectiva e, por isso, a sua projeção representa a verdadeira grandeza da figura.

Nos sistemas de representação que precederam, a ideia de um referencial cartesiano tridimensional esteve sempre presente de forma mais ou menos explícita. No caso da axonometria, e através do Teorema de Pohlke-Schwarz, a aproximação ao referencial fez-se a partir da consideração da projeção de três arestas de um cubo incidentes num vértice. Isto é, a partir da representação de cubos subentendeu-se um referencial e estabeleceram-se escalas para a representação nas três direções principais do espaço. Partir de objetos tridimensionais, cubos neste caso, parece-nos particularmente adequado em sistemas de representação de carácter perspético, como é o caso da axonometria e da perspectiva cónica propriamente dita. Esse será então o nosso ponto de partida. Contamos com a abordagem que fizemos antes relativa a algumas propriedades das projeções, em que definimos os conceitos de ponto de fuga e linha de fuga que agora vamos aplicar. Esta abordagem prévia já nos mostrou que, na projeção cónica, as medidas são reduzidas ou ampliadas, que o paralelismo não permanece, bem como não permanecem as razões simples de comprimentos. Isto é corroborado pela nossa experiência quando observamos uma fotografia e vemos que, objetos que sabemos serem iguais, aparecem com distintas medidas, ou quando vemos a convergência de linhas que sabemos serem paralelas, como os carris de uma linha férrea ou as arestas de um edifício numa rua.

Como as arestas de um cubo podem ser utilizadas para estabelecer três direções ortogonais entre si, como se de um referencial cartesiano se tratasse, a partir da representação de cubos em perspectiva vamos definir o que habitualmente designamos por **perspetiva de 1 ponto de fuga**, **perspetiva de 2 pontos de fuga** e **perspetiva de 3 pontos de fuga**. Estas designações referem-se aos pontos de fuga próprios que se podem associar às três direções ortogonais entre si que se elegem para estruturar um determinado espaço. E ao associar essa organização a um cubo, de alguma forma define-se um sistema de coordenadas em que a unidade é dada pela aresta do cubo. A multiplicação do cubo define uma grelha tridimensional estruturante em que é possível extrair a posição do observador, isto é, as coordenadas do observador.

A abordagem será a seguinte. Em cada um dos casos começamos por representar um cubo sem considerar qualquer sistema de referência. Depois consideramos o sistema de referência interno e faremos a caracterização das direções e orientações neste sistema. Por fim, introduzimos um sistema de referência externo, primeiro associado às arestas do cubo e depois delas dissociado, e faremos a caracterização das direções e orientações nesse sistema. Em cada cubo $[ABCDEFGH]$, notamos as direções das arestas por a , b e c a que correspondem os pontos de fuga F_a , F_b e F_c , quando existam. As orientações das faces são dadas por $\alpha \equiv bc$, $\beta \equiv ab$ e $\delta \equiv ac$, a que correspondem respetivamente as linhas de fuga f_α , f_β e f_δ , quando existam (figura 1.148).

Do ponto de vista da notação, designaremos as projeções dos pontos do mesmo modo que nos referimos aos pontos no espaço. Por exemplo, ao mencionar ponto A tanto podemos estar a referir-nos ao ponto no espaço como à sua perspectiva. Fazemos isto por economia de notação. Mas procuraremos que as descrições não sejam ambíguas. Com efeito, quando nos referimos ao desenho, ou à representação gráfica, estamos sempre a considerar as projeções ou as perspectivas. Quando nos referimos à figura espacial, podemos explicitar esse facto ou,

simplesmente não referimos o desenho. O contexto também ajudará a resolver as ambiguidades. Na verdade, este já foi o critério utilizado na axonometria.

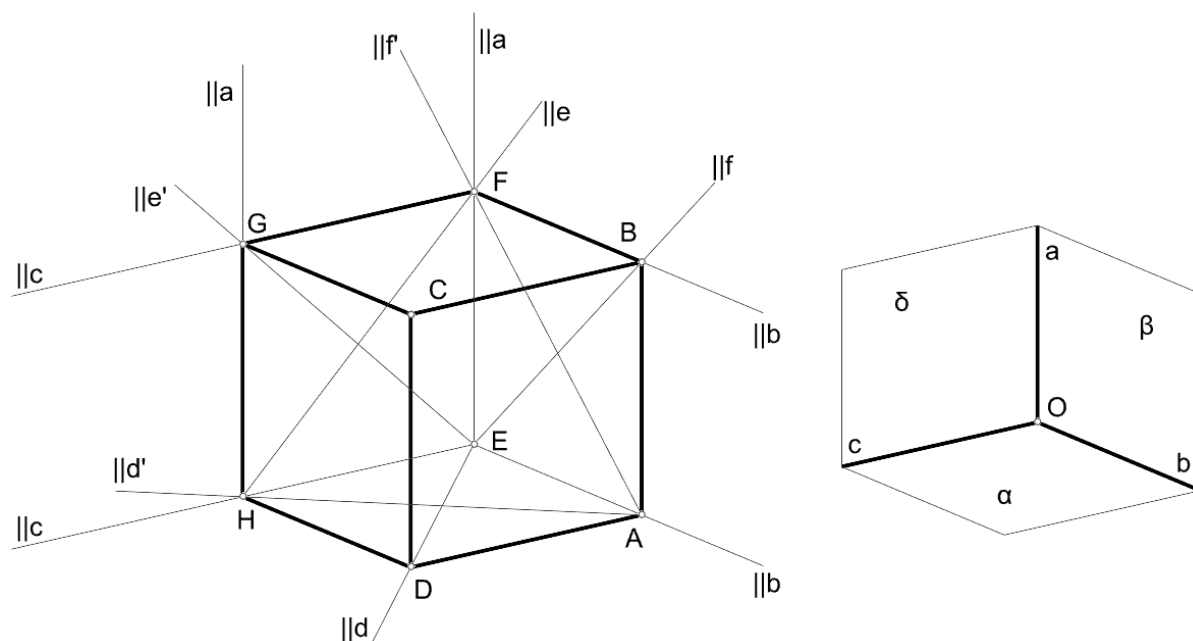


Fig. 1.148. Relação entre as direções e orientações das faces do cubo. Estão também representadas as direções diagonais das faces do cubo.

Atividade proposta:

Sugere-se a releitura da subsecção “Algumas propriedades das projeções” sobretudo no que diz respeito à projeção cônica. Em particular chama-se a atenção para o entendimento dos conceitos de ponto de fuga e de linha de fuga.

Análise imagens fotográficas e procure reconhecer nelas as características das perspectivas cônicas como é o caso da diminuição das medidas consoante o afastamento em relação ao observador, a convergência de linhas de são espacialmente paralelas. Nessas imagens procure entender qual a localização do observador em relação à cena representada.

Perspetiva de um ponto de fuga

Na perspectiva de um ponto de fuga considerámos a direção b ortogonal ao quadro e, consequentemente, as direções a e c são paralelas ao quadro (figura 1.149). À direção b corresponde o ponto de fuga $F_b \equiv P$ e às outras duas não corresponde nenhum ponto de fuga próprio (porquê?). Como a orientação δ é paralela ao quadro, as projeções das faces com esta orientação preservam as proporções (porquê?). As orientações α e β são ortogonais ao quadro e por isso, as linhas de fuga que lhes correspondem passam pelo ponto P e fazem 90° entre si (porquê?). Se arbitrarmos a projeção cônica de uma face de um dado cubo paralela ao quadro, digamos $[ABCD]$, completar a perspectiva é relativamente simples. No desenho arbitrarmos que a perspectiva do quadrado $[ABCD]$ tem $4cm$ de lado. Note-se que esta dimensão não é, necessariamente a verdadeira grandeza da face. Só o seria se considerássemos que a face está contida no quadro, o que não estamos a fazer.

Recorde-se que o ponto de fuga de uma direção de retas é o traço da reta projetante, com essa direção, no quadro. E a linha de fuga de uma orientação de planos é o traço do plano projetante, com essa orientação, no quadro.

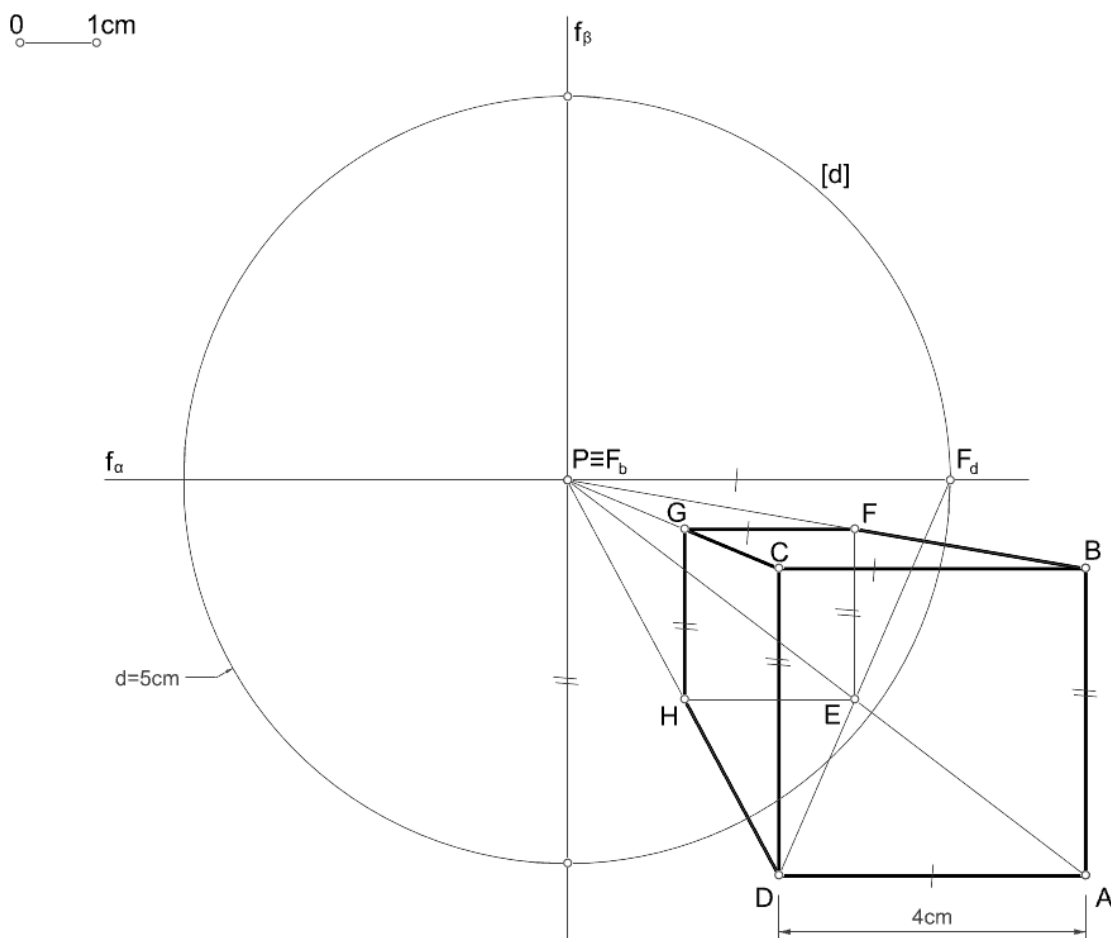


Fig. 1.149. Perspectiva de dois cubos com uma direção de arestas ortogonal ao quadro.

As retas que contêm as arestas $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ têm a direção b e, por isso, são perpendiculares ao quadro, logo as suas projeções cónicas convergem no ponto $F_b \equiv P$. As faces $[ADHE]$ e $[CBFG]$ têm orientação α e direções diagonais d e d' . Por isso, os pontos de fuga F_d e $F_{d'}$ (apenas está representado F_d) pertencem à linha de fuga f_α , que tem a direção c (porquê?). Como a direção d faz 45° com as direções b e c , e a direção b é ortogonal ao quadro, então o ponto de fuga F_d deve pertencer à circunferência $[d]$ uma vez que a direção d está também a 45° com o quadro. Assim, utilizando o ponto de fuga F_d pode determinar-se a perspectiva do vértice E a partir da perspectiva do vértice D . A perspectiva da face $[EFGH]$ é um quadrado homotético da perspectiva da face $[ABCD]$ com centro de homotetia em P . A obtenção do vértice E a partir do vértice D também pode ser interpretada como a rotação de 90° do vértice D em torno do vértice A , no plano da face $[ADHE]$. A corda deste arco, ou seja a diagonal $[DE]$, está contida na reta de ponto de fuga F_d . Por isso, também se pode designar este ponto como **ponto de fuga da corda de arco** da rotação da direção c para a direção b na orientação α . O ponto de fuga $F_{d'}$, também é um ponto de fuga em condições similares.

Para determinar o ponto E utilizou-se o ponto de fuga F_d mas poder-se-iam ter utilizado os pontos $F_{d'}$, F_f ou $F_{f'}$ de modo análogo (onde ficariam representados estes pontos de fuga?).

Nesta representação está definida a escala no quadro. Sabe-se a localização do observador em relação ao quadro, mas do cubo apenas se conhece a orientação e as retas projetantes dos seus vértices (e os planos projetantes das suas arestas). Sem informação adicional, não é possível saber qual a dimensão do cubo nem qual a sua posição no espaço. Mas isto não é

impeditivo, como vimos, de elaborar a perspectiva. Na verdade, esta abordagem está muito próxima do que é feito no desenho de observação. Nessa situação, o desenho em perspectiva começa quando representamos uma figura da cena que observamos e tudo o resto decorre daí.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos nas condições descritas. Os cubos devem ter tamanhos variados no desenho. Defina um critério de visibilidade que lhe permita arbitrar, visualmente, que cubos se sobrepõem a que cubos.

Num desenho, represente um cubo nas condições descritas. Considerando o cubo como um módulo de uma grelha espacial tridimensional, desenvolva o desenho dessa grelha expandindo-a de modo a ocupar a totalidade da folha de desenho.

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada numa folha de tamanho A3, com o ponto **P** ao centro, e em que o raio da circunferência **[d]** ronde os **14cm**.

Como não está declarado nenhum sistema de referência apenas é possível referir-mo-nos a retas perpendiculares ao quadro (as que têm ponto de fuga em **P**), retas oblíquas ao quadro (as que, tendo ponto de fuga próprio não têm ponto de fuga em **P**) e retas paralelas ao quadro (as que não têm ponto de fuga próprio e que, por isso, preservam a direção nas projeções cónicas). Em relação a planos, apenas podemos referir-nos aos que são perpendiculares ao quadro (os que têm linha de fuga passante por **P**), os que são oblíquos ao quadro (os que têm linha de fuga não incidente em **P**) e os que são paralelos ao quadro (não têm linha de fuga própria).

Se introduzirmos um sistema de referência interno podemos especificar melhor as direções das arestas e as orientações das faces. Na figura seguinte, estabelecemos de três modos distintos o sistema de referência interno.

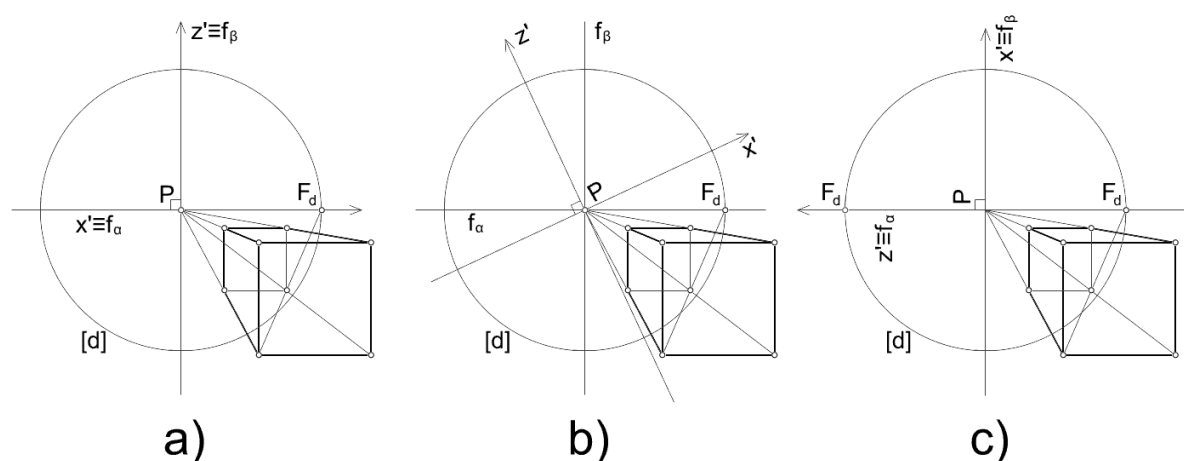


Fig. 1.150. Especificação do sistema de referência interno.

No primeiro caso (figura 1.150.a), $x' \equiv f_\alpha$ e $z' \equiv f_\beta$. As direções **a**, **b** e **c** são, respetivamente, vertical, de topo e fronto-horizontal. A direção **d** é horizontal a **45°** com o quadro, com abertura para a direita. As orientações α , β e δ são, respetivamente, horizontal, de perfil e frontal.

No segundo caso (figura 1.150.b), x' e z' estão inclinados relativamente a f_α e f_β . As direções **a**, **b** e **c** são, respetivamente, frontal com abertura para direita, de topo, e frontal com abertura para a esquerda. A direção **d** é oblíqua a **45°** com o quadro, descendente e com abertura para a

direita. As orientações α , β e δ são, respetivamente, de topo com abertura para a esquerda, de topo com abertura para a direita, e frontal.

No terceiro caso (figura 1.150.c), $x' \equiv f_\beta$ e $z' \equiv f_\alpha$. As direções a , b e c são, respetivamente, fronto-horizontal, de topo e vertical. A direção d é perfil, descendente, a 45° com o quadro. As orientações α , β e δ são, respetivamente, de perfil, de horizontal e frontal.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Concatenando as três perspetivas num único desenho (o que implica rodar os cubos para alinhar os referenciais), expanda o desenho introduzindo cubos adicionais. Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto P ao centro, e em que o raio da circunferência $[d]$ ronde os **14cm**.

Nos exemplos dados, o quadrado $[ABCD]$ que serviu como arranque do desenho da perspetiva do cubo tem **4cm** de lado no desenho. Mas isso nada diz acerca do tamanho do cubo de que é face. O cubo pode ser relativamente pequeno e estar situado perto do observador ou pode ser relativamente grande e estar afastado do observador. Um das formas de resolver esta ambiguidade pode ser através da declaração do comprimento das arestas. Suponhamos que o cubo de face $[ABCD]$ tem **3cm** de aresta. A face $[ABCD]$ está mais próxima do observador que a face $[EFGH]$. Quando se diz mais próxima do observador, queremos dizer que o plano da face $[ABCD]$, que é paralelo ao quadro, está mais próximo do observador que o plano da face $[EFGH]$, que também é paralelo ao quadro. Ao declarar os comprimentos das arestas, a relação entre o observador, o cubo e o quadro fica perfeitamente determinada (figura 1.151).

Se a aresta do cubo mede **3cm** e o quadro (plano do desenho) é o lugar geométrico das verdadeiras grandezas, as interseções das retas AE , BF , CG e DG com o quadro (ou seja, os seus traços frontais) definem os vértices de um quadrado $[A''B''C''D'']$ com **3cm** de lado no desenho (como determinar graficamente este quadrado?), verificando-se que a face $[ABCD]$ está situada no espaço intermédio e a face $[EFGH]$ está situada no espaço real. As retas que contêm os lados deste quadrado são os traços, no quadro, produzidos pelos planos das faces do cubo que são perpendiculares ao quadro. A reta DE , no desenho, é a perspetiva de uma reta a 45° com o quadro (porquê?). Por essa razão, a distância $\overline{D_R D''}$ corresponde à distância do vértice D relativamente ao quadro. Do mesmo modo, a distância $\overline{A'' D_R}$ corresponde à distância do vértice E relativamente ao quadro (porquê?). Como a direção d permitiu medir as distâncias dos pontos D e E em relação ao quadro, numa operação de rotação realizada sobre um plano com orientação α , também se pode designar o ponto de fuga F_d como ponto de **fuga de medição** da direção b em relação à orientação α , notando-o por $F_{md\alpha}$ (na orientação α que outro ponto de fuga de medição da direção b se poderia ter considerado?; e que pontos de fuga de medição da direção b seria possível definir em relação à orientação β ?).

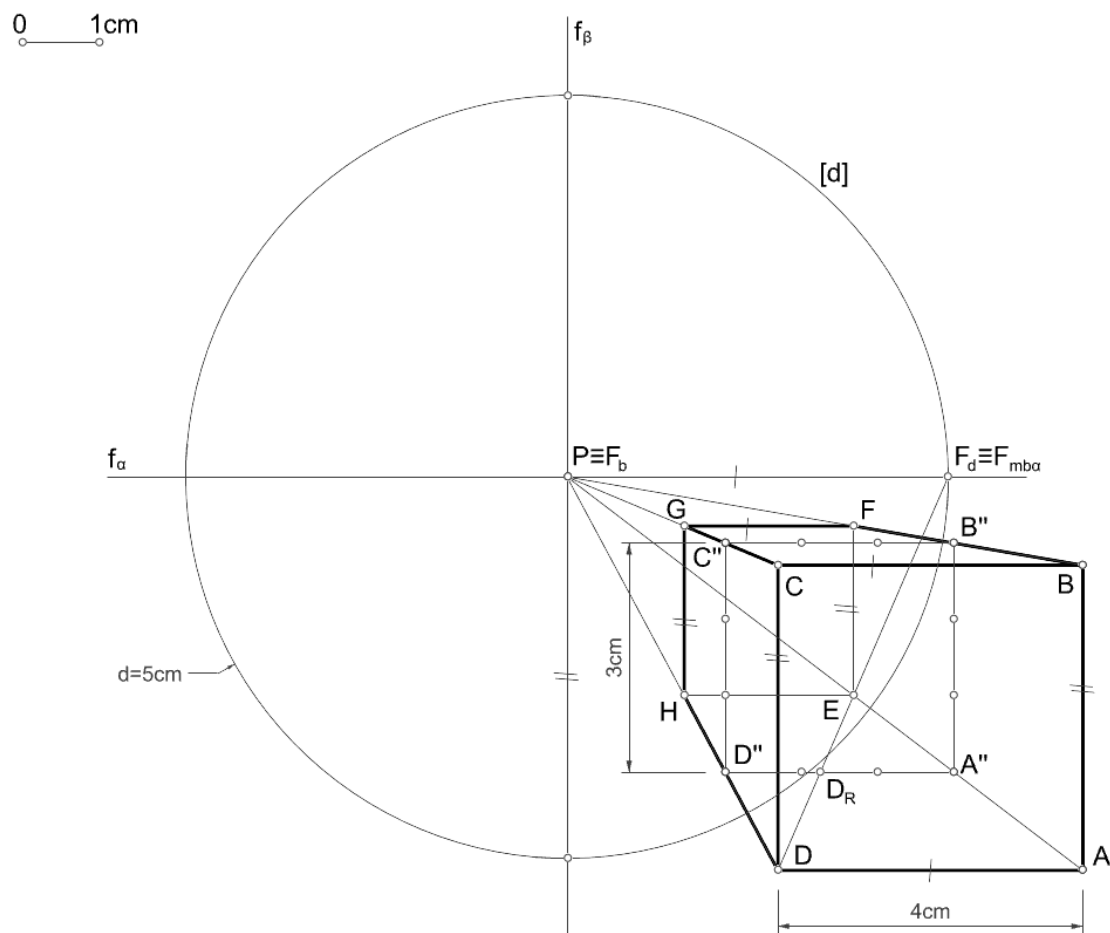


Fig. 1.151. Recuperação da posição do cubo em relação ao quadro e ao observador.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos em condições idênticas às descritas. Para cada cubo arbitre uma verdadeira grandeza do comprimento das arestas e, de seguida, determine a distância de cada um dos vértices ao quadro.

Represente diversos cubos com distintas orientações mas sempre com uma orientação de faces paralelas ao quadro. Garanta que todos os cubos têm espacialmente as mesmas dimensões (sugestão: parta da projeção ortogonal dos cubos no quadro).

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto **P** ao centro, e em que o raio da circunferência **[d]** ronde os **14cm**.

Vejamos o que acontece se associarmos um sistema de coordenadas ao cubo em que os eixos têm as direções **a**, **b** e **c**. Vamos considerar que um dos eixos contém uma aresta. Seja $x \parallel DA$, $y \parallel DH$ e $z \equiv DC$ (figura 1.152). Ao estabelecer um referencial externo torna-se possível caracterizar as direções e as orientações externamente. Neste caso omitimos qualquer sistema de referência interno, embora pudéssemos ter considerado qualquer um, alinhado ou não com o sistema externo.

$\overline{D''D_R}$) (porquê?); e a sua abscissa (coordenada X) é negativa (porquê?) e é dada pelo comprimento $\overline{P_1D''_1}$ (porquê?).

Vamos notar que pode não existir LT nem LH se o quadro for paralelo ao plano xy , o que se verifica, por exemplo, se $z \equiv HD$, o que acontece na figura 1.153.

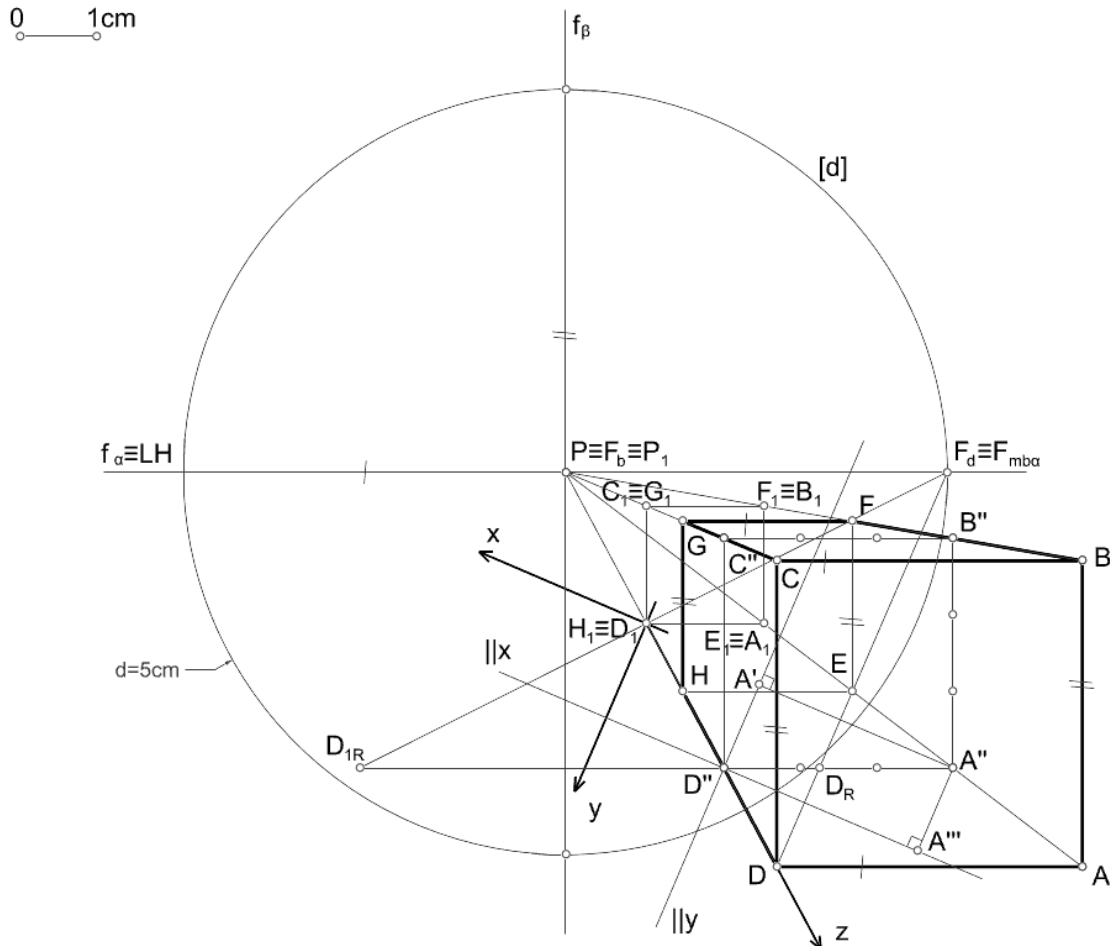


Fig. 1.153. Associação de um sistema de referência externo ao cubo com um eixo contendo uma aresta e com o plano xy paralelo ao quadro.

Com este sistema de referência, as retas com a direção a e c são horizontais, as retas com a direção c são verticais, e as retas com orientação d são oblíquas a 45° com o quadro. Os planos com orientação α e β são verticais, e os planos com orientação δ são horizontais. Neste caso não é possível definir a LH e a LT (porquê?). Repare-se que entre a perspetiva do cubo das últimas duas figuras nada mudou. A única diferença é o sistema de referência externo e, por isso, muda a projeção horizontal do cubo e as coordenadas dos vértices.

Por exemplo, em relação ao vértice A , as coordenadas X , Y e Z são dadas, respetivamente pelos comprimentos $\overline{A'A''}$, $\overline{A'A'''}$ e $\overline{D_{1R}D_R}$ (porque é igual à cota do vértice D), sendo as duas primeiras negativas e a terceira positiva (porquê?).

Vamos notar que, independentemente da forma como estabelecemos o sistema de referência, o desenho de cubos, com uma orientação de faces paralela ao quadro, faz-se sempre da mesma forma. Isto é, mais importante do que estabelecer uma relação entre as arestas do cubo e um sistema de eixos, é entender a relação entre as direções das arestas, e o modo

como esta relação influencia a localização dos pontos de fuga e das linhas de fuga no quadro. E isto é válido para qualquer figura tridimensional.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Considerando um cubo nas condições descritas, defina o referencial externo de diferentes modos incluindo, quando possível, a representação da LT e da LH. Para cada um dos casos determine as coordenadas do observador e dos vértices do cubo, e caracterize as direções das arestas e as orientações das faces.

Procure resolver o problema inverso, isto é, sendo dadas as coordenadas do observador, a distância do observador ao quadro, a direção do olhar, e sabendo que o quadro é paralelo a um dos planos coordenados, represente o sistema de referência em perspectiva e, de seguida, represente cubos com várias dimensões e uma orientação de faces paralelas quadro; as outras orientações podem ou estar, ou não, contidas nas orientações dos planos coordenados (sugestão: esboce numa axonometria a relação entre estes elementos para auxílio do entendimento da situação espacial).

Sugere-se que produza cada um destes desenhos numa folha de tamanho A3, com o ponto P ao centro, e em que o raio da circunferência $[d]$ ronde os **14cm**. À medida que se for familiarizando com os conceitos e práticas adote o desenho à mão levantada.

Perspetiva de dois pontos de fuga

Na perspectiva de dois pontos de fuga considerámos a direção α paralela ao quadro e, consequentemente, a orientação α fica ortogonal ao quadro, pelo que a linha de fuga f_α passa pelo ponto P . Às direções b e c correspondem os pontos de fuga F_b e F_c pertencentes à linha de fuga f_α . À direção α não corresponde nenhum ponto de fuga próprio (porquê?).

Começámos por arbitrar a projeção cónica da aresta $[CD]$, de direção α , com **4cm** no desenho (figura 1.154). Sabemos que as perspectivas das arestas $[AB]$, $[EF]$ e $[HG]$ são graficamente paralelas à perspectiva daquela aresta (porquê?). Por outro lado, sabemos que o cubo tem duas faces contidas em planos perpendiculares a estas arestas. Esses planos têm uma orientação α que corresponde a linha de fuga f_α perpendicular à perspectiva da reta CD .

Para prosseguir com a representação do cubo é preciso agora arbitrar as inclinações das direções b e c relativamente ao quadro. Sejam estas θ° e $90^\circ - \theta^\circ$, respetivamente. Para podermos representar no desenho os pontos de fuga F_b e F_c , torna-se necessário rebater o plano projetante da orientação α em torno do seu traço no quadro, isto é, em torno de f_α . Através desta operação obtém-se o observador rebatido $O_{R\alpha}$, pertencente à circunferência $[d]$ (porquê?), o que permite representar as retas projetantes das direções b e c rebatidas, isto é, $O_{R\alpha}F_b$ e $O_{R\alpha}F_c$. Tendo o ponto F_b , podem representar-se as perspectivas das retas DH e CG . Analogamente, representam-se as perspectivas das retas CB e DA convergentes no ponto de fuga F_c .

Às faces $[ABCD]$ e $[FGHE]$ corresponde a orientação δ ortogonal à orientação α ; às faces $[CDHG]$ e $[ABFE]$ corresponde a orientação β também ortogonal à orientação α .

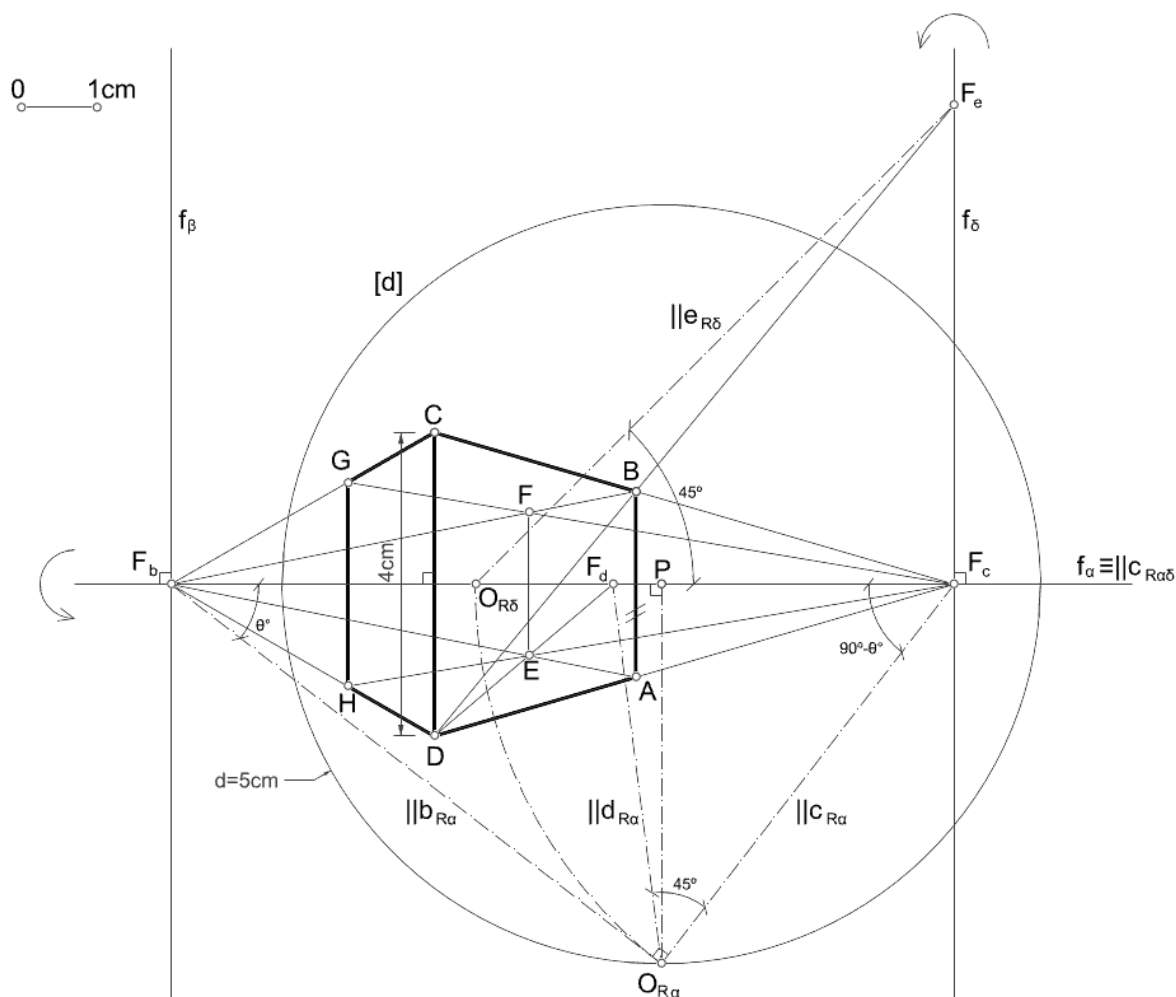


Fig. 1.154. Perspectiva de um cubo com uma direção de arestas paralela ao quadro.

Como a direção comum às orientações α e δ é a direção c , a linha de fuga f_δ , deve conter o ponto F_c . Analogamente a linha de fuga f_β deve conter o ponto de fuga F_b . Por outro lado, como a direção comum às orientações β e δ é a direção a , paralela ao quadro, então as linhas de fuga f_δ e f_β têm a direção a , isto é, são perpendiculares à linha de fuga f_α .

Para representar a face $[ABCD]$ é necessário determinar agora a projeção cônica do ponto B ou o ponto A . Por exemplo, sabe-se que a perspectiva da reta BD , de direção e a 45° entre as direções a e c , deve ter o ponto de fuga F_e pertencente à linha de fuga f_δ (porquê?).

Para determinar o ponto F_e no desenho é preciso proceder ao rebatimento do plano projetante com orientação δ em torno do seu traço frontal, a reta f_δ . Neste movimento, o observador O descreve um arco contido num plano perpendicular à charneira, com centro onde esse plano interseja a charneira. Neste caso, esse plano é o plano projetante com orientação α , por isso, o centro do arco do rebatimento do ponto O é o ponto F_c . Assim, o ponto $O_{R\delta}$ pertence à reta f_α (porquê?). Como já havíamos representado o rebatimento do plano projetante com orientação α para o quadro, pode representar-se, rebatido, o arco do rebatimento do ponto O em torno de f_δ , isto é, o arco de centro F_c e raio igual a $\overline{O_{R\alpha}F_c}$. Quando este arco interseja f_α determina-se $O_{R\delta}$ e a reta projetante com a direção c rebatida, isto é a reta $\parallel c_{R\delta}$, que fica coincidente com f_α (porquê?). Note-se que há dois sentidos possíveis para o rebatimento. Agora é possível representar a reta $O_{R\delta}F_e$, isto é, a reta $\parallel e_{R\delta}$ a 45° com a reta $\parallel c_{R\delta}$, de modo a determinar o

ponto F_e pertencente à reta f_δ . Neste exemplo, a direção c é a direção de maior inclinação da orientação δ relativamente ao quadro tal como a direção b é a direção de maior inclinação da orientação β e o ponto P é o ponto de fuga da direção de maior inclinação da orientação α . Outra forma de notar o ponto de fuga F_b seria $F_{>\delta}$.

Pelo ponto F_e conduz-se a perspectiva da reta BD determinando o ponto B na interseção com a reta CF_c . A aresta $[AB]$ é paralela à aresta $[CD]$. Pelas perspectivas dos pontos A e B conduzem-se as retas AF_b e BF_b (porquê?).

De seguida podemos passar à determinação dos pontos G e H nos mesmos termos em que determinámos A e B ou podemos passar à determinação dos pontos F ou E resolvendo um dos quadrados com orientação α . É esta última opção que vamos considerar. Para o efeito determinámos o ponto de fuga F_d da direção d a 45° entre as direções c e b . Logicamente, F_d pertence a f_α (porquê?). Conduzido a reta DF_d determina-se a perspectiva do vértice E na interseção com a reta AF_b . A partir daqui, a determinação das perspectivas dos vértices restantes não é mais que aplicação de procedimentos já descritos (quais?).

Embora não se conheça a dimensão do cubo nem a sua localização no espaço, isto não é impeditivo de elaborar a perspectiva, como já vimos anteriormente. Mais uma vez sublinhamos que esta bordagem se aproxima do que é feito no desenho de observação à mão levantada.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos nas condições descritas. Os cubos devem ter tamanhos variados no desenho. Defina um critério de visibilidade que lhe permita arbitrar, visualmente, que cubos se sobrepõem a que cubos.

Num desenho, represente um cubo nas condições descritas. Considerando o cubo como um módulo de uma grelha espacial tridimensional, desenvolva o desenho dessa grelha expandindo-a de modo a ocupar a totalidade da folha de desenho.

Num desenho, represente diversos cubos com distintas orientações mas sempre com uma direção de arestas paralelas ao quadro. Garanta que todos os cubos têm espacialmente as mesmas dimensões (sugestão: parta da projeção ortogonal da aresta no quadro e propague a dimensão de uns cubos para outros).

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada numa folha de tamanho A3, com o ponto P ao centro, e em que o raio da circunferência $[d]$ ronde os **11cm**.

Como não está declarado nenhum sistema de referência apenas é possível dizer que as direções b , c , d e e são oblíquas ao quadro e que a direção a é paralela ao quadro. Do mesmo modo apenas é possível dizer que as orientações β e δ são oblíquas ao quadro, porque as suas linhas de fuga não passam por P , e que a orientação α é ortogonal ao quadro, porque a sua linha de fuga passa por P .

Se introduzirmos um sistema de referência interno podemos especificar melhor as direções das arestas e as orientações das faces. Na figura seguinte, estabelecemos de três modos distintos o sistema de referência interno (as construções auxiliares estão omissas).

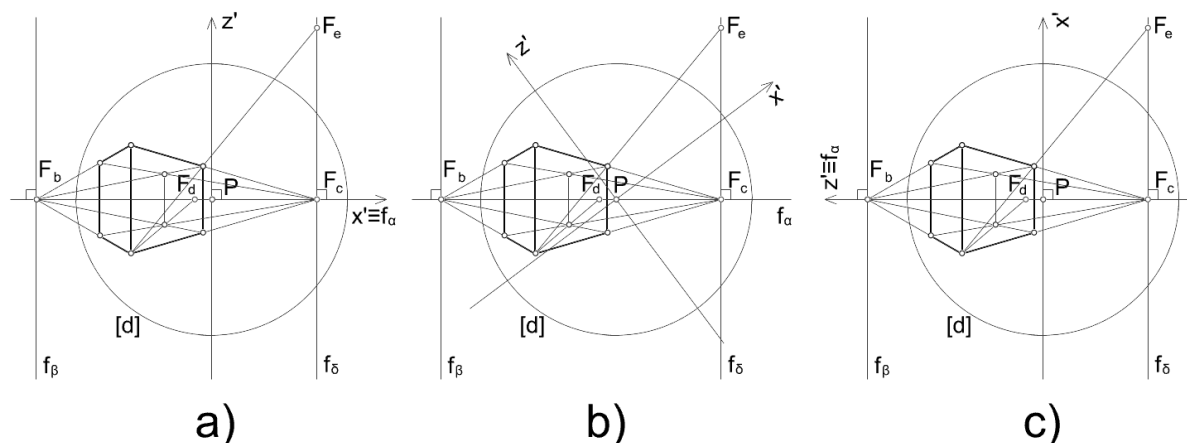


Fig. 1.155. Especificação do sistema de referência interno.

No primeiro caso (figura 1.155.a), $x' \equiv f_\alpha$ e $z' \parallel f_\beta \parallel f_\delta$. A direções **a**, **b** e **c** são, respetivamente, vertical, horizontal com abertura para a esquerda em relação ao quadro, e horizontal com abertura para a direita em relação ao quadro. A direção **d** também é horizontal com abertura para a esquerda em relação ao quadro. A direção **e** é oblíqua ascendente e com abertura para a direita em relação ao quadro. As orientações **α** , **β** e **δ** são, respetivamente, horizontal, vertical com abertura para a esquerda em relação ao quadro, e vertical com abertura para a direita em relação ao quadro.

No segundo caso (figura 1.155.b), x' e z' estão inclinados relativamente a todas as linhas de fuga. A direções **a**, **b** e **c** são, respetivamente, frontal com abertura para direita, oblíqua ascendente com abertura para a esquerda em relação ao quadro, e oblíqua descendente com abertura para a direita em relação ao quadro. A direção **d** é oblíqua ascendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro. A direção **e** é oblíqua ascendente e com abertura para a direita em relação ao quadro. As orientações **α** , **β** e **δ** são, respetivamente, de topo com abertura para a esquerda em relação ao plano $x'y'$, oblíqua ascendente com abertura para a esquerda em relação ao quadro, e oblíqua descendente com abertura para a direita em relação ao quadro.

No terceiro caso (figura 1.155.c), $z' \equiv f_\alpha$ e $x' \parallel f_\beta \parallel f_\delta$. A direções **a**, **b** e **c** são, respetivamente, fronto-horizontal, de perfil ascendente em relação ao quadro, e de perfil descendente em relação ao quadro. A direção **d** também é de perfil ascendente em relação ao quadro. A direção **e** é oblíqua descendente e com abertura para a direita em relação ao quadro. As orientações **α** , **β** e **δ** são, respetivamente, de perfil, de rampa ascendente em relação ao quadro, e de rampa descendente em relação ao quadro.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Concatenando as três perspectivas num único desenho (o que implica rodar os cubos para alinhar os referenciais), expanda o desenho introduzindo cubos adicionais. Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto **P** ao centro, e em que o raio da circunferência **[d]** ronde os **11cm**.

No exemplo dado, a perspectiva da aresta **[CD]** mede **4cm** no desenho. Mas isso nada diz acerca do tamanho do cubo. Tal como no caso da perspectiva de 1 ponto de fuga, a resolução da indefinição da dimensão do cubo faz-se declarando o comprimento das arestas. Suponhamos

Recuperar a relação do cubo com o quadro significa interseitar os planos das faces do cubo com o quadro de modo a que a distância entre os traços dos planos perpendiculares ao quadro distem **3cm** no desenho (como determinar estas interseções?). Estes traços são obviamente paralelos à linha de fuga f_α (porquê?). Já os traços dos planos de orientação β e δ têm a direção a (porquê?). Seja N o ponto de interseção da reta AD com o quadro. Se considerarmos a rotação da aresta $[AD]$ para o quadro, em torno do ponto N , no plano da face $[ADHE]$, vamos obter o segmento $[A_R D_R]$ cujo comprimento, no desenho, deve ser 3cm (porquê?), contido no traço frontal do plano da face $[ADHE]$. Para o efeito devemos considerar o ponto de fuga de medição da direção c por respeito à orientação α , isto é, o ponto $F_{mca} \equiv O_{R\delta}$. Também pertence a este traço frontal o ponto A'' , projeção ortogonal do ponto A no quadro. E conhecendo A'' , determinar a distância do ponto A ao quadro faz-se nos exatos termos referidos em relação à perspectiva de 1 ponto de fuga (operação não efetuada no desenho).

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos em condições idênticas às descritas. Para cada cubo arbitre uma verdadeira grandeza do comprimento das arestas e , e de seguida, determine a distância de cada um dos vértices ao quadro.

Represente diversos cubos com distintas orientações mas sempre com uma orientação de faces paralelas ao quadro. Garanta que todos os cubos têm espacialmente as mesmas dimensões (sugestão: parta da projeção ortogonal de uma aresta no quadro e propague-a para os outros cubos).

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto P ao centro, e em que o raio da circunferência $[d]$ ronde os **11cm**.

Vamos agora associar um sistema de coordenadas ao cubo. Vamos fazê-lo primeiro considerando que $x \parallel DA$, $y \parallel HD$ e $z \equiv CD$ (figura 1.157). Ao estabelecer um referencial externo torna-se possível caracterizar as direções e as orientações externamente, como já fizemos em relação à perspectiva de 1 ponto de fuga.

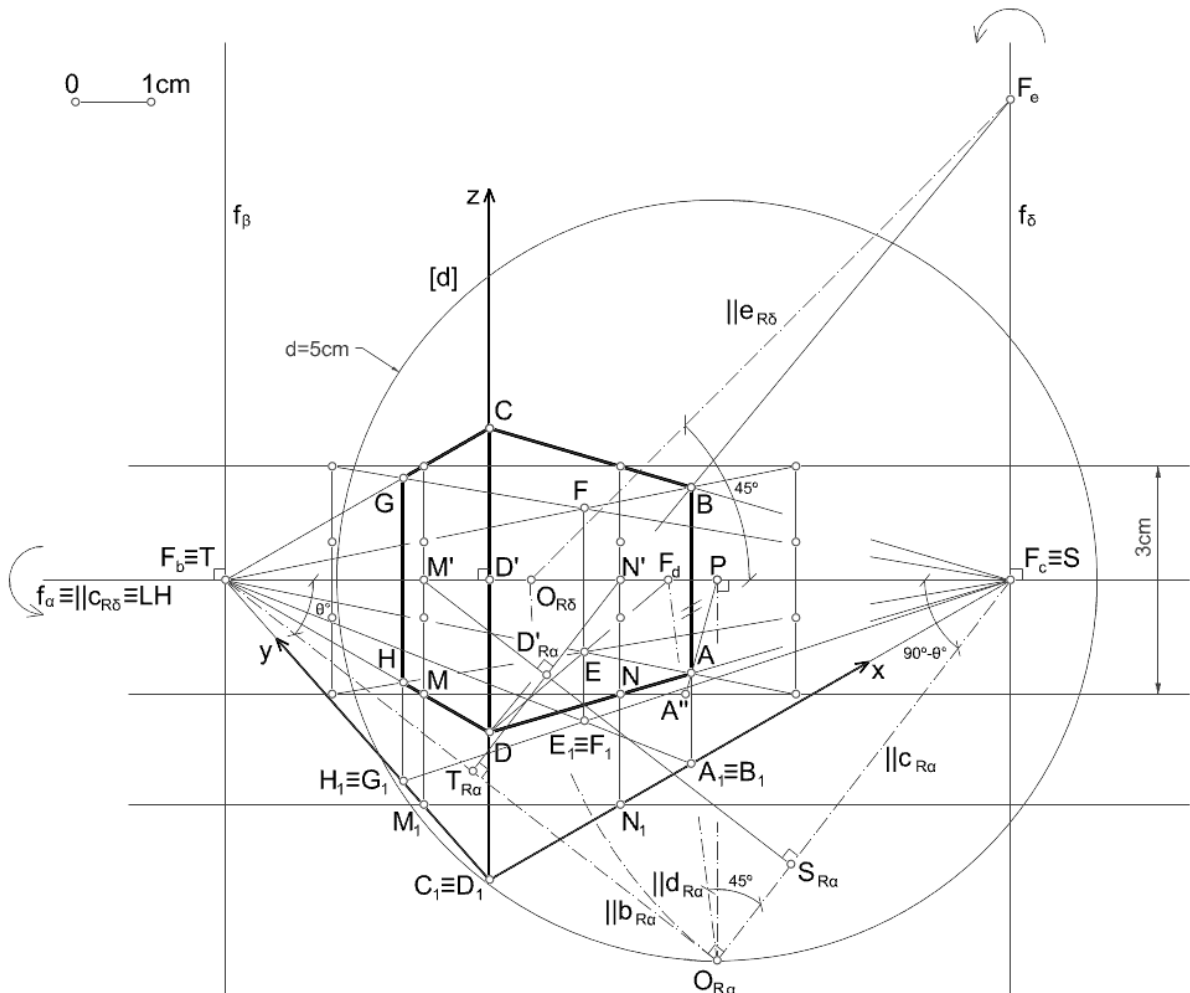


Fig. 1.157. Associação de um sistema de referência externo ao cubo com os eixos paralelos às arestas do cubo e um deles contendo uma aresta.

Neste sistema de referência, as retas com a direção a são verticais, as retas com a direção b são de topo, retas com a direção c são fronto-horizontais e retas com a direção d são

horizontais, as retas com a direção e são frontais. Como omitimos um sistema interno, não faz sentido falar em abertura para a direita ou para a esquerda. Os planos com orientação α são horizontais, os planos com orientação β são de perfil e planos com orientação δ são frontais. Ao definir um sistema externo, podemos agora considerar as projeções horizontais, isto é, as projeções ortogonais no plano xy e as suas respectivas projeções cónicas. Neste caso, também é possível definir a LH e a LT, sendo que a primeira coincide com a linha de fuga f_α (porquê?).

No sistema de referência definido podemos determinar as coordenadas de qualquer ponto. Por exemplo as coordenadas X , Y e Z do ponto A são, respetivamente $+3cm$, $0cm$ e $+\overline{NN_1}$. Também podemos determinar as coordenadas do observador neste sistema de referência. Da observação da figura é possível perceber que a coordenada Z do observador é positiva, sendo negativas as coordenadas X e Y . Sejam $D'N'$ e $D'M'$ as retas de interseção do plano do horizonte com os planos coordenados zx e yz , respetivamente. E sejam T e S os pontos de interseção destas retas com os planos projetantes com orientação β e δ , respetivamente. A distância entre os pontos D' e S corresponde à coordenada Y e a distância entre os pontos D' e T corresponde à coordenada X . As verdadeiras grandezas destas medidas são obtidas pelo rebatimento do plano do horizonte. Assim, o valor da coordenada Y é dado pelo comprimento $\overline{D'_{R\alpha}S_{R\alpha}}$ e o valor da coordenada X é dado pelo comprimento $\overline{D'_{R\alpha}T_{R\alpha}}$. Já o valor da coordenada Z é dado pelo comprimento $\overline{N'N_1}$.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Em relação à perspetiva da figura 1.157, defina o referencial de diferentes modos, incluindo referenciais estabelecidos nos termos da perspetiva de 1 ponto de fuga, isto é, em que um dos eixos coordenados é perpendicular ao quadro, considerando, quando aplicável, a representação da LH e da LT. Para cada um dos casos, determine as coordenadas dos vértices do cubo e do observador, e caracterize as direções das arestas e as orientações das faces do cubo.

Procure resolver o problema inverso, isto é, sendo dadas as coordenadas do observador, a distância do observador ao quadro, a direção principal do olhar, e sabendo que a direção principal do olhar é paralela a um dos planos coordenados, represente o sistema de referência em perspetiva e, de seguida, represente cubos com várias dimensões e faces paralelas aos planos coordenados (sugestão: esboce numa axonometria a relação entre estes elementos para auxílio do entendimento da situação espacial).

Sugere-se que produza cada um destes desenhos numa folha de tamanho A3, com o ponto P ao centro, e em que o raio da circunferência $[d]$ ronde os **11cm**. À medida que se for familiarizando com os conceitos e práticas adote o desenho à mão levantada.

Perspetiva de três pontos de fuga

Na perspetiva de três pontos de fuga consideramos a representação de um cubo em que todas as direções de arestas, a , b e c , sendo ortogonais entre si, são oblíquas ao quadro. Nessa situação, os pontos de fuga das três direções, F_a , F_b e F_c , definem sempre um triângulo acutângulo de que o ponto P é o ortocentro e projeção ortogonal do observador O no quadro. As orientações β , α e δ , ortogonais entre si, correspondem às linhas de fuga f_β , f_α e f_δ , respetivamente. A distância do observador ao quadro é a altura da pirâmide de base $[F_a, F_b, F_c]$ e vértice O . Repare-se na analogia com a axonometria ortogonal. As retas que se

interseção no ponto P determinam, nos lados do triângulo $[F_a, F_b, F_c]$, os pontos de fuga das direções de maior inclinação das orientações das faces do cubo (porquê?). Por exemplo, se considerarmos a orientação α podemos determinar a sua inclinação relativamente ao quadro, $90^\circ - \theta^\circ$, que é complementar da inclinação da direção a relativamente ao quadro, θ° . Estas duas direções, $> i_\alpha$ e a , definem uma orientação π ortogonal ao quadro. O plano projetante com orientação π contém a distância $\overline{OP}$ que pode ser determinada através do seu rebatimento para o quadro em torno de f_π . Este rebatimento também permite obter graficamente as amplitudes $90^\circ - \theta^\circ$ e θ° . No desenho é omissa a representação da circunferência de distância $[d]$.

Uma forma de representar um cubo nestas condições é começar por arbitrar o triângulo $[F_a, F_b, F_c]$ e de seguida a perspectiva de uma das arestas. No caso da figura 1.158 arbitrou-se a perspectiva da aresta $[CD]$ cuja reta de suporte tem ponto de fuga em F_a .

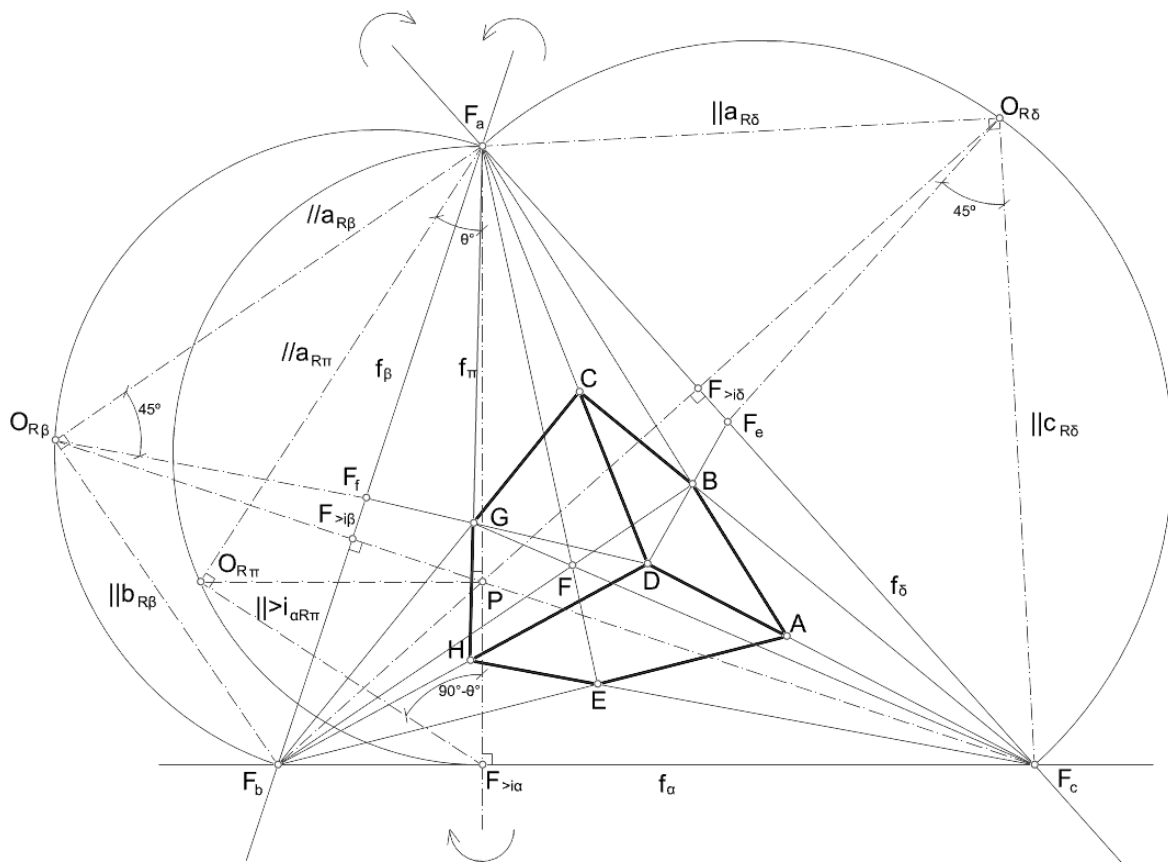


Fig. 1.158. Perspetiva de um cubo com as direções das arestas oblíquas ao quadro.

Dada a perspetiva da aresta $[CD]$ do cubo, procede-se à representação das perspetivas das retas CB e DA convergentes em F_c , e das retas DH e CG convergentes em F_b . Para representar o quadrado $[ABCD]$ é necessário determinar a perspetiva do vértice B ou do vértice A . Para determinar a perspetiva do vértice B , representa-se a perspetiva da reta BD convergente em F_e , ponto de fuga da direção e a 45° entre as direções a e c na orientação δ . Para determinar este ponto de fuga considerou-se o rebatimento, para o quadro, do plano projetante com orientação δ em torno do seu traço frontal, a reta f_δ . Mais uma vez se chama a atenção para a analogia com a axonometria ortogonal. A perspetiva da reta AB converge no ponto de fuga F_a (porquê?). A representação do quadrado $[DCGH]$ é em tudo idêntica. Após termos

representado estas duas faces do cubo, a determinação do resto da perspectiva é de fácil resolução (como?).

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos das condições descritas a partir da definição de um triângulo $[F_a, F_b, F_c]$. Os cubos devem ter tamanhos variados no desenho. Defina um critério de visibilidade que lhe permita arbitrar, visualmente, que cubos se sobrepõem a que cubos

Num desenho, represente um cubo nas condições descritas. Considerando o cubo como um módulo de uma grelha espacial tridimensional, desenvolva o desenho dessa grelha expandindo-a de modo a ocupar a totalidade da folha de desenho.

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada numa folha de tamanho A3, distribuindo bem os três pontos de fuga na folha.

Como não está declarado nenhum sistema de referência apenas é possível dizer que as direções a, b, c, e e f são oblíquas ao quadro. Do mesmo modo apenas é possível dizer que as orientações α, β e δ são oblíquas ao quadro, porque as suas linhas de fuga não passam por P , e que a orientação π é ortogonal ao quadro, porque a sua linha de fuga passa por P .

Se introduzirmos um sistema de referência interno podemos especificar melhor as direções das arestas e as orientações das faces, como já fizemos para os dois casos anteriores. Embora não tenha sido utilizado, considerou-se também o ponto de fuga F_d . Na figura seguinte, estabelecemos de três modos distintos o sistema de referência interno (as construções auxiliares estão omissas).

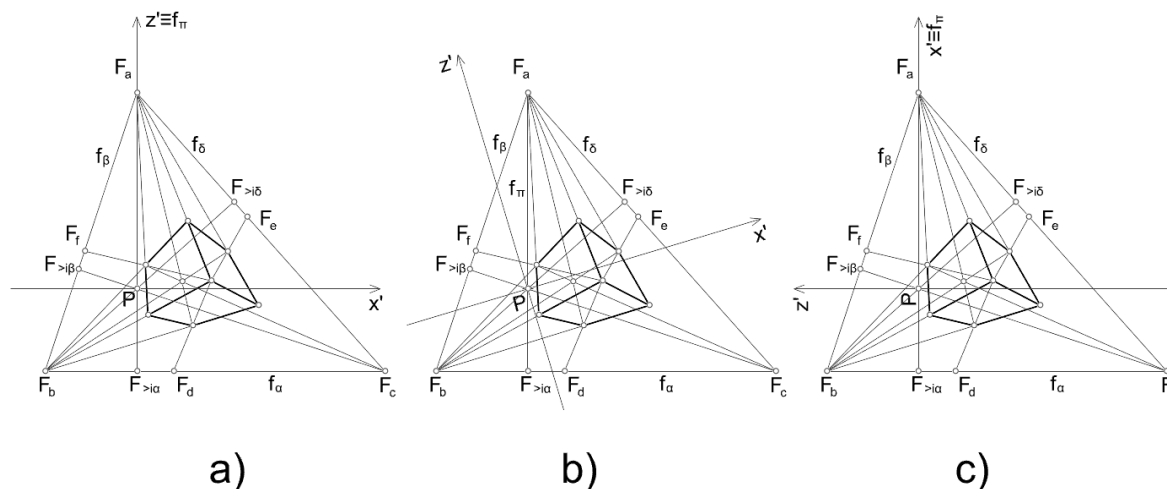


Fig. 1.159. Especificação do sistema de referência interno.

No primeiro caso (figura 1.159.a), $z' \equiv f_\pi$ e $x' \parallel f_\alpha$. As direções a e $> i\alpha$ são de perfil, ascendente a primeira e descendente a segunda; as direções e , e $> i\delta$ são oblíquas, ascendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro; as direções c , e d são oblíquas, descendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro; a direção b é oblíqua, descendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro; e as direções f e $> i\beta$ são oblíquas, ascendentes e com abertura para a esquerda em relação ao quadro. A orientação π é de perfil; a orientação α de rampa, descendente em relação ao quadro; a

orientação δ é oblíqua, ascendente e com abertura para a direita em relação ao quadro; e a orientação β é oblíqua, ascendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro.

No segundo caso (figura 1.159.b), x' e z' estão inclinados relativamente a todas as linhas de fuga. As direções a , $> i\delta$ e e são oblíquas, ascendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro; as direções c e d são oblíquas, descendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro; as direções b e $> i\alpha$ são oblíquas, descendentes e com abertura para a esquerda em relação ao quadro; e as direções f e $> i\beta$ são oblíquas, ascendentes e com abertura para a esquerda em relação ao quadro. A orientação π é de topo com abertura para a direita em relação ao plano $x'y'$; a orientação δ é oblíqua, ascendente e com abertura para a direita em relação ao quadro; a orientação α é oblíqua, descendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro; e a orientação β é oblíqua, ascendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro.

No terceiro caso (figura 1.159.c), $z' \parallel f_\alpha$ e $x' \equiv f_\pi$. As direções a e $> i\alpha$ são horizontais, a primeira com abertura para a direita e a segunda com abertura para a esquerda em relação ao quadro; as direções e , e $> i\delta$ são oblíquas, descendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro; as direções c , e d são oblíquas, descendentes e com abertura para a esquerda em relação ao quadro; a direção b é oblíqua, ascendente e com abertura para a esquerda em relação ao quadro; e as direções f e $> i\beta$ são oblíquas, ascendentes e com abertura para a direita em relação ao quadro. A orientação π é horizontal; a orientação α é vertical com abertura para a esquerda em relação ao quadro; a orientação δ é oblíqua, descendente e com abertura para a direita em relação ao quadro; e a orientação β é oblíqua, ascendente e com abertura para a direita em relação ao quadro.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Concatenando as três perspectivas num único desenho (o que implica rodar os cubos para alinhar os referenciais), expanda o desenho introduzindo cubos adicionais. Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto P aproximadamente ao centro.

Neste exemplo arbitrou-se a perspectiva da aresta $[CD]$. Mas isso nada nos diz acerca da dimensão do cubo (figura 1.160). Mais uma vez, e à semelhança dos casos anteriores, a perspectiva pode referir-se a um pequeno cubo situado perto do observador ou a um cubo muito grande e afastado do observador. E mais uma vez, uma das formas de resolver essa ambiguidade é arbitrar a dimensão da aresta do cubo. Considere-se então que as arestas do cubo medem $4cm$.

Considerando o ponto de fuga de medição da direção a , por respeito à orientação δ , isto é, o ponto $F_{ma\delta}$, podemos obter a perspectiva do segmento $[DC_{R'}]$ correspondente à rotação da aresta $[DC]$ do cubo para um plano paralelo ao quadro, em torno do vértice D , no plano da face $[ABCD]$. Graficamente, $[DC_{R'}]$ é paralelo a f_δ (porquê?). No desenho, se $\overline{DC_{R'}} < 4cm$ então o segmento $[DC_{R'}]$ está no espaço real (porquê?), já se $\overline{DC_{R'}} = 4cm$ então $[DC_{R'}]$ está no quadro (porquê), e se $\overline{DC_{R'}} > 4cm$, que é o caso, então $[DC_{R'}]$ está no espaço intermédio (porquê?). Se a rotação da aresta $[DC]$ for feita em torno do seu traço no quadro, o segmento rodado $[D_R C_R]$ terá a sua perspectiva com $4cm$ de comprimento (porquê?) e também será graficamente paralelo a f_δ (porquê?). Se considerarmos o arco da rotação do ponto C em torno do ponto D , e

o arco da rotação do ponto C em torno do traço da reta CD no quadro (ponto N ainda não determinado), conseguimos perceber que ambos os arcos têm a mesma amplitude (porquê) e que ambos os arcos partilham um extremo comum, o vértice C , logo $CC_{R'} \equiv CC_R$ e é paralela à reta DD_R . Assim, determinar graficamente os pontos C_R e D_R é determinar, no desenho, um segmento $[C_R D_R]$ paralelo a f_δ , com 4cm de comprimento, apoiado nas retas $CF_{ma\delta}$ e $DF_{ma\delta}$. O ponto de interseção da reta $C_R D_R$ com a reta CD é o ponto N , o seu traço no quadro. O ponto de interseção da reta $C_R D_R$ com a reta AD é o ponto N' , traço da reta AD no quadro. A partir do ponto N , ou do ponto N' , pode determinar-se o ponto N'' , traço da reta DH no quadro. O triângulo $[N'' N' N]$, secção produzida pelo quadro no cubo, é homotético do triângulo $[F_b, F_c, F_a]$ com centro na perspectiva do vértice D (porquê?).

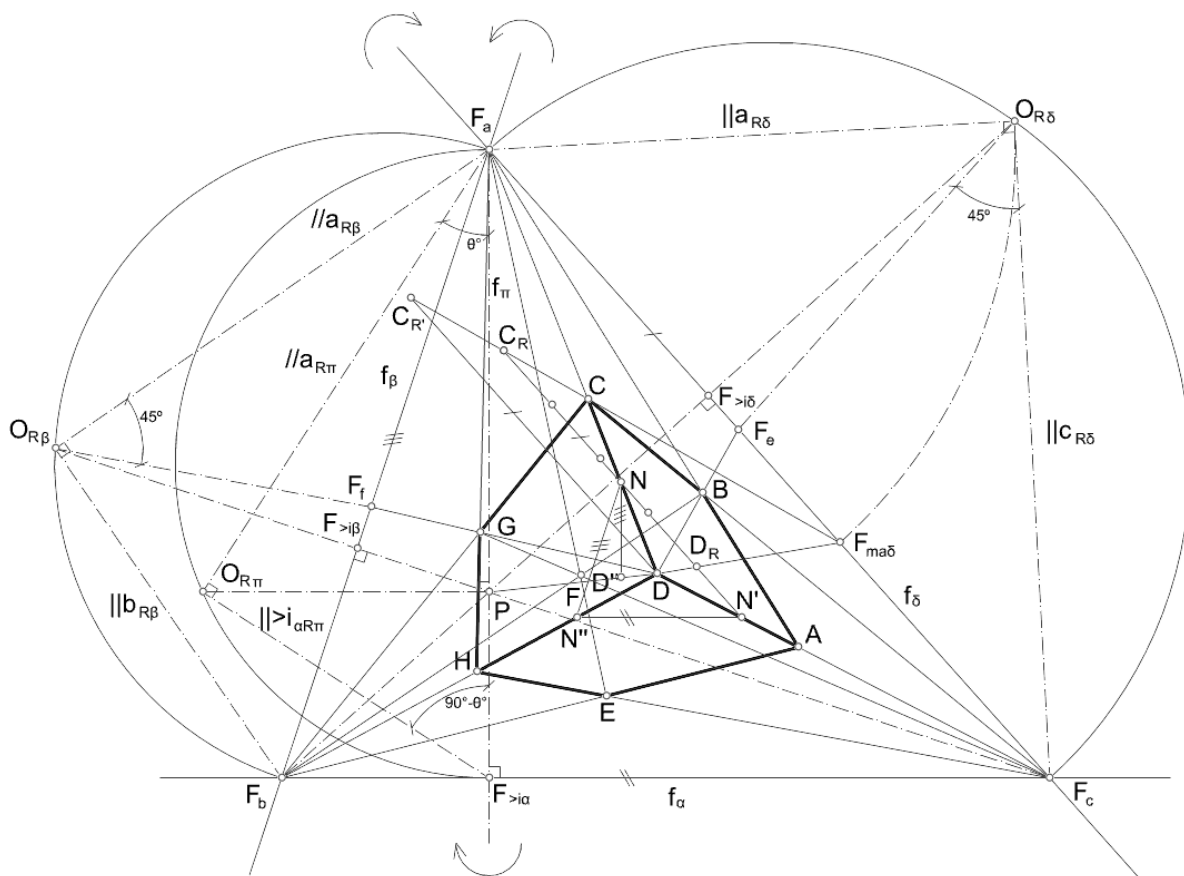


Fig. 1.160. Recuperação da posição do cubo em relação ao quadro e ao observador.

A projeção ortogonal do vértice D do cubo no quadro, o ponto D'' , é o traço da reta perpendicular ao quadro (com ponto de fuga P) passante por D . Este ponto pertence ao traço, no quadro, do plano com orientação π passante pela reta CD , sendo aquele a projeção ortogonal desta no quadro. Obviamente, o traço deste plano é paralelo a f_π (porquê). E conhecendo D'' , determinar a distância do ponto D ao quadro faz-se nos exatos termos referidos em relação à perspectiva de 1 ponto de fuga (operação não realizada no desenho). Para os outros vértices do cubo procede-se de forma análoga. Fica assim resolvida a relação entre o cubo, o observador e o quadro.

Representar, em perspectiva, cubos com três direções de arestas oblíquas ao quadro é independente de qualquer sistema de referência que se escolha, desde que se conheça a relação das direções e das orientações entre si e relativamente ao quadro e, consequentemente os pontos de fuga e linhas de fuga correspondentes.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Num desenho, represente cubos em condições idênticas às descritas. Para cada cubo arbitre uma verdadeira grandeza do comprimento das arestas e , e de seguida, determine a distância de cada um dos vértices ao quadro.

Represente diversos cubos com distintas orientações mas sempre com uma orientação de faces paralelas ao quadro. Garanta que todos os cubos têm espacialmente as mesmas dimensões (sugestão: parta de um cubo e propague a dimensão para os outros cubos).

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada em folhas de tamanho A3, com o ponto P aproximadamente ao centro.

Vamos agora associar um sistema de referência externo associado ao cubo. Seja $z \equiv CD$, $x \parallel DA$ e $y \parallel DH$. Assim, fica $LH \equiv f_\alpha$ e $LT \parallel N'N'' \parallel f_\alpha$ (figura 1.161).

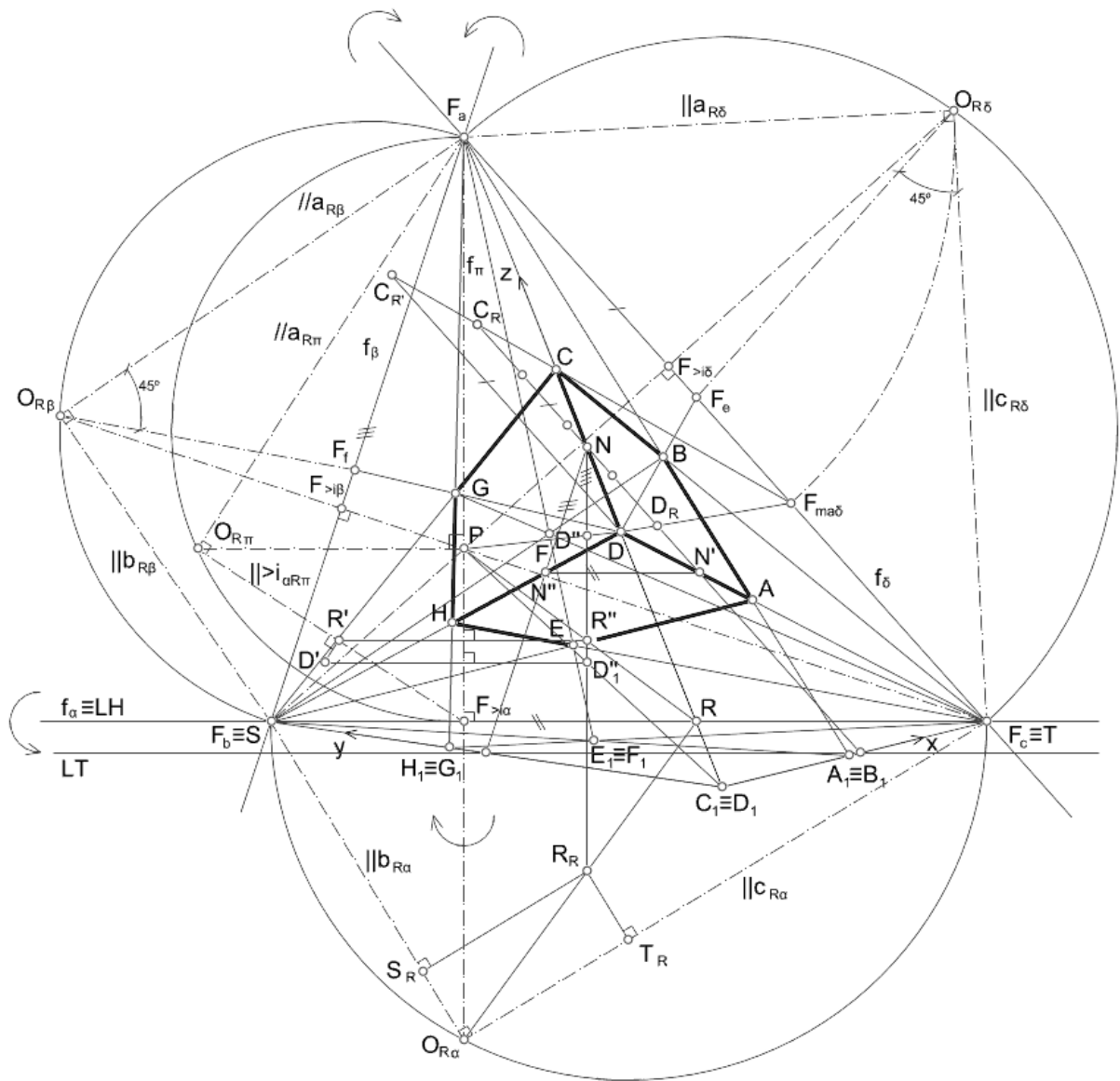


Fig. 1.161. Definição de um sistema de referência a partir de um cubo com todas as arestas oblíquas ao quadro. Determinação das coordenadas do observador.

Ao associarmos o sistema de referência externo podemos representar as perspectivas das projeções horizontais dos vértices do cubo. A origem do referencial externo é o ponto $C_1 \equiv D_1$.

Considerando o sistema de referência definido, a direção a é vertical, a direção b é de topo, a direção c é fronto-horizontal, as direções f_α e $> i\alpha$ são horizontais, as direções e, f_δ e $> i\delta$ são frontais, e as direções f, f_β e $> i\beta$ são de perfil. A direção ortogonal ao quadro e a direção f_π , são direções oblíquas relativamente ao sistema de referência. A orientação α é frontal, a orientação β é horizontal, a orientação δ é de perfil, a orientação π é vertical, e a orientação do plano $NN'N''$ é oblíqua.

Da leitura da figura percebe-se imediatamente que a coordenada Z do observador é positiva e que as restantes são negativas (porquê?).

Os eixos z, y e x são paralelos às retas projetantes que determinam F_a, F_b e F_c , respetivamente. A cota do observador corresponde à sua distância ao plano xy , que é igual à distância do ponto D_1 ao plano das projetantes com as direções c e b . Do mesmo modo, o valor da abcissa é igual à distância do ponto D ao plano das projetantes com as direções a e b , e o afastamento é igual à distância do ponto D ao plano das retas projetantes com as direções a e c . Seja R o ponto de interseção da reta DC com o plano das retas projetantes com as direções c e b , pelo que o valor da cota é dado pela verdadeira grandeza do segmento $[D_1R]$; seja S a projeção ortogonal do ponto R no plano das retas projetantes com as direções a e b , pelo que o valor da abcissa é dado pela verdadeira grandeza do segmento $[RS]$; seja T a projeção ortogonal do ponto R no plano das retas projetantes com as direções a e c , pelo que o valor do afastamento é dado pela verdadeira grandeza do segmento $[RT]$. A perspectiva do ponto R pertence a f_α , a perspectiva do ponto S coincide com o ponto de fuga F_b , e a perspectiva do ponto T coincide com o ponto de fuga F_c (porquê?). A projeção ortogonal do ponto R no quadro, o ponto R'' , é a interseção da reta ND'' com a reta RP (porquê?). A reta projetante do ponto R tem a sua projeção ortogonal no quadro coincidente com a reta PR'' (porquê?). A reta projetante do ponto R rebatida para o quadro em torno de f_α é a reta que une a perspectiva do ponto R com o ponto $O_{R\alpha}$, e o ponto R rebatido para o quadro em torno de f_α , isto é, o ponto R_R , pertence a esta reta.

Considerando o rebatimento do plano projetante, definido pelas direções b e c , para o quadro em torno de f_α , a coordenada X do observador é dada pelo comprimento $\overline{SR_R}$ e a coordenada Y é dada pelo comprimento $\overline{TR_R}$ (porquê?). Considerando o rebatimento do plano projetante com orientação π para o quadro, a coordenada Z do observador é dada pelo comprimento $\overline{R'D'}$ paralelo a $O_{R\pi}F_\alpha$ (porquê?).

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Em relação à perspectiva da figura 1.161, defina o referencial de diferentes modos, incluindo referenciais estabelecidos nos termos da perspectiva de 1 ponto de fuga e de 2 pontos de fuga, isto é, em que um dos eixos coordenados é perpendicular ao quadro, ou em que apenas um dos planos coordenados é perpendicular ao quadro, considerando, quando exista, a representação da LH e da LT. Para cada um dos casos como determinaria as coordenadas do observador? Para cada um dos casos caracterize as direções das arestas e as orientações das faces dos cubos de acordo com a taxonomia definida.

Procure resolver o problema inverso, isto é, sendo dadas as coordenadas do observador, a distância do observador ao quadro, a direção principal do olhar, e sabendo que a direção **OP** é oblíqua a todos os planos coordenados, represente o sistema de referência em perspectiva e, de seguida, represente cubos com várias dimensões e faces paralelas aos planos coordenados (sugestão: esboce numa axonometria a relação entre estes elementos para auxílio do entendimento da situação no espaço antes de proceder ao desenho em perspectiva).

Sugere-se que produza estes desenhos à mão levantada numa folha de tamanho A3, distribuindo bem os três pontos de fuga na folha.

Representação do ponto, da reta e do plano

De alguma forma, nos exemplos que precederam, já operámos com o ponto, a reta e o plano e já demos as bases que nos permitem perceber as operações básicas de interação entre estes elementos. Tal como na axonometria, a principal vocação da perspectiva não é a do estudo sistemático da representação do ponto, reta, plano bem como resolver todo o tipo de operações relacionadas com estes elementos. Por isso, apenas daremos um exemplo demonstrativo, considerando os seguintes dados e problema.

Considere-se um sistema perspetico em que a distância do observador ao quadro mede **4m**, a direção principal do olhar é horizontal e faz **50°** com o eixo coordenado **x**, e as coordenadas do ponto **P** são **(1.5, 1, 2)**. A linha do horizonte coincide com o eixo **x'** do referencial interno. No esquema da figura 1.162 ilustra-se esta configuração em projeção ortogonal horizontal.

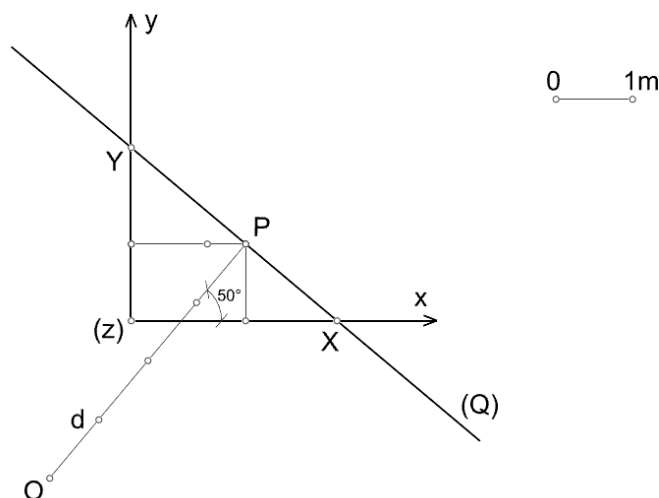


Fig. 1.162. Representação, em projeção horizontal, da relação da direção principal do olhar relativamente ao quadro e sistema de referência externo.

Seja então considerado o seguinte problema. Conduza-se, pelo ponto **R** $(1.5, -2, 4.5)$ uma reta **p** perpendicular ao plano α . O plano α é ascendente a **55°** com o quadro, passa pelo ponto **S** de coordenadas **(0, 0, 1.5)**, e o seu traço horizontal é paralelo ao quadro. Determine o ponto **I** de interseção da reta **p** com o plano α .

O primeiro passo na resolução do exercício passa obrigatoriamente pela definição do perspetógrafo. De seguida há que representar o sistema de referência externo. E após essa etapa poderão então representar-se os dados do problema e proceder à sua resolução conforme se ilustra na figura 1.163.

Começou por dispor-se a $LH \equiv x'$, o ponto P , e a circunferência de distância $[d]$. Como a direção principal do olhar é horizontal e $LH \equiv x'$, sabe-se que a LT é paralela a LH ficando $2m$ abaixo desta no desenho, porque é esta a cota do ponto P , isto é, a LT passa pelo ponto P_1 , projeção horizontal do ponto principal. Os pontos Y e X da LT, respetivamente à esquerda e direita de P_1 , representam-se diretamente a partir das medidas extraídas da projeção horizontal. Para representar os eixos x e y em perspectiva, é preciso determinar os seus pontos de fuga que pertencem à LH (porquê?). Para o efeito considerou-se o rebatimento do plano do horizonte, determinando O_R , a partir do qual se determinaram F_y e F_x (como?). A partir daqui, representar a perspectiva do referencial é simples (como?).

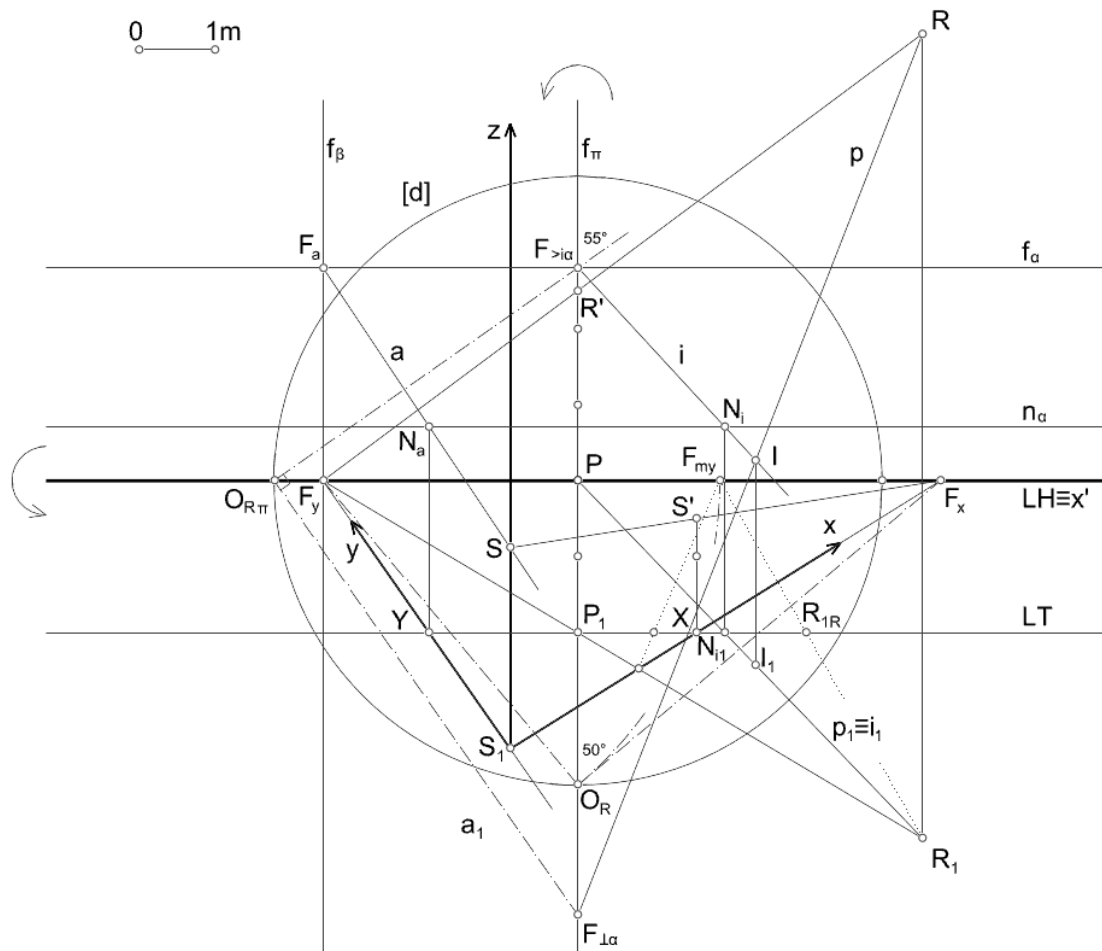


Fig. 1.163. Determinação do ponto I de interseção entre a reta p e o plano α .

O ponto de interseção dos eixos x e y é a projeção horizontal, S_1 , do ponto S pelo qual passa o plano α . Para representar o ponto S , pertencente a z , conduziu-se uma reta paralela ao eixo x passante pelo ponto S' que está $1.5m$ acima do ponto X . O ponto S é a interseção dessa reta com o eixo z .

Como o traço horizontal do plano α é paralelo ao quadro, então o plano α é de rampa considerando o sistema interno de referência; logo a sua direção de maior inclinação, $> i\alpha$, é de perfil a 55° com o quadro (considerando o sistema interno de referência). Para determinar o ponto de fuga dessa direção, considerou-se uma orientação de perfil π no sistema interno. O ponto de fuga $F_{>i\alpha}$ obtém-se a partir do rebatimento do observador para o quadro em torno da linha de fuga f_π . Determinado $F_{>i\alpha}$, conduz-se a linha de fuga f_α paralela a LH (porquê?). Para determinar o traço frontal do plano α , isto é, a reta n_α , que também sabemos ser paralela a LH

(porquê?), precisamos apenas de determinar o traço frontal de uma reta α qualquer do plano. Para o efeito considerámos o eixo y como a projeção horizontal da reta α . Isto significa que a reta α está contida num plano β , vertical no sistema interno, passante por y . A linha de fuga desta orientação, f_β , passa por F_y e é perpendicular à LH (porquê?). O ponto de fuga da reta α é o ponto de interseção entre as linhas de fuga f_β e f_α . A perspectiva da reta α passa pelo ponto F_α e pela perspectiva do ponto S . O traço frontal da reta α , isto é, o ponto N_α , tem a sua projeção horizontal em Y , na sua interseção como LT. Determinado N_α pode conduzir-se o traço n_α do plano α no quadro, paralelo a LH (porquê?).

A operação que nos permitiu determinar o ponto $F_{>\alpha}$, também nos permite determinar o ponto de fuga da direção de retas ortogonal à orientação α , isto é, o ponto de fuga $F_{\perp\alpha}$.

A projeção horizontal do ponto R pertence à reta paralela ao eixo y passante pelo ponto P_1 . Para determinar o ponto R_1 vai considerar-se a rotação daquela reta para o quadro, no plano xy , em torno do ponto P_1 . A reta, depois de rodada, fica coincidente com a LT, e o ponto R_{1R} dista $3m$ do ponto P_1 , no desenho (porquê?). Para determinar a perspectiva do ponto R_1 utiliza-se o ponto de fuga de medição da direção y , isto é, o ponto F_{my} .

O ponto R obtém-se a partir do ponto R' , localizado $4.5m$ acima de P_1 , conduzindo por esse ponto uma reta paralela ao eixo y e intersecando-a com a vertical passante por R_1 . Tendo o ponto R , pode conduzir-se a reta p perpendicular ao plano α . A sua perspectiva converge em $F_{\perp\alpha}$ e a perspectiva da sua projeção horizontal, p_1 , converge em P (porquê?).

Para determinar a interseção da reta p com o plano α , conduz-se pela reta um plano com orientação π . Este interseca o plano α segundo uma reta i . O ponto I pretendido é o ponto de concorrência entre as retas p e i .

Esta operação espacial que acabámos de descrever pode ser representada em perspectiva (o que acabámos de fazer), em axonometria, ou em MPO. Como já estudámos com algum detalhe este tipo de operações em MPO, contamos que o leitor consiga aplicar na perspectiva, sempre que necessário, os procedimentos correspondentes.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto.

Defina o referencial de diferentes modos, incluindo referenciais estabelecidos nos termos da perspectiva de 1 ponto de fuga, 2 pontos de fuga e 3 pontos de fuga. Em cada um dos casos procure representar pontos (definidos por coordenadas), retas e planos e proceder a operações de interseção entre eles.

Direção, orientação, proporção, dimensão e posição – Síntese

Até este momento, na maior parte dos casos estivemos a representar cubos. A vantagem de exercitarmos a perspectiva através da representação de cubos é poder interiorizar o estudo do paralelismo e da perpendicularidade, bem como desenvolver a intuição para a estruturação do espaço através de três direções ortogonais entre si e o modo como estas se comportam quando sujeitas à projeção cónica. Nesse sentido, o estudo geométrico da perspectiva acaba por confluir com a prática do desenho. Neste ponto vamos fazer uma síntese dos procedimentos que nos permitem exercer o controlo da direção, da orientação, da proporção, da dimensão e da posição numa representação em perspectiva, que já aflorámos nos exemplos precedentes.

Direção e orientação

Neste momento já deve ser claro que a perspectiva passa sempre por saber relacionar entre si as direções e as orientações presentes na cena que se pretende representar. A essas direções e orientações correspondem pontos de fuga e linhas de fuga que, para serem determinadas, implicam se se possa deduzir a relação das direções e das orientações relativamente ao quadro. No que concerne à direção e à orientação vamos utilizar o sistema de referência interno da perspectiva.

O lugar geométrico dos pontos de fuga das direções a α° com o quadro é uma circunferência $[c]$. Essa circunferência é o traço, no quadro, da superfície cônica de revolução, de vértice no observador O , cujas geratrizes estão inclinadas a α° com o quadro. O lugar geométrico das linhas de fuga das orientações a α° com o quadro é o conjunto das retas tangentes à circunferência $[c]$. Para uma dada orientação δ a α° com o quadro, o ponto de tangência entre a linha de fuga f_δ e a circunferência $[c]$ é o ponto de fuga $F_{>i\delta}$ da direção de maior inclinação da orientação δ . Para cada orientação δ a α° com o quadro, existe uma direção que lhe é ortogonal, a $90^\circ - \alpha^\circ$ com o quadro a que corresponde um ponto de fuga $F_{\perp\delta}$. Os pontos de fuga $F_{>i\delta}$ e $F_{\perp\delta}$ definem uma linha de fuga f_π passante por P , correspondente a uma orientação π ortogonal ao quadro. Os ângulos α° e $90^\circ - \alpha^\circ$ podem ser medidos no plano projetante com orientação π através do seu rebatimento para o quadro em torno de f_π . A linha de fuga f_π é perpendicular à linha de fuga f_δ no ponto de fuga $F_{>i\delta}$.

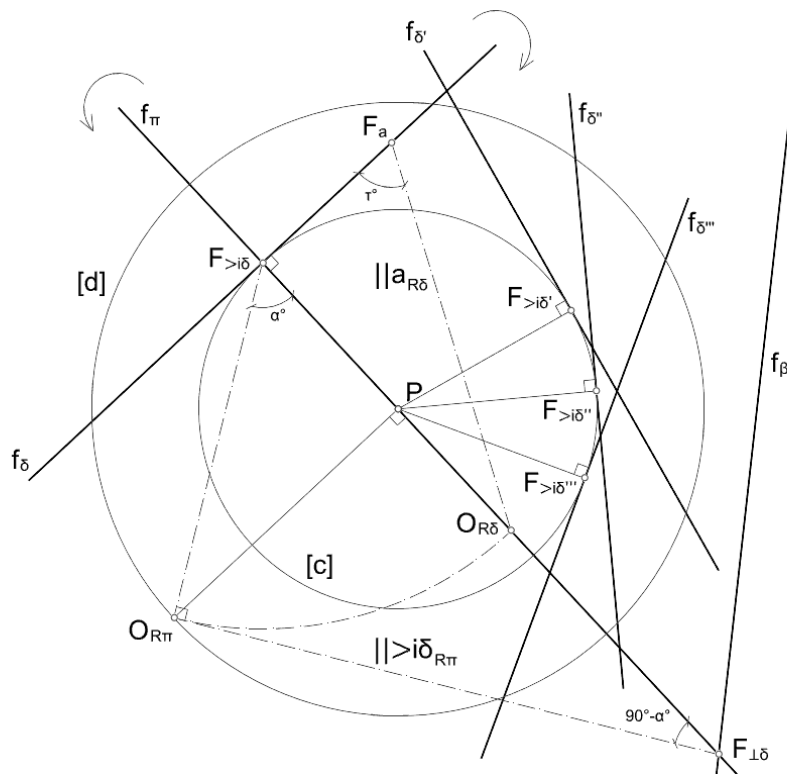


Fig. 1.164. Controlo da direção e da orientação.

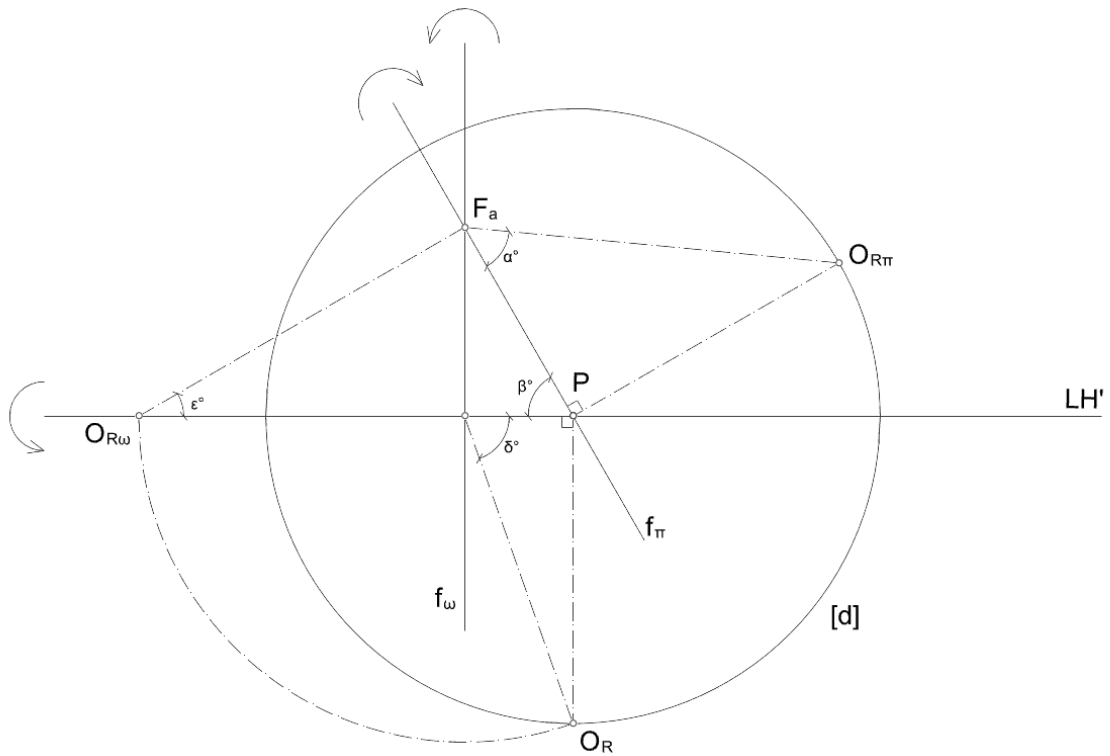


Fig. 1.165. Caraterização de uma direção.

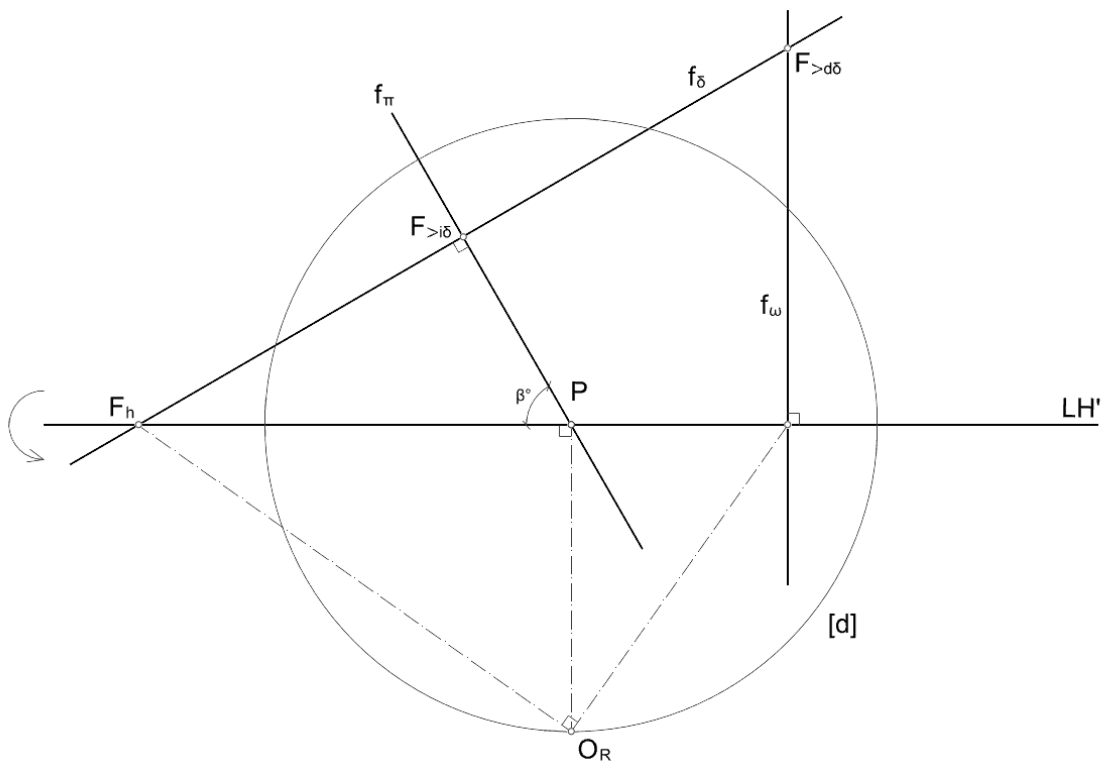


Fig. 1.166. Caraterização de uma orientação.

Qualquer ponto de fuga F_a pertencente à linha de fuga f_δ corresponde a uma direção a contida na orientação δ e ortogonal à direção $\perp \delta$. A inclinação τ° que a direção a tem em relação à direção paralela ao quadro, contida na orientação δ , pode ser medida através do rebatimento, para o quadro, do plano projetante com orientação δ em torno da linha de fuga f_δ . E qualquer

linha de fuga f_β passante pelo ponto de fuga $F_{\perp\delta}$ corresponde a uma orientação β ortogonal à orientação δ (figura 1.164).

Se estiver definida uma orientação de referência interna, por exemplo através da LH' , então é possível especificar as direções e orientações sem ambiguidade. Considere-se a direção a a que corresponde o ponto de fuga F_a (figura 1.165).

Trata-se de uma direção oblíqua ascendente, com abertura para a esquerda em relação ao quadro. A direção está a α° com o quadro; a direção da sua projeção horizontal está a δ° com o quadro, abertura para a esquerda; a projeção ortogonal no quadro está a β° com o plano $x'y'$, abertura para a esquerda; e a inclinação em relação a $x'y'$ é ε° .

No caso de uma orientação δ , dada pela linha de fuga f_δ , é possível caracterizar a sua direção de maior inclinação relativamente ao quadro, a que corresponde o ponto de fuga $F_{>i\delta}$, a direção paralela ao quadro, dada pela linha de fuga f_δ , a direção horizontal dada pela interseção entre LH' e f_δ , e a direção de maior inclinação (e maior declive), em relação ao plano $x'y'$, que se determina na interseção entre f_δ e f_ω , linha de fuga de uma orientação ω ortogonal à direção horizontal h (figura 1.166).

Proporção

Até agora, as únicas formas tridimensionais que representámos foram cubos. O controlo da proporção na representação dos cubos ficou assegurado pela utilização adequada de pontos de fuga correspondentes às direções das arestas e das diagonais das faces. Tratando-se de cubos, sabe-se que as direções das arestas são ortogonais entre si bem como as orientações das faces.

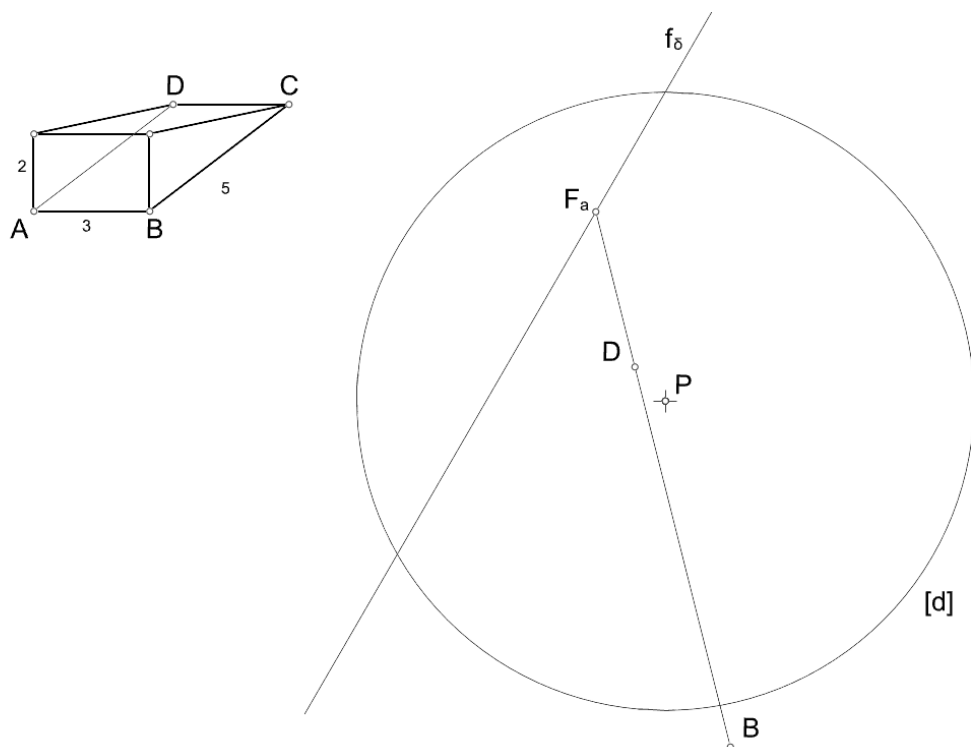


Fig. 1.167. Controlo da proporção através das do controlo das direções e das orientações (dados).

Também se sabe que cada orientação contém duas direções diagonais ortogonais entre si. Assim, desde que fosse conhecida a relação destas direções e orientações com o quadro, podia proceder-se à representação dos cubos mesmo sem conhecer as suas dimensões, bastando para o efeito, arbitrar a perspectiva de uma aresta. Ora, o controlo da proporção, na perspectiva, de formas tridimensionais não é mais que uma generalização deste processo. Dito de outra forma, dada uma forma tridimensional, é necessário analisar a relação entre as direções e orientações que a ela estão associadas, de seguida é necessário relacionar essas direções e orientações com o quadro para determinar os pontos de fuga e linhas de fuga correspondentes e, por fim, arbitrada a perspectiva de um elemento qualquer (em geral, uma aresta) procede-se ao completamento da perspectiva a partir desse elemento dado. Por vezes, é esse elemento dado que permite deduzir a relação entre as direções e orientações com o quadro. Vejamos o caso em que se pretende representar um prisma triangular reto, cuja base é um triângulo retângulo, com uma face retangular $[ABCD]$ contida num plano oblíquo ao quadro cuja orientação é dada pela linha de fuga f_δ (figura 1.167). É dada a perspectiva da diagonal $[BD]$ da face retangular e ponto de fuga da reta BD pertencente à linha de fuga f_δ . É dada ainda uma descrição da forma a representar através de uma axonometria cavaleira. Os números indicados correspondem à relação entre as arestas do prisma e não às suas dimensões absolutas.

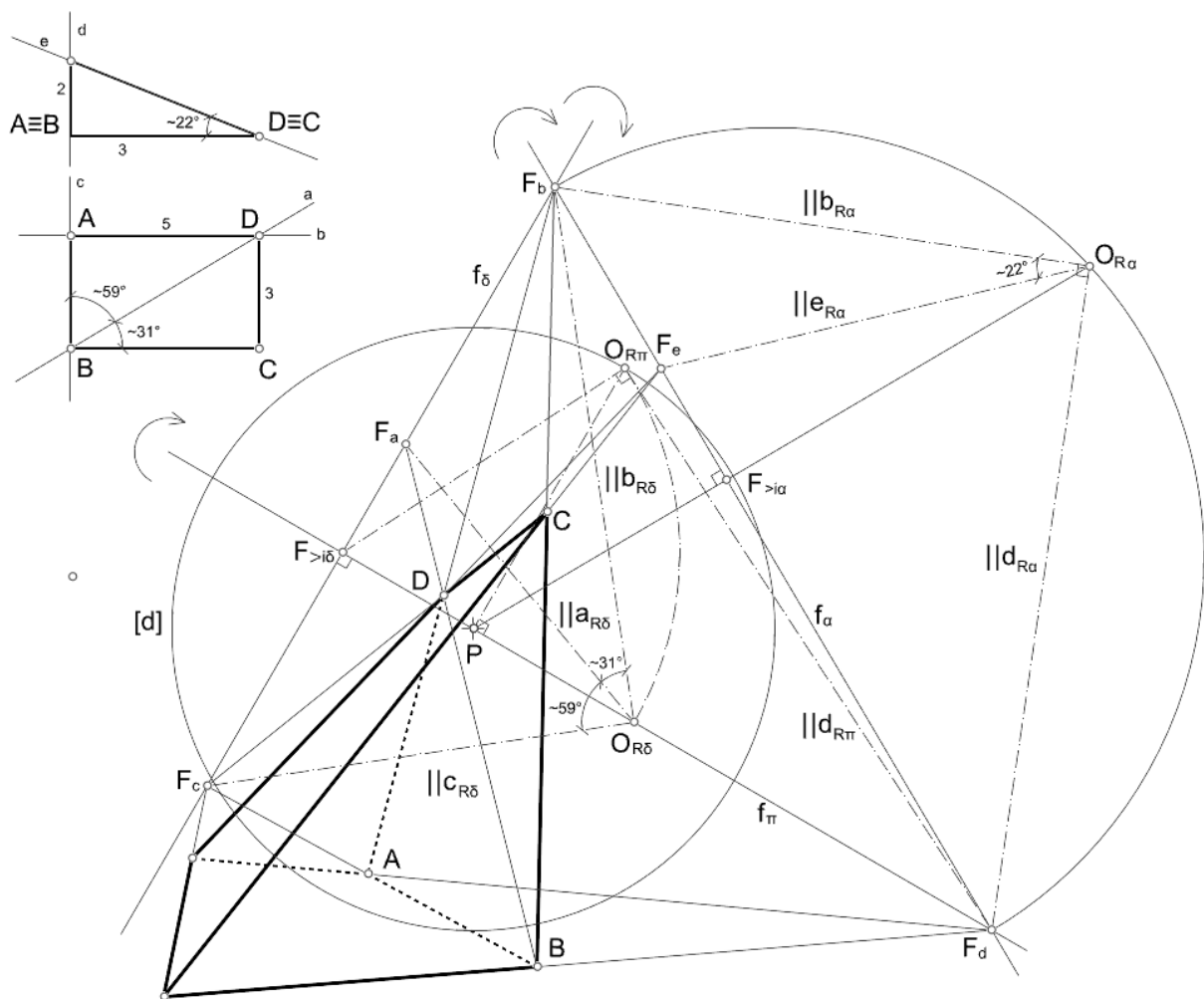


Fig. 1.168. Controlo da proporção através das do controlo das direções e das orientações (resolução).

Para prosseguir com a perspectiva do prisma é necessário proceder a uma análise prévia das direções. Isso pode ser feito através de uma representação auxiliar em DPO que permita expressar a verdadeira grandeza das inclinações relativas entre as várias direções (figura 1.168).

Neste caso, identificaram-se as direções **b** e **c**, ortogonais entre si e contidas na orientação δ , a aproximadamente 31° e 59° com a direção **a**. Identificou-se ainda a direção **d** ortogonal à orientação δ que, com a direção **b**, define uma orientação α ortogonal à orientação δ . Na orientação α está contida uma direção **e** a aproximadamente 22° com a direção **a**. A direção **d** e a direção de maior inclinação da orientação δ definem uma orientação π ortogonal à orientação δ e ao quadro, por isso, a linha de fuga f_π passa pelo ponto **P** e é perpendicular à linha de fuga f_δ no ponto de fuga $F_{>\delta}$.

Os pontos de fuga das direções **b** e **c** estão contidos na linha de fuga f_δ . Para os determinar, é necessário proceder ao rebatimento do plano projetante com orientação δ em torno da linha de fuga f_δ . Nesse processo passa-se pelo rebatimento do plano projetante com orientação π em torno da linha de fuga f_π (porquê?). Determinados os pontos de fuga F_b e F_c , a representação da perspectiva do retângulo **[ABCD]** é simples de obter (como?). Pelos pontos **A** e **B** passam retas com a direção **d** e pelos pontos **C** e **D** passam retas com a direção **e**. O ponto de fuga da direção **d** está contido na linha de fuga f_π (como se determina?). E o ponto de fuga da direção **e** (como se determina?) está contido na linha de fuga f_α definida pelos pontos de fuga F_b e F_d . Determinados estes pontos de fuga, a conclusão da perspectiva do prisma é óbvia (como?).

O controlo da proporção pode ser feito de outro modo. No exemplo da figura 1.169 vamos supor que é desconhecida a posição do observador em relação ao quadro.

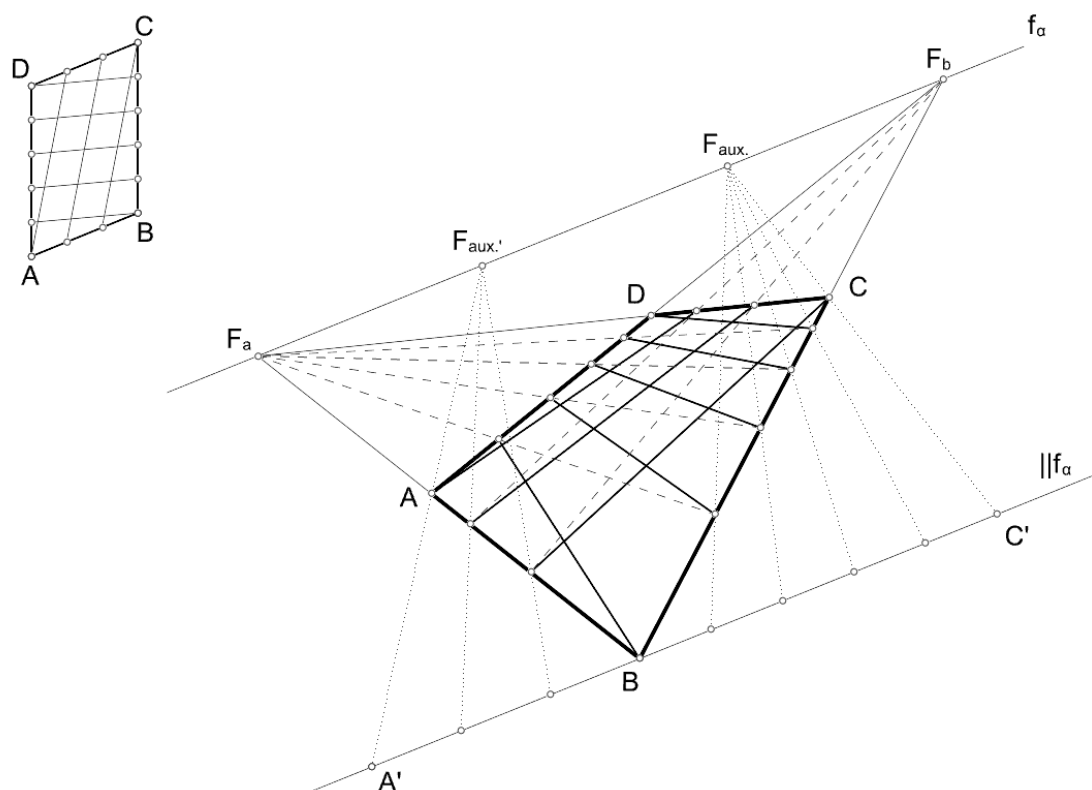


Fig. 1.169. Controlo da proporção através da subdivisão de medidas (Teorema de Tales).

É dada a perspectiva de um paralelogramo $[ABCD]$ contido num plano com uma orientação α qualquer. E pretende-se subdividir o paralelogramo, de acordo com o esquema dado. Para o efeito, conduz-se por um dos vértices do paralelogramo, por exemplo B , uma reta paralela à linha de fuga f_α , isto é, uma reta paralela ao quadro contida no plano do paralelogramo. Nessa reta define-se um ponto C' qualquer. Fica assim definido um triângulo $[BCC']$ cujo lado $[BC']$ é paralelo ao quadro. Divide-se agora o lado $[BC']$ de modo proporcional à divisão que se pretende obter sobre o lado $[BC]$, que neste caso são cinco partes iguais. Esta divisão é direta no desenho porque a perspectiva deste segmento, por ser paralelo ao quadro, mantém as razões simples entre comprimentos. Agora, por cada ponto dessa divisão conduz-se uma reta paralela a $C'C$. Deste modo, definem-se triângulos semelhantes ao primeiro e como a divisão do lado $[BC']$ foi em cinco partes iguais, a divisão do lado $[BC]$ será em cinco partes iguais (**Teorema de Tales**). Porém, como estamos a representar esta operação em perspectiva, o paralelismo traduz-se na utilização do ponto de fuga da reta CC' , o ponto de fuga auxiliar F_{aux} , pertencente à linha de fuga f_α . Para proceder à divisão do segmento $[AB]$ procede-se de modo idêntico. As divisões dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$ podem ser facilmente propagadas aos segmentos $[DC]$ e $[AD]$ através dos pontos de fuga F_b e F_a , respetivamente. Em boa verdade, a aplicação do Teorema de Tales não passa de uma operação de controlo da direção.

Dimensão e posição

O controlo da dimensão implica sempre o controlo da proporção. Isto quer dizer que, se conhecermos as dimensões de uma figura qualquer também conhecemos as suas proporções. O inverso já não é verdadeiro.

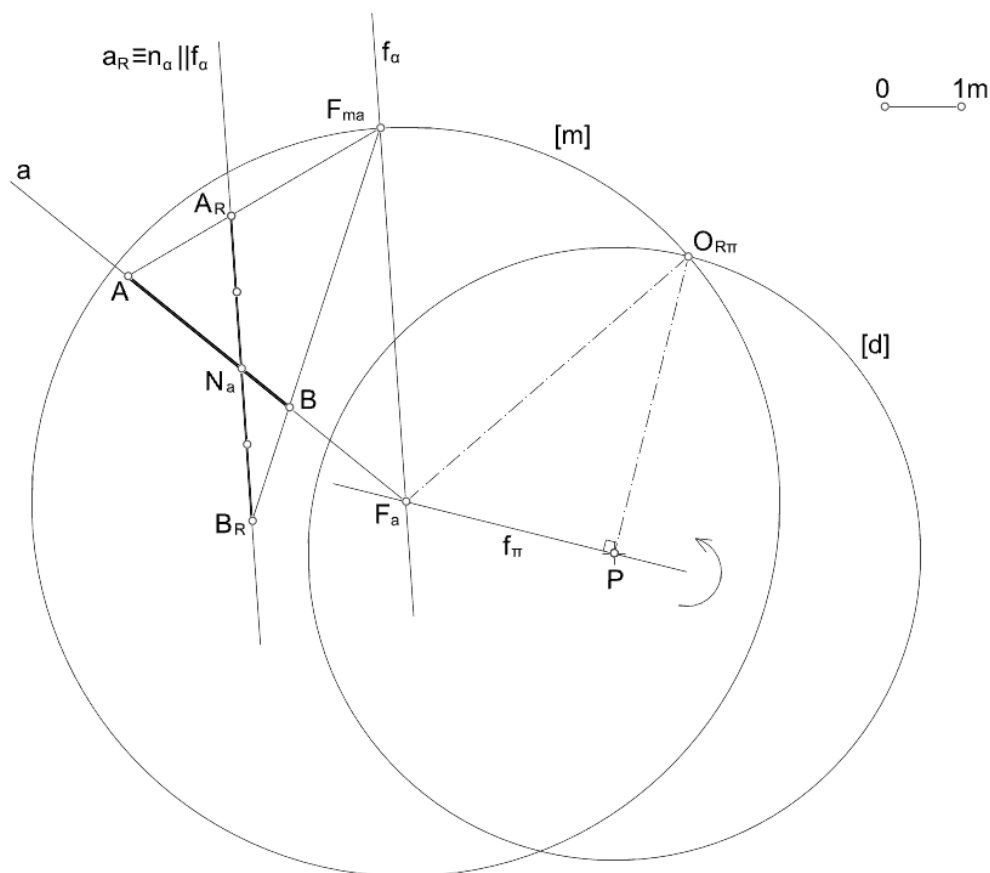


Fig. 1.170. Lugar geométrico dos pontos de fuga de medição de uma direção dada.

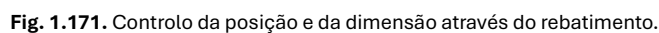
E ao controlarmos a dimensão de uma figura em perspectiva estamos também a controlar a sua posição em relação ao observador e em relação ao quadro. Para o fazermos utilizamos os pontos de fuga de medição, conceito que já abordámos e utilizámos em exemplos precedentes. Vamos aproveitar apenas para fazer uma generalização. Dado um ponto de fuga qualquer F , existe uma infinidade de pontos de medição F_m que lhe correspondem. O lugar geométrico desses pontos é uma circunferência $[m]$ de centro em F e raio igual ao comprimento OF . A razão pela qual existe uma infinidade de pontos de fuga de medição resulta do facto de ser possível rodar uma reta a qualquer para uma posição paralela ao quadro, ou para o quadro, de uma infinidade de modos figura 1.170.

No exemplo da figura é dado o ponto de fuga F_a e a perspectiva de uma reta a , bem como o seu traço, N_a , no quadro. Note-se que ao ser dado o ponto de fuga da reta e o seu traço no quadro, a posição da reta está perfeitamente definida. De seguida, por exemplo, pretende-se representar o segmento $[AB]$ com $4m$ de comprimento, sabendo que N_a é o seu ponto médio. Definiu-se um plano com orientação α passante pela reta a . A interseção da linha de fuga f_α com a circunferência $[m]$ é um dos dois pontos de fuga de medição da direção a por respeito à orientação α . Sobre a reta a rodada para o quadro, isto é, sobre $a_R \parallel f_\alpha$, representam-se os ponto A_R e B_R , a partir dos quais se determinam as perspectivas dos pontos A e B na interseção da perspectiva da reta a com as retas A_RF_{ma} e B_RF_{ma} , respetivamente. Note-se que há uma infinidade de possibilidades para a definição da orientação α .

Um caso particular é a circunferência de distância $[d]$ como lugar geométrico dos pontos de fuga de medição da direção ortogonal ao quadro.

A noção de ponto de fuga de medição pode aplicar-se à operação de rebatimento de planos não projetantes, por exemplo para o quadro. Repare-se que no rebatimento de um plano com orientação α para o quadro, quaisquer pontos descrevem arcos que estão contidos em planos com orientação π perpendiculares à charneira. As retas que unem os extremos desses arcos são paralelas à projetante que se obtém unindo o observador O com o observador rebatido $O_{R\alpha}$, determinado por meio do rebatimento, no mesmo sentido, do plano projetante com a orientação α para o quadro. Daqui resulta que o ponto $O_{R\alpha}$ é o ponto de fuga de medição (também designado por ponto de fuga das cordas de arco) da orientação α por respeito ao seu rebatimento para o quadro. O plano que contém o arco do rebatimento de um ponto A intersesta o plano com orientação α , passante por A , segundo uma reta de maior inclinação e intersesta o quadro segundo uma reta perpendicular à linha de fuga f_α .

No exemplo da figura 1.171, o ponto A é o centro de uma circunferência $[g]$, com um dado raio, e o rebatimento é a operação auxiliar que permite a representação da circunferência em perspectiva. É dada a linha de fuga f_α , o traço frontal n_α de um plano com orientação α , e a perspectiva do ponto A contido nesse plano.



Vamos agora notar que, numa perspectiva, qualquer plano paralelo ao plano do desenho pode ser considerado como quadro. Isto parece ser ambíguo mas, de facto, não é. A implicação prática é a escala no plano do desenho e a consequência que isso tem na interpretação da distância do observador ao quadro. Vejamos o exemplo da figura 1.172 em que as dimensões, no plano do desenho, estão dadas em centímetro (cm), e todos os quadrados estão situados em planos paralelos ao plano do desenho. Todos os quadrados têm a mesma dimensão no espaço, **1m**.

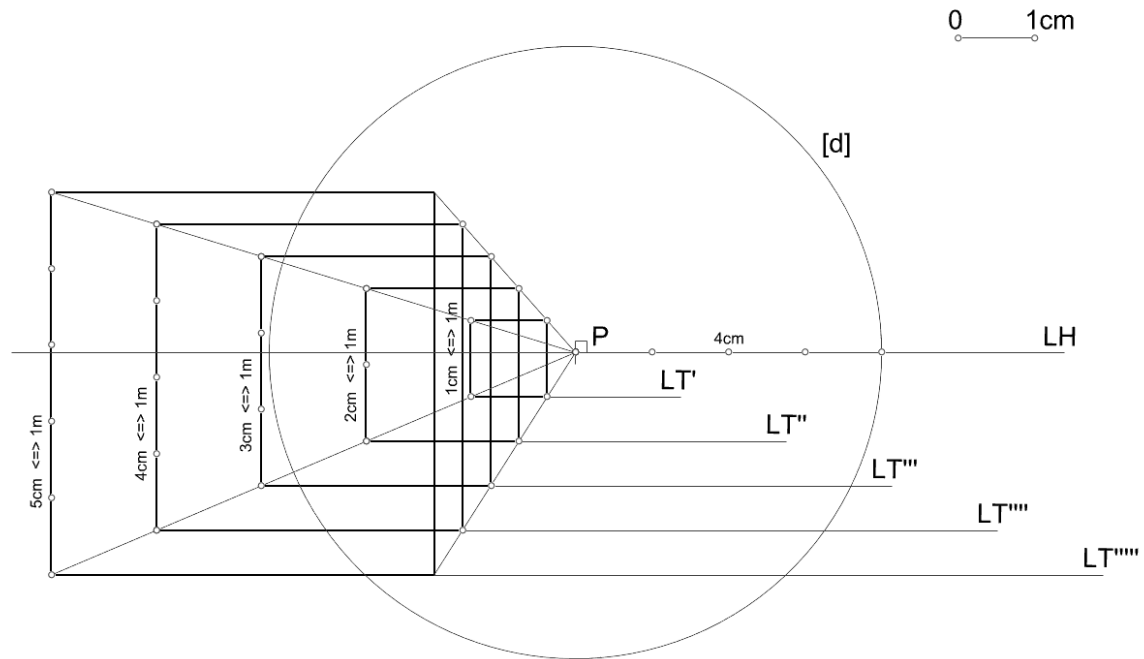


Fig. 1.172. Controlo da posição do quadro.

Se considerarmos que o plano do quadro corresponde ao quadrado que, no desenho, tem **1cm**, então a escala no quadro é **1/100** e a distância entre o observador e o quadro é **4m**. Mas se considerarmos que o quadro corresponde ao quadrado que, no desenho, tem **5cm**, então a escala no quadro é **1/20** e a distância entre o observador e o quadro é **0.8m**. Outra forma de colocar a questão é afirmar que cada plano paralelo ao quadro tem a sua escala própria.

Por fim, há situações em que conhecemos a perspectiva de uma figura, sabemos que figura está representada e em que condições, mas não conhecemos a localização do observador. Isto acontece, por exemplo, quando observamos uma fotografia. É uma espécie de problema inverso da perspectiva. No exemplo da figura 1.173, é dada a perspectiva de um quadrado **[ABCD]**, que se sabe ter orientação α a **40°** com quadro. Pretende-se determinar a posição do observador e a distância do observador ao quadro.

Prolongando as perspectivas dos lados **[AB]** e **[CD]** determina-se o ponto de fuga **F_b** ; prolongando as perspectivas dos lados **[AD]** e **[BC]** determina-se o ponto de fuga **F_a** . Os pontos de fuga **F_a** e **F_b** definem a linha de fuga **f_α** . O ponto de fuga **F_c** , da reta **AC**, pertence a **f_α** (porquê?). Sabe-se que os pontos de fuga **F_a** e **F_b** correspondem a direções ortogonais entre si e, por isso, as retas projetantes com as direções **a** e **b** interseitam-se perpendicularmente no observador **O**. Isto significa que o observador está contido algures numa superfície esférica de diâmetro **$\overline{F_a F_b}$** e centro no ponto médio **M** do segmento **$[F_a F_b]$** (porquê?), de onde, o observador rebatido para o quadro, em torno de **f_α** , tem de pertencer à circunferência **[c]**, traço da superfície esférica no quadro. Por outro lado, a reta projetante com a direção **c** deve estar a **45°** com as retas projetantes com as direções **a** e **b**. Assim, o ponto **$O_{R\alpha}$** pertence à circunferência **[c]** e os pares de retas **$O_{R\alpha} F_a$** e **$O_{R\alpha} F_c$** , e **$O_{R\alpha} F_c$** e **$O_{R\alpha} F_b$** , devem fazer **45°** entre si. Então, para determinar o ponto **$O_{R\alpha}$** , conduz-se a reta **$MN \perp f_\alpha$** e pelo ponto **N** conduz-se a reta **NF_c** . Esta reta interseita a circunferência **[c]** no ponto **$O_{R\alpha}$** (porquê?). Determinado **$O_{R\alpha}$** , conduz-se a reta **$f_\pi \perp f_\alpha$** , que interseita **f_α** no ponto de fuga **$F_{>i\alpha}$** da direção de maior inclinação da orientação α . A partir daqui, a determinação da distância do observador ao quadro, do ponto **P** e da circunferência de distância **[d]** são operações a realizar pela ordem

Representação de formas geométricas simples

agora exemplificar a representação de formas geométricas simples em perspectiva, sem

Vamos, no mesmo desenho, representar um cone de revolução, um cilindro de revolução, uma pirâmide reta de base hexagonal regular, e um paralelepípedo retângulo cuja base, perpendicular ao quadro, tem a proporção **5:3** (figura 1.174).

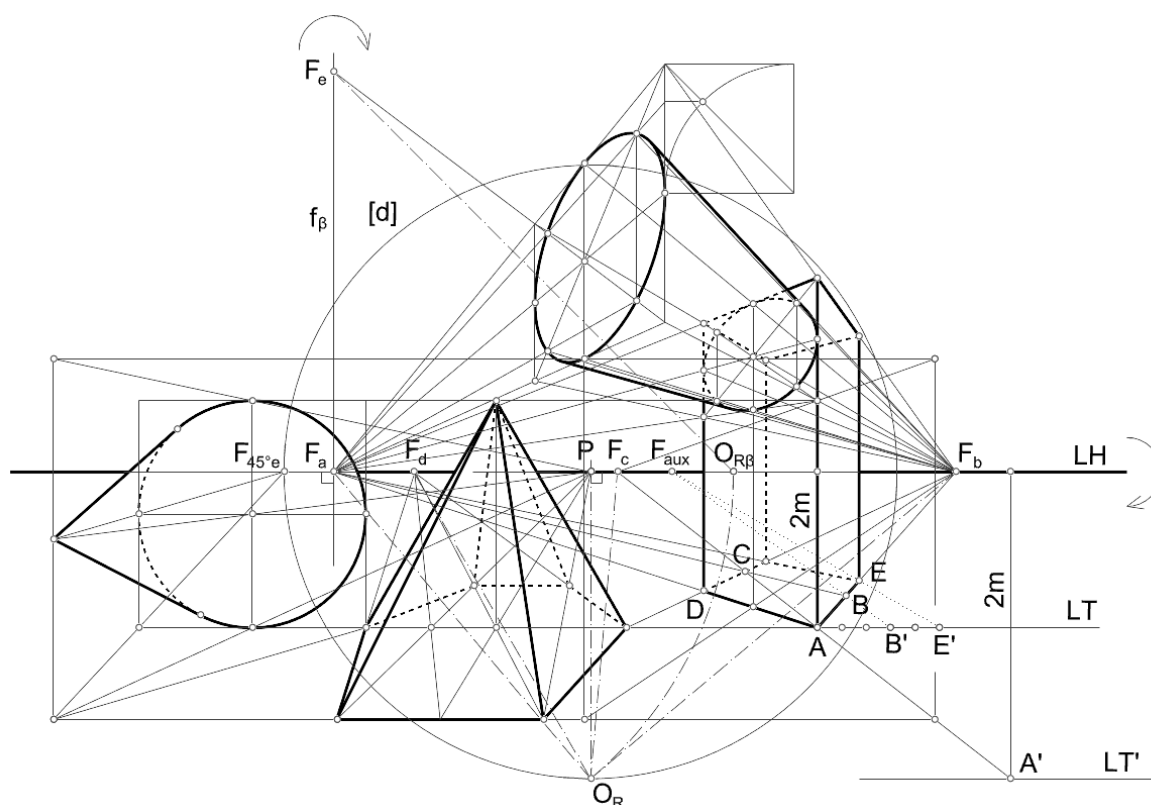
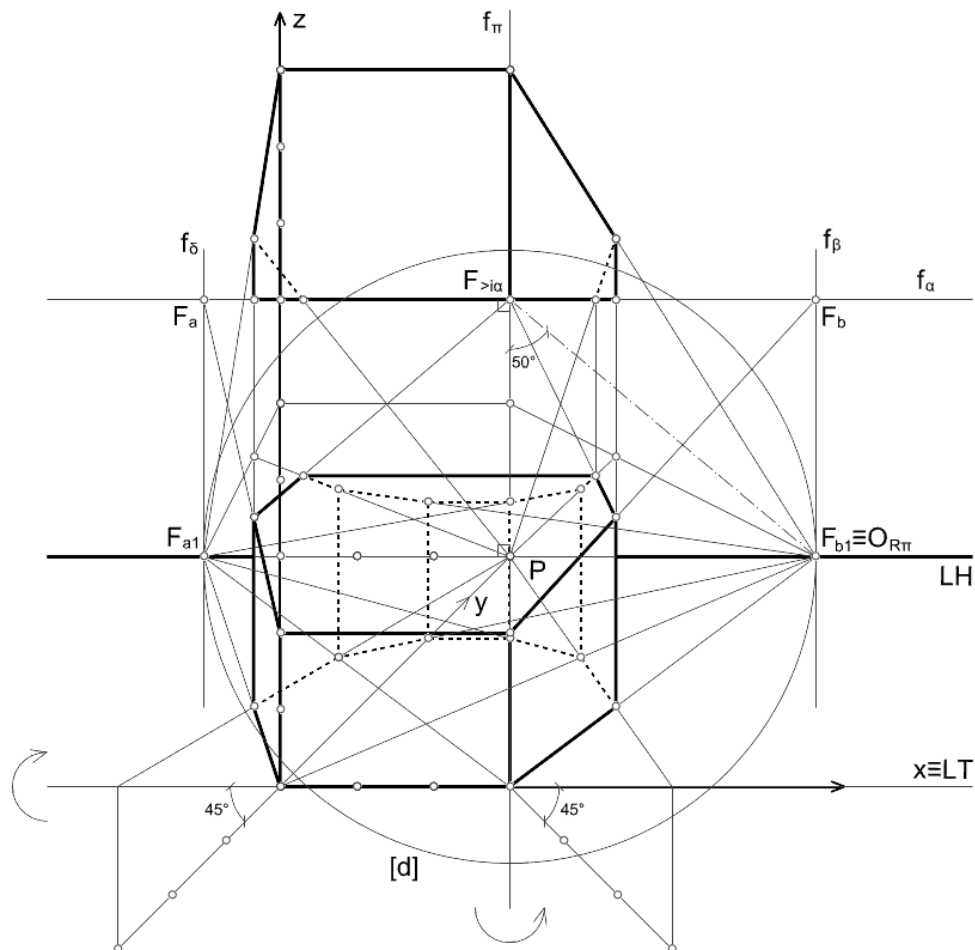


Fig. 1.174. Representação de um cone de revolução, uma pirâmide hexagonal reta, um cilindro de revolução e um paralelepípedo retângulo.

O cone de revolução tem sua base contida num plano paralelo ao quadro, por isso, a perspectiva da base é um círculo. O seu eixo é uma reta perpendicular ao quadro, logo de ponto de fuga P . A altura do cone, tal como está representada, é igual ao raio da base (porquê?). A altura da pirâmide, tal como representada, é igual ao diâmetro da base do cone tal como a distância entre lados da base paralelos entre si (porquê?). Relativamente ao paralelepípedo, começamos por arbitrar a perspectiva da aresta $[AD]$. A partir desta aresta representou-se o quadrado $[ABCD]$. De seguida estenderam-se os segmentos $[AB]$ e $[DC]$ de modo a que, espacialmente, $\overline{AE}/\overline{AB} = 5/3$. Isto foi feito por aplicação do teorema de Tales. Finalmente, o cilindro de revolução, cujo diâmetro da base, tal como representado, corresponde a $[AD]$ (porquê?). O cilindro tem uma das suas bases contida numa face do paralelepípedo. A outra, tal como representada, tem o centro no mesmo plano paralelo ao quadro que passa pelo vértice do cone (porquê?); e a sua geratriz de menor cota tem a mesma cota que o vértice da pirâmide (porquê?). E espacialmente, a diferença entre a altura do paralelepípedo e a altura da pirâmide corresponde à dimensão espacial do segmento $[DA]$ (porquê?).

Por fim, está declarado no desenho que a distância entre o plano da base do paralelepípedo (e da pirâmide; plano xy embora não estejam representados os eixos) e o plano do horizonte é $2m$. Estão representadas duas possíveis linhas de terra, LT e LT' . Como em qualquer plano paralelo ao quadro são preservadas as proporções, se nada for declarado em contrário, é legítimo considerar qualquer um planos frontais correspondentes como o plano do quadro (porquê?).

Todas as operações geométricas referidas a propósito da MPO podem, em princípio, ser executadas em perspectiva. Porém, a maior vocação da perspectiva não é a de resolver problemas métricos mas sim de representar a aparência das coisas como elas nos aparecem ao olhar. No entanto, os próximos dois casos servem como exemplos da autonomia da perspectiva enquanto sistema de representação.



No primeiro caso (figura 1.175) vamos resolver uma combinação de uma truncagem com uma translação. Para o efeito partimos de um prisma octogonal reto, com **5m** de altura, e bases regulares horizontais com **3m** de lado. A face retangular mais próxima do observador tem um lado contido no semieixo **z** positivo e outro contido no semieixo **x** positivo. A base de menor cota está contida no plano **xy**. O observador é o ponto **O**_(3, -4, 3) e o quadro é o plano **zx**. O referencial interno da perspetiva tem os eixos paralelos aos eixos homólogos do referencial externo.

253

Para representar a base de menor cota considerou-se o rebatimento do plano xy para o quadro, em torno do eixo x . A base rebatida está parcialmente representada. As direções das arestas das bases são fronto-horizontal, topo e horizontais a 45° com o quadro, abertura para a direita e abertura para a esquerda. A primeira não tem ponto de fuga e os pontos de fuga das outras são, respetivamente, P , F_{b1} e F_{a1} . Os planos das faces laterais do prisma são frontais, de perfil, e verticais a 45° com abertura para a direita e abertura para a esquerda em relação ao quadro. A primeira orientação não tem linha de fuga e as demais têm as linhas de fuga verticais, f_π passante por P , f_β passante por F_{b1} , e f_δ passante por F_{a1} , respetivamente. A representação do prisma não oferece dificuldades pelo que não a descrevemos. De seguida, determina-se a linha de fuga f_α da orientação de rampa ascendente a 50° com o quadro.

Esta passa pelo ponto de fuga $F_{>i\alpha}$ correspondente a uma direção de perfil ascendente com o quadro e, por essa razão, o ponto de fuga $F_{>i\alpha}$ (como se determina?) também pertence a $f_\pi \perp f_\alpha$. Para além do ponto $F_{>i\alpha}$, os pontos F_α e F_b , resultantes da interseção entre f_α e f_δ e f_β , são os pontos de fuga das retas que contêm as interseções do plano secante com as faces do prisma. Determinada a interseção do plano secante com a face frontal mais próxima do observador, a resolução da figura de secção é simples de obter.

Relativamente à translação, como a direção é vertical, os comprimentos gráficos das arestas paralelas ao quadro não se alteram, e a perspectiva da face inferior da parte superior do prisma, após a translação, deve ficar contida em f_α , pelo que a resolução da translação também não oferece dificuldades.

No segundo caso (figura 1.176) vamos resolver a subtração produzida num cubo com $6m$ de aresta, três arestas contidas nos semieixos positivos, por um cubo de menores dimensões.

O cubo menor obtém-se a partir do maior através da seguinte sequência de transformações: i) uma homotetia de centro na origem e fator igual a $2/3$, ii) uma rotação de -45° em torno do eixo coordenado z e, iii) uma translação de $1m$ no sentido do vetor $(-1, 1, 0)$. O quadro é o plano da face vertical do cubo menor que contém o eixo z . O observador é o ponto $O_{(-2, -4, 3)}$. O eixo z' do referencial interno da perspectiva é paralelo ao eixo z do referencial externo

Da leitura das condições do problema, deduz-se que a direção principal do olhar é horizontal a 45° com os eixos coordenados x e y , ficando os semieixos x e y positivos situados no espaço real. Como a cota do observador é $3m$, o plano do horizonte intersesta o eixo Z num ponto Q com $3m$ de cota. A representação do perspetógrafo pode então começar pela representação do eixo z , do ponto Q , pelo qual passa a $LH \perp z$, e a sua projeção horizontal Q_1 , pela qual passa a LT .

e até a biologia ou medicina. À semelhança do que acontece com a axonometria, como a perspectiva de uma forma pode ser muito facilmente obtida a partir de um modelo tridimensional digital, interessa-nos por contraponto, salientar também o seu potencial em processos de desenho manual, nos quais devem ser vertidos os princípios até aqui discutidos aplicados.

Atividade proposta:

Antecipadamente, propõe-se desde já que procure executar à mão levantada o tipo de desenhos que irão ser mostrados nesta secção. O pretexto para o fazer pode ser o estudo de um objeto arquitetónico, o desenvolvimento de um projeto ou a comunicação de uma ideia.

Composição e ideação de volumes

Em arquitetura, é tão importante o controlo do espaço como o controlo da forma. A perspectiva axonométrica é eficaz para visualizar a forma mas a perspectiva cónica é particularmente eficaz para visualizar a perceção do espaço e tomar decisões sobre o modo de sobre ele operar. A representação da composição de volumes em perspectiva faz-se sempre através de uma síntese dos princípios e procedimentos até agora estudados.

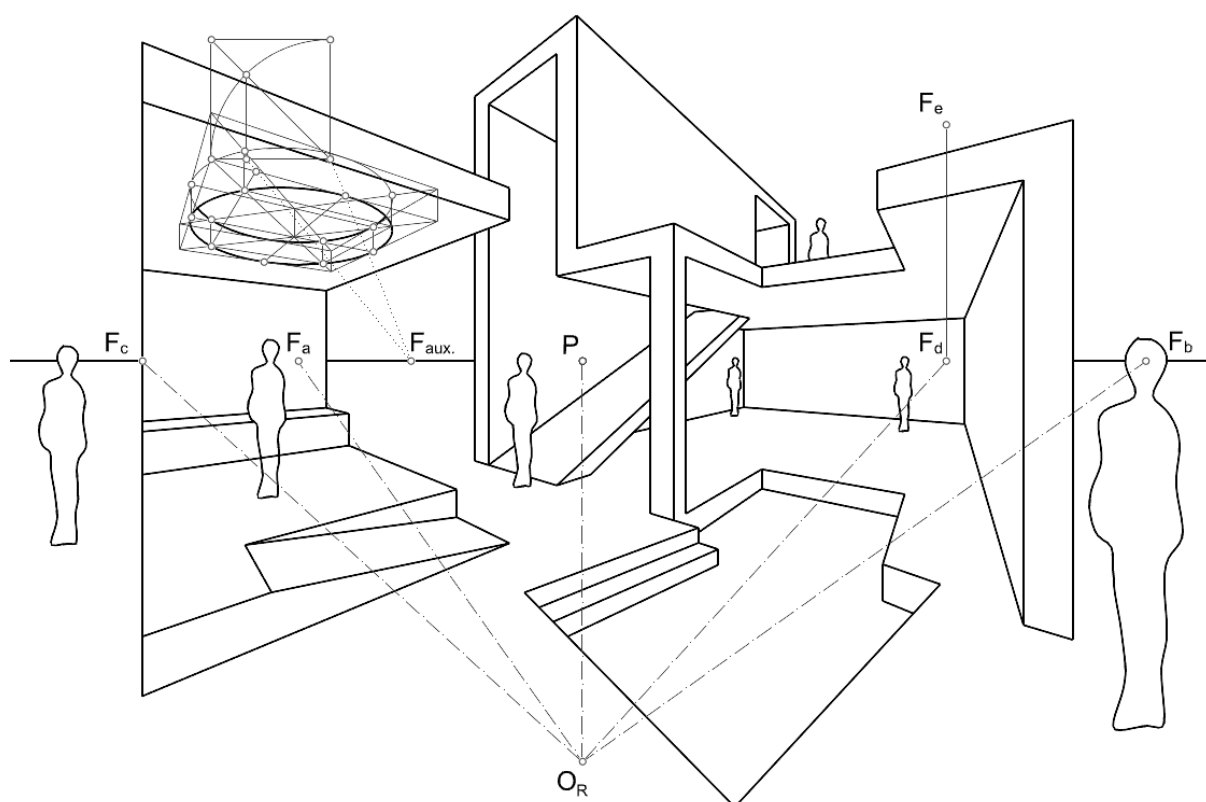


Fig. 1.177. Composição e ideação de volumes.

Tal como referimos em relação à axonometria, e que também é válido para MPO, também na perspectiva quando efetuamos um esboço, não é necessário emular construções que apenas fazem sentido no desenho manual de precisão seja ele analógico ou digital. O desenho manual acabará por ser aquilo que restará quando tudo for interiorizado. A geometria aparecerá assim como uma espécie de cultura associada ao desenho e não como uma coisa distante e

esquecida. No exemplo que vamos dar (figura 1.177), vamos utilizar a perspectiva de modo intuitivo para representar uma composição de volumes. Quando dizemos de modo intuitivo queremos dizer que é possível proceder a um desenho em perspectiva em que parte é controlada geometricamente com precisão (por exemplo a localização dos pontos de fuga) e parte é controlada através da intuição (por exemplo as proporções do desenho). Isto é uma aproximação ao que se faz num desenho à mão levantada. E é assim que normalmente procedemos quando compomos uma dada forma através de desenho perspético.

A representação da figura humana introduz uma noção de escala. Embora o controlo das proporções tenha sido todo realizado intuitivamente, pontualmente podem utilizar-se procedimentos que incrementem a precisão do desenho. Por exemplo, na abertura curva não se controlou a proporção no sentido de garantir que se está a representar exatamente uma forma circular, porém introduziu-se um procedimento para garantir rigor no traçado das elipses.

Atividade proposta:

Em desenhos perspéticos, elabore composições de volumes recorrendo às operações geométricas e procedimentos já estudados. Para além de desenho de precisão sugere-se que pratique o desenho à mão levantada porque entre as duas formas de desenho desenvolve-se a razão e a intuição.

Representação de volumes descritos em MPO ou axonometria

Embora estejamos agora a tratar da perspectiva cónica, não podemos esquecer que já falámos da MPO e da axonometria.

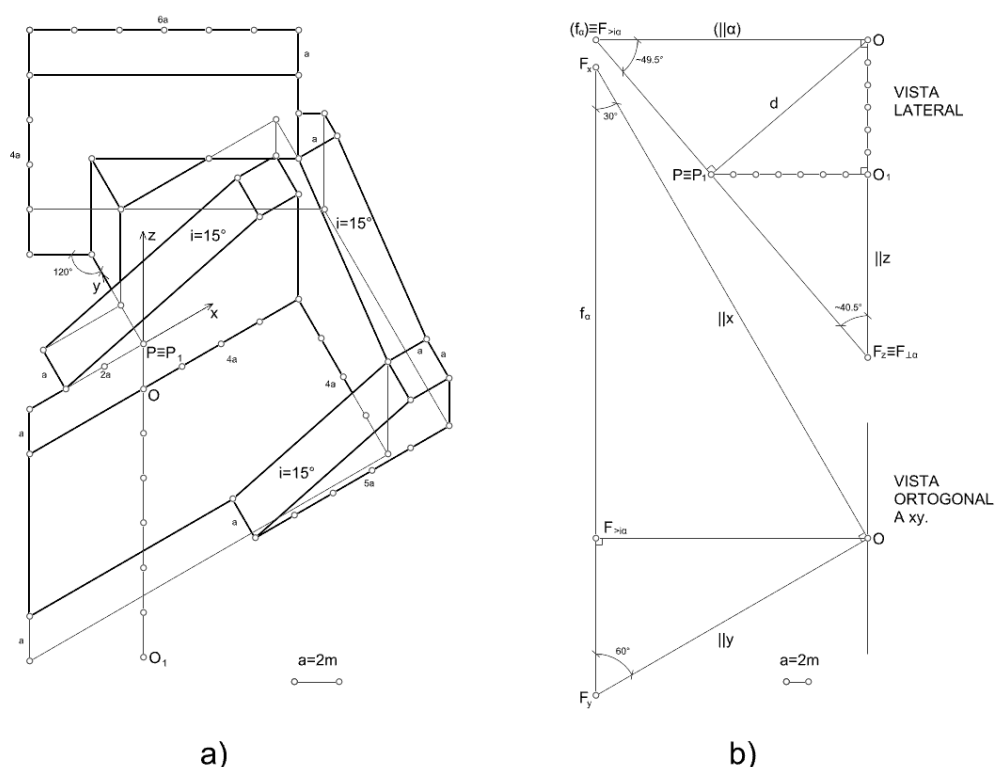


Fig. 1.178. Preparação da perspectiva: a) Dados do problema em axonometria planométrica isométrica; b) Determinação dos parâmetros do perspetógrafo em DPO.

E esses sistemas de representação devem contaminar a perspectiva e deixar-se contaminar pela perspectiva. Isto quer dizer que é preciso saber transitar entre sistemas de representação

de modo a utilizar cada um naquilo em que é mais eficiente. Por vezes é necessário proceder a uma representação perspética de uma forma qualquer dada em MPO ou axonometria. Mesmo que a forma não seja dada nesses sistemas, eles são muitas vezes adequados ao estudo prévio da relação entre as direções e as orientações. Dispor de representações em MPO permite proceder à escolha de pontos de vista e extrair os parâmetros do perspetógrafo.

No exemplo que vamos tratar, a forma e a posição do observador são descritos numa representação axonométrica (figura 1.178.a). E, para estabelecer os parâmetros da perspetiva, será necessário proceder a um conjunto de construções, remetendo para DPO, que nos vão permitir posicionar os pontos de fuga e as linhas de fuga (figura 1.178.b), após o que podemos proceder ao desenho perspético. Note-se que as construções efetuadas não estão na mesma escala em que temos os dados. A vista lateral corresponde ao plano projetante (na axonometria e na perspetiva) que contém o ponto O e o ponto P . Este plano contém o eixo z e forma um diedro de 60° com o plano zx . Nesta vista determina-se a inclinação de aproximadamente 49.5° da orientação xy (orientação α) relativamente ao quadro. Com inclinação complementar, em relação ao quadro, está a direção z (ortogonal a α). Na vista ortogonal a xy constroem-se as distâncias dos pontos de fuga F_x e F_y relativamente ao ponto de fuga $F_{>\alpha}$ da direção de maior inclinação da orientação α .

Os elementos obtidos nesta representação em DPO permitem estabelecer todos os parâmetros iniciais da perspetiva que podem ser transpostos para um outro desenho em que se articulam os pontos de fuga das direções dos eixos x , y e z , as três linhas de fuga que estes pontos de fuga permitem definir, o ponto P , a distância do observador ao quadro e respetiva circunferência $[d]$, os pontos de fuga de algumas direções diagonais entre x , y e z , os pontos de fuga correspondentes às pendentes das rampas, e ainda os pontos de fuga necessários à representação do volume rodado em torno da direção z .

Repare-se que a LH não passa pelo ponto P . Isto é uma consequência de a direção principal do olhar ser oblíqua ao plano xy e de, por isso, o quadro não ser vertical.

Não é agora o momento para descrever a determinação de todos estes elementos porque não estamos a realizar nenhuma operação que não tenhamos já feito em exemplos anteriores. Julgamos que o desenho da figura 1.179 é autoexplicativo.

Para evitar demasiada complexidade gráfica e sobreposição de traçados optámos por transferir apenas as linhas de fuga e pontos de fuga para outro desenho (figura 1.180) no qual desenvolvemos a representação em perspetiva propriamente dita. Esta é uma opção sempre válida e que evita a sobreposição das construções auxiliares pré perspetiva e os traçados da perspetiva dos volumes que pretendemos realizar. Deste modo conseguimos um desenho mais limpo. O risco é cometer erros na transposição de elementos entre um desenho e outro.

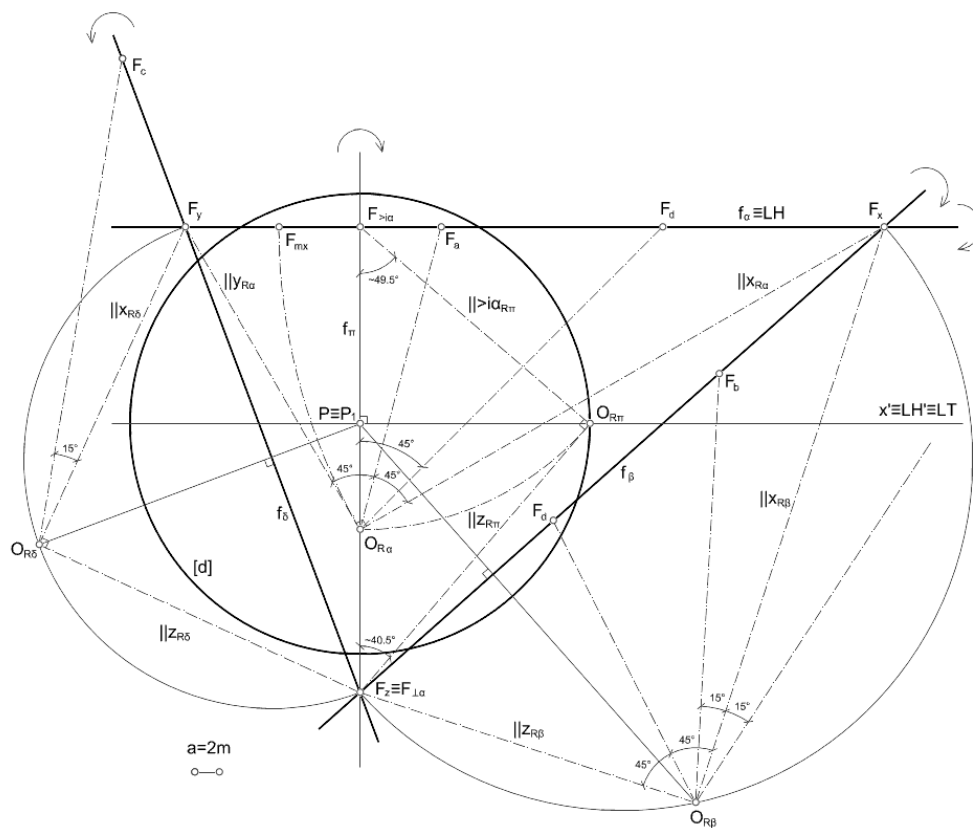


Fig. 1.179. Elementos do perspetógrafo e determinação dos pontos e linhas de fuga.

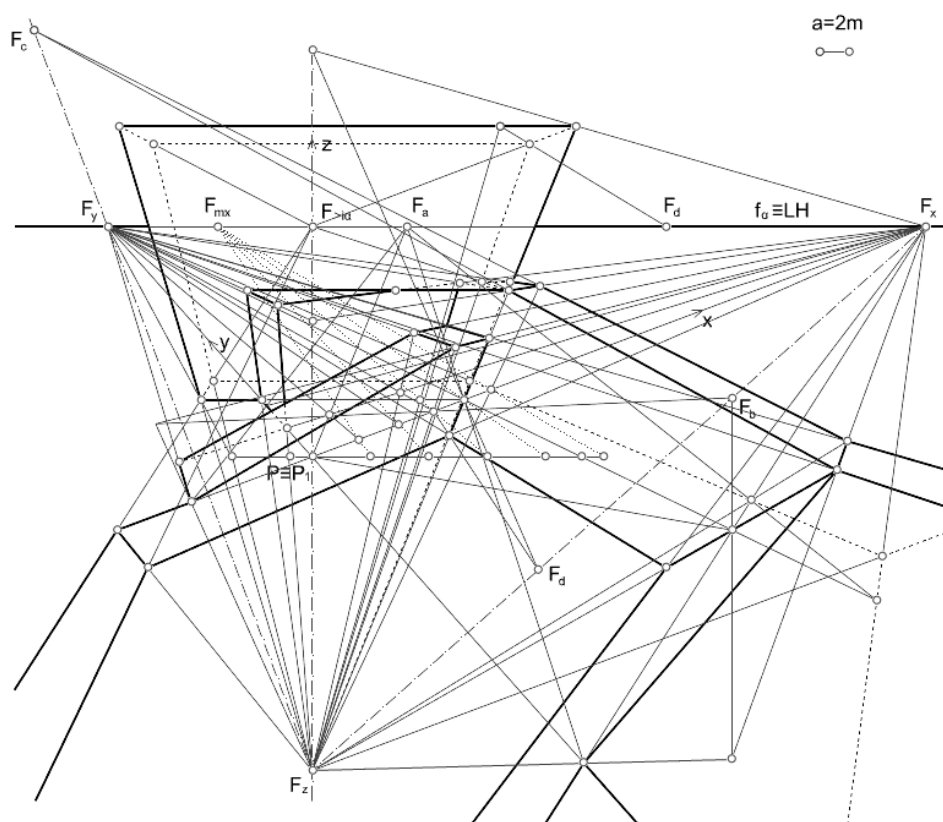


Fig. 1.180. Perspetiva.

No desenho em perspectiva optou-se por deixar ficar todas as linhas auxiliares que convergem nos pontos de fuga. E também se representaram as arestas invisíveis a traço interrompido por uma questão de clareza. Por vezes isso não é necessário ou é desvantajoso. Caberá avaliar em cada situação qual o critério de representação gráfica a utilizar.

Visualização de espaços interiores

Talvez a maior vocação da perspectiva seja a de permitir transmitir um certo sentido de imersão no espaço, coisa que os outros sistemas apenas permitem fazer de forma limitada. Assim, das várias aplicações da perspectiva, a representação de espaços interiores é das que nos interessa mais. Do ponto de vista técnico, representar um espaço interior não trás nada de novo. Mas é uma prática que deve ser cultivada porque, muitas vezes, e sobretudo em contexto académico, parece haver uma espécie de recusa em entrar no espaço que se está a representar. Quebrar essa tendência é fundamental, em particular em contextos próximos da arquitetura e até mesmo do design. Na representação de espaços interiores (e também noutros casos) a zona útil da perspectiva, isto é, a zona em que as distorções não são muito notórias, reduz-se à parte central do desenho. Por isso, e sobretudo no desenho à mão levantada, é útil imaginar os pontos de fuga (pelo menos alguns deles) fora do espaço da folha de desenho. No desenho da figura 1.181 elaborou-se a perspectiva de um espaço que materializa uma grelha cúbica. Foi utilizada uma perspectiva de 2 pontos de fuga. As duas direções oblíquas ao quadro estão igualmente inclinadas em relação a esse plano. Como os traçados auxiliares estão omissos, este desenho oferece também o pretexto para determinar os parâmetros da perspectiva.

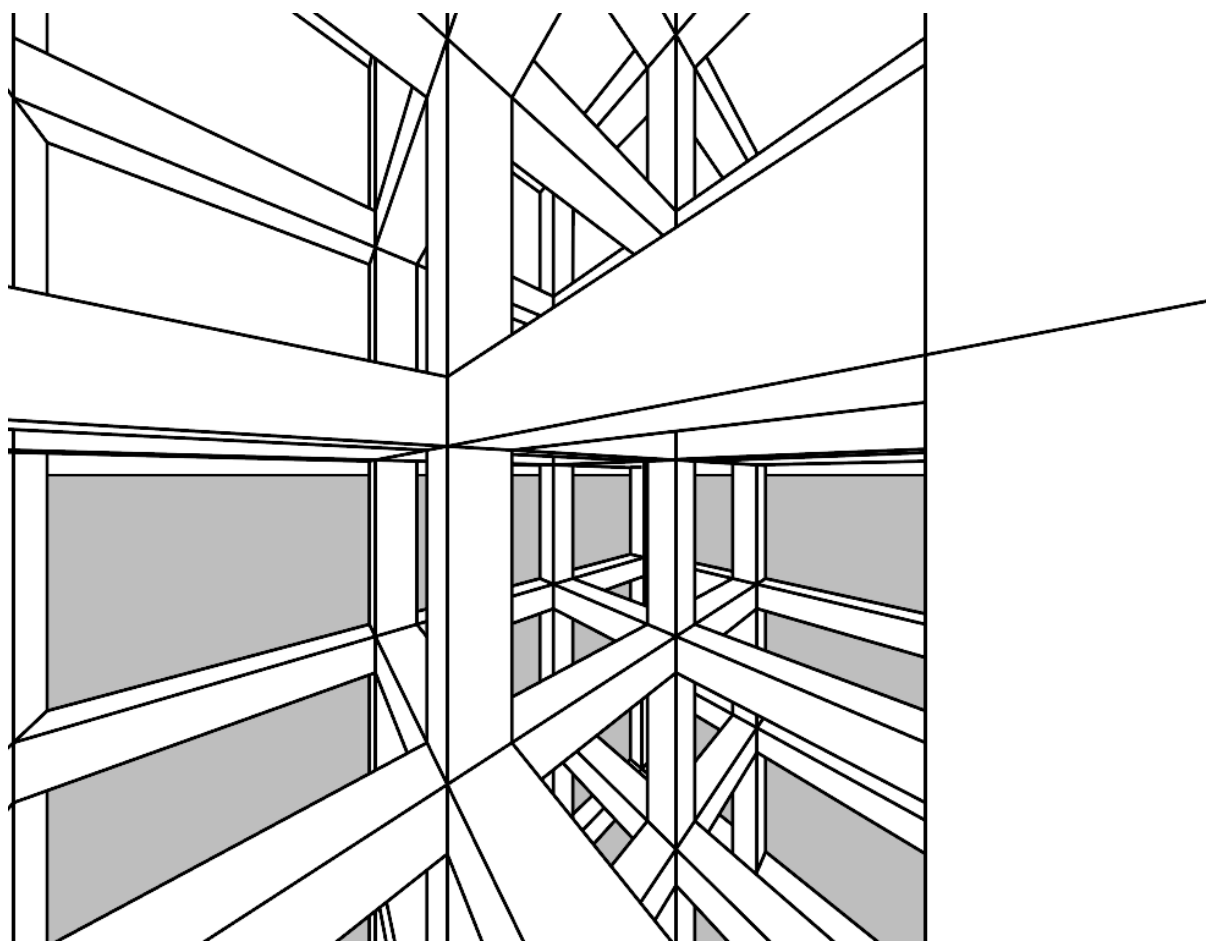


Fig. 1.181. Perspetiva de um espaço interior.

Atividade proposta:

Sugere-se que reproduza aproximadamente o desenho da figura 1.181 através de desenho à mão levantada. Represente o mesmo tipo de espaço numa perspectiva de 1 ponto de fuga e de 3 pontos de fuga em que as três direções estão igualmente inclinadas em relação ao quadro. Elabore os desenhos em folhas A3.

Corte perspectivado

O corte perspectivado é elaborado sob uma perspectiva de 1 ponto de fuga. É imaginada uma secção e respetiva truncagem e o plano dessa secção, ou um plano paralelo, é considerado como quadro. Este tipo de representação cruza a representação dos elementos em corte, onde se podem medir verdadeiras grandezas, e a representação do espaço interior. O mesmo corte pode dar origem a distintos cortes perspectivados em função da posição do observador em relação à cena. Na figura 1.182 colocam-se a par dois cortes perspectivados a partir da mesma secção. No caso representado à esquerda, o observador está num nível inferior e no caso representado à direita, o observador está num nível mais elevado. Mas o espaço representado é o mesmo.

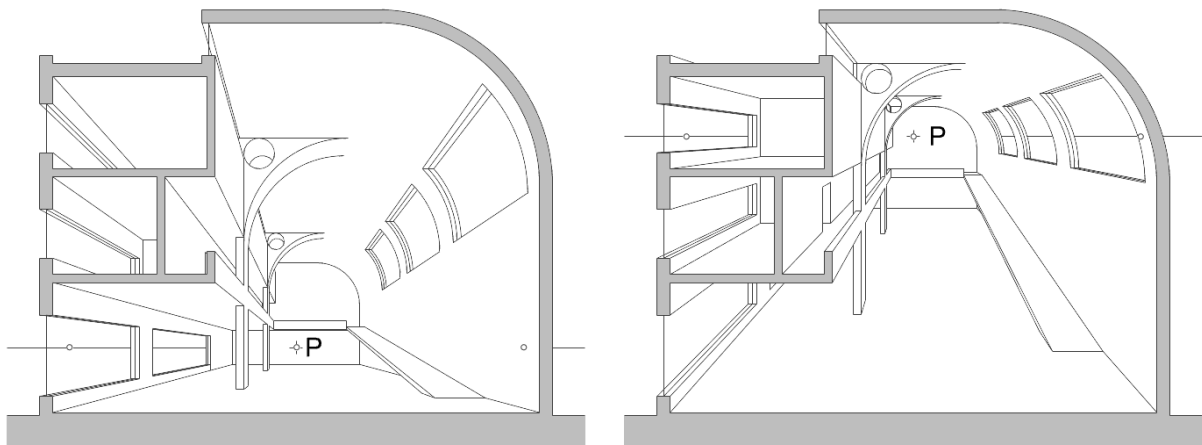


Fig. 1.182. Cortes perspectivados.

Atividade proposta:

A partir de algum projeto que esteja a desenvolver, produza cortes perspectivados. Para cada corte varie a posição do ponto P e a distância do observador ao quadro. O que sucede à medida que a distância do observador ao quadro aumenta?

Sombras

As sombras são uma forma eficiente de salientar a espacialidade em desenhos de perspectiva (e não só). Em termos práticos, determinar uma sombra não é mais que resolver problemas de interseção entre superfícies. Nas duas figuras seguintes dão-se exemplos de aplicação das sombras a desenhos em perspectiva. Note-se que, em ambos os casos, como a direção luminosa é descendente, há partes do objeto que não aparecem na perspectiva mas que têm

sombra (parte da abertura superior e uma abertura situada no espaço virtual no caso da perspectiva da figura 1.183, e parte do bordo do pátio no caso da perspectiva da figura 1.184). Isto significa que é preciso conhecer o objeto que está na figura para além do que está representado.

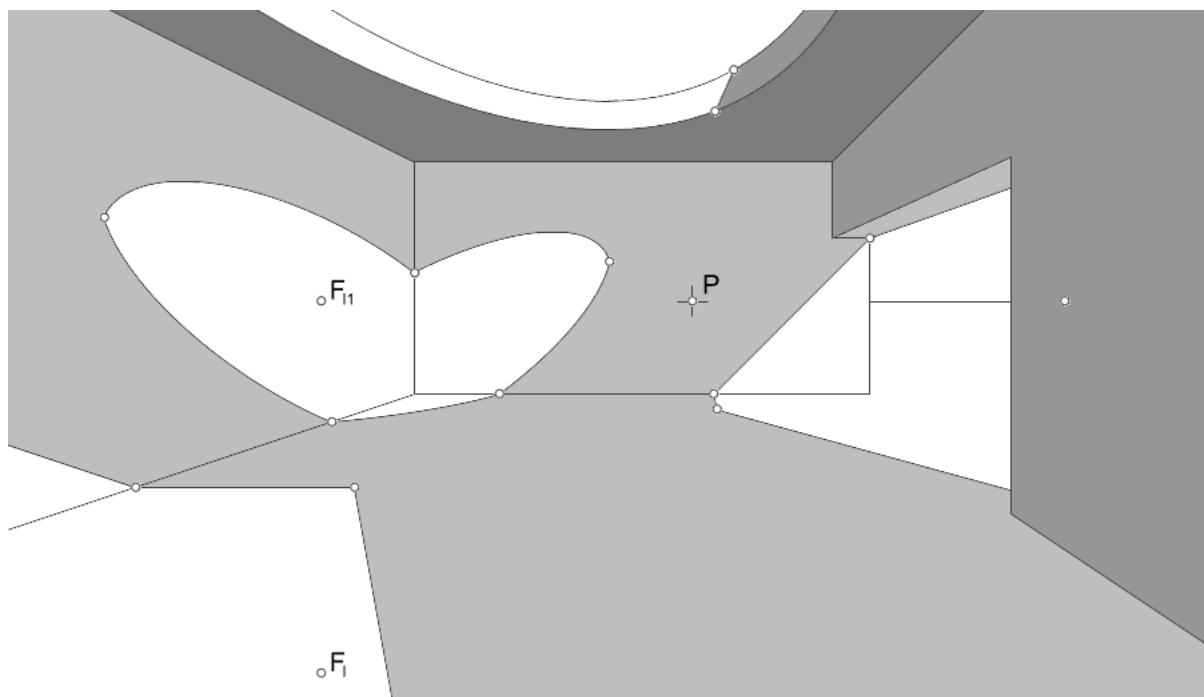


Fig. 1.183. Sombra em perspectiva de 1 ponto de fuga.

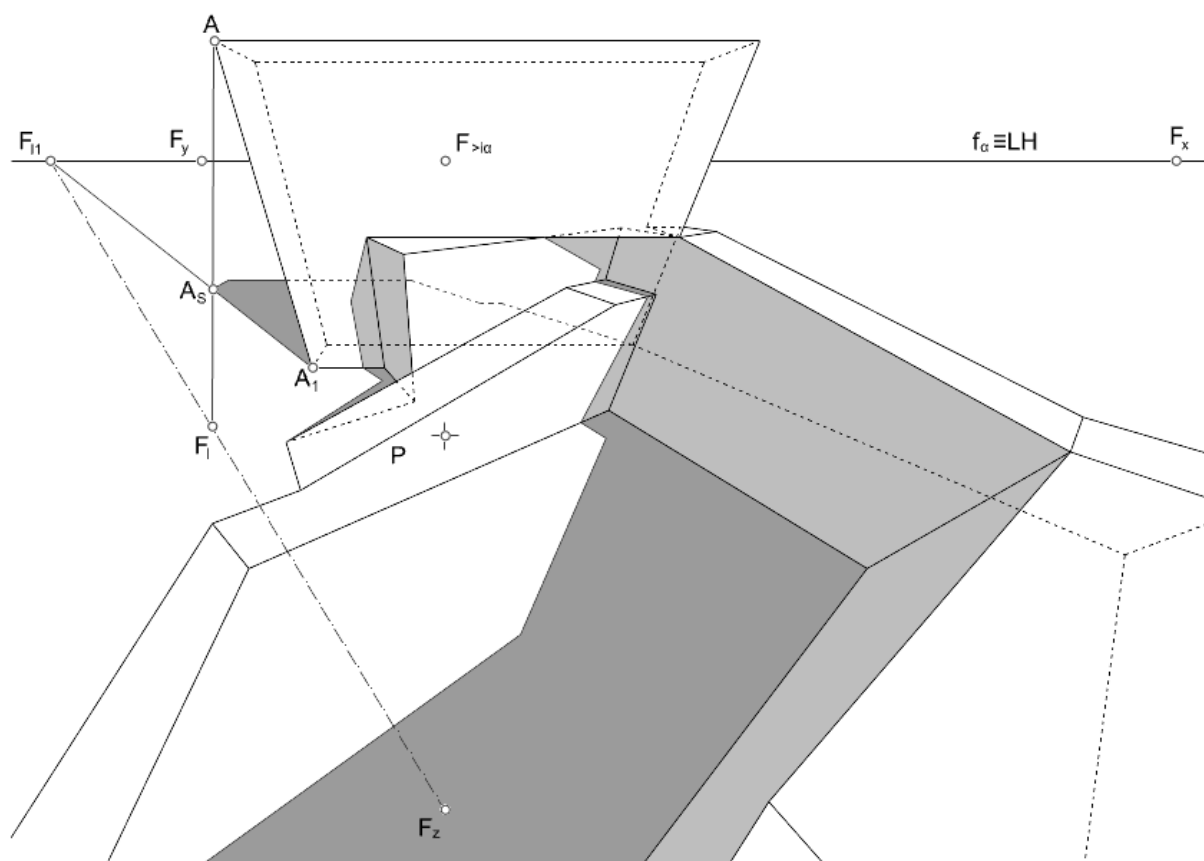


Fig. 1.184. Sombra em perspectiva de 3 pontos de fuga.

No exemplo da figura 1.184, dado o ponto de fuga da direção luminosa, F_l , é necessário determinar o ponto de fuga F_{11} da projeção ortogonal da direção luminosa na orientação xy (orientação α). Este ponto de fuga corresponde à direção comum à orientação α e à orientação definida pela direção z (direção ortogonal a α) e pela direção luminosa (porquê?). A título de exemplo, explicitou-se a determinação da sombra do vértice A .

Atividade proposta:

A partir da perspectiva de um objeto qualquer considere três situações tipo de relação da direção luminosa em relação ao quadro: i) direção luminosa paralela ao quadro, ii) direção luminosa oblíqua ao quadro, e iii) direção luminosa perpendicular ao quadro. Experimente ainda com a fonte de luz a distância finita. Que diferenças há entre as várias situações?

Reflexo em espelho plano

A palavra reflexo pode significar um efeito visual ou uma transformação geométrica. Veremos que uma coisa está relacionada com a outra. A luz incidente numa superfície π pode ser refletida de diferentes modos consoante o material de que é feita. Nos extremos temos a reflexão difusa e a reflexão especular. Na reflexão difusa, a superfície diz-se lambertiana, e a luz é refletida em todas as direções independentemente da direção de incidência (figura 1.185.a), na reflexão especular, a superfície é um espelho, e a luz é refletida numa direção simétrica da direção incidente relativamente à direção normal à superfície (figura 1.185.b).

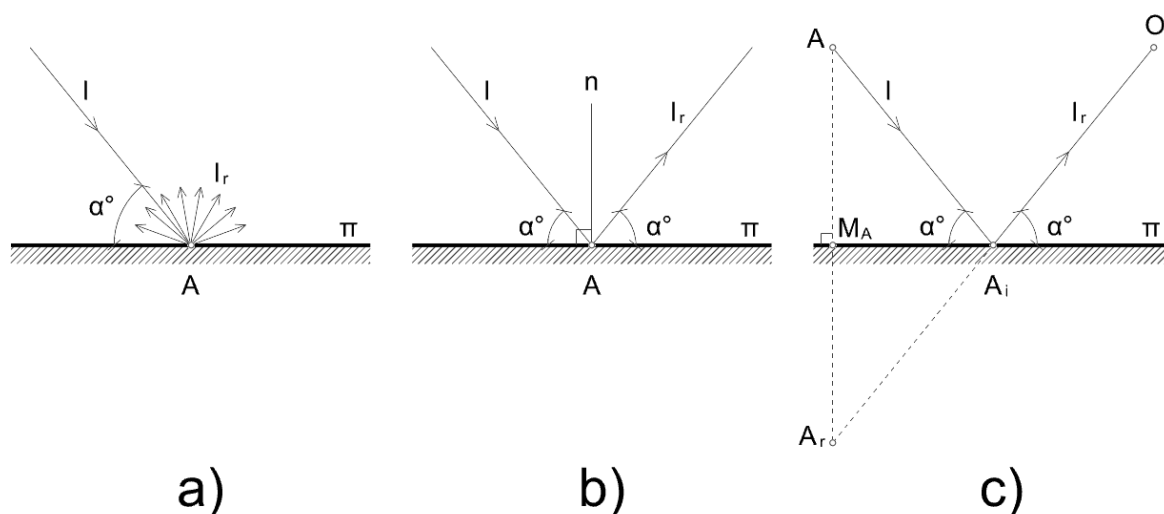


Fig. 1.185. Reflexo da luz numa superfície π : a) reflexão difusa (superfície lambertiana), b) reflexão especular (espelho), c) reflexo de um ponto A na superfície π por relação a um observador O .

Na presença de um espelho π e perante um observador O , se a luz emanar de um ponto A (seja por reflexão ou porque o ponto A corresponde a uma fonte de luz), há um ponto A_i na superfície do espelho em que a luz é refletida de tal modo que incide no observador O (figura 1.185.c). O ponto A_i corresponde à imagem do ponto A por reflexão da luz no espelho π . Mas esta imagem A_i , para o observador O , coincide com a projeção cónica (com centro em O) de um ponto A_r , simétrico do ponto A por reflexão relativamente ao plano π . Note-se que se um ponto pertencer ao plano do espelho, coincide com o seu reflexo. E se um segmento é paralelo ao plano do espelho, a sua imagem tem a mesma direção.

Assim, em termos práticos, em perspectiva, a determinação do ponto A_i é equivalente à determinação do ponto A_r , uma vez que ambos se situam na mesma reta projetante. E como a

determinação do ponto A_r , implica a condução de uma reta perpendicular ao plano do espelho passante pelo ponto A , a determinação da sua interseção M_A com o plano do espelho e a duplicação da distância $\overline{AM_A}$, em geral implica também a consideração do teorema de Tales.

Num reflexo distinguem-se três casos tipo consoante o espelho é paralelo ao quadro, perpendicular ao quadro ou oblíquo ao quadro. Na figura seguinte consideramos um caso em que o espelho, com orientação π , é oblíquo ao quadro. Note-se que a porção do plano que é considerada como espelho é apenas aquela que está notada com uma mancha cinzenta. O cubo $[ABCDEFGH]$, de que se determinou o reflexo, tem duas faces paralelas ao quadro e quatro arestas paralelas ao espelho e ao quadro simultaneamente. Dessas, a aresta $[DH]$ está contida no plano do espelho.

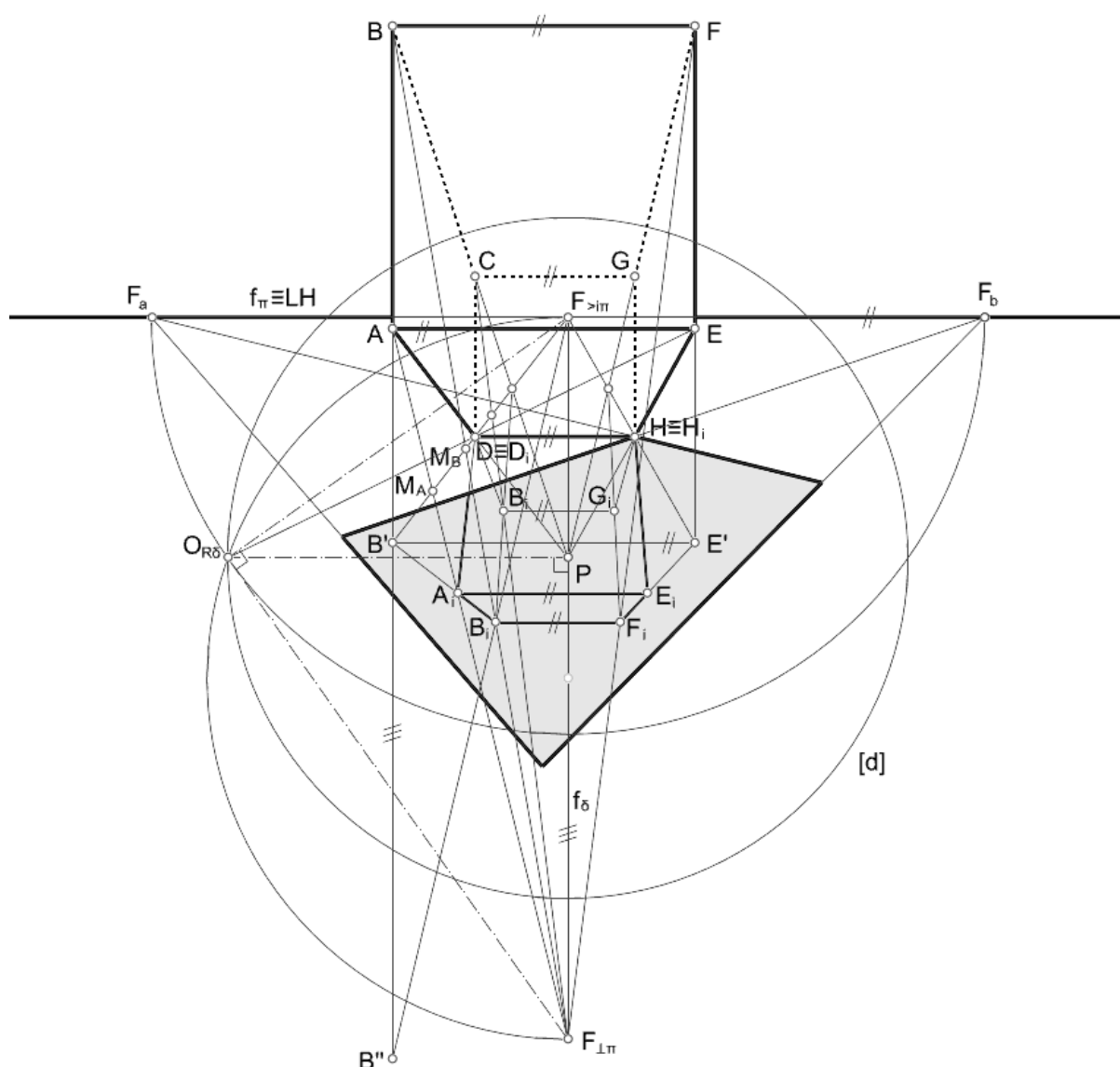


Fig. 1.186. Reflexo de um cubo produzido por um espelho com orientação oblíqua ao quadro.

Como os vértices D e H pertencem ao plano do espelho temos $D \equiv D_i$ e $H \equiv H_i$.

Para determinar o reflexo do ponto B , conduziu-se por esse ponto uma reta perpendicular ao plano do espelho. O ponto de interseção dessa reta com o plano do espelho é o ponto M_B pertencente à reta, de maior inclinação da orientação π , passante pelo vértice D (porquê?). De

seguida projetou-se o ponto M_B na reta AB (paralela ao quadro) segundo a direção de maior inclinação da orientação π determinando-se o ponto B' . Definiu-se o ponto B'' de tal modo que $\overline{BB'} = \overline{B'B''}$. Pelo ponto B'' conduziu-se uma reta paralela à reta $B'M_B$ que permitiu determinar o ponto B_r (não notado mas graficamente coincidente com B_i) na sua interseção com a perpendicular ao espelho passante por B . A construção descrita neste parágrafo corresponde à aplicação do teorema de Tales num plano com orientação δ passante pelo ponto B (porquê?).

O ponto B' , por estar contido no plano do espelho coincide com o seu reflexo. Por isso o reflexo da reta AB passa pelo ponto B' e pelo ponto B_r . Deste modo determina-se o ponto A_r (não notado mas graficamente coincidente com A_i) na interseção da reta $B'B_r$ com a reta perpendicular ao espelho passante pelo ponto A . O reflexo dos demais pontos determina-se de modo idêntico.

Como a área do espelho é limitada, apenas se destaca graficamente a porção de reflexo contida na região do espelho.

Atividade proposta:

A partir da perspectiva de um objeto qualquer considere três situações tipo de relação da orientação do plano do espelho relativamente ao quadro: i) espelho paralelo ao quadro, ii) espelho oblíquo ao quadro, e iii) espelho perpendicular ao quadro. Que diferenças há entre as várias situações?

Sistema Integrado de Representação

De algum modo, nesta secção começa a fazer-se a ponte com a PARTE II deste trabalho.

Recordamos o que queremos dizer com Sistema Integrado de Representação. É tão somente um ambiente digital de modelação geométrica tridimensional (ADMG3D) em que os problemas de geometria no espaço são tratados diretamente a três dimensões sem necessidade da construção completa de projeções planas. A novidade aqui não é ser digital. Com efeito, a quase totalidade dos exemplos apresentados até aqui foram preparados num ADMG2D.

Tentando por as coisas da forma mais simples possível, concetualmente a diferença entre um ambiente bidimensional e um ambiente tridimensional está nas operações admissíveis em cada um deles.

Num ambiente bidimensional podemos instanciar pontos, linhas e regiões planas e operar sobre estas através de operações no plano, como a construção de pontos através da interseção de linhas, a construção de linhas passantes por pontos, ou a aplicação de transformações geométricas no plano. Tradicionalmente, podemos dizer que a geometria descritiva começa quando atribuímos um significado espacial a estas operações planas.

Num ambiente tridimensional podemos instanciar todos os elementos da geometria plana, em vários planos, e também toda uma série de figuras não planas, como linhas torsas, superfícies e sólidos. E agora, o leque de operações possíveis expande-se ao espaço. Assim, parece admissível considerar a interseção de uma reta com uma superfície esférica com a mesma naturalidade com que, no plano, se considera, e de facto executa, a interseção entre uma reta e uma circunferência. Ou seja, diríamos que a construção plana de um ponto por interseção de uma reta com uma circunferência é perfeitamente análoga e tão direta quanto a construção tridimensional de um ponto por interseção de uma reta com uma superfície esférica, por exemplo.

Para ilustrarmos esta ideia vamos considerar três problemas já abordados e resolvê-los num ADMG3D típico. Em concreto, estamos a adotar o software **Rhinoceros** que é simultaneamente um ADMG2D e um ADMG3D.

O primeiro é o problema da figura 1.79. Recordando, trata-se de conduzir, por um ponto Q exterior, um plano θ tangente a uma superfície esférica de centro C (figura 1.187.a). Já vimos naquele exercício que há uma infinidade de soluções para o problema e que essas soluções correspondem aos pontos de uma circunferência $[c]$ resultante da concordância, com a superfície esférica, de uma superfície cónica de revolução de vértice Q e eixo CQ .

A descrição seguinte corresponde a um modo como o problema pode ser resolvido. Com centro em C_1 instancia-se uma circunferência correspondente ao limite da projeção horizontal da esfera e copia-se aquela circunferência de acordo com o vetor $\overrightarrow{C_1C}$ (figura 1.187.b). Pela projeção horizontal do ponto Q conduz-se uma reta tangente àquela circunferência no ponto A_1 . Copia-se o ponto A_1 de acordo com o vetor $\overrightarrow{C_1C}$ dando origem ao ponto A (figura 1.187.c). Considera-se um sistema de coordenadas com o plano xy ortogonal à reta QC e passante pelo ponto A . O ponto U , da reta QC , é a origem deste sistema de coordenadas. Com centro no ponto U instancia-se a circunferência $[c]$ de raio $\overline{UA}$ contida no plano xy deste sistema de coordenadas (figura 1.187.d). Instancia-se um ponto T qualquer pertencente à circunferência $[c]$ e considera-se um sistema de coordenadas com o plano xy ortogonal à reta CT e origem no

ponto T (figura 1.187.e). As retas n e g coincidentes com os eixos x e y deste sistema de coordenadas, respetivamente, definem o plano θ tangente à superfície esférica no ponto T (figura 1.187.f).

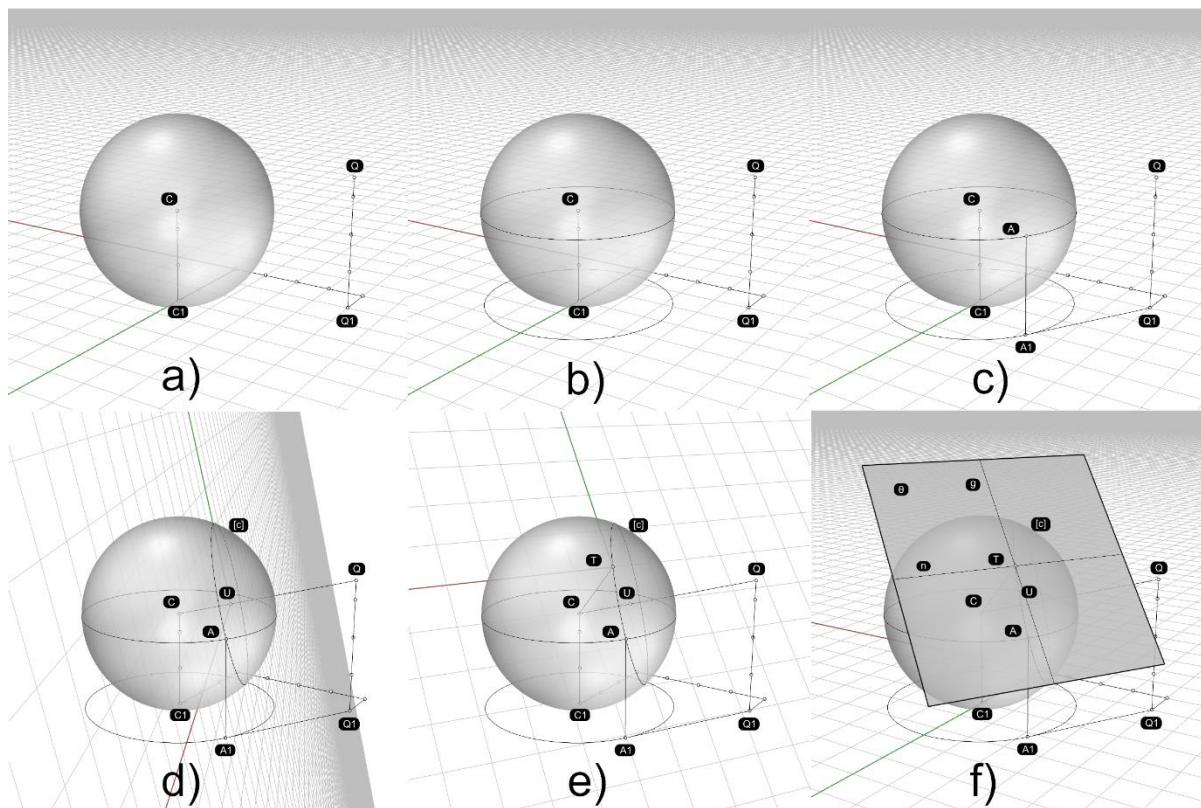


Fig. 1.187. Condução do plano tangente à superfície esférica por um ponto Q exterior. Problema resolvido em ADMG3D.

Nos ADMG3D a operação equivalente aos métodos auxiliares da representação que visam o controlo métrico dos objetos (rebatimento, rotação e mudança do plano de projeção) é a alteração do sistema de coordenadas associado às operações a realizar. Este, podendo ser alterado à medida que a modelação vai evoluindo, costuma receber designações como sistema de coordenadas do utilizador ou plano de construção. Há várias formas de definir este tipo de sistema de coordenadas, por exemplo a partir de pontos, alinhado com uma entidade instanciada, ortogonal a uma linha, etc.

Atividade proposta:

Justifique os processos de resolução descritos e ilustrados.

Proponha outro processo de resolução válido.

O segundo é o problema da figura 1.88. Trata-se da determinação de uma interseção elítica produzida num cone oblíquo de vértice V por um plano de topo α (figura 1.188.a). A construção da solução do problema por meio das projeções implica a determinação prévia de alguns pontos após o que, dependendo do ambiente em que se opera, se representa a linha de interseção $[e]$. Se for um ambiente analógico, os pontos têm forçosamente de ser interpolados e para garantir a precisão gráfica pode utilizar-se um escantilhão de curvas. Se for um ADMG2D também é possível proceder de forma idêntica, embora não seja o mais correto. Porventura o mais correto seja determinar pontos tendo em conta a especificidade da funcionalidade que se vai utilizar para, a partir deles, instanciar a curva $[e]$. E neste caso, por exemplo, é lógico

procurar a determinação dos focos da curva e escolher uma funcionalidade que no-la permita representar a partir dos focos. Foi o que fizemos na solução descrita na figura 1.88.

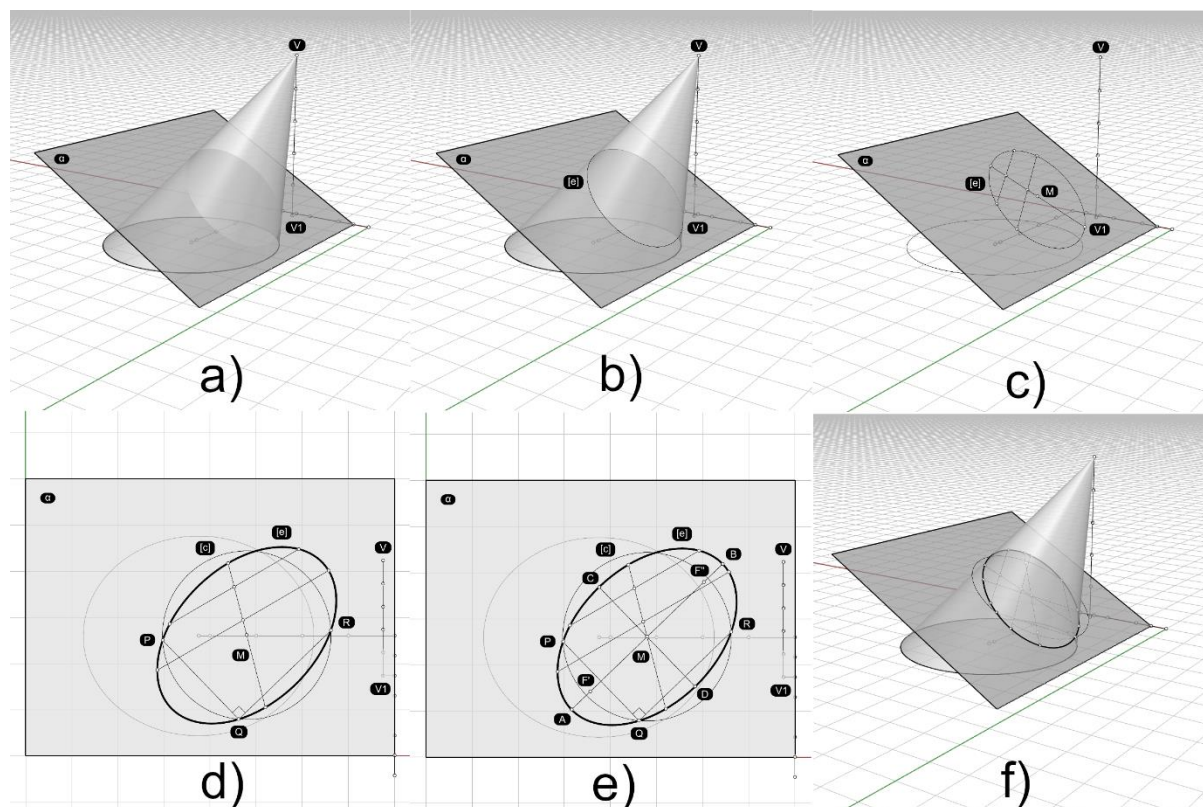


Fig. 1.888. Resolução de uma interseção elítica produzida por um plano secante na superfície de um cone oblíquo. Problema resolvido em ADMG3D.

Se estivermos a utilizar um ADMG3D, a computação da curva é tão imediata e precisa como a computação de um ponto de interseção de duas curvas num ADMG2D. Com efeito, foi o que fizemos agora para obter a curva $[e]$ utilizando uma funcionalidade de interseção entre superfícies (figura 1.188.b).

A primeira reação é pensar que já não precisamos da geometria descritiva! Agora temos a possibilidade de resolver com um clique aquilo que antes obrigava a um conjunto moroso e enfadonho de procedimentos repetitivos. Mas isto só pode fazer sentido se olharmos para a geometria descritiva tradicional apenas como um repositório de métodos de computação gráfica bidimensional. Este equívoco é semelhante ao de considerar que não se necessita da aritmética porque se podem fazer cálculos numa máquina calculadora. Embora a geometria descritiva se funde sobre aquela componente, deve ser antes vista como um porta de entrada para o estudo da geometria no espaço. E sob este ponto de vista, é indiferente se as operações de computação gráfica das figuras são feitas através da geometria plana ou diretamente através da geometria no espaço porque o importante é o discurso que se pode elaborar sobre as figuras.

Note-se que mesmo após ser determinada a curva $[e]$, no ADMG3D utilizado, nada há que nos informe sobre a verdadeira natureza da curva que esta operação implica. Na verdade, até ficamos surpreendidos quando, ao listar as propriedades da curva, verificamos que a curva tem grau 3, o que é estranho porque sabemos que a interseção entre um plano e uma superfície cónica, nas condições do enunciado, deve ser uma elipse e, por isso, deveria ter grau 2. Então o que se passa aqui? A questão é que este ADMG3D utiliza aproximações para

representar as interseções e não as exatas fórmulas que descrevem matematicamente o que acontece quando duas superfícies de determinado tipo se interseccionam. O resultado prático é que a curva $[e]$ que se obteve representa a elipse com um alto grau de precisão mas não é matematicamente uma elipse! Sendo uma representação altamente precisa, é possível utilizá-la para determinar, também com alto nível de precisão, o centro da elipse, os eixos principais e os focos. Na figura (figura 1.188.c) determinou-se o centro M da elipse como o ponto médio de um diâmetro definido pelos pontos médios de duas cordas da elipse paralelas entre si. Com centro no ponto M considerou-se uma circunferência contida no plano α . Esta circunferência intersecciona a elipse $[e]$ em quatro pontos, dos quais se notaram P , Q e R . As retas PQ e QR são perpendiculares entre si e têm as direções dos eixos principais da elipse (figura 1.188.d). Afirmamos que representamos uma circunferência. Se há pouco dissemos que não representamos exatamente uma elipse mas sim uma aproximação, o mesmo aplica-se à circunferência? Não, porque a circunferência foi instanciada com uma função própria. E a formulação matemática utilizada pelo ADMG3D, isto é as NURBS (Non-uniform Rational B-Splines), permite representar matematicamente as linhas cônicas. Mas isto parece levantar uma contradição. Se as NURBS permitem representar matematicamente as linhas cônicas, porque é que há pouco o resultado não foi matematicamente uma elipse? Isto sucede porque, do ponto de vista da implementação do ADMG3D não é equivalente a instanciamento de uma linha cônica, coisa que pode ser feita com funcionalidades (comandos) específicas, ou a determinação de uma interseção geral entre superfícies, que são resolvidas por aproximação. Este é um aspeto fundamental a ter em conta em qualquer ADMG3D não só quando o foco é o estudo da geometria, mas em qualquer questão de modelação!

Para determinar os eixos principais da elipse $[e]$, conduziram-se as retas $AB \parallel QR$ e $CD \parallel PQ$ pelo ponto M . Estas retas interseccionam a elipse $[e]$ nos extremos A e B do eixo maior e nos extremos C e D do eixo menor. Os focos F' e F'' determinam-se sobre a reta AB sabendo que $F'C = F''C = \overline{AM} = \overline{MB}$ (figura 1.188.e). A visualização final global encontra-se na figura 1.188.f.

Atividade proposta:

Justifique os processos de resolução descritos e ilustrados.

Proponha outro processo de resolução válido em que a curva $[e]$ seja matematicamente uma elipse e não apenas uma aproximação.

O terceiro é o problema a que corresponde figura 1.93. São dadas as coordenadas $(5, 4, 3)$ e $(1, 7, 1)$ para os pontos A e C , que definem a diagonal de um quadrado $[ABCD]$ em que o ponto B tem cota 0. Pretende representar-se um cubo $[ABCDEFGH]$ de que o ponto B é o vértice de menor cota. Na figura 1.889.a estão representados os pontos A e C bem como as suas projeções horizontais. No plano vertical passante pela diagonal $[AC]$ efetua-se uma cópia desta diagonal rodando-a 90° em torno do seu ponto médio M (figura 1.889.b). Pelo ponto de interseção desta reta com o plano xy conduz-se a reta horizontal h perpendicular à reta A_1C_1 (figura 1.889.c). Num plano perpendicular a AC descreve-se uma circunferência de diâmetro igual a $\overline{AC}$ e centro M (figura 1.889.d). Esta circunferência intersecciona a reta h em dois pontos, uma dos quais é considerado como o ponto B . Pode agora ser instanciado o quadrado $[ABCD]$ (figura 1.889.e). De seguida copia-se um dos lados do quadrado e roda-se 90° em torno de um dos outros lados. Após esta rotação instancia-se o cubo $[ABCDEFGH]$ por extrusão da face $[ABCD]$ (figura 1.889.e).

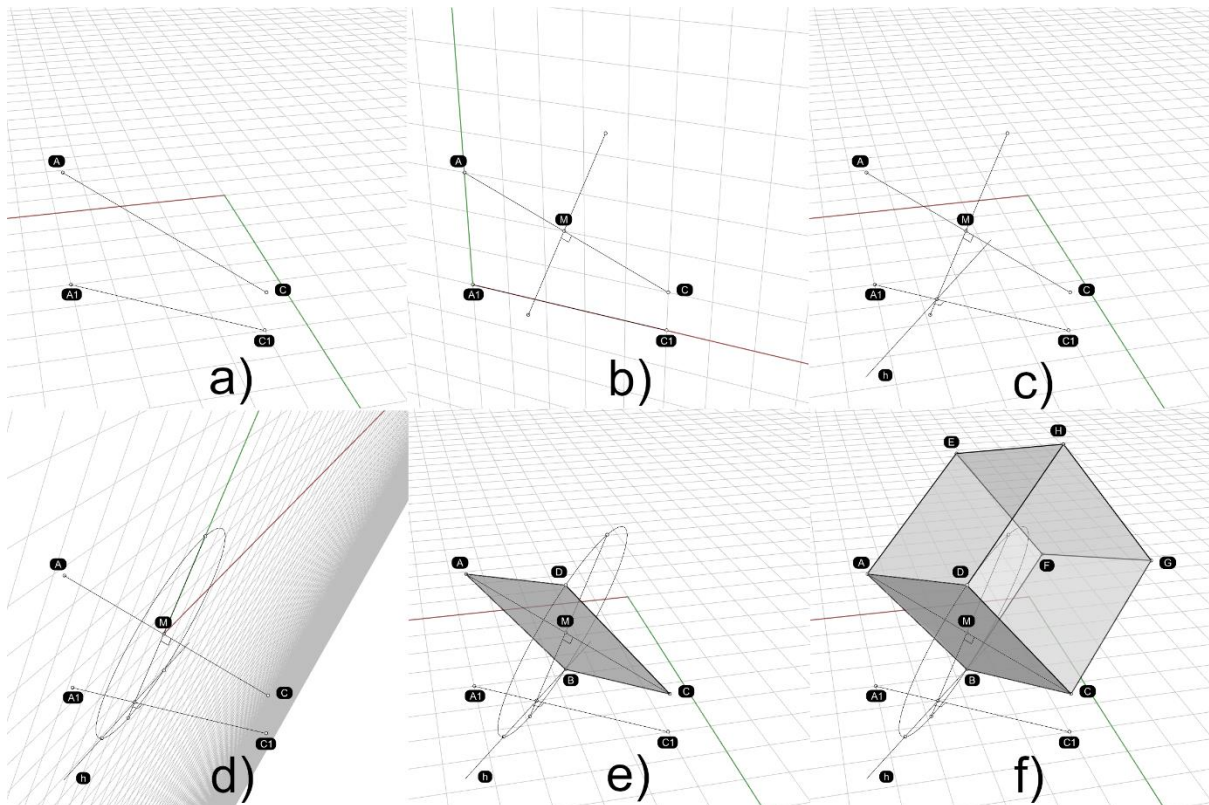


Fig. 1.889. Utilização sistemática de rotações para resolver a construção de um cubo. Problema resolvido em ADMG3D.

Atividade proposta:

Justifique os processos de resolução descritos.

Proponha outro processo válido de modelação do cubo.

Estes três exemplos permitiram mostrar que a utilização de um ADMG3D, por relação com um ADMG2D, não menoriza a necessidade de conhecimentos geométricos. Na verdade, julgamos que é exatamente ao contrário.

Atividade proposta:

Utilizando um ADMG3D à sua escolha, procure resolver as várias questões levantadas e tratadas nesta PARTE I. Note que a utilização de um qualquer ambiente deste tipo implica uma fase inicial de adestramento. A resolução dos exercícios que propomos pode propiciar um pretexto para esse adestramento.

PARTE II – Modelação geométrica tridimensional

Introdução

Na PARTE I deste texto adotámos uma abordagem clássica à geometria descritiva no sentido em que operámos quase sempre através da geometria plana para abordar os problemas da geometria no espaço. No final daquela parte, em jeito de transição para a PARTE II, fizemos uma incursão por um ADMG3D colocando em evidência que todos os problemas resolvidos anteriormente também podem ser abordados através de modelação geométrica tridimensional. Embora a generalidade da PARTE II seja desenvolvida através de um ADMG3D, parece-nos importante salientar que a realidade que nos envolve é, verdadeiramente, um ambiente analógico de modelação geométrica tridimensional que importa reconhecer. Por exemplo, quando um estudante de arquitetura ou de design produz uma maquete física de trabalho, é normal ter de realizar operações de corte, dobragem, colagem, etc. Nestes casos, está-se verdadeiramente a modelar no espaço. Num certo sentido, a produção deste tipos de modelos físicos está para os ADMG3D como o desenho à mão levantada está para os ADMG2D. E da mesma forma que é possível atravessar as fronteiras entre o mundo analógico e o mundo digital através da digitalização 2D e 3D, também é possível cruzar a fronteira no sentido oposto através da impressão 2D e 3D (fabricação e prototipagem). O tema da digitalização 3D será o objeto da PARTE III deste trabalho.

Em cada uma das secções seguintes serão aprofundados conceitos que já foram introduzidos anteriormente e serão apresentados outros conceitos. Tal como na parte anterior, temos o espaço euclidiano com a sua métrica usual, como o pano de fundo. Quando for conveniente considera-se a extensão deste espaço incluindo os elementos impróprios, aos quais a métrica euclidiana não se aplica.

Ao utilizar um ADMG3D a geometria, a matemática e a noção de algoritmo ficam inextricavelmente ligadas. Com isto incorporam-se conceitos relacionados com a álgebra, com a geometria diferencial, com a topologia, etc. E tudo isto é facilitado através da utilização do computador. Facilitado não significa que seja desnecessário conhecer os conceitos envolvidos. Bem pelo contrário. A proficuidade na utilização dos meios digitais depende desse conhecimento. E as disciplinas da arquitetura, do design e das engenharias têm muito a beneficiar de toda esta integração.

Noções essenciais de Geometria no Espaço II

Neste ponto abordam-se de modo informal, apelando à capacidade de visualização do leitor, algumas noções relativas a curvas e superfícies no espaço que são próprias da geometria algébrica e da geometria diferencial mas que é preciso entender, nos seus aspetos mais qualitativos, para aumentar a capacidade de utilização de ADMG3D. Com efeito, a implementação destas noções num AMGD3D torna-o um ambiente geométrico-descritivo. Se não o fez, recomenda-se a leitura da secção homóloga da PARTE I deste texto porque esta secção é uma continuação daquela.

Atividade proposta:

Escolha um ADMG3D e explore-o à luz dos conceitos introduzidos neste ponto.

Pontos e vetores

No espaço, um ponto P fica definido pelas suas coordenadas (P_X, P_Y, P_Z) . Um vetor $\vec{v}$ também fica definido por três componentes (V_X, V_Y, V_Z) estabelecida uma base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Estamos a considerar uma **base canônica** em que cada um dos vetores da base é **unitário** (tem comprimento igual a 1) e as três direções são ortogonais entre si. A notação entre pontos e vetores é semelhante mas importa distinguir os dois conceitos. Um ponto representa uma posição. Um vetor representa uma direção e uma magnitude; não tem uma localização no espaço. No espaço, a magnitude, ou **norma**, de um vetor é dada pela aplicação do teorema de Pitágoras às componentes do vetor e nota-se por $|\vec{v}| = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}$. Um vetor normalizado é um vetor cuja norma é 1. A normalização de um vetor $\vec{v}$ é dada por $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

É possível relacionar os conceitos de ponto e vetor. A subtração de um ponto a outro é um vetor. A soma de um ponto com um vetor é um ponto. Cada ponto do espaço pode ser considerado como a soma da origem com um vetor. Nesse caso, as coordenadas do ponto coincidem com as componentes do vetor. Pontos e vetores são entidades primitivas a partir das quais tudo se constrói, e desempenham um papel fundamental na modelação geométrica.

Para além da soma e diferença de vetores e multiplicação por um escalar, e respetivas propriedades destas operações, há outras duas operações fundamentais que se podem estabelecer entre vetores. Trata-se do **produto interno** e do **produto externo**. Interessam-nos sobretudo as definições geométricas destas operações.

O entendimento destas duas operações é estruturante para a modelação geométrica paramétrica uma vez que os vetores e operações relativas estão sempre a ocorrer nesse domínio.

Produto interno

O produto interno entre dois vetores é uma operação fundamental que permite estabelecer uma forma de medir ângulos no espaço. Sejam dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto interno nota-se por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é igual a $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$. Esta é a definição geométrica e indica que o produto interno entre dois vetores é o produto da projeção da magnitude de um deles, na direção do outro, pela magnitude do outro. Daqui se depreende que, se as direções dos vetores forem ortogonais entre si, o seu produto interno é igual a zero, e atinge o seu valor máximo (em termos absolutos) quando os dois vetores têm a mesma direção. A definição algébrica declara que o produto interno de dois vetores é a soma dos produtos das suas componentes homólogas, isto é, $a_X b_X + a_Y b_Y + a_Z b_Z$. Estamos a considerar apenas três dimensões mas a definição é extensível a qualquer número de dimensões.

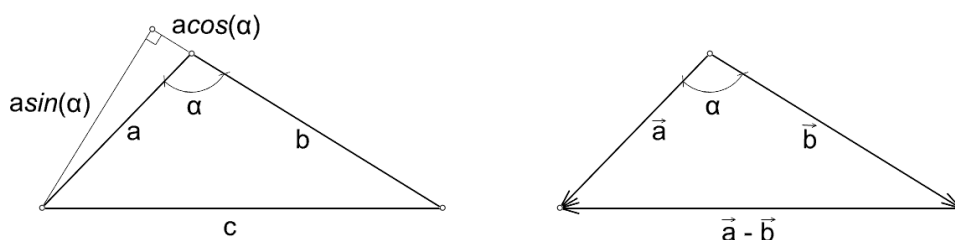


Fig. 2.1. Triângulos e diferença de vetores: a) Relação entre o triângulo retângulo e o triângulo abc , b) Diferença entre vetores.

Verifica-se que estas duas definições são equivalentes. Para entender essa equivalência, consideremos a lei dos cossenos. Num triângulo abc em que o ângulo α se opõe ao lado c (figura 2.1.a) pode escrever-se a seguinte relação, por aplicação do teorema de Pitágoras.

$$(a \sin(\alpha))^2 + (b - a \cos(\alpha))^2 = c^2$$

O que desenvolvido, se traduz na lei dos cossenos, e fica:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha)$$

Aplicando a lei dos cossenos aos comprimentos dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ (figura 2.1.b) ficamos com:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)$$

O que resulta em:

$$\begin{aligned} a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - (a_x - b_x)^2 - (a_y - b_y)^2 - (a_z - b_z)^2 \\ = 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Desenvolvendo temos:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

De onde se mostra que as duas definições são equivalentes.

Atividade proposta:

Considere pares de vetores no espaço. Calcule o seu produto interno.

Produto externo

O produto externo entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, nota-se por $\vec{a} \times \vec{b}$, e é um vetor $\vec{c}$ ortogonal aos outros dois cuja norma é dada por $|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$. Esta é a interpretação geométrica do produto externo. Daqui depreende-se que se os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tiverem a mesma direção, o produto externo é igual a zero. Como o produto externo segue a regra da mão direita, permutar os dois vetores, implica que o resultado seja simétrico, isto é, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Também se percebe que a norma do produto externo é igual à área do paralelogramo cujos lados medem o mesmo que as normas dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A definição algébrica declara que o produto externo de dois vetores pode ser obtido aplicando a propriedade distributiva aplicada a esta operação, isto é, desenvolvendo a igualdade:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{x} + a_y \vec{y} + a_z \vec{z}) \times (b_x \vec{x} + b_y \vec{y} + b_z \vec{z})$$

E obtendo:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{z}$$

Mostrar que as duas definições são equivalentes passa por mostrar que $|\vec{a} \times \vec{b}|$ tem o mesmo valor quer se parta da definição geométrica ou da definição algébrica. Isto implica, partindo das definições geométricas, desenvolver a expressão $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$ até obter

$$\sin^2(\alpha) = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2}, \text{ e a expressão da lei dos cossenos até obter } \sin^2(\alpha) = \frac{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2}. \text{ Depois,}$$

igualando os lados direitos das duas expressões e resolvendo para $|\vec{a} \times \vec{b}|$ mostra-se que se obtém o mesmo resultado de quando se calcula a norma a partir da definição algébrica.

E num passo seguinte passa por mostrar, utilizando o produto interno, que $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$ (Wikipedia contributors, 2025b).

Atividade proposta:

Considere pares de vetores no espaço. Calcule o seu produto externo.

Linhas e superfícies

Uma **linha reta** tem uma única direção. Pode ser considerada como o movimento de um ponto ao longo de uma direção. Se em alguns instantes desse movimento a direção mudar de forma brusca, passamos a ter uma **linha poligonal**. Se a mudança da direção for contínua e suave, passamos a ter uma **linha curva**. Se, no seu movimento, o ponto retorna à sua posição inicial, isto é, o ponto inicial da curva coincide com o ponto final, temos uma **linha fechada**, caso contrário temos uma **linha aberta**. Se a mudança de direção ocorrer sempre na mesma orientação, então diz-se que temos uma **linha plana**, isto é, uma linha contida num plano, caso contrário, temos uma **linha espacial**. Uma linha em que a direção do movimento do ponto muda continuamente de tal modo que, em geral, em três instantes consecutivos as três direções do movimento não estejam contidas numa única orientação, diz-se **linha torsa**. Dito de outro modo, em geral, numa linha torsa, quatro pontos consecutivos infinitamente próximos nunca estão no mesmo plano.

Uma superfície pode ser conceitualmente definida como o movimento contínuo de uma linha no espaço, deformável ou não, sujeita a uma certa lei. Uma linha pode resultar da interseção entre superfícies. Analiticamente, o **grau** de uma curva ou de uma superfície é o grau do polinómio que define a curva ou a superfície.

Incidência entre ponto, linha e superfície

Se um ponto T pertence a uma linha $[m]$ e esta está contida numa superfície $[\alpha]$, então o ponto T pertence à superfície $[\alpha]$ (figura 2.2).

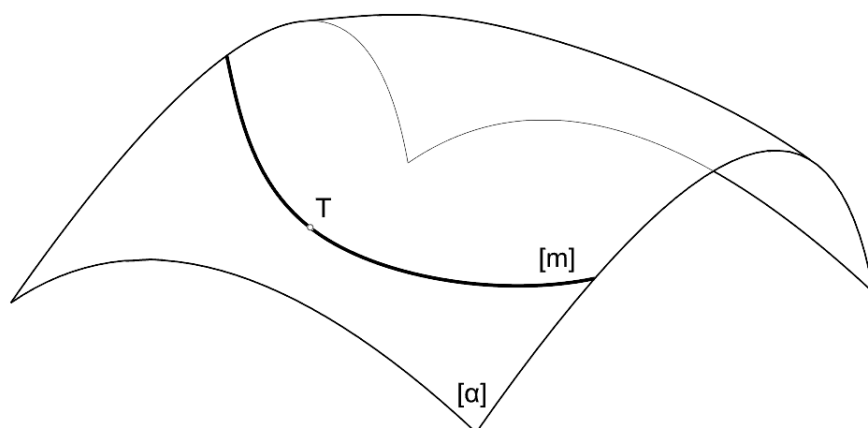


Fig. 2.2. Pertença de um ponto a uma superfície.

Reta tangente a uma curva e a uma superfície

O ponto T pertence à linha $[m]$ e esta está contida na superfície $[\alpha]$. A reta t , tangente à linha $[m]$ no ponto T , corresponde à posição limite da reta secante s , quando o ponto X tende para o ponto T . Se a reta t é tangente à linha $[m]$ no ponto T , também é tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto T (figura 2.3).

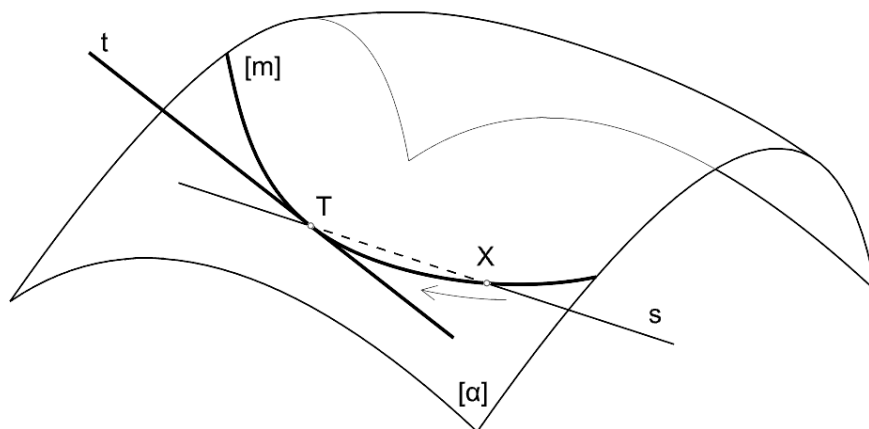


Fig. 2.3. Reta tangente a uma curva e a uma superfície num ponto T .

Plano tangente a uma curva e plano osculador a uma curva

Qualquer plano que contenha a reta tangente a uma curva $[m]$ num ponto T , é tangente à curva nesse ponto. Existe uma infinidade de planos tangentes a uma curva $[m]$ num ponto T . O **plano osculador** θ de uma linha curva $[m]$ num ponto T é a posição limite do plano definido pelos pontos S , T e U , quando os pontos S e U tendem para o ponto T . Numa curva plana o plano osculador é o mesmo para todos os seus pontos, isto é, é o plano da curva (figura 2.4).

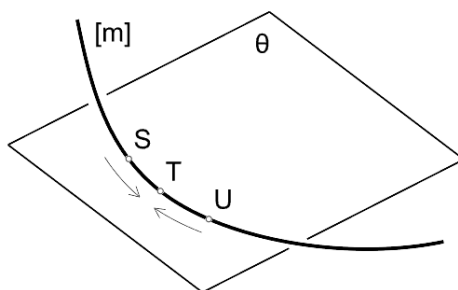


Fig. 2.4. Plano osculador de uma curva num ponto T .

Triedro de Frenet-Serret

A reta t tangente a uma curva $[m]$ num ponto T está contida no plano osculador à curva nesse ponto. A **reta normal** n a uma curva num ponto T é a perpendicular à tangente, passando pelo ponto T , contida no plano osculador. A reta b , passando pelo ponto T e perpendicular ao plano osculador, é a **reta binormal** à curva $[m]$ no ponto T . A tangente, a normal e a binormal definem um sistema de coordenadas associado à curva $[m]$ no ponto T . Este recebe a designação de **triedro de Frenet-Serret** ou **sistema de coordenadas de Frenet-Serret**. Para cada ponto de uma curva há um destes sistemas de coordenadas (figura 2.5).

O plano definido pela tangente e pela normal é o plano osculador da curva no ponto T ; o plano definido pela normal e pela binormal é o **plano normal à curva** no ponto T ; e o plano definido pela tangente e pela binormal é o **plano retificante da curva** no ponto T .

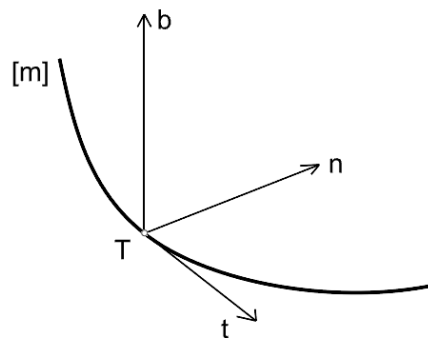


Fig. 2.5. Triedro de Frenet-Serret de uma curva num ponto T .

O triedro de Frenet-Serret desempenha um papel muito importante na modelação geométrica porque é o que permite orientar objetos em relação a uma curva.

Circunferência osculadora e esfera osculadora

A **circunferência osculadora** de uma curva num ponto T pode ser considerada, como o limite, a circunferência definida pelos pontos S , T e U , quando os pontos T e U tendem para o ponto T . A circunferência osculadora $[c]$ de uma curva $[m]$ num ponto T está contida no plano osculador à curva nesse ponto, e é o traço produzido pelo plano osculador na **esfera osculadora** $[\Delta]$ à curva no ponto T . Numa curva torsa, a superfície da esfera osculadora fica definida pelos pontos S , T , U e V quando os pontos S , U e V tendem para o ponto T (figura 2.6). Numa curva plana, como os quatro pontos são coplanares não faz sentido falar em esfera osculadora (teria raio infinito). O raio de curvatura R da curva $[m]$ no ponto T é o raio da circunferência osculadora, dado pelo comprimento do segmento $[TC]$ contido na reta normal à curva $[m]$ no ponto T .

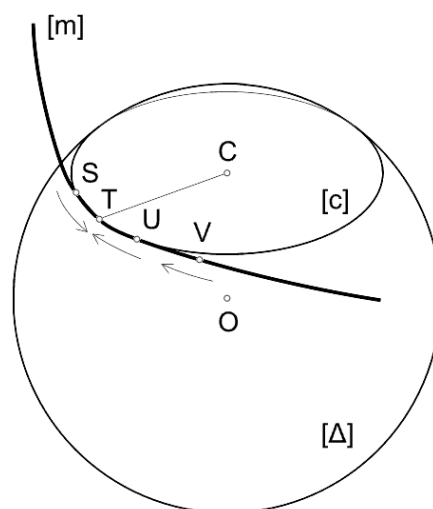


Fig. 2.6. Circunferência osculadora e esfera osculadora uma curva num ponto T .

Curvatura e torção de uma linha curva

A **curvatura** de uma curva $[m]$ num dado ponto T é o inverso do **raio de curvatura** (R) da curva nesse ponto e é uma medida da variação da direção de uma curva. Numa circunferência essa variação é constante. Por isso a circunferência tem curvatura constante. Mas numa curva torça isso já não acontece. É como se o triedro de Frenet-Serret rodasse em torno da reta tangente à medida que o ponto T progride na curva. A medida da variação desta rotação designa-se por **torção**.

Podemos associar a curvatura à variação angular π° entre duas retas tangentes consecutivas e infinitamente próximas, por exemplo ST e TU quando os pontos S e U tendem para T . A torção pode ser associada à variação angular δ° entre dois planos osculadores consecutivos infinitamente próximos, por exemplo STU e TUV quando os pontos S , U e V tendem para T . Estes dois planos têm em comum a reta TU (figura 2.7). O raio da esfera osculadora é uma medida da curvatura e da torção simultaneamente (Asensi, 1996).

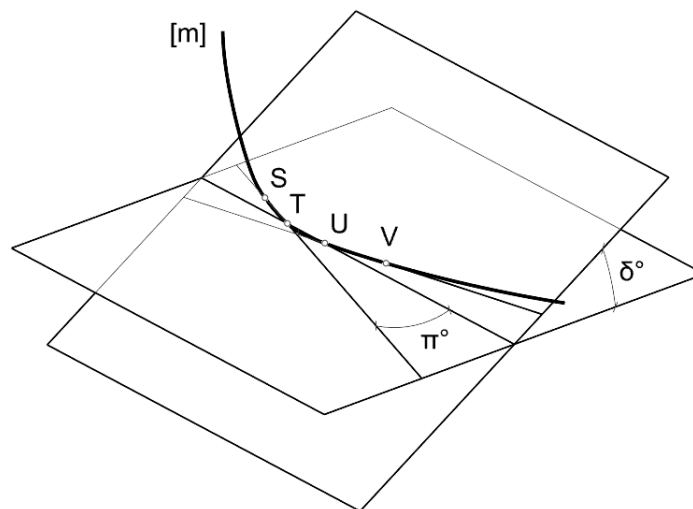


Fig. 2.7. Curvatura e torção de uma curva num ponto T .

Continuidade geométrica entre curvas

Entre duas curvas podem ser estabelecidos diferentes tipos de continuidade. Nas curvas da figura 2.8 há apenas **continuidade de posição** entre as curvas $[a]$ e $[b]$, isto é, há um vértice V na transição entre as duas curvas. Isto é comumente designado por continuidade **G0**.

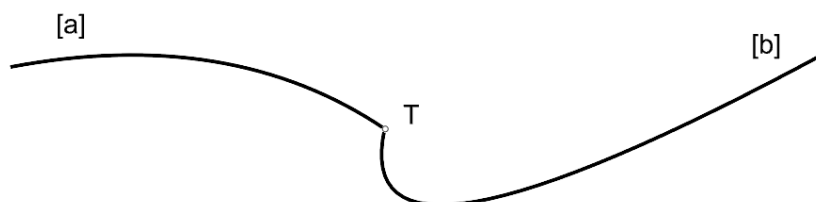


Fig. 2.8. Curvatura **G0** entre duas curvas.

Se, no ponto de transição T , as duas curvas partilharem a mesma reta tangente t , mas tiverem curvaturas distintas, diz-se que temos **continuidade de tangência** (figura 2.9). Isto é comumente designado por continuidade **G1**.

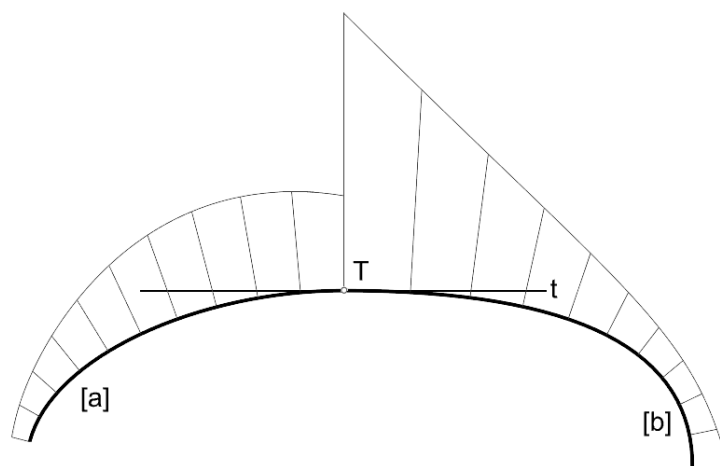


Fig. 2.9. Curvatura **G1** entre duas curvas. Note-se que não há continuidade de curvatura conforme é ilustrado pelos gráficos de curvatura associados a cada uma das curvas.

Se, no ponto T , as linhas partilharem a mesma tangente t , o mesmo triedro de Frenet-Serret, e a mesma curvatura, então diz-se que temos **continuidade de curvatura**. Isto é comumente designado por continuidade **G2**. Se, adicionalmente tiverem a mesma torção no ponto T , então diz-se que temos **continuidade de torção**, comumente designada por continuidade **G3**.

O tipo de continuidade entre superfícies pode ser visualizado através de um procedimento designado por **análise zebra**. Este é um procedimento implementado em muitos ADMG3D. No essencial, considera-se a superfície como sendo especular e observa-se a reflexão de um padrão listado (em geral listas brancas e pretas entremeadas à semelhança de um código de barras). Na transição entre superfícies, se as listas apresentarem descontinuidades, as superfícies têm continuidade **G0**; se as listas apresentarem quebras, as superfícies têm continuidade **G1**; se as listas transitarem suavemente de uma superfície para a outra, as superfícies têm continuidade **G2**.

Paralelismo entre curvas

A distância de um ponto P a uma curva $[m]$ é dada pelo comprimento do segmento $[PI]$, em que I é a interseção da reta p normal à curva $[m]$ passante pelo ponto P . Note-se que, em geral, esta reta normal não é a reta normal n definida nos termos em que definimos o triedro de Frenet-Serret. É, no entanto, uma reta que está contida no plano definido pela normal e pela bi-normal. No caso de o ponto P e a curva $[m]$ serem coplanares, então a reta p coincide sempre com a reta n .

Uma curva $[p]$ paralela a uma curva plana $[m]$, é uma curva, do mesmo plano, cujos pontos se encontram a uma distância fixa, d , da curva $[m]$. Em geral, dada uma curva plana $[m]$, existem duas curvas paralelas a uma distância fixa d .

Generalizando, duas curvas quaisquer consideram-se paralelas se todas as normais a uma são normais à outra e se a distância entre os pontos de interseção de cada uma das normais com as duas curvas estão sempre à mesma distância d entre si.

Plano tangente e reta normal

Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas contidas na superfície $[a]$ e incidentes no ponto T . Sejam as retas t_A e t_B tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$ no ponto P , respetivamente. Então o plano θ definido pelas

retas t_a e t_b é o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto T . Este também pode receber a designação de **plano osculador**. Se uma ou as duas linhas da superfície forem retas, então o plano tangente contém-nas. A reta $n \perp \theta$ passante por T é a **reta normal à superfície** em T (figura 2.10).

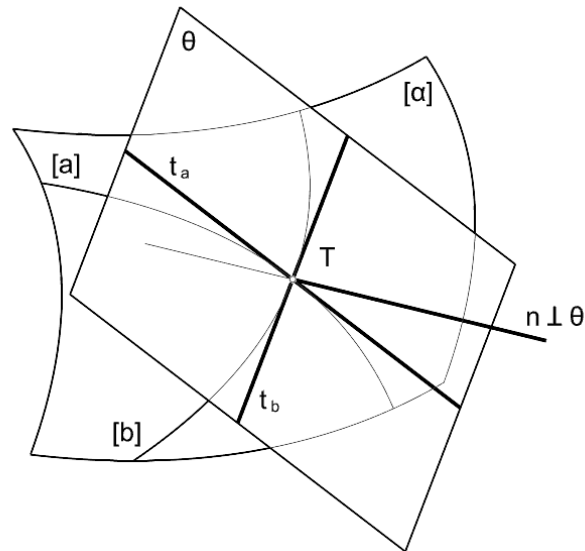


Fig. 2.10. Plano tangente e reta normal a uma superfície.

Plano normal e secção normal

Qualquer plano π passante pela reta $n \perp \theta$ é um **plano normal à superfície** $[\alpha]$ no ponto T . A linha de intersecção $[i]$ produzida pela intersecção do plano π com a superfície $[\alpha]$, designa-se por **secção normal à superfície** no ponto T (figura 2.11).

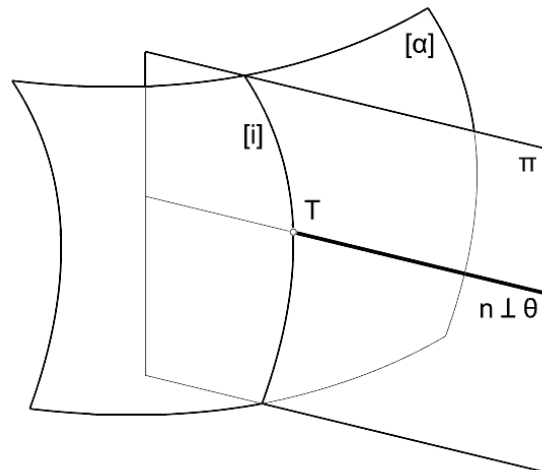


Fig. 2.11. Plano normal e secção normal a uma superfície.

Curvatura de uma superfície

Para cada ponto T de uma superfície $[\alpha]$, existem dois planos normais β e δ , perpendiculares entre si, que a interseccionam a segundo linhas $[f]$ e $[g]$ que tem a propriedade de, entre todas as secções normais, serem a de maior e menor curvatura no ponto T . Estas designam-se por **secções normais principais**. Sejam K_f e K_g as curvaturas das linhas $[f]$ e $[g]$ em T .

Define-se a **curvatura média** de uma superfície $[\alpha]$ num ponto T como $K_m = (K_f + K_g)/2$.

Define-se a **curvatura gaussiana** de uma superfície $[\alpha]$ num ponto T como $K_g = K_f \cdot K_g$.

Se o plano tangente à superfície no ponto T a dividir em quatro regiões na vizinhança do ponto, duas em cada lado do plano, então a superfície tem **curvatura dupla de sentidos opostos** no ponto T e diz-se **anticlástica** em T . Neste caso tanto a curvatura gaussiana como a curvatura média são negativas em T porque as curvaturas das linhas $[f]$ e $[g]$ no ponto T têm sinais opostos. O ponto T recebe a designação de **ponto hiperbólico** (figura 2.12.a).

Se o plano tangente à superfície no ponto T tiver em comum com a superfície uma linha passante por T na sua vizinhança, então a superfície tem **curvatura simples** no ponto T e diz-se **monoclástica** em T . Nesse caso a curvatura gaussiana é zero no ponto T . O ponto T recebe a designação de **ponto parabólico** (figura 2.12.b).

Se o plano tangente à superfície no ponto T tiver apenas este ponto em comum com a superfície na sua vizinhança, então a superfície tem **curvatura dupla com o mesmo sentido** no ponto T e diz-se **sinclástica** em T . Neste caso a curvatura gaussiana é positiva em T e a curvatura média pode ser positiva ou negativa consoante as curvaturas das linhas $[f]$ e $[g]$ no ponto T tenham sinal positivo ou negativo. O ponto T recebe a designação de **ponto elíptico** (figura 2.12.c).

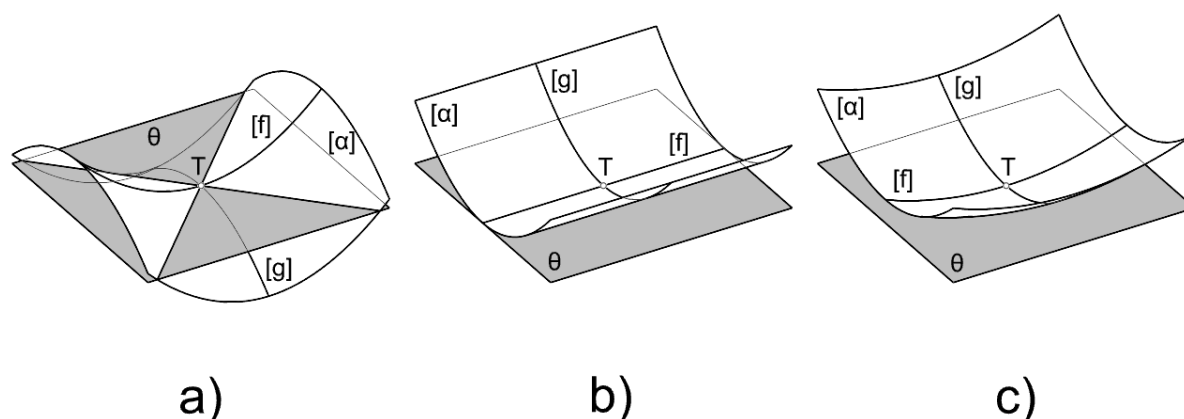


Fig. 2.12. Tipos de superfície quanto à curvatura num ponto T : a) anticlástica, b) monoclástica, c) sinclástica.

Linhas geodésicas, linhas de curvatura e triedro de Darboux

Numa superfície, a uma linha que corresponde à mais curta distância entre dois pontos, dá-se o nome de **linha geodésica**. O conceito de geodésica generaliza para as superfícies a ideia de “linha reta” em relação ao plano. A medida do desvio de uma curva, num dado ponto, em relação a ser uma geodésica, designa-se por **curvatura geodésica**.

Como vimos acima, em cada ponto de uma superfície há, em geral, duas secções normais principais. A uma linha da superfície que, em cada um dos seus pontos, partilha a mesma reta tangente com uma das secções normais principais, dá-se o nome de **linha de curvatura** da superfície. Em geral, as linhas de curvatura de uma superfície formam um rede de curvas que se intersejam perpendicularmente. Assim, para cada ponto de uma superfície, em geral, é possível associar um sistema de coordenadas do seguinte modo. Os eixos x e y são alinhados com as retas tangentes às secções normais principais e o eixo z é a reta normal à superfície.

Este designa-se por **triedro de Darboux** ou **sistema de coordenadas de Darboux**, e está para as superfícies como o triedro de Frenet-Serret está para as curvas. E por isso pode fornecer um critério no que concerne a orientar objetos em relação a uma superfície.

Interseção e continuidade geométrica entre superfícies

A interação entre duas superfícies pode ocorrer de diferentes modos. As superfícies podem não se intersestar; podem ter alguns pontos em comum; podem ter linhas em comum; ou pode acontecer uma combinação de diferentes situações.

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersestarem segundo uma linha $[i]$, então é possível afirmar que existe pelo menos uma superfície $[\delta]$ que intersesta as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo linhas $[a]$ e $[b]$, respetivamente, de tal modo que as linhas $[a]$ e $[b]$ se intersestem num ponto I pertencente à linha $[i]$ (figura 2.13.a). A reta tangente à linha $[i]$ no ponto I resulta da interseção dos planos tangentes à duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ em T . Este resultado é o fundamento para os métodos para a determinação da interseção entre superfícies típicos da geometria descritiva, e também fornece uma base para o entendimento do que se passa num ADMG3D.

De acordo com o teorema de Bezout, em geral, o grau da linha de interseção é o produto dos graus das superfícies que estão a ser intersestadas. Por exemplo, a interseção geral de duas superfícies de grau dois (**quádrica**) é uma linha de grau quatro (**quártica**). A resolução matematicamente exata de interseções de superfícies não é em geral fácil e muitas vezes nem é possível ou desejável para fins práticos. Por isso, nas ferramentas de software CAD é comum serem implementados métodos que resolvem as interseções por aproximação. Por exemplo, no software Rhinoceros, a interseção entre superfícies é em geral representada aproximadamente por curvas de grau três, isto é, por **linhas cúbicas** mesmo que o produto dos graus das superfícies seja superior a três. Isto significa que neste ADMG3D não devemos esperar soluções gráficas exatas mas apenas aproximações muito precisas.

Se as superfícies admitirem os mesmos planos tangentes em todos os pontos da linha $[i]$ comum, então as duas superfícies dizem-se **tangentes** ou **concordantes** entre si. E nesse caso, as linhas $[a]$ e $[b]$ são tangentes entre si no ponto I da linha $[i]$ (figura 2.13.b).

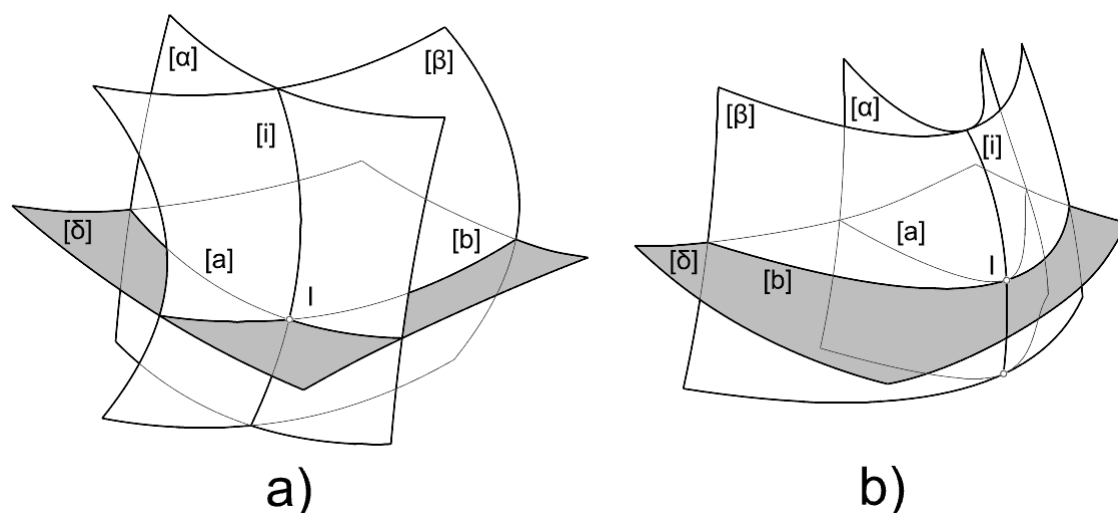


Fig. 2.13. Interação entre superfícies: a) interseção, b) concordância.

Muitas vezes, alguns ADMG3D apresentam limitações na determinação de linhas de interseção entre superfícies quase rasantes ou mesmo tangentes entre si. Por isso, este tipo de situação deve ser avaliada com cuidado para fins de modelação.

A interseção e a concordância dão origem à continuidade de posição (**G0**) e continuidade de tangência (**G1**) entre superfícies (figura 2.14).

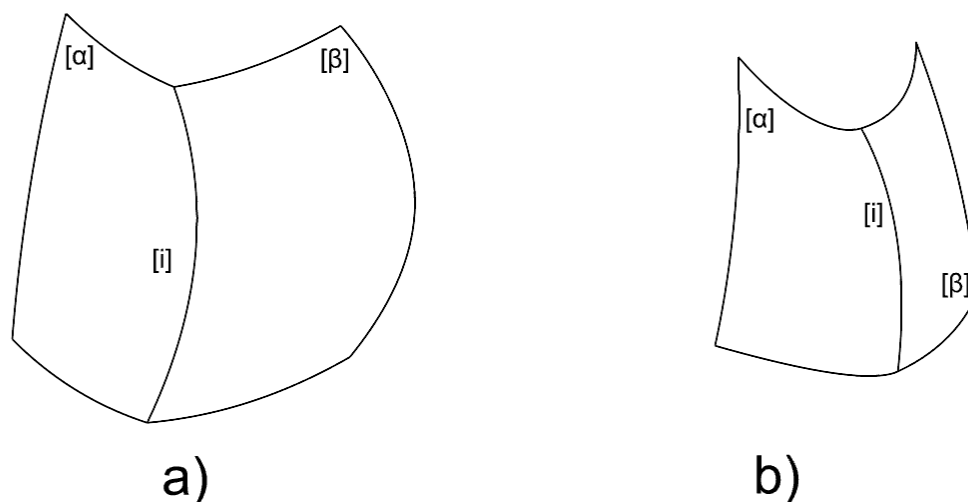


Fig. 2.14. Continuidade geométrica entre superfícies: a) continuidade de posição, b) continuidade de tangência.

Se ao longo de todos os pontos da linha de transição entre as superfícies, ambas as superfícies apresentarem a mesma curvatura, então diz-se que há continuidade de curvatura (**G2**).

O **contorno aparente** $[s]$, de uma superfície $[\alpha]$, a partir de um ponto P , é a linha de concordância entre a superfície $[\alpha]$ e uma superfície cônica de vértice em P . Também se pode designar o contorno aparente por **silhueta** da superfície. Se o ponto P for impróprio, em vez de uma superfície cônica temos uma superfície cilíndrica concordante com a superfície $[\alpha]$.

Paralelismo entre linhas e superfícies e entre superfícies

A distância de um ponto P a uma superfície $[\alpha]$ é o comprimento do segmento $[PI]$, em que I é o ponto de interseção da reta n normal à superfície passante pelo ponto P . Pode-se considerar que uma linha $[m]$ é paralela a uma superfície $[\alpha]$ se todos os seus pontos se encontram a uma distância fixa d da superfície. Duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ são paralelas entre si se os pontos de uma estão a uma distância fixa d da outra.

Representação paramétrica de linhas e superfícies

Na utilização de um ADMG3D uma linha ou superfície é normalmente instanciada através de função, ou comando, implementada na aplicação. Normalmente é solicitado ao utilizador que especifique um conjunto de valores que permitam definir o objeto instanciado, ou que selecione um conjunto de objetos previamente instanciados para gerar o novo objeto, ou ainda uma combinação destas duas modalidades.

Por exemplo, para instanciar uma circunferência $[c]$ é normal que seja solicitado o seu centro (através das coordenadas ou selecionando um ponto previamente instanciado) e o seu raio (através de um valor numérico ou especificando um ponto que deve pertencer à curva). Normalmente a instanciação faz-se em relação com sistema de coordenadas de trabalho em uso. Podemos olhar para as coordenadas do centro (C), para o raio (r) e para o plano (pl) em

que deve estar contida a curva, como parâmetros da curva. De algum modo podemos dizer que a circunferência $[c]$ é função daqueles parâmetros e, abusando da linguagem, poderíamos escrever $[c] = f(C, r, pl)$.

Por outro lado há várias formas de representar matematicamente uma circunferência contida num plano xy através de equações.

A forma reduzida é $(X - a)^2 + (Y - b)^2 = r^2$, em que X e Y são coordenadas de um ponto qualquer da circunferência, a e b são as coordenadas do centro, e r é o raio da circunferência.

A forma geral é $X^2 + Y^2 + dX + eY + f = 0$, em que X e Y são coordenadas de um ponto qualquer da circunferência e os parâmetros d , e e f são função das coordenadas a e b do centro da circunferência e do seu raio r .

Outra forma de representar a circunferência é através de uma parametrização da mesma, a que corresponde representa as coordenadas X e Y em função de um parâmetro t . Neste caso, as equações paramétricas da circunferência são:

$$X = a + r \cos(t)$$

$$Y = b + r \sin(t)$$

Em que t é um parâmetro que varia entre 0 e 2π , isto é, t corresponde diretamente a uma medida angular.

A parametrização de uma curva não é única. Por exemplo, a circunferência pode ser parametrizada da seguinte forma (Wildberger, 2009):

$$X = a + r \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$Y = b + r \frac{2t}{1 + t^2}$$

Em que t é um parâmetro que varia entre $-\infty$ e $+\infty$.

Embora o resultado final seja a mesma circunferência, na verdade as duas formas de parametrizar não são idênticas. Considerando uma circunferência com centro de coordenadas $(3, 4)$ e raio igual a 2 , a primeira parametrização corresponde à figura 2.15.a e a segunda à figura 2.15.b.

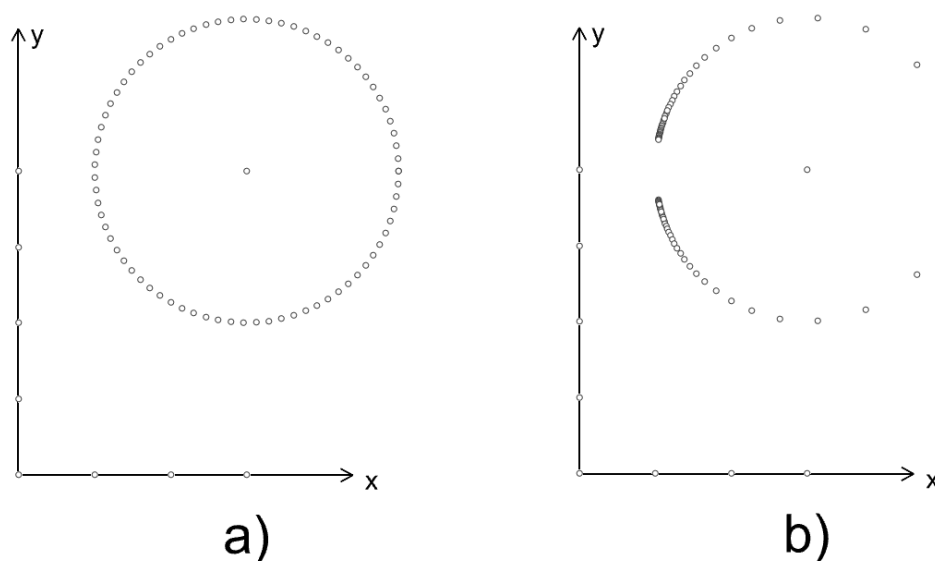


Fig. 2.15. Parametrização da circunferência.

Em ambos os casos avaliou-se o parâmetro t para 76 valores igualmente espaçados entre si. No primeiro caso esses valores distribuíram-se no intervalo $[0, 2\pi]$ sendo $t_0 = 0$ e $t_{75} = 2\pi$ (na prática não se considerou o valor $t = 2\pi$ porque o ponto resultante coincide com o ponto de correspondente a $t = 0$). No segundo caso, como é impraticável o intervalo entre $-\infty$ e $+\infty$, os valores distribuíram-se no intervalo $[-10, 10]$ sendo $t_0 = -10$ e $t_{75} = 10$. Note-se que, no segundo caso, não foi possível representar pontos da curva cujo valor de parâmetro ficou fora do intervalo escolhido. Em ambos os casos verificamos que a distância entre valores consecutivos do parâmetro t é igual. Dizemos que os valores estão igualmente espaçados no **espaço paramétrico**. Porém, essa igualdade no espaço paramétrico só se traduziu em igualdade entre distâncias no **espaço geométrico** no primeiro caso. Este é um aspeto fundamental a considerar na modelação geométrica paramétrica. Na maior parte dos casos não é possível ter simultaneamente distâncias iguais no espaço dos parâmetros e no espaço da geometria.

As mesmas ideias podem ser aplicadas às superfícies. No caso das superfícies, em vez de termos apenas um parâmetro, temos dois, normalmente designados u e v , e expressamos as coordenadas dos seus pontos em função desses parâmetros. Veja-se o exemplo da superfície esférica com centro de coordenadas (a, b, c) e raio igual a r . Uma parametrização da superfície esférica é a que se apresenta de seguida.

$$X = a + r \cos(-\pi/2 + \pi v) \cos(2\pi u)$$

$$Y = b + r \cos(-\pi/2 + \pi v) \sin(2\pi u)$$

$$Z = c + r \sin(-\pi/2 + \pi v)$$

Em que u e v são parâmetros que variam no intervalo $[0, 1]$. Repare-se que este intervalo podia ser outro desde que se alterassem as equações paramétricas de acordo com esse outro intervalo. Em termos práticos isso significa mapear um intervalo noutra intervalo.

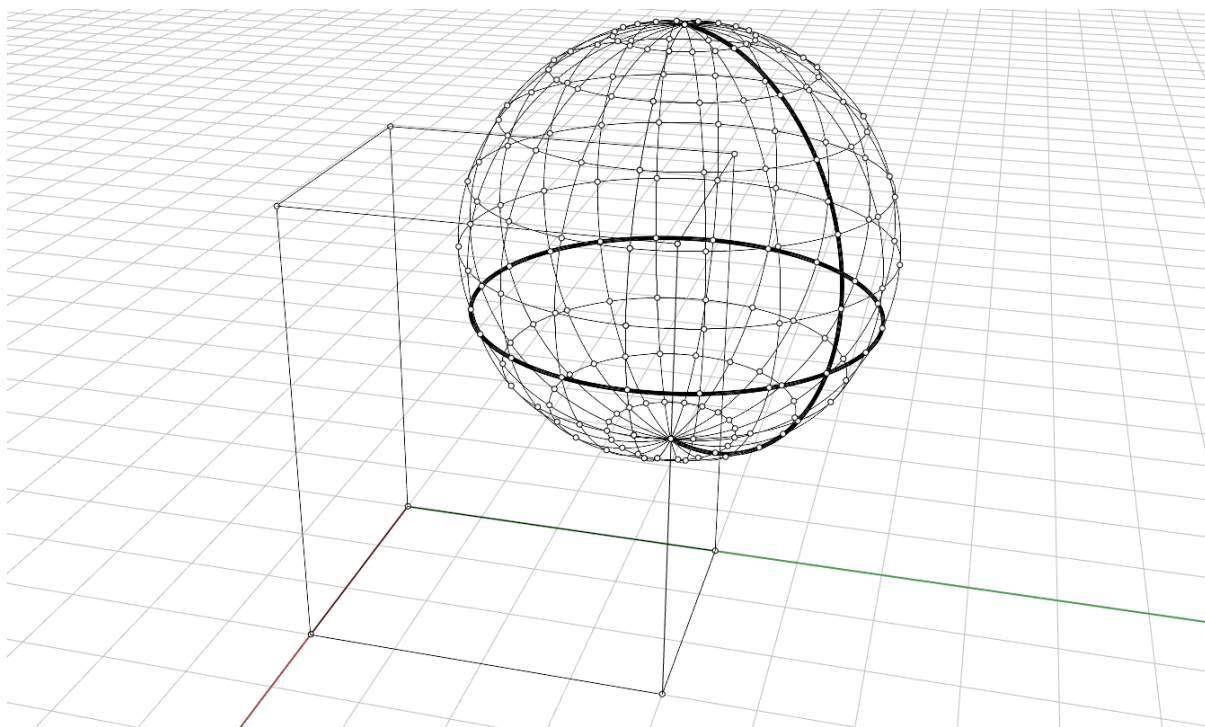


Fig. 2.16. Parametrização da superfície esférica.

Considerando uma superfície esférica com centro de coordenadas $(3, 4, 5)$ e raio igual a 2 , a parametrização corresponde aos pontos da figura 2.16 quando são avaliados **21** valores do parâmetro u (os pontos correspondentes a $u = 1$ coincidem com os pontos correspondentes a $u = 0$) e **11** valores do parâmetro v .

Fixando, por exemplo, o valor $v = 4$, têm-se a circunferência horizontal que aparece destacada na figura. E fazendo o mesmo para $u = 0.15$, têm-se a semicircunferência vertical que aparece destacada na figura. Cada uma destas linhas é o que se designa por **linha isoparamétrica**. Um ponto P de uma superfície tem as coordenadas geométricas X , Y e Z e as coordenadas paramétricas u e v . As linhas isoparamétrica fornecem um meio para mapear uma superfície noutra fazendo corresponder, entre as duas superfícies, pontos de coordenadas paramétricas idênticas.

Da mesma forma que uma linha admite mais que uma forma de parametrização, também uma superfície pode admitir mais que uma forma de parametrização. O modo de parametrizar as linhas e as superfícies tem impacto nos processos de modelação que recorrem ao espaço paramétrico.

Entender a representação paramétrica das curvas e das superfícies revela-se importante, sobretudo naqueles casos em que não conseguimos modelar o que pretendemos com um “clique” ou comando disponível no ADMG3D que estamos a utilizar. Nestes casos pode ser necessário recorrer a alguma espécie de programação para implementar o que se pretende. Por exemplo, o software Rhinoceros tem incorporado um plugin de modelação paramétrica, com o nome de Grasshopper, que permite ampliar as suas capacidades através da programação visual. Os resultados ilustrados nas figuras 2.15 e 2.16 foram obtidos utilizando este plugin.

Linhas

Algumas noções gerais relativas a linhas já foram dadas na PARTE I e no ponto anterior. Agora vamos especificar algumas classes de linhas e analisar algumas propriedades gráficas como o seu aspeto visual e a tangência.

Critérios de classificação

Não há apenas um critério para a classificação das linhas. É possível considerar inúmeras classes. E as classes não são exclusivas, o que significa que uma curva pode ser considerada em mais que uma classe. Os critérios para definir uma classe também podem ser variados.

Alguns exemplos. Uma curva pode ...

... ser aberta ou fechada;

... ser convexa ou apresentar concavidades;

... ser suave ou quebrada;

... apresentar simetrias ou ser completamente assimétrica;

... ser simples ou auto interseção;

... ter curvatura constante ou curvatura variável;

... ser definida por um movimento de um ponto com uma dada lei;

... ser plana ou espacial;

... ser definida por equações algébricas com diferentes graus;

... ser definida por equações algébricas ou por equações transcendentais.

Seguramente os critérios não ficam por aqui. Alguns destes critérios remetem para propriedades que podem ser reconhecidas visualmente (aberta ou fechada, suave ou quebrada, etc.) enquanto que outros não têm uma correspondência visual diretamente reconhecível (grau da equação, tipo de equação, etc.). Por vezes pode ser indicado mais que um critério para especificar uma curva (por exemplo, curva espacial aberta com curvatura constante).

Atividade proposta:

Procure criar um esquema gráfico que permita organizar a classificação dos tipos de linhas. Procure dar exemplos de cada uma das classes de linhas.

Linhas retas e poligonais

A linha reta está na base de todas as linhas poligonais. Uma linha reta fica definida dados um ponto P_0 e um vetor $\vec{a}$. Um ponto P qualquer da reta pode ser obtido em função daqueles elementos e de um parâmetro t , do seguinte modo:

$$P_{(t)} = P_0 + t\vec{a}$$

O que pode ser expresso em coordenadas:

$$X_P = X_{P_0} + t\vec{a}_x$$

$$Y_P = Y_{P_0} + t\vec{a}_y$$

$$Z_P = Z_{P_0} + t\vec{a}_z$$

Uma **linha poligonal** é que resulta da ligação sequencial de um conjunto de pontos com segmentos de reta (figura 2.17.a). Cada um dos segmentos é um lado da linha poligonal. Uma **linha curva** pode ser considerada como o limite de uma linha poligonal quando o comprimento dos lados tende para zero e o número de lados tende para infinito (figura 2.17.b). Se a poligonal for fechada a figura resultante designa-se por polígono (a palavra polígono é mais comum mas deveria dizer-se n-látero porque nos estamos a referir a lados e não a ângulos). A linha poligonal (ou o polígono; normalmente quando usamos a palavra polígono referimo-nos a uma figura plana) pode ser **plana** (figura 2.17.c) ou **enviesada** (figura 2.17.d) se os seus vértices não pertencerem todos ao mesmo plano. A linha poligonal (ou o polígono) pode ser simples (figura 2.17.e) ou auto interseção (figura 2.17.f). Quando há auto interseções, os pontos que daí resultam não devem ser considerados vértices da linha poligonal.

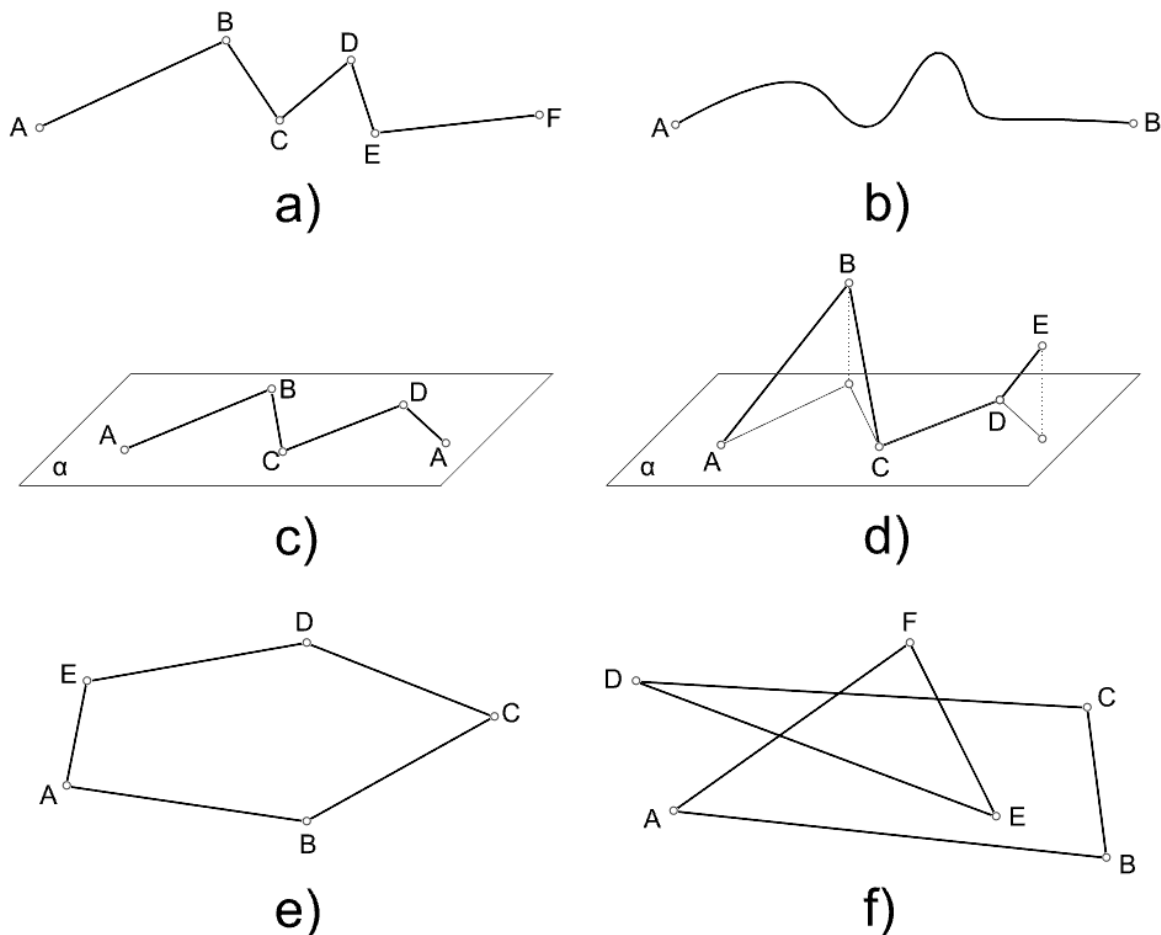


Fig. 2.17. Linhas poligonais e polígonos.

Alguns polígonos planos, como triângulos, retângulos, trapézios, losangos, paralelogramos, pentágonos, hexágonos são figuras relativamente familiares com as quais fomos tendo contacto desde a instrução primária. Por isso não vamos aqui fazer uma revisão exaustiva. Vamos apenas dizer que um **polígono cíclico** (inscrito numa circunferência) com os lados todos iguais é um polígono regular. Note-se que nesta definição cabe o triângulo equilátero, o

quadrado, o pentágono regular, o pentagrama regular, o hexágono, o heptágono regular, o heptagrama regular, o octógono regular e uma infinidade de outros. Até podemos dizer que a circunferência é, no limite, um polígono regular com um número infinito de lados.

Atividade proposta:

Reveja a classificação de triângulos e de quadriláteros. Procure criar um esquema gráfico que organize a classificação dos tipos de triângulos e de quadriláteros. No caso dos quadriláteros crie uma hierarquia (por exemplo o quadrado é um tipo de retângulo).

Malhas planas e malhas espaciais lineares

Uma **malha plana** é o que resulta de um conjunto de pontos (os **nós** da malha) pertencentes a um plano unidos por segmentos de reta (**lados da malha**). Se considerarmos também as regiões delimitadas pelos lados da malha, podemos designá-las por **faces**. Considerar as faces leva-nos para a seção seguinte em que vamos tratar de superfícies. Por isso, para já, vamos considerar apenas a estrutura linear formada pelos nós e pelos lados. Interessa-nos considerar os casos em que as regiões delimitadas por lados da malha são disjuntas e polígonos simples. (Sá, 1982). A malha pode ser **periódica**, **aperiódica** ou **irregular**. Uma malha é periódica quando uma porção limitada da malha pode ser utilizada como um módulo para, através da combinação de translações segundo duas direções independentes, preencher todo o plano (figura 2.18.a). Uma malha é aperiódica quando uma porção da mesma pode ser utilizada para preencher todo o plano mas não o faz por translação. Isto é, nunca é possível através de uma translação deixar a malha invariante (figura 2.18.b). Uma malha é irregular se não for nem periódica nem aperiódica (figura 2.18.c), podendo ser composta por uma infinidade de polígonos de diferentes tipos.

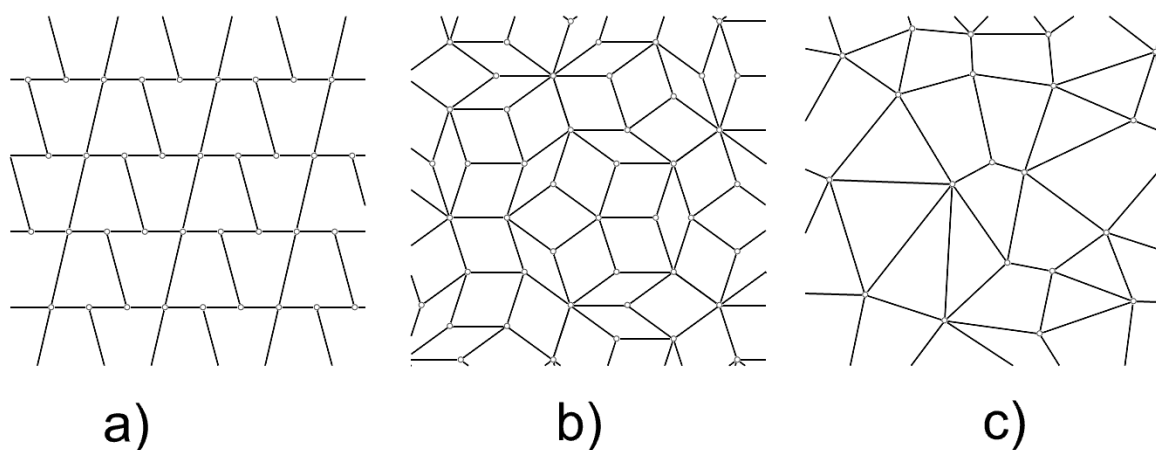


Fig. 2.18. Malhas planas: a) periódica, b) aperiódica, c) irregular.

A noção de malha plana está intimamente relacionada com a noção de pavimentação plana embora não se confundam.

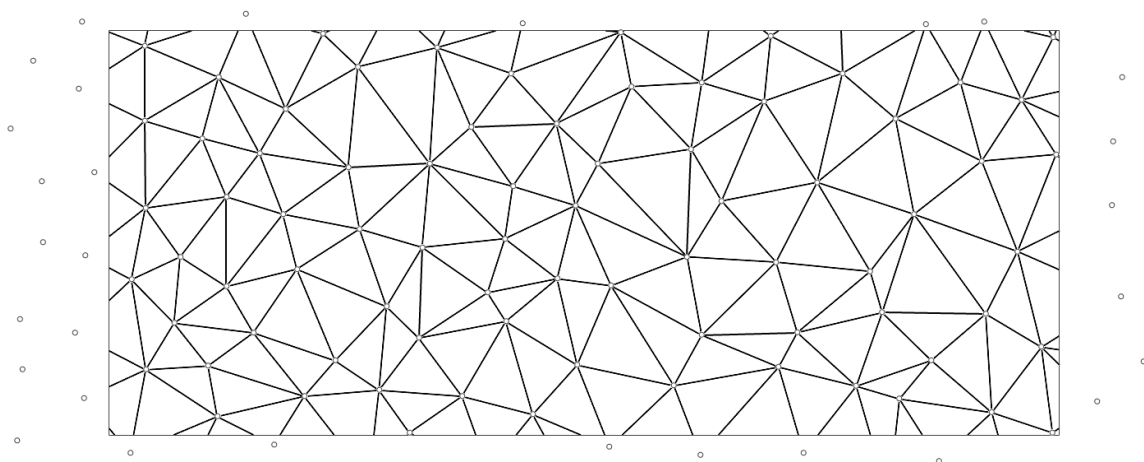


Fig. 2.19. Triangulação de Delaunay.

Uma pavimentação plana corresponde ao preenchimento do plano com um conjunto numerável de polígonos ou ladrilhos sem deixar espaços entre eles (o que deixa de fora as malhas irregulares que podem propagar-se indefinidamente acrescentando novos polígonos de diferentes tipos). Por conjunto numerável entende-se um número limitado de ladrilhos (Veloso, 1999).

Um exemplo de uma malha irregular plana é a que se pode obter através da **triangulação de Delaunay** de um conjunto de pontos no plano dispostos aleatoriamente (figura 2.19). Neste exemplo apresentamos apenas a região da malha limitada por um retângulo. O critério para definir esta triangulação é o de garantir que qualquer círculo definido pelos vértices de um triângulo não contém vértices de nenhum outro triângulo.

Em relação malhas periódicas importa considerar as regulares, as semi-regulares e as demi-regulares. Apenas há três tipos de malhas regulares. São as que resultam do preenchimento do plano com polígonos regulares de apenas um tipo. Os únicos polígonos regulares que preenchem o plano são o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular (figura 2.20).

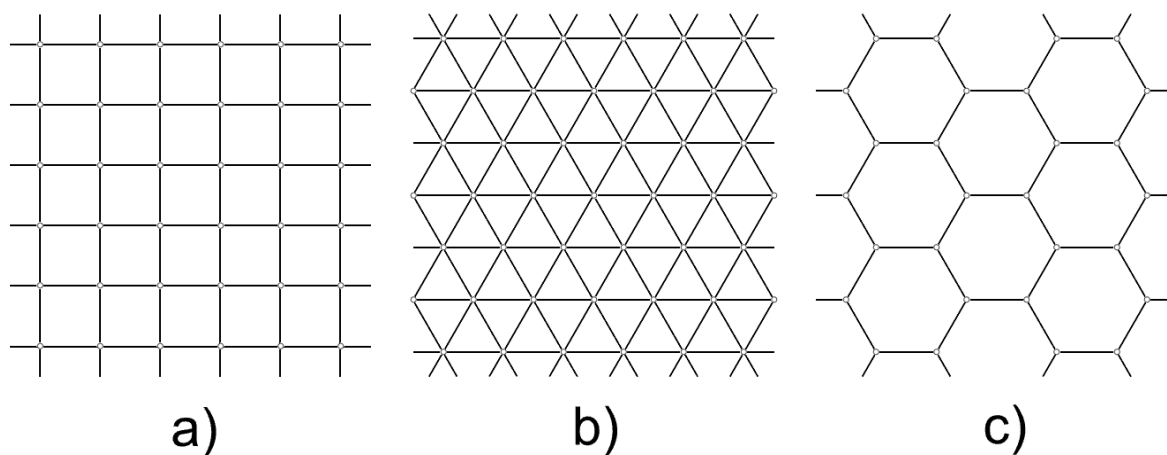


Fig. 2.20. Malhas regulares: a) quadrada, b) triangular, c) hexagonal.

No caso das malhas semi-regulares e demi-regulares, o plano pode ser preenchido por polígonos regulares de mais que um tipo. Nas malhas semi-regulares (e nas regulares) os vértices são todos do mesmo tipo, por isso, dizem-se **uniformes**.

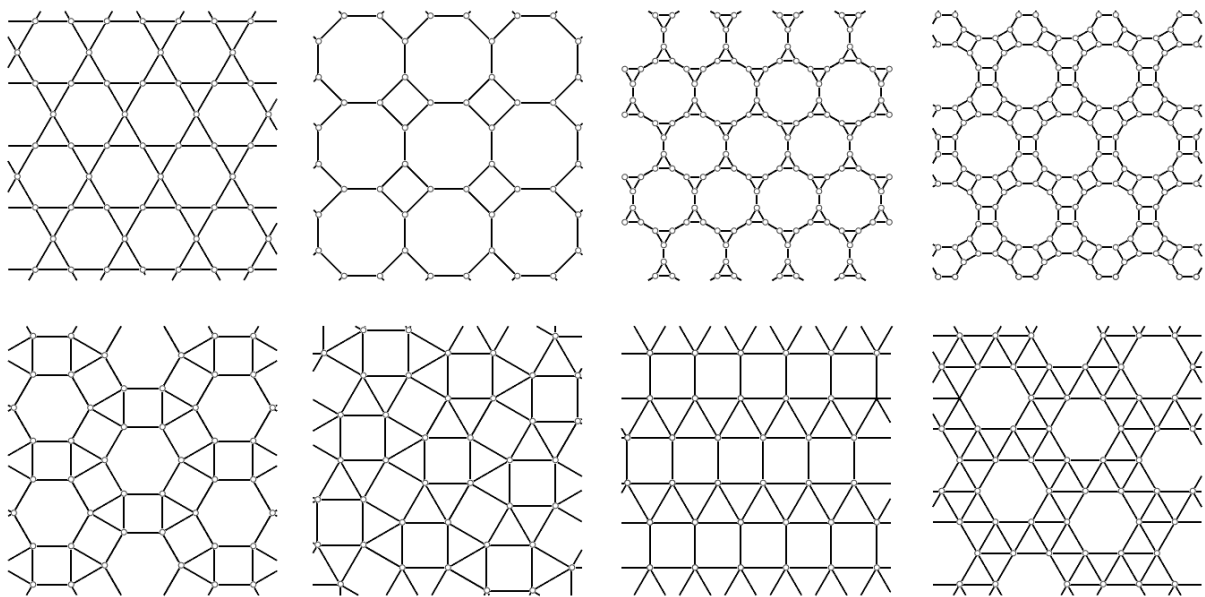


Fig. 2.21. Malhas semi-regulares.

Isto quer dizer que é possível copiar os lados que incidem num vértice e, através de uma sequência de transformações rígidas, fazê-los coincidir com os lados que incidem em qualquer outro vértice. Apenas há oito malhas semi-regulares que se ilustram na figura 2.21.

No caso das malhas demi-regulares, os vértices podem ser de mais que um tipo. Sabe-se que existem cerca de 20 malhas com vértices de dois tipos (2-uniforme), 61 malhas com vértices de 3 tipos (3-uniforme) (Veloso, 1999) e muitas mais com vértices de outros tipos (figura 2.22).

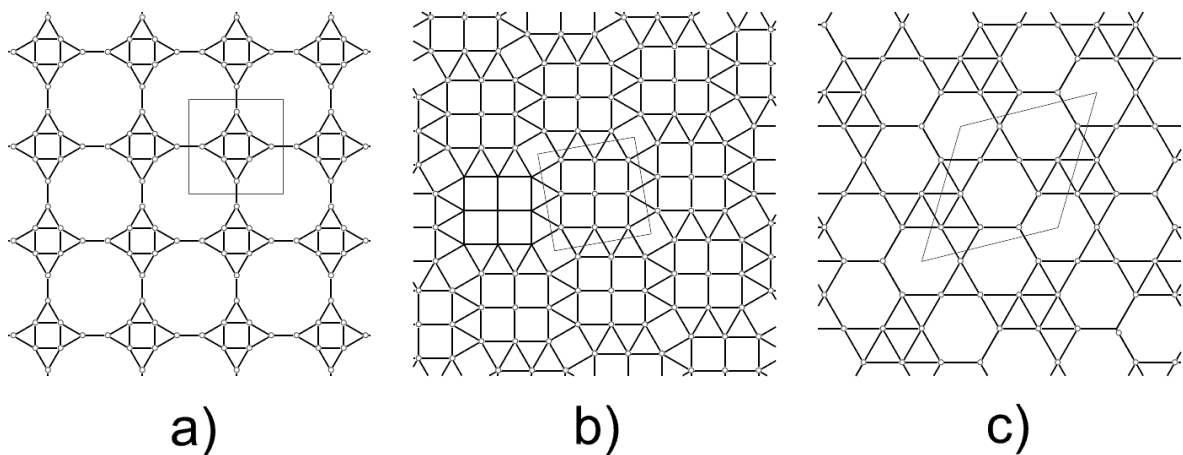


Fig. 2.22. Exemplos de malhas demi-regulares (adaptado de Veloso, 1999): a) 2-uniforme, b) 3-uniforme, c) 4-uniforme.

Como estas malhas são periódicas, estão representados os módulos que se repetem por translação.

Numa malha plana cujos lados definem polígonos regulares, importa considerar o conceito de **malha dual**. Trata-se da malha cujos nós são os centros das faces da malha original. Na figura 2.23 estão representadas as malhas duais das semi-regulares pela mesma ordem em que são dadas na figura 2.21.

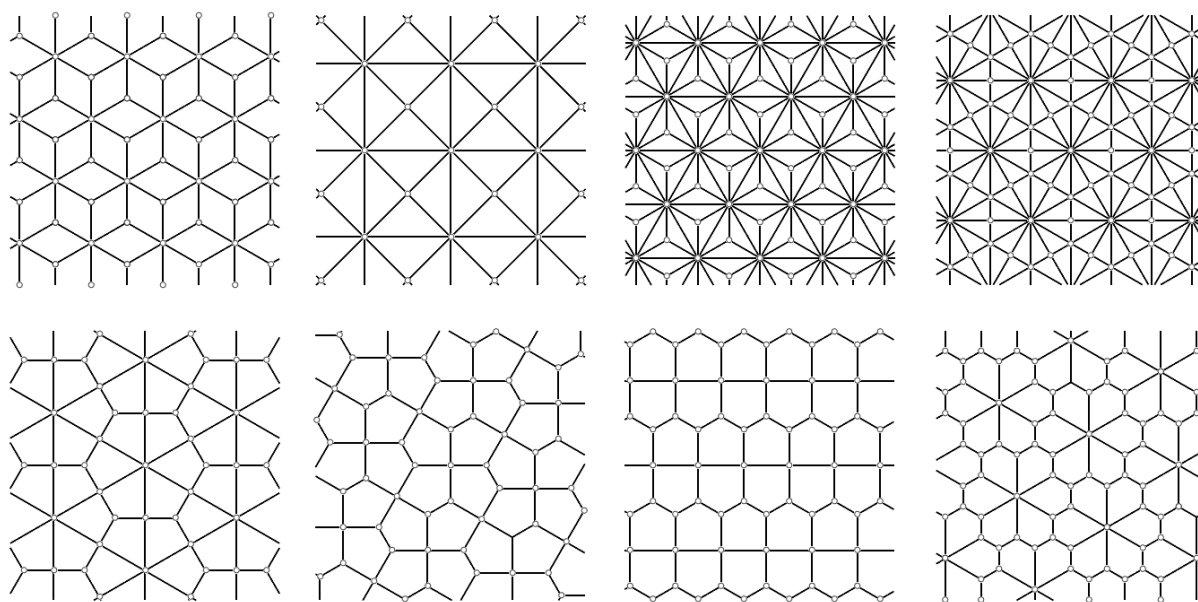


Fig. 2.23. Malhas duais das malhas semi-regulares.

Uma noção alterada da noção de malha dual, considerando antes os lados da malha dual como contidos nas mediatrizes dos lados da malha original, dá origem à malha de Voronoy como dual de uma triangulação de Delaunay. Na figura 2.24 representa-se a malha dual da triangulação de Delaunay, dada na figura 2.19, para o mesmo retângulo limite.

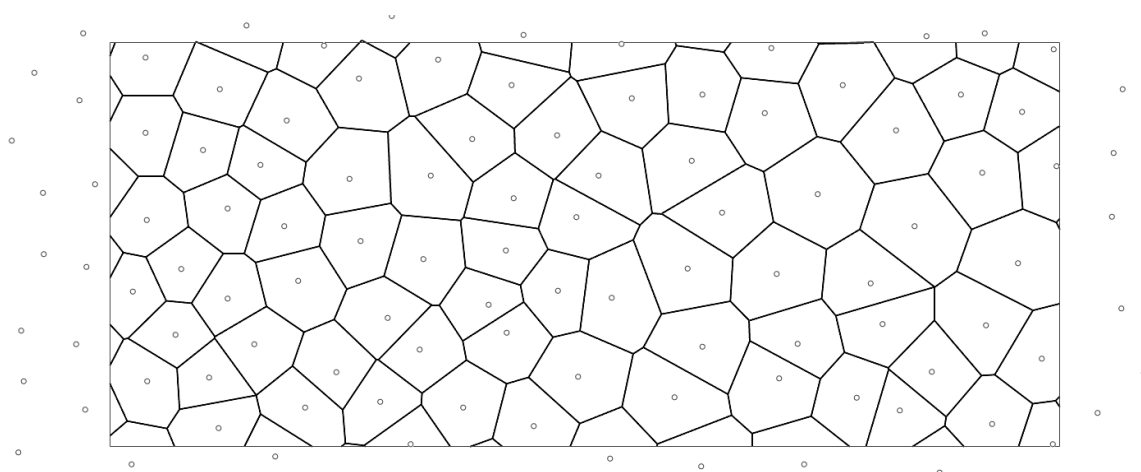


Fig. 2.24. Exemplos de dualidade entre malhas: a) malha dual de uma malha semi-regular, b) malha de Voronoy como dual de uma triangulação de Delaunay.

O conceito de malha pode estender-se ao espaço de diversos modos. Uma possibilidade é a aplicação do plano, e correspondentes nós, numa superfície qualquer. Deste modo, a cada um dos nós corresponde um ponto na superfície. De seguida os pontos da superfície podem ser unidos por segmentos de reta do mesmo modo que os pontos homólogos do plano estão unidos (figura 2.25).

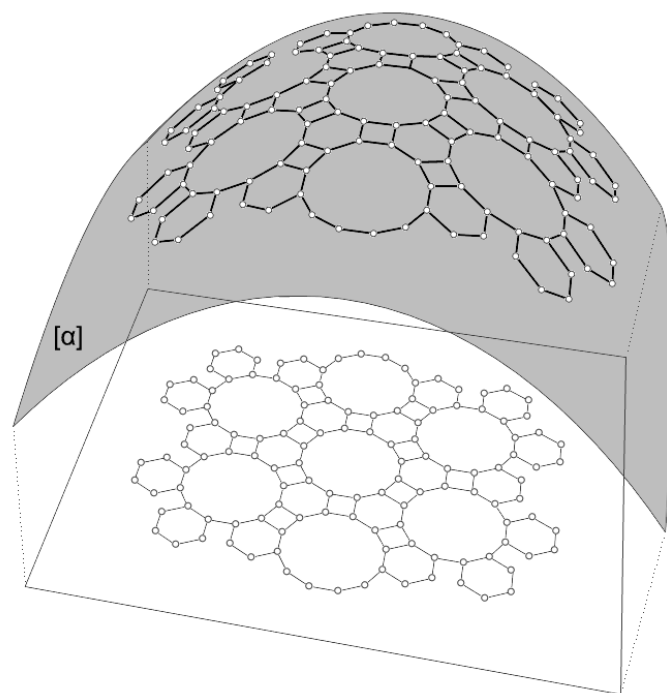


Fig. 2.25. Malha espacial por projeção paralela dos vértices de um troço de malha plana numa superfície $[\alpha]$.

As duas malhas são topologicamente equivalentes (ver adiante a noção de transformação topológica) porque é possível imaginar uma deformação contínua de uma delas até coincidir com a outra.

Outra forma é operar diretamente numa superfície. Neste caso é possível admitir que os lados da malha sejam curvas da superfície. Deste modo, e considerando por exemplo a superfície esférica, é até possível falar de malhas regulares na superfície em estreita relação com os poliedros regulares. E adiante, a propósito de outros tipos de poliedros veremos que é possível considerar outro tipo de malhas sobre a superfície esférica.

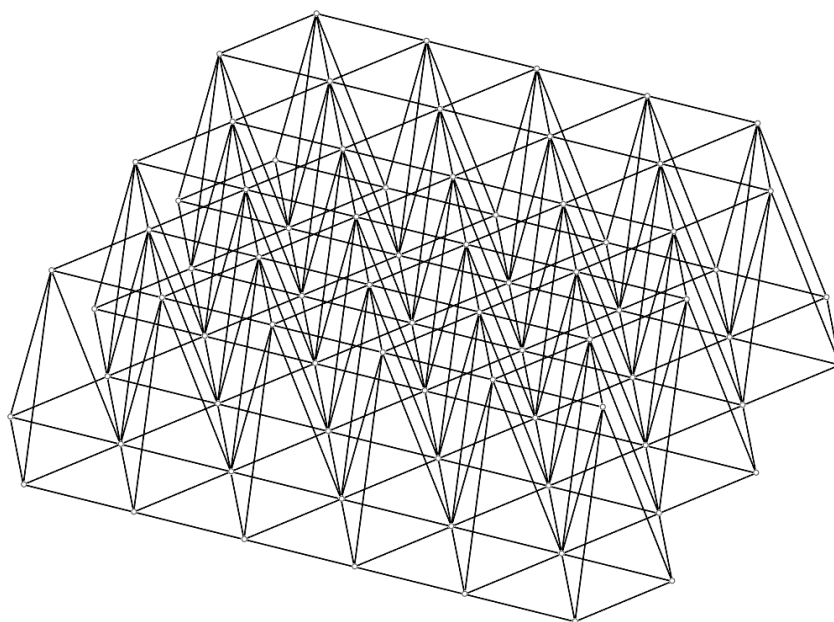


Fig. 2.26. Malha espacial por ligação de duas malhas planas triangulares contidas em planos horizontais distintos.

Ainda outra forma de considerar malhas espaciais é através da sobreposição de malhas planas (ou espaciais) em várias camadas ligando vértices dessas várias camadas (figura 2.26). Obviamente as possibilidades são infindáveis.

Tal como é possível fazer o estudo matemático de como as malhas planas podem cobrir todo o plano, também é possível fazer estudo idêntico para as malhas espaciais. Esse estudo é feito no âmbito da cristalografia e foge ao âmbito deste texto.

Quando acima se disse “preencher todo o plano” está a considerar-se o plano estendido até ao infinito. Isto é uma abstração que é útil para estudar e classificar o objeto matemático. Mas, para efeitos práticos, em arquitetura ou engenharia, nunca é necessário considerar uma malha de extensão infinita. Nestes contextos práticos, uma malha pode ser um elemento estruturante de um projeto definindo, por exemplo, a localização de pilares, a localização de nós estruturais, ou simplesmente um sistema de proporção.

Linhas de forma livre

As linhas de forma livre (figura 2.27) aparecem inevitavelmente no processo de ideação no contexto da arquitetura, das várias áreas do design e também da engenharia.

Num ADMG3D não linhas verdadeiramente livres. Todas obedecem a uma qualquer formulação matemática. O que nos interessa neste ponto é notar que, dada uma linha de forma livre, segue-se obrigatoriamente um qualquer processo de racionalização da mesma. Racionalizar a linha significa aproximá-la através de outras linhas cuja natureza é conhecida. A primeira possibilidade para gerar uma aproximação à curva é transformá-la numa linha poligonal (figura 2.28). A aproximação será tanto melhor quantos mais segmentos tiver a poligonal. No entanto, se esta for a forma de aproximação escolhida, porventura não é desejável exagerar no número de segmentos.



Fig. 2.27. Linha de forma livre desenhada à mão levantada.

Seja como for, o número de segmentos é sempre uma opção da pessoa e função dos objetivos da representação. Como recomendação, pode indicar-se que, para uma melhor aproximação, nos troços em que a curva tem menor curvatura os segmentos podem ter maior comprimento enquanto que nos troços de maior curvatura os segmentos devem ter menor comprimento.

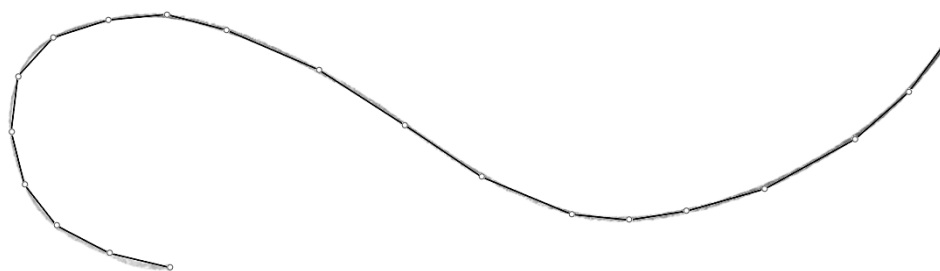


Fig. 2.28. Aproximação através de uma linha poligonal.

Linhas cónicas

As linhas cónicas já foram abordadas na PARTE I deste texto como interseções planas em superfícies cónicas. Como recurso de representação, podem ser utilizadas para resolver a aproximação à representação de linhas de forma livre. Uma possibilidade é a utilização de arcos de circunferência tangentes entre si (figura 2.29).

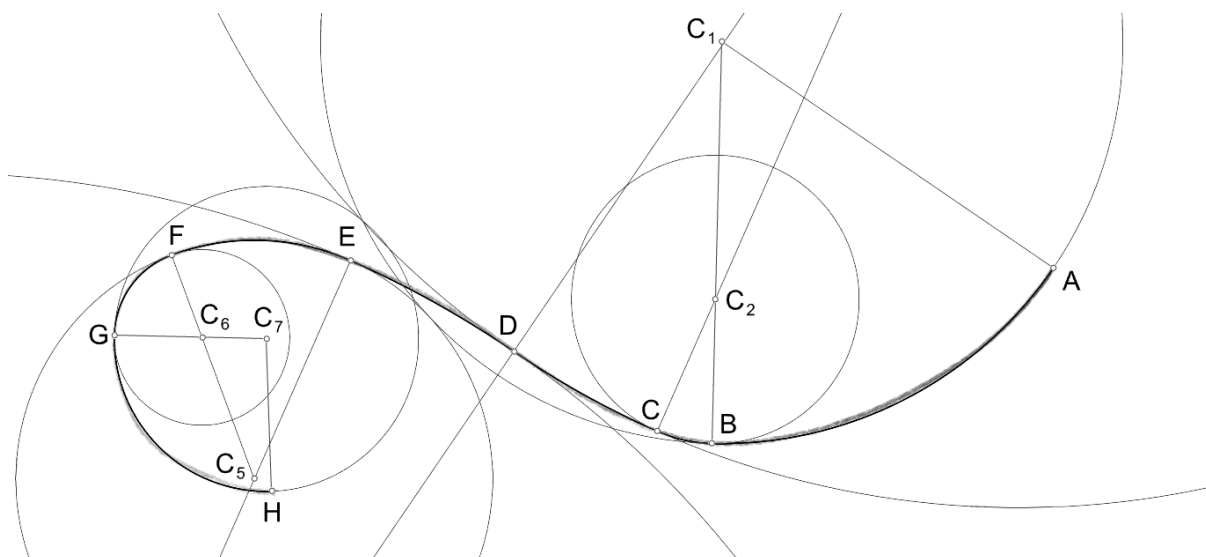


Fig. 2.29. Aproximação através de arcos de circunferência (os centros C_3 e C_4 estão fora dos limites da figura).

Esta forma de proceder, embora possa permitir resultados melhores que no caso anterior, é bastante trabalhosa sobretudo se quisermos garantir a tangência entre arcos consecutivos. Para que dois arcos sejam tangentes entre si, é necessário que os dois centros e o ponto de tangência pertençam à mesma linha reta, que é normal a ambos os arcos. É, por exemplo, o caso dos centros C_6 e C_7 e do ponto G . Neste caso foram utilizados sete arcos de circunferência.

Pode procurar-se melhorar este resultado incluindo troços de outras linhas cónicas (figura 2.30). Esta abordagem só é viável na prática utilizando as funcionalidades de um ADMG. Neste caso o resultado foi uma composição de cinco arcos de elipses tangentes entre si. A representação completa de cada uma das elipses e dos focos é feita para efeitos de ilustração do processo, dado que a representação das mesmas não se fez a partir destes pontos. O processo consistiu em estimar um conjunto de pontos $A, B, C, \dots, F$ e respetivas tangentes à curva nesses pontos. As tangentes consecutivas interseam-se nos pontos $P_1, P_2, \dots, P_5$.

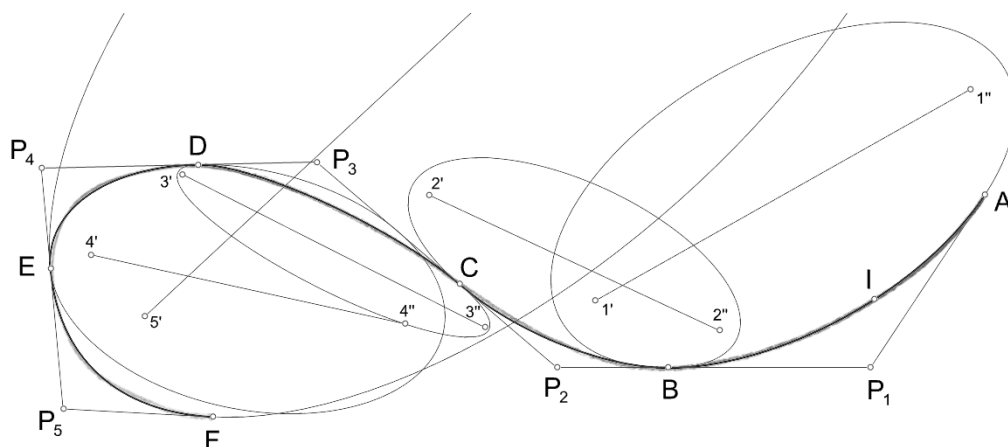


Fig. 2.30. Aproximação através de troços de linhas cónicas (elipses).

Depois utilizou-se uma funcionalidade do ADMG que permite definir uma linha cónica a partir de duas retas tangentes em dois pontos, e outro ponto qualquer da curva. Por exemplo o troço da curva entre **A** e **B** foi definido a partir destes pontos, das tangentes P_1A e P_1B , e de um ponto **I** qualquer estimado sobre a curva. Em termos práticos, o que esta funcionalidade faz é compactar num comando o equivalente à resolução de uma transformação homológica em que a curva cónica $[e]$ é transformada de uma circunferência $[e]'$, de diâmetro $\overline{AB}$, por uma homologia de eixo e (figura 2.31). Na figura apenas se apresentam os traçados que permitiram determinar os diâmetros conjugados $[ED]$ e $[BC]$ da elipse.

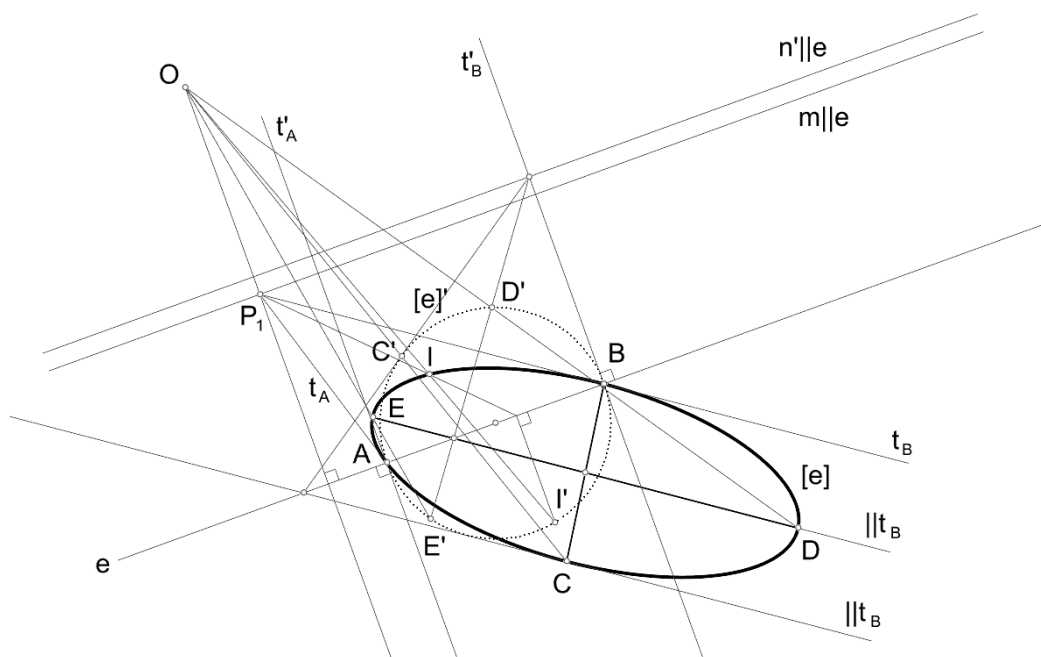


Fig. 2.31. Homologia entre uma linha cónica definida por dois pontos **A** e **B**, e respetivas tangentes, e um ponto **I** qualquer.

Atividade proposta:

Reveja a transformação homológica e procure descrever o conteúdo da figura 2.31.

É bastante evidente a vantagem de dispor de um comando no ADMG que nos resolve esta operação. Caso não dispuséssemos, porventura este traçado não seria viável na prática.

Bézier, B-Splines e NURBS

Mas ainda assim, a utilização de linhas cónicas não é muito flexível sobretudo em áreas como a indústria naval, automóvel ou aeronáutica. Por essa razão, na segunda metade do século XX foi desenvolvida uma representação matemática de curvas que torna o seu tratamento muito flexível. E, curiosamente, as linhas cónicas estão embebidas nesse tipo de representação.

Curva de Bézier

Tudo começa com um tipo de linha designado por **curva de Bézier**. A designação deve o seu nome ao engenheiro francês Pierre Bézier que a desenvolveu nos anos sessenta do século XX enquanto funcionário da Renault. A operação fundamental para a sua representação é a interpolação linear. Dados dois pontos **A** e **B**, é possível representar um ponto **P** pertencente à reta **AB** interpolando entre as coordenadas dos pontos **A** e **B** através de um parâmetro **t**. O ponto **P** pode ser obtido através da seguinte expressão $P = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$, em que **t** varia entre **0** e **1**. Quando **t = 0** o ponto **P** coincide com o ponto **A**, e quando **t = 1** o ponto **P** coincide com o ponto **B**. Para valores intermédios o ponto **P** situa-se entre **A** e **B**. Valores inferiores a **0** ou superiores a **1** colocam o ponto **P** fora do segmento **[AB]**.

Em três dimensões temos:

$$X_P = X_A + t(X_B - X_A) = (1 - t)X_A + tX_B$$

$$Y_P = Y_A + t(Y_B - Y_A) = (1 - t)Y_A + tY_B$$

$$Z_P = Z_A + t(Z_B - Z_A) = (1 - t)Z_A + tZ_B$$

Ora, na verdade, isto é a representação paramétrica da reta. Podemos dizer com propriedade que a reta é a curva de Bézier de grau 1 e que os pontos **A** e **B** são os seus pontos de controlo (figura 2.32.a), no sentido em que, alterando a posição de pelo menos um deles a geração da curva altera-se. Numa curva de Bézier define-se ordem como o número dos pontos de controlo.

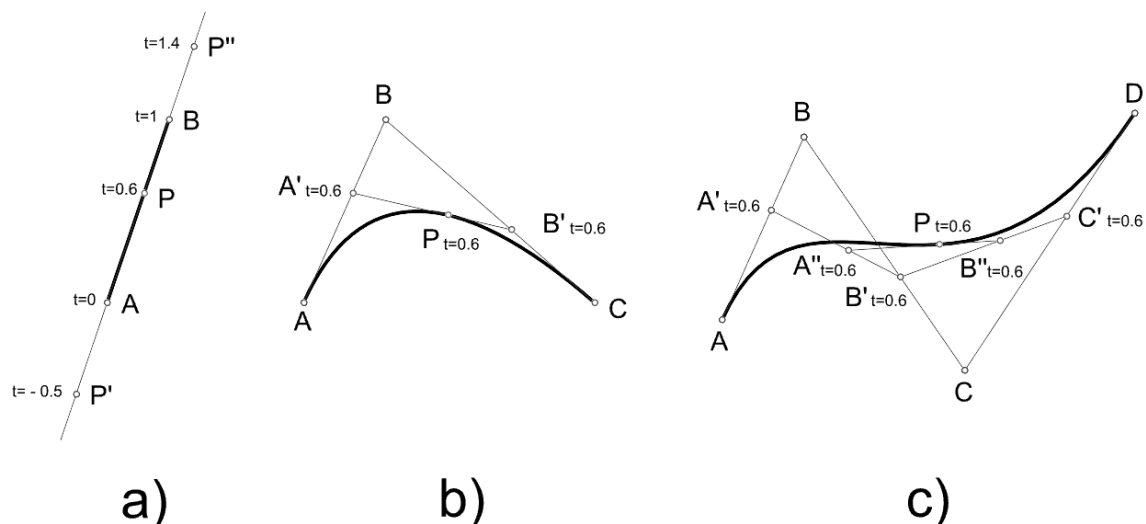


Fig. 2.32. Curvas de Bézier: a) grau 1 e ordem 2, b) grau 2 e ordem 3, c) grau 3 e ordem 4.

Numa curva de Bézier de grau 2 (ordem 3) temos três pontos de controlo **A**, **B** e **C**. Para gerar um ponto da curva, o procedimento descrito acima é aplicado ao segmento **[AB]** para gerar um ponto **A'**, ao segmento **[BC]** para gerar um ponto **B'** e, finalmente, ao segmento **[A'B']** para

gerar o ponto **P**. Em termos práticos trata-se de aplicar a interpolação linear de forma recursiva (figura 2.32.b). Um facto interessante é que uma curva de Bézier de grau dois é exactamente uma parábola, ou seja, um dos tipos de linha cónica.

Numa curva de Bézier de grau 3 (ordem 4) temos quatro pontos de controlo **A**, **B**, **C** e **D**. Para gerar um ponto **P** da curva procede-se exactamente como no caso anterior. A diferença é que há mais um nível de iteração. Uma curva de Bézier de grau 3 é uma linha cúbica (figura 2.32.c). A vantagem das linhas de grau 3 relativamente às linhas de grau 2 é permitirem inflexões, o que as torna mais flexíveis do ponto de vista prático e capazes de representar de forma muito precisa quase todo o tipo de geometria.

Para gerar pontos de curvas de Bézier de grau superior, o processo é em tudo idêntico ao referido para as curvas acima tratadas. É claro que num AMGD o utilizador não precisa de gerar a curva ponto a ponto. Existem comandos que a instanciam de uma vez. O processo que acabámos de descrever é conhecido como algoritmo de De Casteljaeu. Este algoritmo recebe o nome de Paul de Casteljaeu que o desenvolveu no final da década de cinquenta do século XX enquanto funcionário da Citroen. Note-se que a aplicação do algoritmo de De Casteljaeu permite representar pontos da curva e também as tangentes nesses pontos.

A razão pela qual fizemos esta exposição é para trazer clareza ao entendimento de um novo tipo de curva que vamos tratar de seguida.

Curva B-Spline

Uma **curva B-Spline** não é mais que a junção de várias curvas de Bézier. Tal como as curvas de Bézier, também são definidas por pontos de controlo. Numa curva de Bézier de grau **g**, o número de pontos de controlo é exactamente **n = g + 1**; numa curva B-Spline o número de pontos de controlo é obrigatoriamente **n > g + 1**. Cada ponto de controlo adicional em relação a **g + 1** introduz uma nova curva de Bézier na B-Spline. Por exemplo, uma B-Spline de grau 3 com cinco pontos de controlo é composta por duas curvas de Bézier. Se tiver seis pontos de controlo será composta por três curvas de Bézier, e assim sucessivamente.

O entendimento da curva B-Spline implica a introdução de dois novos conceitos, o de **vetor dos nós paramétricos** (*knot vector*) e o de **valores geradores** (*blossom values*) associados aos pontos de controlo, em número igual ao grau da curva. O vetor de nós paramétricos é um conjunto de valores, dados por ordem crescente, associados ao espaço paramétrico da curva. A quantidade de valores do vetor dos nós é dado por **n + g - 1**, em que **n** é o número de pontos de controlo e **g** o grau da curva. Por exemplo, numa curva de grau 3, com nove pontos de controlo, o vetor dos nós tem **9 + 3 - 1 = 11** valores. Se esses valores forem igualmente espaçados, a B-Spline com eles gerada diz-se **uniforme**. Se os valores não forem igualmente espaçados, a B-Spline diz-se **não uniforme**. Um vetor de nós uniforme é, por exemplo, **<0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10>**. E um vetor de nós não uniforme é, por exemplo, **<0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6>**.

O vetor dos nós varia entre **k₀** e **k_{n+g-2}**. O espaço paramétrico (**t**) da curva varia entre **t = k_{g-1}** e **t = k_{n-1}**.

Voltando ao exemplo de uma curva de grau 3 e nove pontos de controlo, no caso do vetor de nós uniforme, os *blossom values* associados aos pontos de controlo são: **A<0, 1, 2>**, **B<1, 2, 3>**, **C<2, 3, 4>**, **D<3, 4, 5>**, **E<4, 5, 6>**, **F<5, 6, 7>**, **G<6, 7, 8>**, **H<7, 8, 9>**, **I<8, 9, 10>**. O espaço paramétrico (**t**) da curva varia entre **t = k_{g-1} = 2** e **t = k_{n-1} = 8**.

No caso do vetor de nós não uniforme, os *blossom values* associados aos pontos de controlo são: $A\langle 0, 0, 0 \rangle, B\langle 0, 0, 1 \rangle, C\langle 0, 1, 2 \rangle, D\langle 1, 2, 3 \rangle, E\langle 2, 3, 4 \rangle, F\langle 3, 4, 5 \rangle, G\langle 4, 5, 6 \rangle, H\langle 5, 6, 6 \rangle, I\langle 6, 6, 6 \rangle$. O espaço paramétrico (t) da curva varia entre $t = k_{g-1} = 0$ e $t = k_n = 6$.

Na figura 2.33, é dado um conjunto de nove pontos de controlo $A, B, \dots, I$. A poligonal definida pelos pontos de controlo designa-se **poligonal de controlo**. Em cima está representada uma B-Spline de grau 3 com um vetor de nós uniforme $\langle 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$, e em baixo uma B-Spline de grau 3 com um vetor de nós não uniforme $\langle 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 6 \rangle$.

Os pontos $N_0, N_1, N_2, \dots$, em que se transita de uma curva de Bézier para outra são os **nós geométricos** da B-Spline.

Para gerar os pontos de uma B-spline o algoritmo de deBoor é o mais utilizado (Wikipedia contributors, 2025a). Este algoritmo recebe como dados o grau g da curva, o vetor dos nós e os pontos de controlo. Para gerar um ponto P correspondente a um valor de parâmetro t , contido no espaço paramétrico da curva, o algoritmo de deBoor utiliza um processo recursivo, com um número r de iterações, que a seguir se descreve.

Primeiro determina-se o intervalo do espaço paramétrico em que a curva vai ser avaliada fazendo $t_k \leq t < t_{k+1}$, em que, t_k é o valor do nó imediatamente abaixo de t e t_{k+1} é o valor do nó imediatamente acima de t .

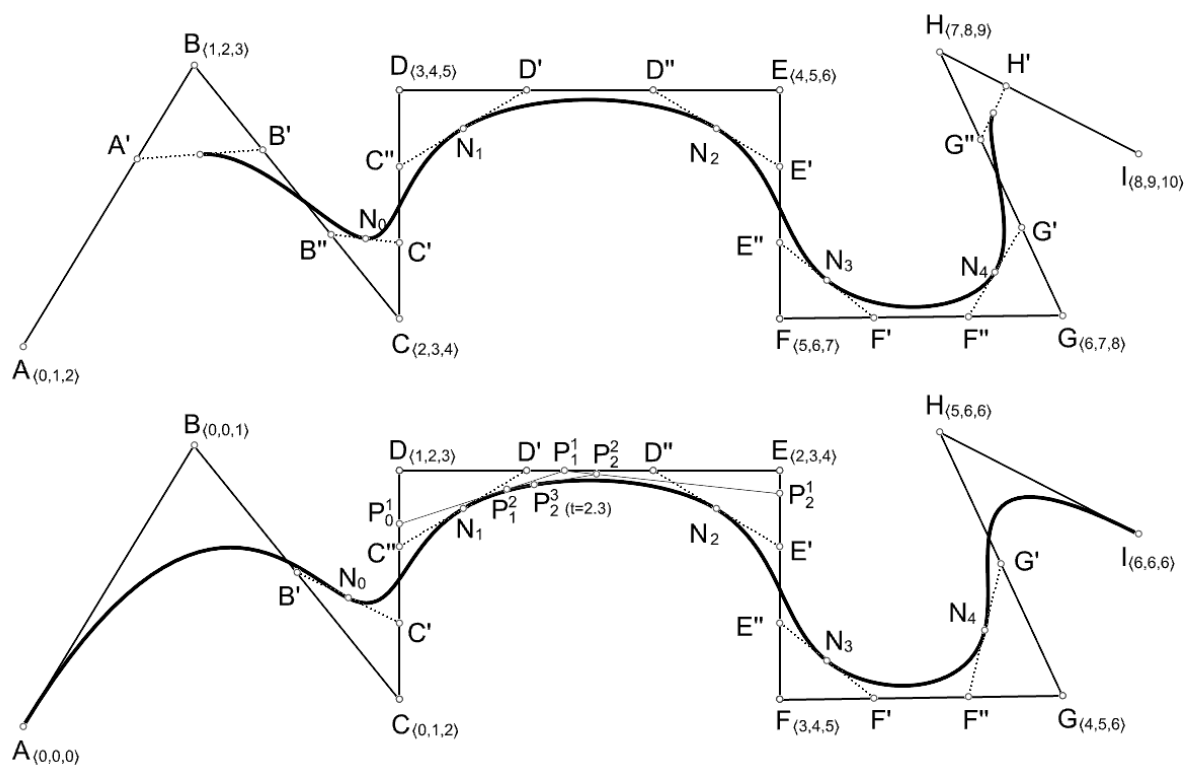


Fig. 2.33. Representação de uma B-Spline de grau 3 com nove pontos de controlo: em cima) vetor de nós uniforme, em baixo) vetor de nós não uniforme.

De seguida escolhem-se todos os pontos em que pelo menos um dos *blossom values* é igual a t_k e/ou t_{k+1} . Esses são os pontos iniciais do processo, correspondentes ao nível de iteração $r = 0$. Desses pontos, o primeiro corresponde a $t_{k-g} = t_{-1}$, pelo que $k = g - 1$. Os pontos iniciais vão ser interpolados, no nível de iteração $r = 1$, gerando o nível seguinte de pontos de controlo, de acordo com a fórmula:

$$P_i^r = (1 - \alpha_i^r)P_{i-1}^{r-1} + \alpha_i^r P_i^{r-1} \text{ com } i = k - g + r, \dots, k.$$

$$\text{em que } \alpha_i^r = \frac{t - t_i}{t_{i+1+g-r} - t_i}$$

A cada passo da iteração o valor r incrementa 1 unidade, determinando-se os valores de i para a nova iteração, e o processo termina quando $r = g$.

Vejamos a aplicação do algoritmo para o cálculo do ponto P correspondente a $t = 2.3$ no caso da curva não uniforme.

Como $2 \leq 2.3 < 3$, os pontos de controlo, e seus *blossom values*, correspondentes ao nível de iteração $r = 0$, são $P_{-1}^0 = C\langle 0, 1, 2 \rangle$, $P_0^0 = D\langle 1, 2, 3 \rangle$, $P_1^0 = E\langle 2, 3, 4 \rangle$ e $P_2^0 = F\langle 3, 4, 5 \rangle$. Sejam as coordenadas geométricas destes pontos $(0, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(5, 3, 0)$ e $(5, 0, 0)$, respetivamente.

Para o nível de iteração $r = 1$, $i = 0, 1, 2$; para o nível de iteração $r = 2$, $i = 1, 2$; e para o nível de iteração $r = 3$, $i = 2$.

Seja $r = 1$ o primeiro nível de iteração.

Interpolando entre os pontos C e D temos:

$$\alpha_0^1 = \frac{2.3-0}{3-0}, \text{ de onde resulta que } P_0^1 = \left(1 - \frac{2.3}{3}\right)C + \frac{2.3}{3}D = (0, 0, 0) + (0, 2.3, 0) = (0, 2.3, 0)$$

Interpolando entre os pontos D e E temos:

$$\alpha_1^1 = \frac{2.3-1}{4-1}, \text{ de onde resulta que } P_1^1 = \left(1 - \frac{1.3}{3}\right)D + \frac{1.3}{3}E = (0, 1.7, 0) + \left(\frac{6.5}{3}, 1.3, 0\right) = \left(\frac{6.5}{3}, 3, 0\right)$$

Interpolando entre os pontos E e F temos:

$$\alpha_2^1 = \frac{2.3-2}{5-2}, \text{ de onde resulta que } P_2^1 = \left(1 - \frac{0.3}{3}\right)E + \frac{0.3}{3}F = \left(\frac{13.5}{3}, \frac{8.1}{3}, 0\right) + \left(\frac{1.5}{3}, 0, 0\right) = (5, 2.7, 0)$$

Seja $r = 2$ o segundo nível de iteração.

Interpolando entre os pontos P_0^1 e P_1^1 temos:

$$\alpha_1^2 = \frac{2.3-1}{3-1}, \text{ de onde resulta que } P_1^2 = \left(1 - \frac{1.3}{2}\right)P_0^1 + \frac{1.3}{2}P_1^1 = (0, \frac{1.61}{2}, 0) + \left(\frac{8.45}{6}, \frac{3.9}{2}, 0\right) = \left(\frac{8.45}{6}, \frac{5.51}{2}, 0\right)$$

Interpolando entre os pontos P_1^1 e P_2^1 temos:

$$\alpha_2^2 = \frac{2.3-2}{4-2}, \text{ de onde resulta que } P_2^2 = \left(1 - \frac{0.3}{2}\right)P_1^1 + \frac{0.3}{2}P_2^1 = \left(\frac{11.05}{6}, \frac{5.1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1.5}{2}, \frac{0.81}{2}, 0\right) = \left(\frac{15.55}{6}, \frac{5.91}{2}, 0\right)$$

Finalmente, seja $r = 3$ o terceiro nível de iteração.

Interpolando entre os pontos P_1^2 e P_2^2 temos:

$$\alpha_2^3 = \frac{2.3-2}{3-2}, \text{ de onde resulta que } P_2^3 = (1 - 0.3)P_1^2 + 0.3P_2^2 = \left(\frac{5.915}{6}, \frac{3.857}{2}, 0\right) + \left(\frac{4.665}{6}, \frac{1.773}{2}, 0\right) = \left(\frac{10.58}{6}, \frac{5.63}{2}, 0\right) = P_{(t=2.3)}.$$

Na figura estão patentes divisões dos lados da poligonal de controlo que permitem localizar os nós geométricos e os pontos de controlo de cada uma das curvas de Bézier, calculados pelo algoritmo de deBoor. Também se apresentam os passos correspondentes à determinação do ponto P para o parâmetro $t = 2.3$. A colocação destes elementos na figura 2.33 é meramente ilustrativa. Em geral, o que o utilizador vê é apenas a curva.

Na prática, num ADMG os dados de entrada para um comando que instancia uma B-Spline são os pontos de controlo, dados pela ordem devida, a especificação do grau da curva e, eventualmente, o vetor dos nós. O algoritmo calcula depois a posição dos nós geométricos e a forma de juntar as várias curvas de Bézier. No caso do software Rhinoceros, o comportamento padrão é interpolar o primeiro e o último ponto de controlo, logo a B-Spline resultante é não uniforme.

A vantagem deste tipo de curva, é a facilidade de edição. Se o utilizador editar um ponto de controlo, toda a construção se reajusta. Mas note-se que esse reajuste não afeta a curva toda mas apenas os troços influenciados pelo ponto de controlo editado. Isto é, as curvas B-Spline permitem controlo local da curva, o que é uma enorme vantagem em processos de conceção. Na figura 2.34 vemos o efeito da edição do ponto de controlo E numa B-Spline de grau 2 (em cima) e numa B-Spline de grau 3 (em baixo).

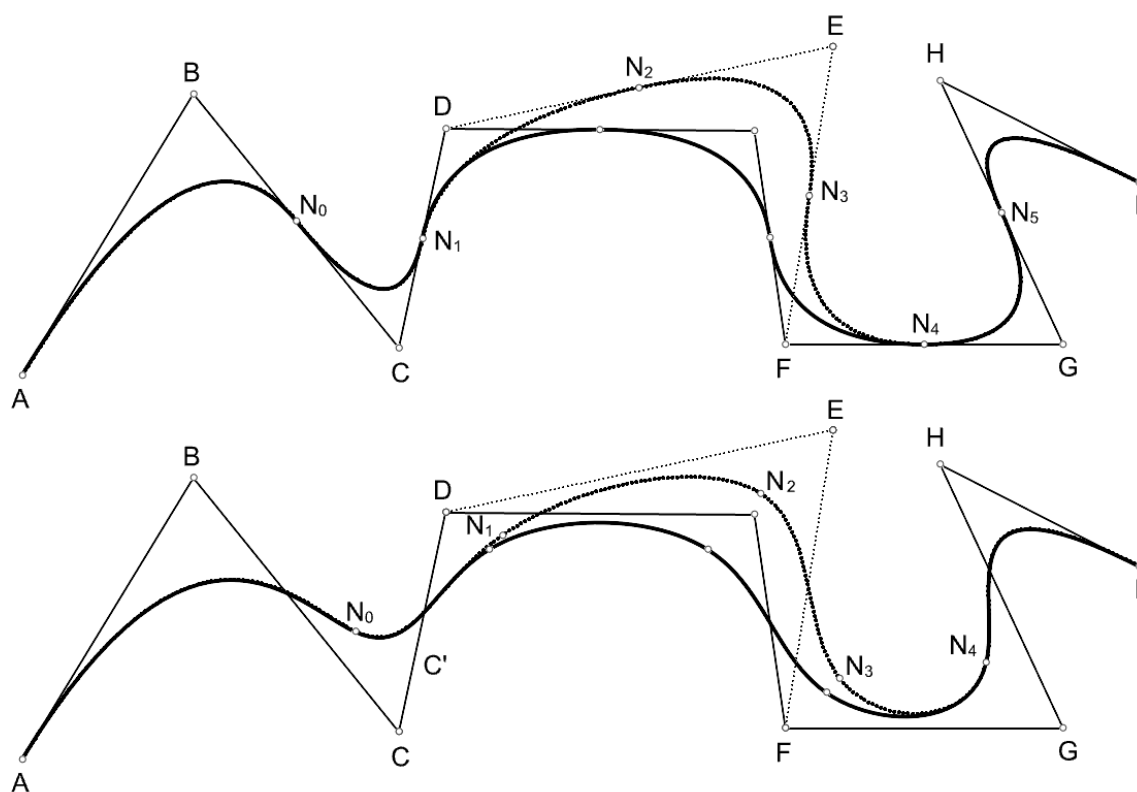


Fig. 2.34. Edição de um ponto de controlo de uma B-Spline de grau 2 (em cima) e de grau 3 (em baixo).

No caso da curva de grau 2, verifica-se que foram afetadas as três curvas de Bézier entre os nós geométricos N_1 e N_4 . No caso da curva de grau 3, verifica-se que foram afetadas as quatro curvas de Bézier entre os nós geométricos N_0 e N_4 . Observa-se que quanto maior é o grau da curva maior é o efeito resultante da edição de um ponto de controlo.

Munidos agora das funcionalidades descritas, na figura 2.35 está feita uma aproximação à representação da curva de forma livre introduzida na figura 2.27, através de uma B-spline de grau 3 com 10 pontos de controlo.

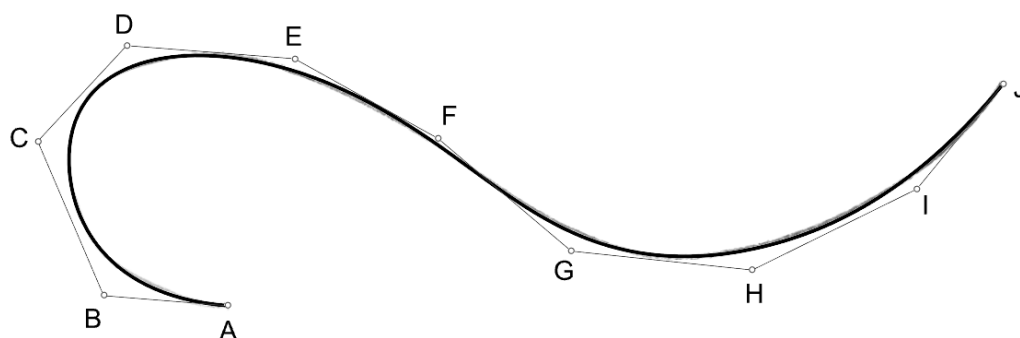


Fig. 2.35. Aproximação através de uma B-Spline definida por pontos de controlo.

Há uma questão que importa mencionar. Parece contraintuitivo que os pontos de controlo não façam parte da curva (com a exceção do primeiro e do último). Podemos ser levados a pensar que isso dificulta o nosso trabalho enquanto utilizadores do ADMG. Mas na verdade não é assim porque a edição dos pontos de controlo para fazer convergir o desenho da linha para o desejado é muito simples. Ademais, é sempre possível adicionar novos pontos de controlo. A única situação em que isto pode ser problemático é se houver algum ponto fixo pelo qual a curva deva passar. Nesse caso é possível utilizar outro tipo de algoritmo para a geração da curva que permite interpolar um conjunto de pontos dados. Por questões técnicas que escapam ao âmbito deste texto, diz-se apenas que nesses casos o grau da curva tem de ser ímpar. Na figura 2.36 faz-se uma aproximação à curva através de interpolação de pontos a ela pertencentes.

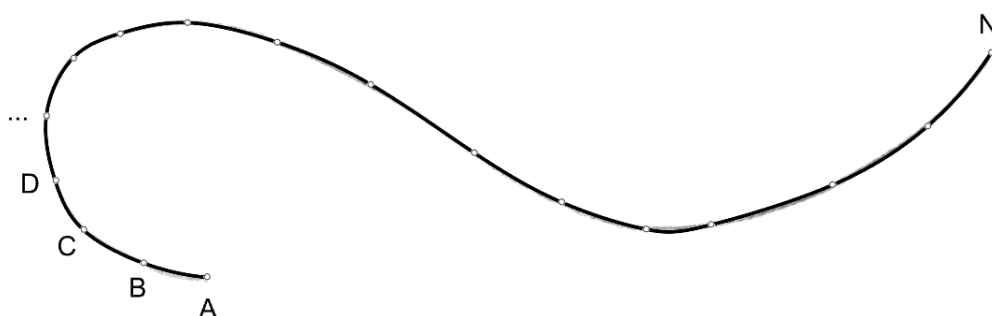


Fig. 2.36. Aproximação através de uma B-Spline definida por interpolação.

Curiosamente, neste caso é mais difícil obter uma curva suave pelo que o número de pontos de entrada tende a ser maior. Esta curva continua a ser uma B-spline, e por isso também tem pontos de controlo. Mas esses, ao invés de serem definidos pelo utilizador, são calculados como função dos pontos a interpolar.

Finalmente, há uma opção a considerar quanto à periodicidade da curva. Se a curva for periódica, é fechada (figura 2.37.a) e se for não periódica, é aberta (figura 2.37.b). Se curva for periódica, na prática, a poligonal de controlo passa a ser uma linha fechada.

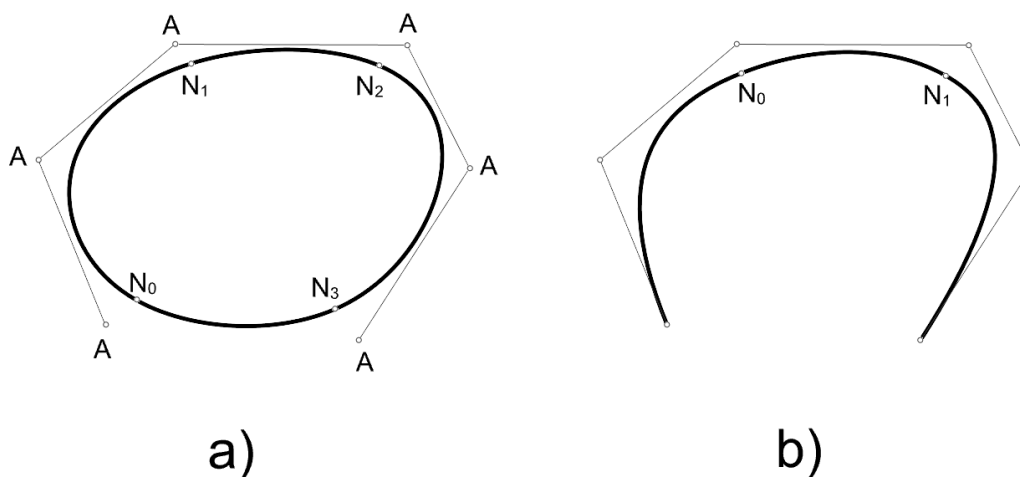


Fig. 2.37. B-Spline de grau 3: a) periódica, b) não periódica.

No caso de a curva ser periódica vemos que aparecem mais dois nós geométricos e mais uma curva de Bézier.

As descrições que foram feitas não perdem a generalidade no caso de os pontos de controlo não estarem todos no mesmo plano.

As curvas de Bézier e as curvas B-Spline são invariantes sob transformações afins ou sob projeções paralelas. Isto é uma propriedade muito útil. O que isto quer dizer, em termos práticos, é que para obter uma curva transformada de uma B-Spline basta aplicar a transformação afim aos pontos da polygonal. Depois, os pontos da curva transformada podem ser calculados através dos procedimentos descritos acima a partir dos pontos transformados da polygonal de controlo.

Porém não são invariantes sob transformações projetivas. Isto é, se considerarmos a projeção cónica de uma polygonal de controlo, a curva gerada, a partir da polygonal projetada, não é uma projeção cónica da curva original. Para resolver este problema, desenvolveu-se a representação NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines).

Curva NURBS

Uma **curva NURBS** define-se do mesmo modo que uma curva B-Spline, isto é, com uma polygonal de controlo. O que se acrescenta é a possibilidade de atribuir um **peso (w)** a cada ponto de controlo, o que tem o efeito de atrair ou repelir a linha em relação a esse ponto. Uma curva B-Spline é uma curva NURBS em que todos os pontos têm peso igual, geralmente igual a **1**.

A atribuição de pesos têm uma interpretação geométrica. Vamos analisar primeiro o caso de uma curva de Bézier de grau **2**. O princípio é o seguinte. Considere-se a curva com os pontos de controlo **A**, **B** e **C** contida num plano horizontal à cota $w = 1$. Considere-se o valor desta cota como o peso atribuído aos pontos **A**, **B** e **C**. Estes pontos de controlo dão origem à curva representada a traço fino na figura 2.38.a e 2.38.b. Trata-se de uma parábola.

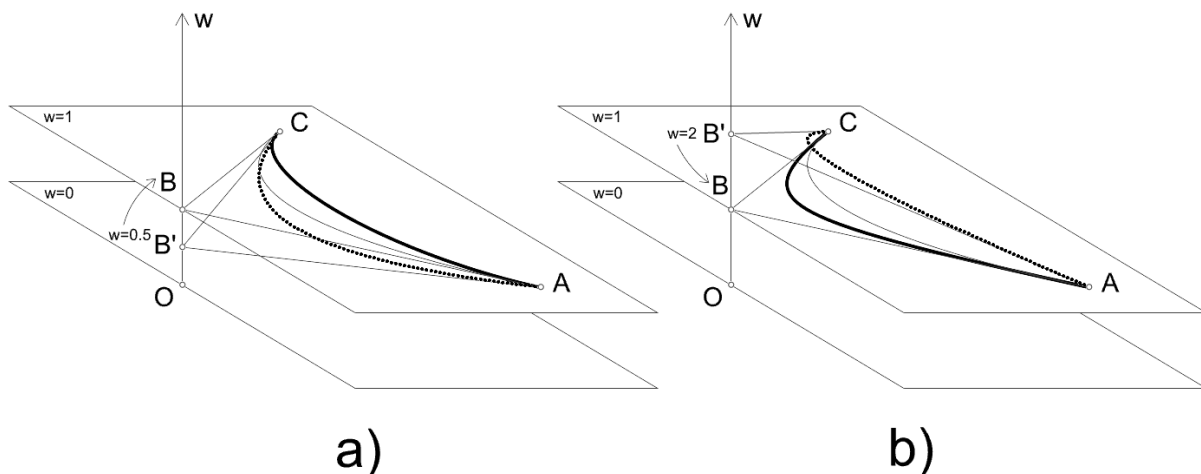


Fig. 2.38. Atribuição de um peso (w) a um ponto de controlo de uma curva de Bézier de grau 2: a) $w < 1$ dá origem a uma elipse, b) $w > 1$ dá origem a uma hipérbole.

Considere-se agora um plano horizontal à cota $w = 0$ e um eixo w perpendicular a estes dois planos. O eixo w interseja o plano à cota 0 no ponto O , centro de projeções.

Na figura 2.38.a considerou-se um ponto B' com cota $w = 0.5$. Os pontos A , B' e C são pontos de controlo de uma curva de Bézier de grau 2, representada a pontilhado. A projeção cónica, no plano de cota $w = 1$, a partir do ponto O , da curva a pontilhado, dá origem à curva representada a traço forte. A curva a traço forte pode ser interpretada como uma transformação da curva a traço fino mudando o peso do ponto de controlo B de 1 para 0.5 . Quando o peso é inferior a 1 , a curva passa a ser um arco de elipse. Quando o peso é superior a 1 , a curva passa a ser um arco de hipérbole. Nestes casos já não são curvas de Bézier mas sim linhas NURBS.

É a possibilidade de atribuir pesos aos pontos de controlo de uma curva de Bézier de grau 2 que permite generalizar a representação das linhas cónicas.

A mesma lógica pode ser aplicada a curvas Bézier e B-Spline planas de graus superiores para dar origem a curvas NURBS. Se os pontos de controlo da curva B-Spline não estivessem todos no mesmo plano, a interpretação geométrica implica considerar um espaço a quatro dimensões de onde se faz a projeção que dá origem à curva transformada (Woodbury, 2010).

Naturalmente, todos os ADMG que implementam curvas NURBS permitem todos estes tipos de edições. A razão pela qual detalhámos as explicações relativamente às curvas de Bézier, B-Spline e NURBS deve-se ao facto de que no ADMG3D que vamos utilizar, o Rhinoceros, praticamente todas as linhas são representadas deste modo. E este tipo de linha é utilizado para representar de forma aproximada curvas não algébricas como a hélice, a catenária, a cicloide ou certos tipos de espirais.

Acresce ainda o facto de que a representação das superfícies é uma extensão destas representações.

Atividade proposta:

Desenhe numa folha várias linhas de forma livre. Digitalize-as e procure racionalizá-las de acordo com os vários tipos de linha discutidos.

Superfícies

Tal como em relação às linhas, algumas noções gerais relativas a superfícies já foram dadas na PARTE I deste texto. Agora vamos especificar algumas classes de superfícies e analisar algumas propriedades gráficas como o seu aspeto visual, tangências e interseções. Uma vez que as superfícies são constituídas por linhas, as propriedades destas, estudadas na secção anterior, são importantes no entendimento daquelas.

Critérios de classificação

Alguns exemplos. Uma superfície pode ...

... ser aberta (tem uma linha de fronteira ou estende-se indefinidamente) ou fechada (envolve um volume finito);

... ser compacta (fechada e limitada a uma região finita de espaço) ou não compacta;

... ser orientável (podem distinguir-se os dois lados da superfície) ou não orientável (apenas tem um lado);

... ser suave (ter um plano tangente em cada ponto; não têm vincos), apresentar singularidades (pontos em que não há plano tangente) ou ser facetada (ser composta por faces planas);

... apresentar simetrias (há planos de simetria por reflexão) ou ser completamente assimétrica;

... ser simples ou auto intersestar-se;

... ter curvatura gaussiana, em cada ponto, positiva, negativa ou zero;

... ter curvatura média, em cada ponto, positiva, negativa ou igual a zero;

... ser definida por um movimento de uma linha com uma dada lei ou apoiando-se noutra linha;

... ser regradada (gerada pelo movimento de uma linha reta) ou não regradada (não pode ser gerada pelo movimento de uma linha reta);

... ser definida por equações algébricas com diferentes graus (quádricas, cúbicas, quárticas,...);

... ser definida por equações algébricas ou por equações transcendentais;

... ser topologicamente equivalente a uma esfera, a um toro com um buraco, a um toro como dois buracos, ..., a um toro com n buracos (um cubo é topologicamente equivalente a uma esfera, uma caneca com uma pega é topologicamente equivalente a um toro, um vaso com dois furos é topologicamente equivalente a um toro com dois buracos).

Estes são apenas alguns critérios possíveis. Alguns destes critérios remetem para propriedades que podem ser reconhecidas visualmente (aberta ou fechada, suave ou apresentar singularidades, ser topologicamente equivalente a uma esfera, ter curvatura gaussiana positiva ou negativa, etc.) enquanto que outros não têm uma correspondência visual diretamente reconhecível (grau da equação, tipo de equação, etc.). Normalmente um único critério não especifica bem uma superfície, podendo ser utilizados vários. Por exemplo, uma superfície pode ser simultaneamente regradada e de revolução, ou ser simultaneamente de revolução, ser definida por uma equação algébrica de grau 2, compacta e topologicamente equivalente a uma esfera.

Atividade proposta:

Procure criar um esquema gráfico ou uma tabela que permita organizar a classificação dos tipos de superfícies. Procure dar exemplos de cada uma das classes de superfícies.

Plano e regiões planas

Um plano é a superfície que se define a partir de três pontos, uma reta e um ponto, duas retas paralelas ou duas retas concorrentes. Ainda podemos considerar a definição através de um ponto de duas direções ou uma reta e uma direção.

Agora podemos introduzir os vetores na definição. Podemos definir um plano α através de um ponto P e um vetor $\vec{n}$ normal ao plano, ou através de um ponto P e dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ paralelos ao plano. Os dois vetores podem ser obtidos a partir de três pontos. As duas definições acabam por ser equivalentes porque, dados os dois vetores paralelos ao plano, pode-se obter o vetor normal através do produto externo.

Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e um ponto P_0 podem definir-se as equações paramétricas do plano em termos muito semelhantes ao que se fez para a reta. A diferença é que agora temos dois parâmetros, u e v , em vez de ter apenas um:

$$P_{(u,v)} = P_0 + (u\vec{a} + v\vec{b})$$

O que pode ser expresso em termos de coordenadas do ponto $P_{(u,v)}$:

$$X_{P_{(u,v)}} = X_{P_0} + (u\vec{a}_x + v\vec{b}_x)$$

$$Y_{P_{(u,v)}} = Y_{P_0} + (u\vec{a}_y + v\vec{b}_y)$$

$$Z_{P_{(u,v)}} = Z_{P_0} + (u\vec{a}_z + v\vec{b}_z)$$

Utilizando a definição de produto interno, um plano é o lugar geométrico dos pontos P transformados da origem do referencial, O , por translações de vetores $\vec{v} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$ cujo produto interno relativamente ao vetor normal $\vec{n} = N_x\vec{x} + N_y\vec{y} + N_z\vec{z}$ é constante e igual a k .

Isto é $P = O + \vec{v}$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{n} = k$

Se o vetor $\vec{n}$ estiver normalizado, k corresponde à distância do plano à origem do referencial.

No contexto deste trabalho consideramos uma região plana como a porção de um plano de área finita delimitada por um polígono simples.

Malhas espaciais facetadas

Uma malha (*mesh*) é considerada como um arranjo, no espaço, de polígonos planos simples de tal modo que um lado é, em geral, e no máximo, comum a dois polígonos. A malha pode ser plana, se todos os polígonos estiverem contidos num plano, ou espacial se isso não acontecer. Cada um dos polígonos é uma face da malha. A malha pode encerrar um volume ou ser aberta. Apenas nos interessa considerar malhas que não se auto intersejam. Um tipo comum de *mesh* é a malha triangulada, isto é, aquela em que as faces são triângulos. Estas também recebem a designação de rede irregular de triângulos (**TIN** - *triangulated irregular network*).

As *meshes* são uma forma muito eficiente de aproximar a representação da geometria de formas orgânicas ou formas que não têm uma definição geométrica precisa como, por exemplo, terrenos. Na figura 2.39 temos o exemplo de uma *mesh* que cobre uma área plana retangular.

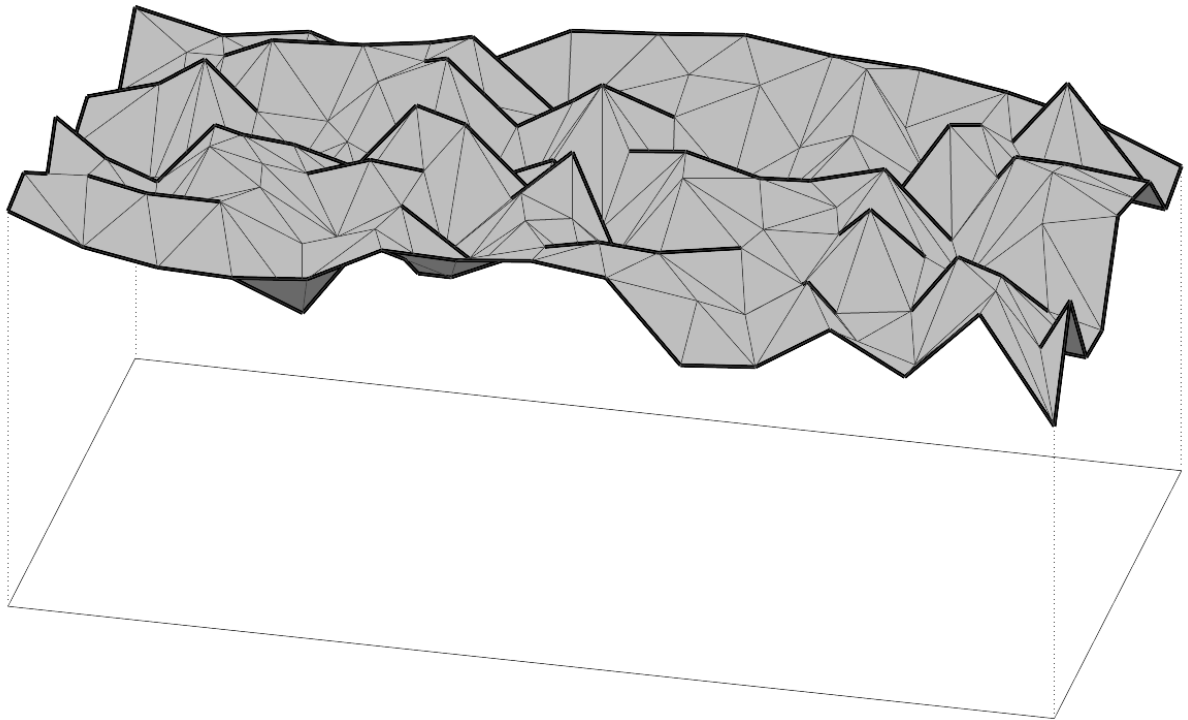


Fig. 2.39. Mesh.

Para além de se caracterizar visualmente, é importante perceber que elementos é que definem a *mesh*. Os elementos fundamentais são os vértices e as faces. Em geral, estes elementos são guardados como **listas**. A lista seguinte representa os vértices da *mesh*.

```
0 {-88.313494, 2.489344, 6.542188}
1 {-88.313494, 1.501088, 5.808325}
2 {-89.186837, 1.926268, 5.331997}
3 {-88.979993, 0.823098, 6.970094}
4 {-88.302003, 0.351953, 5.218009}
:
173 {-74.36996, 4.038554, 5.235411}
```

O primeiro valor de cada linha corresponde a um índice que traduz uma localização na lista. Um elemento da lista é tudo o que está à direita do índice. Por exemplo, o elemento de índice **3** é {-88.979993, 0.823098, 6.970094}. Os valores entre chavetas representam as coordenadas dos vértices separadas por vírgulas.

Normalmente, numa lista, o índice do primeiro elemento é **0**. Podemos verificar que esta lista tem **174** elementos, que correspondem aos **174** vértices da *mesh*.

Mas a lista dos vértices não define a *mesh*. É necessária outra lista que indica como os vértices estão ligados para gerar as faces. A lista seguinte representa as faces da *mesh*.

0 $T\{158; 159; 11\}$

1 $T\{162; 163; 103\}$

2 $T\{161; 162; 97\}$

3 $T\{161; 98; 160\}$

4 $T\{161; 97; 98\}$

:

303 $T\{131; 166; 167\}$

Nesta lista, por exemplo, o elemento de índice **3** é $T\{161; 162; 97\}$ e representa uma face triangular definida pelos vértices cujos índices, na lista dos vértices, são **161**, **162** e **97**.

Podemos verificar que esta lista tem **304** elementos, que correspondem às **304** faces da *mesh*.

É ainda possível que a *mesh* tenha vetores normais unitários associados aos vértices e/ou associados às faces. Caso isso aconteça, também estes são guardados em listas. As listas são o que permite aos computadores gerirem de forma eficiente este tipo de objetos geométricos.

Uma malha espacial facetada pode também ser obtida a partir de uma malha espacial linear por preenchimento, quando possível, dos polígonos delimitados pelos lados. Neste caso já não será uma *mesh* dado que podem incidir numa lado mais que dois polígonos. Um exemplo muito evidente de uma malha espacial facetada é a que se pode obter agregando cubos de modo a preencher o espaço.

Poliedros

Podemos definir um poliedro como uma *mesh* fechada sem auto interseções. Na verdade a definição de poliedro não exclui que as suas faces sejam polígonos não simples nem exclui as auto interseções, mas para os nossos objetivos neste texto não consideraremos estes tipos de poliedros. Há uma infinidade de poliedros e não é nosso propósito fazer aqui uma enumeração exaustiva. Iremos apenas referir alguns tipos de poliedros e deixamos para o leitor o aprofundamento do tema. Uma referência para o aprofundamento do tema é a tese de Vera Viana (2020) com o título “Aplicações Didáticas sobre Poliedros para o Ensino da Geometria”. Um noção importante, é a de **poliedro uniforme** e a de **figura do vértice** de um poliedro uniforme. Um poliedro uniforme tem faces regulares que se encontram do mesmo modo em todos os vértices. A figura do vértice de um poliedro uniforme é o polígono definido pelos pontos médios das arestas que incidem no vértice (Coxeter, 1954).

Pirâmides, prismas e prismoides

As pirâmides (e os troncos de pirâmide), os prismas (e os troncos de prisma) e os prismoides são classes de poliedros bem conhecidas (figura 2.40). Uma pirâmide é o sólido delimitado por um ângulo sólido (ângulo poliédrico) e um plano oblíquo a todas as suas arestas. Esse é o plano da base da pirâmide. Um tronco de pirâmide obtém-se da pirâmide por truncagem, da parte da pirâmide que contém o vértice do ângulo poliédrico, produzida por um plano paralelo ou oblíquo ao plano da base. Um prisma é o volume delimitado por uma superfície prismática e

dois planos paralelos entre si e oblíquos às arestas da superfície prismática. Estes são os planos das duas bases do prisma. Se os dois planos forem oblíquos entre si, a figura resultante é um tronco de prisma. Um prismóide é o sólido delimitado por dois polígonos quaisquer com o mesmo número de lados contidos em planos paralelos e por faces trapezoidais laterais.

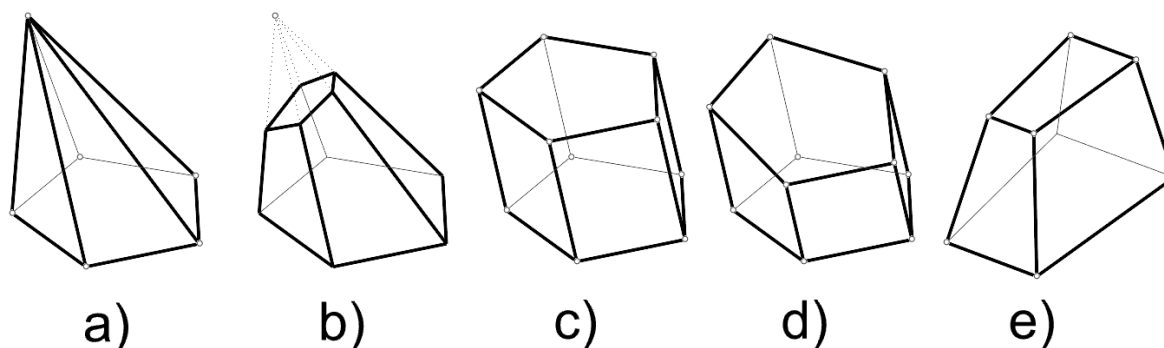


Fig. 2.40. Poliedros: a) pirâmide, b) tronco de pirâmide, c) prisma, d) tronco de prisma, e) prismóide.

Se as faces de uma pirâmide forem polígonos regulares, podemos ter o caso do tetraedro regular (ver adiante), da pirâmide quadrangular regular e da pirâmide pentagonal regular. No caso dos prismas, se todas as faces forem polígonos regulares, estes enquadram-se na classe dos poliedros semi-regulares.

Atividade proposta:

Modele vários tipos de pirâmides, prismas e prismóides, num ADMG3D.

Antiprismas

Dados dois polígonos não complanares, com o mesmo número de lados, contidos em planos paralelos, designa-se por antiprisma o sólido delimitado pelos dois polígonos e pelas faces triangulares resultantes da ligação de um vértice de um polígono a dois vértices do outro, em sequência, e de forma alternada. A designação antiprisma também pode ser utilizada para designar uma classe de poliedros que incluem os antiprismas, propriamente ditos, os troncos de antiprisma, os antipiramóides e os antiprismóides (figura 2.41). Se os planos dos dois polígonos iniciais não forem paralelos, o poliedro resultante é um tronco de antiprisma. Se um dos polígonos for substituído por uma aresta, e forem feitas as necessárias adaptações às faces triangulares, obtém-se um antipiramóide. Finalmente, se os dois polígonos não tiverem o mesmo número de faces, obtém-se um antiprismóide (Sá, 1982).

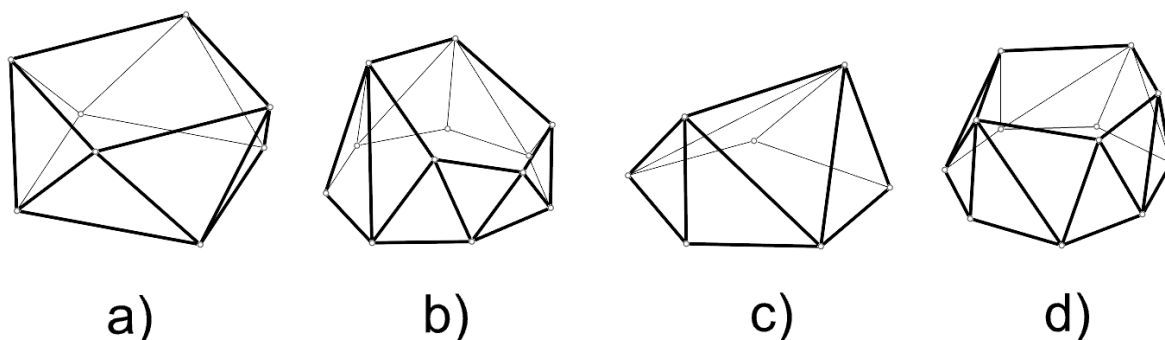


Fig. 2.41. Antiprismas: a) antiprisma, b) tronco de antiprisma, c) antipiramóide, d) antiprismóide.

Se as faces de um antiprisma forem todas polígonos regulares, este é considerado um poliedro semi-regular, à exceção do cubo que é um poliedro regular.

Atividade proposta:

Modele vários tipos antiprismas num ADMG3D.

Poliedros regulares

Na PARTE I já estudámos os poliedros regulares no que concerne à representação das suas projeções notáveis, isto é, aquelas que colocam em evidência as suas simetrias. Por essa razão limitamo-nos agora a listá-los (figura 2.40) e a rever algumas propriedades gerais.

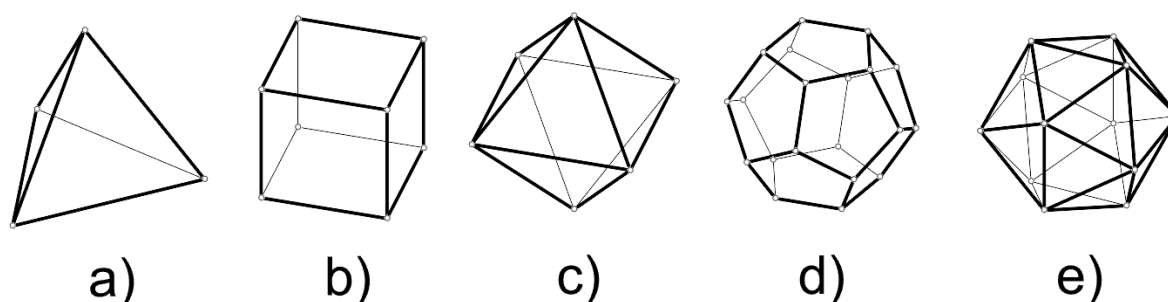


Fig. 2.41. Poliedros Regulares: a) tetraedro, b) hexaedro (cubo), c) octaedro, d) dodecaedro, e) icosaedro.

As faces destes poliedros são polígonos regulares de um único tipo. Todos os vértices estão contidos numa superfície esférica. Existe também uma superfície esférica tangente a todas as faces e uma superfície esférica passante pelos pontos médios de todas as arestas. Estas três superfícies esféricas são concêntricas e têm centro em comum com o poliedro.

Atividade proposta:

Modele os poliedros regulares num ADMG3D. De seguida explore os modelos no sentido de obter várias projeções ortogonais incluindo as projeções notáveis.

Teste se os poliedros regulares podem ser assemblados de modo a ocupar o espaço. Neste exercício pode combinar mais que um tipo de poliedro.

Poliedros semi-regulares

Um poliedro semi-regular tem por faces polígonos regulares de mais que um tipo e todos os vértices pertencentes a uma superfície esférica. Existe também uma superfície esférica que passa pelos pontos médios de todas as arestas. Esta classe de poliedros inclui os 13 poliedros arquimedianos e todos os prismas e antiprismas regulares.

Os poliedros arquimedianos podem ser obtidos a partir dos cinco poliedros regulares através de algum tipo de transformação geométrica. Na figura 2.42 listam-se os 13 poliedros arquimedianos. Dos treze, há dois que não podem ser construídos da forma clássica, isto é, utilizando operações que envolvam apenas a interseção de linhas retas e circunferências. Esses dois aparecem em duas formas enantiomórficas, isto é, simétricas por reflexão segundo um plano. Trata-se do cubo achatado (figuras 2.42.l1 e 2.42.l2) e do dodecaedro achatado (figuras 2.42.m1 e 2.42.m2). Estes dois poliedros podem, no entanto, ser construídos geometricamente a partir de interseções de superfícies cilíndricas (Mateus, 2024).

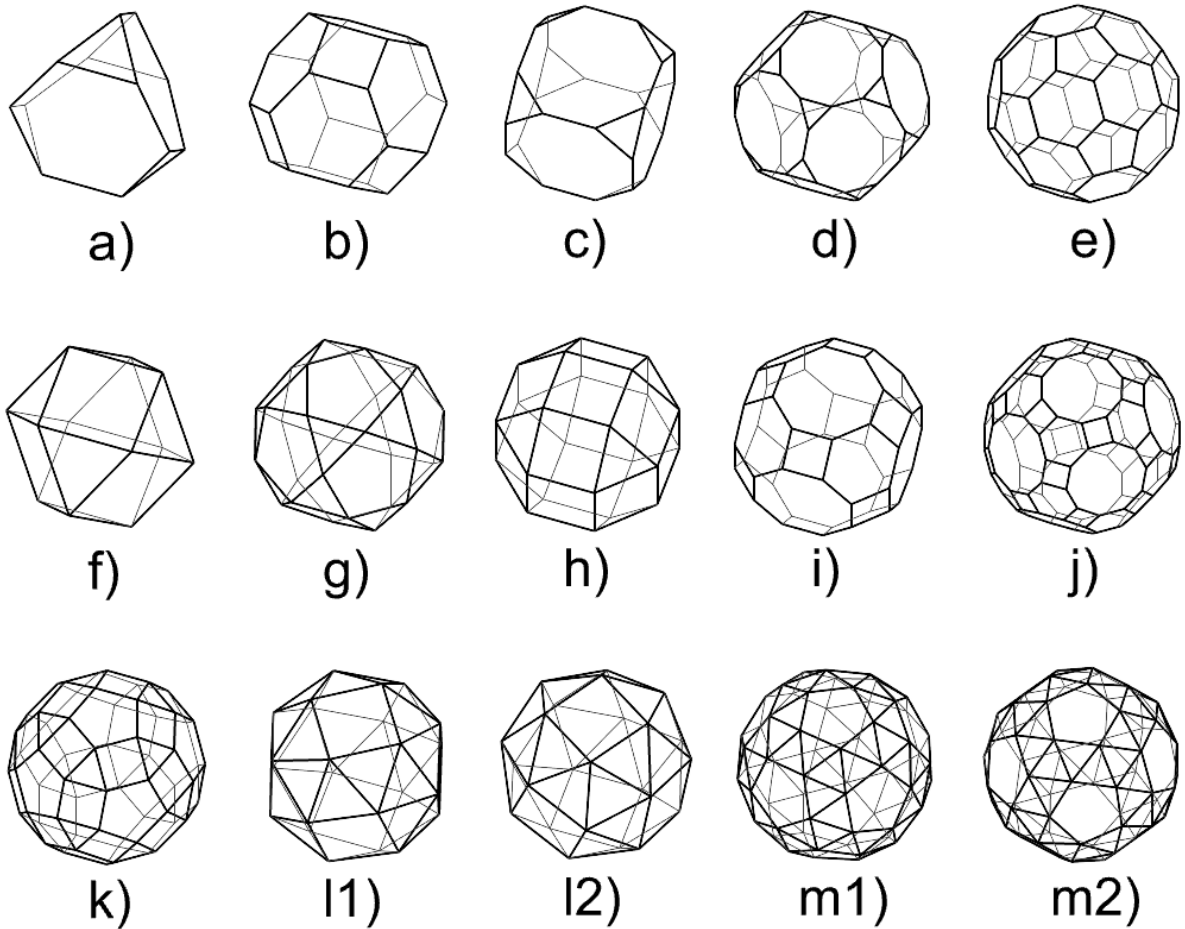


Fig. 2.42. Poliedros Semi-regulares: a) tetraedro truncado, b) octaedro truncado, c) cubo truncado, d) dodecaedro truncado, e) icosaedro truncado, f) cuboctaedro, g) icosidodecaedro, h) rombicuboctaedro, i) cuboctaedro truncado, j) icosidodecaedro truncado, k) rombicosidodecaedro, l1) cubo achatado, l2) cubo achatado (versão enantiomórfica), m1) dodecaedro achatado, m2) dodecaedro achatado (versão enantiomórfica).

No caso do cubo achatado, pode partir-se de um cubo circunscrito para, numa das faces, determinar a posição de um vértice R , conforme se ilustra na figura 2.43. Considerem-se três tipos de eixo no cubo circunscrito, $a1$, $a2$ e $a3$ (figura 2.43.a), e o comprimento L para a aresta do cubo achatado. A reta $a1$ é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $\frac{L\sqrt{2}}{2}$; a reta $a2$ é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $\frac{L}{2}$; e, finalmente, a reta $a3$ é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $\frac{L\sqrt{3}}{3}$ (figuras 2.43.b e 2.43.c). A superfície de eixo $a1$ intersesta a superfície de eixo $a2$ segundo a curva $[m]$ e intersesta a superfície de eixo $a3$ segundo a curva $[n]$. O vértice R do cubo achatado é um dos pontos de interseção entre as curvas $[m]$ e $[n]$ (figura 2.43.c). Note-se que as interseções entre os pares de cilindros geram também duas curvas $[m']$ e $[n']$ (não notadas na figura) que se intersestam num ponto R' , vértice do cubo achatado simétrico (enantiomórfico).

Desta configuração, em que o cubo circunscrito tem as arestas paralelas aos eixos coordenados e centro na origem do referencial, e considerando $L = 1$ para a aresta do cubo achatado, as coordenadas do vértice R são:

$$X_R \approx 0.62122641055659 \dots$$

$$Y_R \approx 0.33775397381375 \dots$$

$$Z_R \approx 1.14261350892596 \dots$$

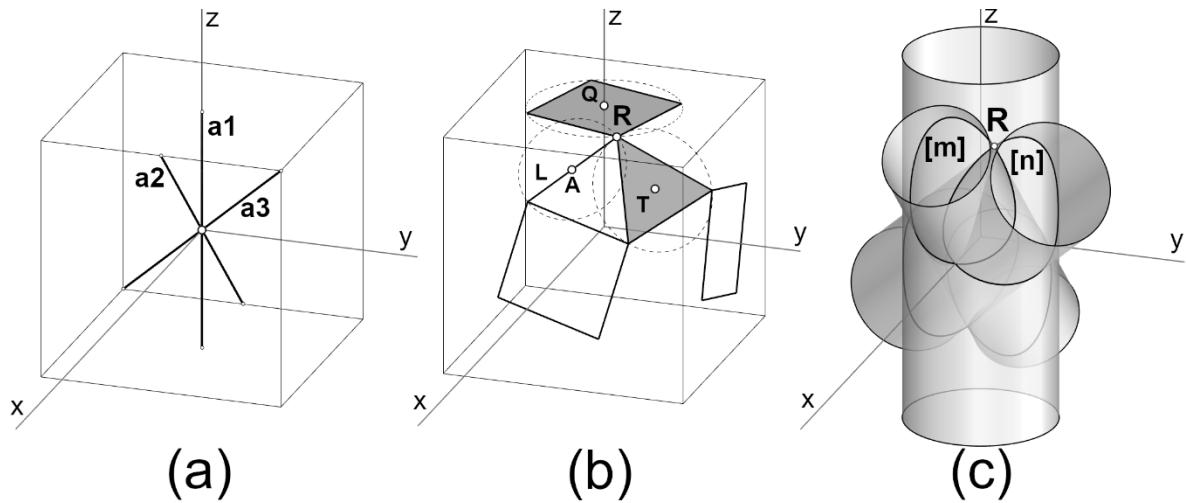


Fig. 2.43. Determinação de um vértice **R** do cubo achatado: a) eixos de tipo **a1**, **a2** e **a3**, b) relação entre os raios dos cilindros de revolução de eixos **a1**, **a2** e **a3**, c) interseção entre dois pares de cilindros e determinação de um vértice **R** do cubo achatado na interseção entre as curvas **[m]** e **[n]**.

A partir do momento em que o vértice **R** (ou **R'**) está determinado, a obtenção dos restantes vértices do cubo achatado faz-se facilmente através de rotações.

O caso do dodecaedro achatado é muito semelhante. Em vez de se partir de um cubo circunscrito, parte-se de um dodecaedro circunscrito (figura 2.44).

Considerem-se três tipos de eixo no dodecaedro circunscrito, **a1**, **a2** e **a3** (figura 2.44.a), e o comprimento **L** para a aresta do cubo achatado. A reta **a1** é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $L \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$; a reta **a2** é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $\frac{L}{2}$; e, finalmente, a reta **a3** é eixo de uma superfície cilíndrica de revolução de raio $\frac{L\sqrt{3}}{3}$ (figuras 2.44.b e 2.44.c). A superfície de eixo **a1** intersesta a superfície de eixo **a2** segundo a curva **[m]** e intersesta a superfície de eixo **a3** segundo a curva **[n]**. O vértice **R** do dodecaedro achatado é um dos pontos de interseção entre as curvas **[m]** e **[n]** (figura 2.44.c). Note-se que as interseções entre os pares de cilindros geram também duas curvas **[m']** e **[n']** (não notadas na figura) que se intersestam num ponto **R'**, vértice do dodecaedro achatado simétrico (enantiomórfico).

Desta configuração, em que o dodecaedro circunscrito tem duas faces horizontais, duas arestas paralelas ao eixo coordenado **y**, centro na origem do referencial, e considerando **L = 1** para a aresta do dodecaedro achatado, as coordenadas do vértice **R** são:

$$X_R \approx 0.7836440985177 \dots$$

$$Y_R \approx 0.3309210247298 \dots$$

$$Z_R \approx 1.9809159472818 \dots$$

A partir do momento em que o vértice **R** (ou **R'**) está determinado, a obtenção dos restantes vértices do dodecaedro achatado faz-se facilmente através de rotações.

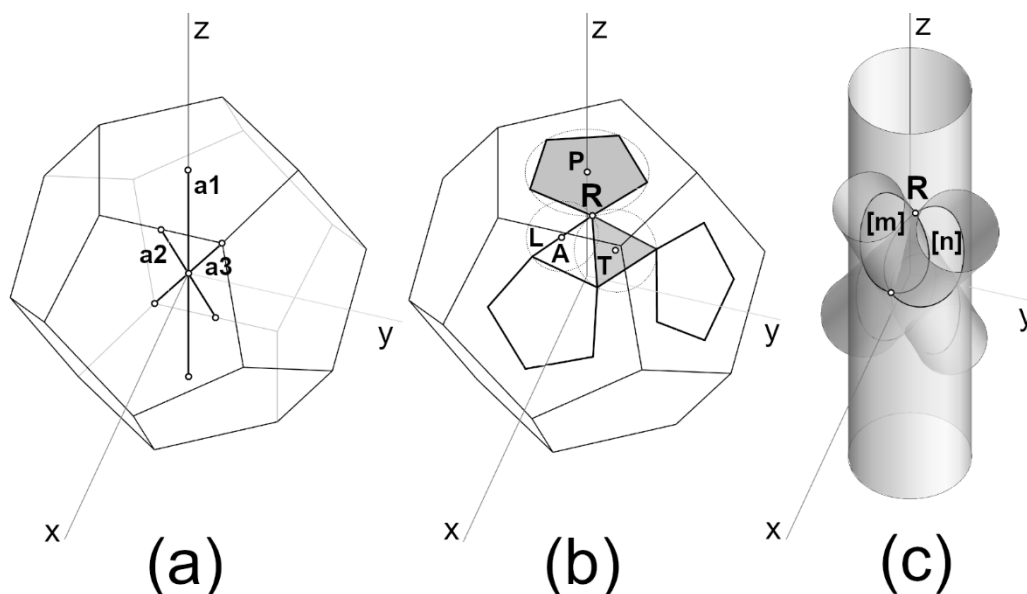


Fig. 2.44. Determinação de um vértice R do dodecaedro achatado: a) eixos de tipo $a1$, $a2$ e $a3$, b) relação entre os raios dos cilindros de revolução de eixos $a1$, $a2$ e $a3$, c) interseção entre dois pares de cilindros e determinação de um vértice R do dodecaedro achatado na interseção entre as curvas $[m]$ e $[n]$.

A modelação dos restantes 11 poliedros arquimedianos é deixada como exercício para o leitor.

Atividade proposta:

Modele os poliedros arquimedianos num ADMG3D. De seguida explore os modelos no sentido de obter várias projeções ortogonais incluindo as projeções notáveis.

Teste se os arquimedianos semi-regulares podem ser assemblados de modo a ocupar o espaço. Neste exercício pode combinar mais que um tipo de poliedro. Pode ainda combiná-los com poliedros regulares.

Poliedros de Catalan

Os poliedros de Catalan são os duais dos poliedros arquimedianos. Uma forma de os construir é através do método de Dorman Luke (Wikipedia contributors, 2024)). Tem-se como ponto de partida um poliedro arquimediano e a superfície esférica $[\alpha]$ passante pelos pontos médios das suas arestas. A face do poliedro dual, correspondente a um vértice V , é o polígono, complanar com a figura do vértice V , cujos lados são tangentes à esfera $[\alpha]$ nos vértices da figura do vértice V . Neste caso, as arestas de ambos os poliedros são tangentes à superfície esférica $[\alpha]$.

Outra forma de construir o poliedro dual de um poliedro arquimediano é como a figura delimitada pelo conjunto de planos perpendiculares às retas que unem o centro O do poliedro arquimediano aos seus vértices, na condição de todos os planos serem tangentes a uma superfície esférica $[\beta]$ qualquer de centro O .

Aos poliedros que aparecem em duas versões enantiomórficas, também correspondem poliedros duais que também aparecem em duas versões enantiomórficas.

Na figura 2.45 apresentam-se os 13 poliedros de Catalan.

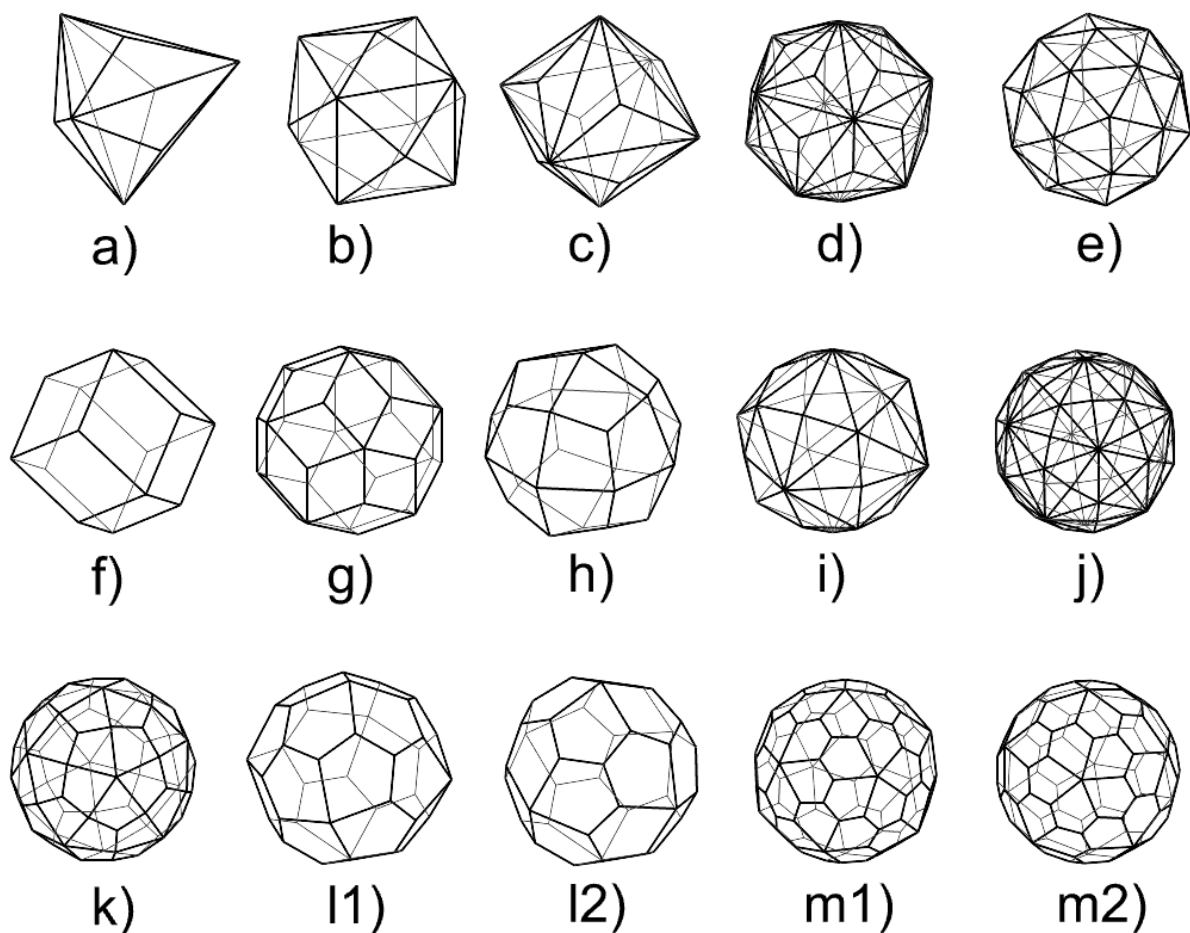


Fig. 2.45. Poliedros de Catalan: a) tetraedro triakis (dual: tetraedro truncado), b) hexaedro tetrakis (dual: octaedro truncado), c) octaedro triakis (dual: cubo truncado), d) icosaedro triakis (dual: dodecaedro truncado), e) dodecaedro pentakis (dual: icosaedro truncado), f) dodecaedro rômico (dual: cuboctaedro), g) triacontaedro rômico (dual: icosidodecaedro), h) icositetraedro deltoidal (dual: rombicuboctaedro), i) dodecaedro disdiakis (dual: cuboctaedro truncado), j) triacontaedro disdiakis (dual: icosidodecaedro truncado), k) hexecontaedro deltoidal (dual: rombicoidodecaedro), l1) icositetraedro pentagonal (dual: cubo achatado), l2) Icositetraedro pentagonal - versão enantiomórfica (dual: cubo achatado - versão enantiomórfica), m1) hexecontaedro pentagonal (dual: dodecaedro achatado), m2) hexecontaedro pentagonal - versão enantiomórfica (dual: dodecaedro achatado - versão enantiomórfica).

Atividade proposta:

Modele os poliedros de Catalan num ADMG3D. Como sugestão, modele-os em conjunto com os poliedros arquimedianos. De seguida, explore os modelos no sentido de obter várias projeções ortogonais incluindo as projeções notáveis.

Cúpulas geodésicas

Uma **cúpula geodésica** é uma aproximação à superfície de uma **calota esférica** através de uma *mesh* cujos vértices estão contidos na superfície da esfera. Não existe um modo universal para gerar uma cúpula geodésica. Uma das formas de a gerar é partir de um poliedro. Na figura 2.46, mostram-se duas iterações no processo de geração de uma cúpula geodésica a partir de meio icosidodecaedro inscrito numa superfície semiesférica.

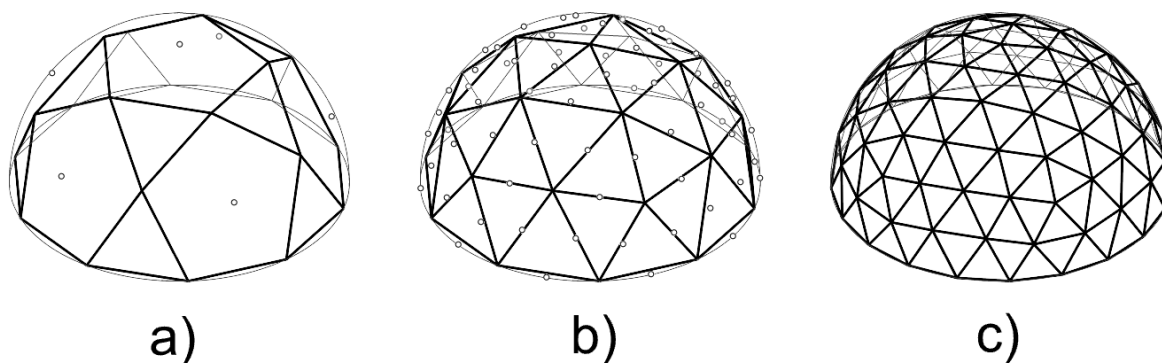


Fig. 2.46. Cúpula geodésica: a) meio icosidodecaedro inscrito numa superfície semiesférica, b) resultado da primeira iteração, c) resultado da segunda iteração.

Na primeira iteração foram projetados os centros dos pentágonos na superfície esférica (figura 2.46.a). De seguida, cada um dos pentágonos foi substituído por cinco triângulos. Deste modo, obteve-se uma triangulação mais equilibrada. Na iteração seguinte, foram projetados os pontos médios dos lados dos triângulos na superfície esférica (figura 2.46.b). De seguida, cada um dos triângulos foi substituído por quatro triângulos menores (figura 2.46.c). Este processo poderia continuar.

Atividade proposta:

Partindo de poliedros semi-regulares, modele várias versões de cúpulas geodésicas.

Superfícies regradas

Uma superfície regradada é aquela que pode ser gerada pelo movimento de uma linha reta no espaço. Estas podem subdividir-se em duas classes: as superfícies planificáveis e as superfícies empenadas.

Superfícies planificáveis

Diz-se que uma superfície é planificável quando pode ser aplicada num plano sem introduzir pregas ou rasgos. As superfícies planificáveis têm curvatura gaussiana igual a zero em todos os seus pontos. Numa superfície planificável, duas geratrizes infinitamente próximas são sempre complanares. Isso explica a possibilidade da planificação. A geratriz g_3 roda em torno da geratriz g_2 até ficar contida no plano definido pelas geratrizes g_2 e g_1 . Nesse movimento a geratriz g_3 arrasta todas as geratrizes g_n tais que $n > 3$. Este processo é contínuo e é aplicado sucessivamente a todas as geratrizes da superfície. Numa planificação as áreas, os comprimentos e os ângulos entre as linhas da superfície não se alteram. Dois elementos correspondentes entre si na planificação, por exemplo duas linhas, dizem-se **transformados** um do outro. Todas as superfícies planificáveis têm uma **aresta de retrocesso** que as divide em duas partes. Cada uma dessas partes é uma **folha** da superfície. Todas as geratrizes da superfície são tangentes à aresta de retrocesso. Em alguns casos a aresta de retrocesso reduz-se a um ponto próprio (caso da superfície cônica) ou impróprio (caso da superfície cilíndrica).

Os três tipos de superfícies planificáveis são as cónicas, as cilíndricas e as tangenciais. Estas superfícies podem ser definidas de diferentes modos, de acordo com a tabela seguinte, adaptada de Izquierdo (1996).

Superfícies planificáveis definidas por um plano móvel que se apoia em uma ou duas diretrizes (pontos, linhas e/ou superfícies)	
P (ponto); P_{∞} (ponto impróprio); C (curva); C_{∞} (curva imprópria); S (superfície)	
Diretrizes	Exemplos
$P_{\infty}C$	cilíndrica
PC	cônica
CC_{∞}	superfície de pendente constante (quando a curva imprópria corresponde a uma superfície cônica de revolução)
CC	convoluta
CS	convoluta com um núcleo
SS	convoluta com dois núcleos
C	tangencial (o plano movel é o plano osculador da curva)
C	polar (o plano movel é o plano normal à curva)
C	retificante (o plano movel é o plano retificante da curva)

Superfícies cónicas e cilíndricas

Na PARTE I já introduzimos as superfícies cónicas (e piramidais) e cilíndricas (e prismáticas) e tratámos a planificação de porções limitadas às superfícies de cones (e pirâmides) e cilindros (e prismas). Por essa razão, não voltamos aqui a tratar dessas superfícies. Vamos agora tratar da outra classe de superfícies planificáveis, as superfícies tangenciais.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D proceda à planificação das superfícies de cones, cilindros, prismas e pirâmides bem como a correspondentes formas truncadas.

Superfícies tangenciais

Uma superfície tangencial é o lugar geométrico das retas tangentes a uma linha espacial. Uma superfície tangencial pode ser considerada como o limite de uma superfície facetada definida pelo prolongamento dos lados $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 5]$, ..., $[N - 1, N]$, de uma linha poligonal espacial $[1, 2, 3, 4, 5, \dots, N - 1, N]$. A planificação da superfície facetada resulta das rotações sucessivas em torno das suas arestas como se ilustra na figura 2.47.

Na superfície facetada há um número limitado de rotações que geram a planificação. Na superfície tangencial o número de rotações é infinito.

Há outras formas de gerar superfícies planificáveis que, também sendo tangenciais, não são geradas explicitamente pelo conjunto das retas tangentes a uma curva espacial, embora também gozem dessa propriedade. Trata-se das superfícies de pendente constante e das convolutas.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D proceda à modelação de superfícies tangenciais.

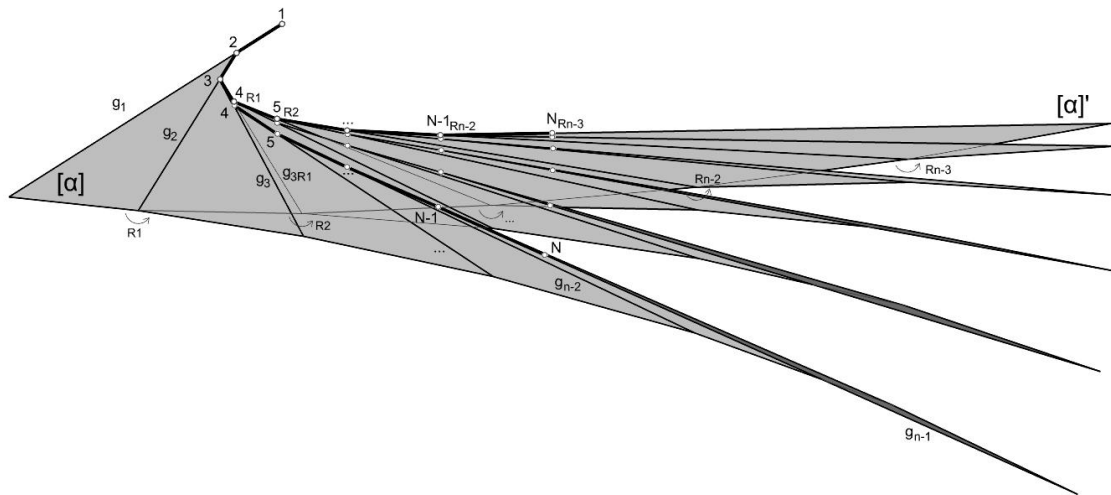


Fig. 2.47. Planificação de uma superfície facetada resultante do prolongamento dos lados de uma linha poligonal espacial.

Superfície de pendente constante

Uma superfície de pendente constante, relativamente a uma superfície de referência, é uma superfície regradada cujas geratrizes retas têm um declive constante em relação à superfície de referência (figura 2.48).

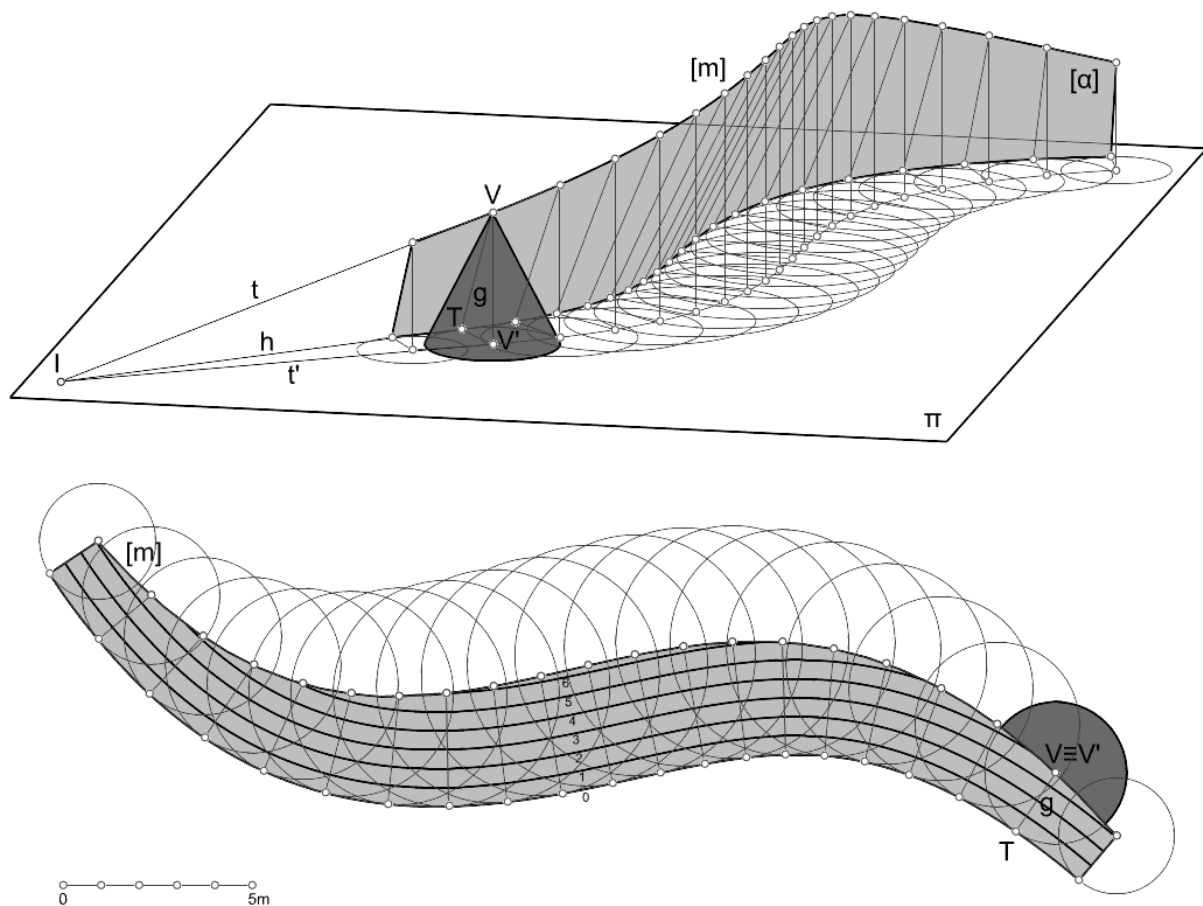


Fig. 2.48. Superfície de pendente constante passante por uma curva espacial [m]. Em cima: vista axonométrica, em baixo: vista em planta (projeção horizontal) com a representação das curvas de nível da superfície.

Apenas vamos considerar o caso em que a superfície de referência é um plano. Este tipo de superfícies de pente constante já foi afluado na PARTE I a propósito da modelação de terrenos através de taludes. Normalmente, é dada uma linha $[m]$, plana ou não, pela qual deve passar a superfície, um plano de referência π normalmente horizontal, e é especificada a pente relativamente ao plano de referência. A superfície $[\alpha]$ de pente constante que passa pela linha $[m]$ é a envolvente das superfícies cónicas de revolução de eixo perpendicular ao plano de referência e com geratrizes de pente constante em relação ao plano de referência. Cada uma das superfícies cónicas, de vértice V , é concordante com a superfície $[\alpha]$ ao longo de uma geratriz g , segundo a qual ambas as superfícies partilham o mesmo plano tangente definido pelas retas t , tangente à linha $[m]$ em V , e h , tangente em T à diretriz da superfície cónica contida em π . Note-se que as linhas de nível da superfície $[\alpha]$ são perpendiculares às suas geratrizes. Em projeção horizontal, as várias linhas de nível são paralelas entre si. Na projeção horizontal, a distância entre linhas de nível consecutivas corresponde ao intervalo associado à pente dada.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de superfícies de pente constante considerando diferentes tipos de linhas pelas quais as superfícies devam passar.

Convolutas

Uma convoluta é a superfície $[\delta]$ envolvente dos planos simultaneamente tangentes a duas curvas $[m]$ e $[n]$ dadas (ou duas superfícies ou uma curva e uma superfície). As duas curvas podem ser planas ou não. No exemplo que iremos tratar (figura 2.49) consideramos que as duas curvas, $[m]$ e $[n]$, são planas e estão contidas, respetivamente, em planos α e β oblíquos entre si. Uma geratriz g da superfície fica definida pelos pontos T e T' , em que as duas retas, retas t e t' , coplanares, são tangentes às curvas $[m]$ e $[n]$, respetivamente.

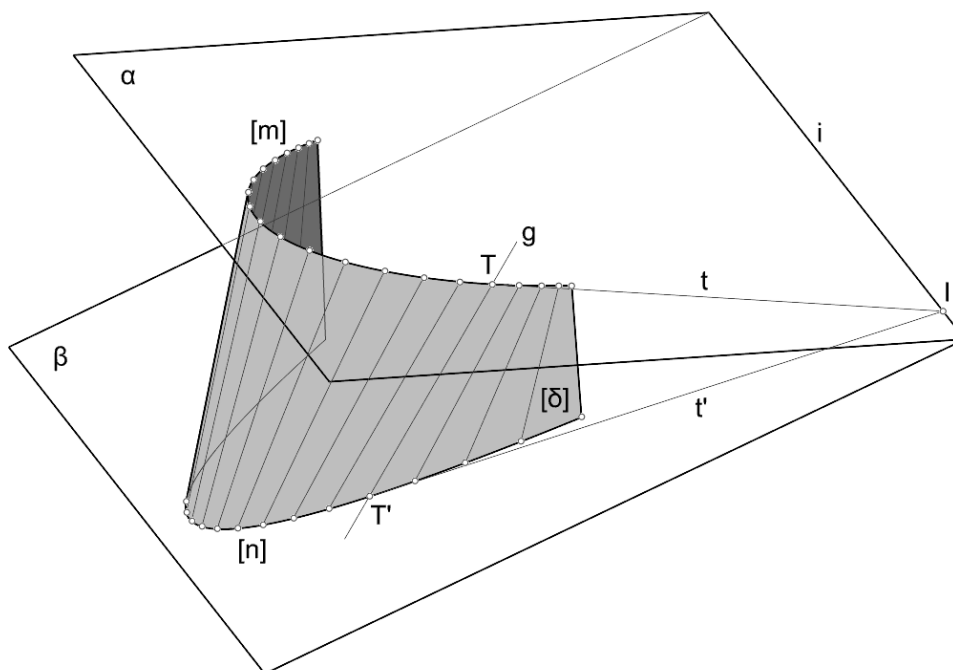


Fig. 2.49. Convoluta definida por duas linhas $[m]$ e $[n]$ contidas em planos oblíquos entre si.

As duas retas t e t' definem o plano tangente à superfície e interseitam-se num ponto I pertencente à reta i de interseção entre os planos α e β

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de convolutas sujeitas a diferentes condições.

Plano tangente a uma superfície planificável

Nas superfícies planificáveis, o plano θ tangente é único para cada geratriz g . Dado um ponto T da geratriz g , e uma curva $[m]$ da superfície passante por T , o plano fica definido pela geratriz g e pela reta t tangente à curva $[m]$ em T .

Planificação

Ao contrário do que acontece com as superfícies do cone e do cilindro de revolução, ou com as superfícies poliédricas, em geral não há uma solução exata para a planificação de uma superfície planificável. No caso da superfície do cone oblíquo e do cilindro oblíquo, na PARTE I, resolvemos a planificação fazendo uma aproximação à superfície de uma pirâmide e à superfície de um prisma. Generalizando, a planificação pode resolver-se através da aproximação a uma superfície poliédrica. Essa aproximação pode ser feita através de triangulações (figura 2.50). A aproximação será tanto melhor quantos mais triângulos forem utilizados.

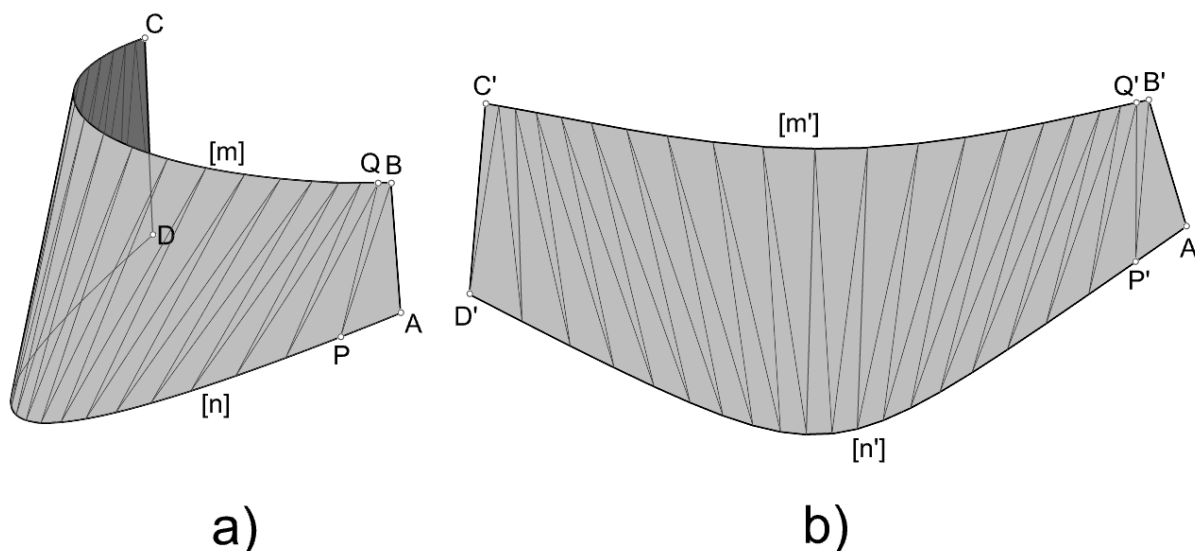


Fig. 2.50. Planificação da convoluta: a) aproximação da convoluta através de uma triangulação, b) aproximação à planificação da convoluta através da planificação da superfície triangulada.

Os triângulos $[APB]$ e $[A'P'B']$ são congruentes; os triângulos $[PBQ]$ e $[P'B'Q']$ são congruentes e assim sucessivamente. Cada triângulo tem um lado em comum com o que o antecede e com o que lhe sucede. Normalmente esta operação é pouco cómoda de realizar manualmente. Por isso, é conveniente verificar se o ADMG3D que se está a utilizar dispõe de alguma funcionalidade que permita realizar esta operação. Caso não tenha, pode ser necessário programá-la. E para o fazer é necessário ter a noção exata das operações geométricas a realizar.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à planificação dos vários tipos de superfície planificável estudados.

Superfícies empenadas

Uma superfície regrada é empenada (não planificável) se quaisquer duas geratrizes retas infinitamente próximas não se intersejam. Em geral, esta condição é cumprida quando a superfície é definida por três diretrizes quaisquer. Contudo, há posições específicas que as geratrizes podem assumir que não permitem a geração de nenhuma superfície empenada ou em que esta pode degenerar numa superfície planificável.

A condição para as retas $g_1, g_2, \dots, g_n$ definirem uma superfície regrada empenada $[\pi]$ é serem simultaneamente tangentes às diretrizes (linhas e/ou superfícies) $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\gamma]$. Isto é, a superfície $[\pi]$ tem de ser simultaneamente concordante com as superfícies diretrizes ao longo das linhas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respetivamente (figura 2.51). Se em vez de uma ou várias superfícies diretrizes, forem dadas linhas diretrizes, a superfície tem de as conter.

O conjunto infinito das linhas $g_1, g_2, \dots, g_n$ designa-se por **sistema de geratrizes**. Se a superfície contiver apenas um sistema de geratrizes, diz-se **simplesmente regrada**. Se tiver dois sistemas de geratrizes, diz-se **duplamente regrada**. Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersejam todas as geratrizes do outro sistema.

Se as direções de todas as geratrizes estiverem contidas numa única orientação, então a superfície, se estendida indefinidamente, tem uma geratriz reta no infinito. Neste caso diz-se que é de **plano diretor**. Caso contrário é de **cone diretor**, isto é, a superfície estendida indefinidamente tem uma diretriz curva no infinito.

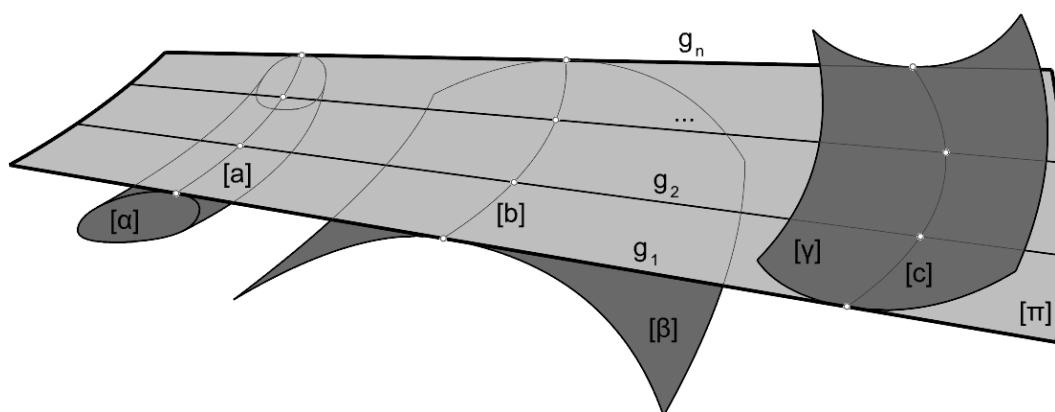


Fig. 2.51. Superfície empenada concordante com três superfícies diretrizes dadas.

Dito de outra forma, uma superfície de plano diretor tem todas as geratrizes retas paralelas a um plano com uma dada orientação e uma superfície de cone diretor tem todas as suas geratrizes paralelas às de uma superfície cônica. Neste sentido, todas as superfícies empenadas são de plano diretor ou de cone diretor. Na verdade não há apenas um plano diretor. Qualquer plano paralelo a um plano diretor, também é plano diretor. O que importa é a orientação. O mesmo se aplica ao cone diretor. Porém, o plano diretor ou o cone diretor podem

não ser declarados como elemento gerador da superfície. Na tabela seguinte propõe-se uma organização da taxonomia das superfícies empenadas em função das diretrizes que as definem.

Superfícies empenadas definidas por três diretrizes (linhas e/ou superfícies) R (reta); C (curva); S (superfície); R_{∞} (reta imprópria/plano diretor); C_{∞} (curva imprópria/cone diretor)		
Tipo	Diretrizes	Exemplos
De plano diretor	$R_{\infty}RR$	paraboloide hiperbólico
	$R_{\infty}RC$	conoide, helicoides axial de plano diretor
	$R_{\infty}CC$	cilindroide
	$R_{\infty}RS$	conoide com núcleo
	$R_{\infty}CS$	cilindroide com núcleo, helicoides de plano diretor com núcleo
	$R_{\infty}SS$	cilindroide com dois núcleos
De cone diretor	$C_{\infty}RR$	tetraedroide
	$C_{\infty}CR$	helicoides axial de cone diretor
	$C_{\infty}CC$	hiperboloide de revolução de uma folha
	$C_{\infty}RS$	(caso geral)
	$C_{\infty}CS$	helicoides de cone diretor com núcleo
	$C_{\infty}SS$	(caso geral)
	RRR	hiperboloide empenado escaleno
	RRC	superfície em arco enviesado
	RCC	superfície em arco enviesado
	CCC	(caso geral)
	RRS	superfície em arco enviesado
	RCS	superfície em arco enviesado
	CCS	(caso geral)
	RSS	superfície em arco enviesado
	CSS	(caso geral)
	SSS	(caso geral)

Caso geral de uma superfície empenada definida por três curvas

Dadas três curvas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, pode ou não ser possível gerar uma superfície empenada $[\pi]$ por elas definida. Se for possível, uma geratriz g da superfície, concorrente com as linhas dadas pode ser obtida do seguinte modo. Considere-se um ponto A pertencente à linha $[a]$. Considere-se o ponto A como vértice de duas superfícies cônicas $[\alpha]$ e $[\beta]$, passantes pelas linhas $[c]$ e $[b]$, respetivamente. A geratriz g resulta da interseção entre estas superfícies cônicas. Deslocando o ponto A sobre a linha $[a]$, obtêm-se as outras geratrizes da superfície $[\pi]$ de modo idêntico (figura 2.52).

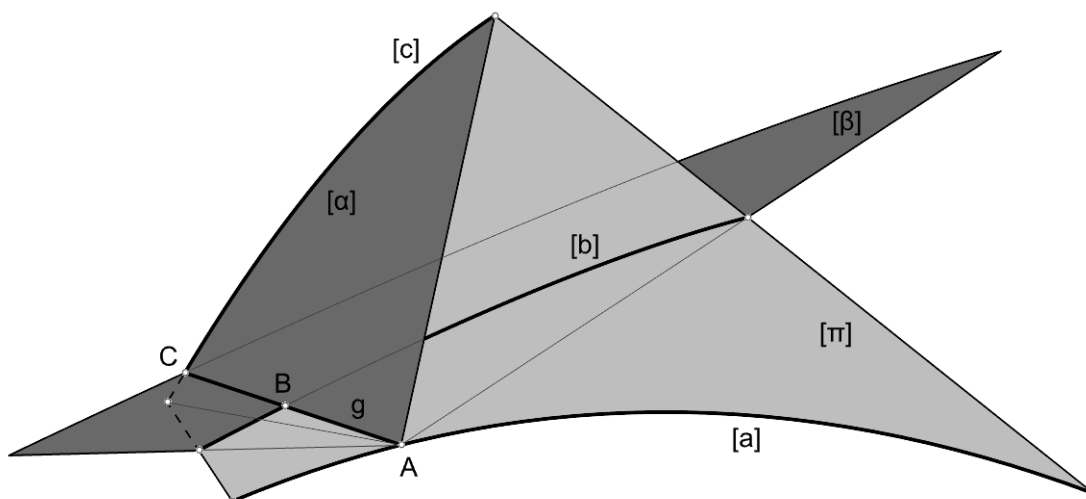


Fig. 2.52. Superfície empenada definida por três curvas $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de uma superfície empenada definida por três diretrizes curvas.

Paraboloide hiperbólico

O paraboloide regrado, ou paraboloide hiperbólico, é a superfície $[\pi]$ que fica definida dadas duas diretrizes retas a e b enviesadas entre si e um plano diretor α . As geratrizes g são definidas varrendo o espaço com o plano α fazendo-o deslocar-se segundo uma direção não contida na sua orientação. Nas suas posições sucessivas, o plano α intersesta as retas a e b em pontos A e B , respetivamente, que definem uma geratriz g da superfície $[\pi]$.

Uma forma prática de definir o paraboloide hiperbólico é partir de um quadrilátero enviesado $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ (figura 2.53).

As direções das retas P_0P_1 e P_3P_2 definem a orientação do plano diretor α e as retas P_0P_3 e P_1P_2 são as diretrizes da superfície. Mas o papel destas retas pode inverter-se, o que significa que o paraboloide hiperbólico tem outra orientação de plano diretor β . Isto quer dizer que a superfície pode ser formada de dois modos distintos, ora através de geratrizes g paralelas ao plano diretor α , ora através de geratrizes j paralelas ao plano diretor β . Isto é, o paraboloide hiperbólico é uma superfície duplamente regrada.

Decorre da definição do paraboloide hiperbólico, a partir do quadrilátero enviesado, que a divisão provocada, numa geratriz, por exemplo P_0P_1 , pelos planos diretores com orientação β , é proporcional à divisão provocada noutra geratriz do mesmo sistema, por exemplo P_3P_2 . E o mesmo se passa em relação às geratrizes do outro sistema. Daí que, uma forma prática de representar o paraboloide hiperbólico seja através de uma rede de geratrizes, de ambos os sistemas, conduzidas por pontos resultantes da divisão dos lados opostos do quadrilátero enviesado em igual número de partes. Qualquer geratriz g intersesta qualquer geratriz j num ponto P , como se demonstrará de seguida.

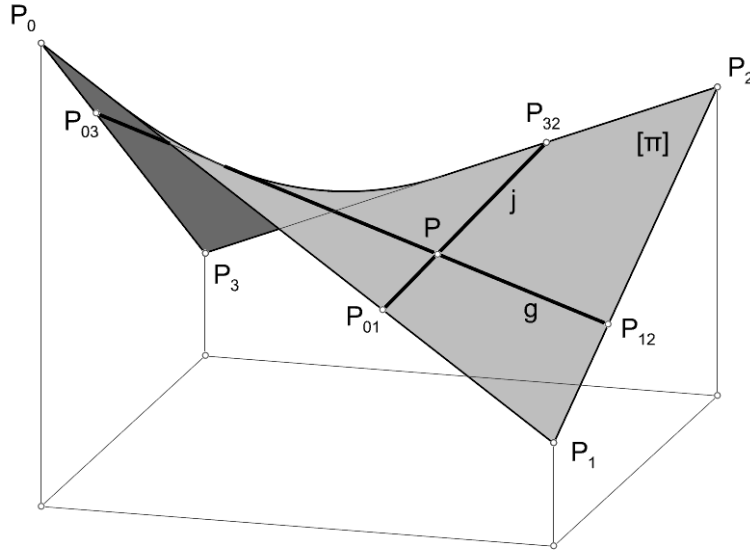


Fig. 2.53. Parabolóide hiperbólico definido por um quadrilátero enviesado $[P_0, P_1, P_2, P_3]$.

Consideremos os pontos P_{01} e P_{32} determinados por interpolação linear entre os pares de pontos P_0 e P_1 , e P_3 e P_2 , respectivamente, através de um parâmetro t entre 0 e 1.

Seja $P_{01} = P_0 + t(P_1 - P_0)$, e $P_{32} = P_3 + t(P_2 - P_3)$. E agora consideremos a determinação do ponto P por interpolação linear entre os pontos P_{01} e P_{32} , através de um parâmetro t' entre 0 e 1. Seja $P = P_{01} + t'(P_{32} - P_{01})$.

Agora, consideremos os pontos P_{03} e P_{12} determinados por interpolação linear entre os pares de pontos P_0 e P_3 , e P_1 e P_2 , respectivamente, através de um parâmetro t' entre 0 e 1.

Seja $P_{03} = P_0 + t'(P_3 - P_0)$, e $P_{12} = P_1 + t'(P_2 - P_1)$. E agora consideremos a determinação do ponto P por interpolação linear entre os pontos P_{03} e P_{12} , através de um parâmetro t entre 0 e 1. Seja $P = P_{03} + t(P_{12} - P_{03})$.

Desenvolvendo as expressões $P = P_{01} + t'(P_{32} - P_{01})$ e $P = P_{03} + t(P_{12} - P_{03})$ obtém-se o mesmo resultado: $P = P_0(1 - t - t' + tt') + P_1(t - tt') + P_2(tt') + P_3(t' - tt')$. O que demonstra o que se pretendia.

O parabolóide hiperbólico é uma superfície de curvatura gaussiana negativa em todos os seus pontos.

O plano θ tangente ao parabolóide hiperbólico $[\pi]$, no ponto P , fica definido pelas geratrizes g e j , de sistemas contrários, que se intersectam em P (figura 2.54).

Afirmar que o parabolóide hiperbólico tem duas orientações de planos diretores significa dizer que tem duas geratrizes impróprias, uma de cada sistema. E as duas geratrizes impróprias têm um ponto impróprio I_∞ em comum, o que é outra maneira de dizer que as duas orientações de planos diretores α e β têm uma direção i em comum. Planos cuja orientação contenha a direção i , e não sejam paralelos aos planos diretores, intersectam o parabolóide hiperbólico segundo parábolas com eixo de direção i . Planos paralelos a planos tangentes em pontos próprios P , intersectam o parabolóide hiperbólico segundo hipérboles. Conduzindo pelo ponto P uma reta com a direção i e intersectando-a com o plano secante, obtém-se um ponto O ,

centro da hipérbole. As assíntotas passam pelo ponto O e são paralelas às geratrizes do parabolóide hiperbólico contidas no plano tangente.

O plano δ , ortogonal à direção i , tangente ao parabolóide hiperbólico passa por duas geratrizes que se intersectam num ponto C , o ponto de tangência. O ponto C é o **ponto central** da superfície do parabolóide hiperbólico. Os planos bissetores dos planos diretores, que passam pelo ponto C , são planos de simetria por reflexão do parabolóide hiperbólico.

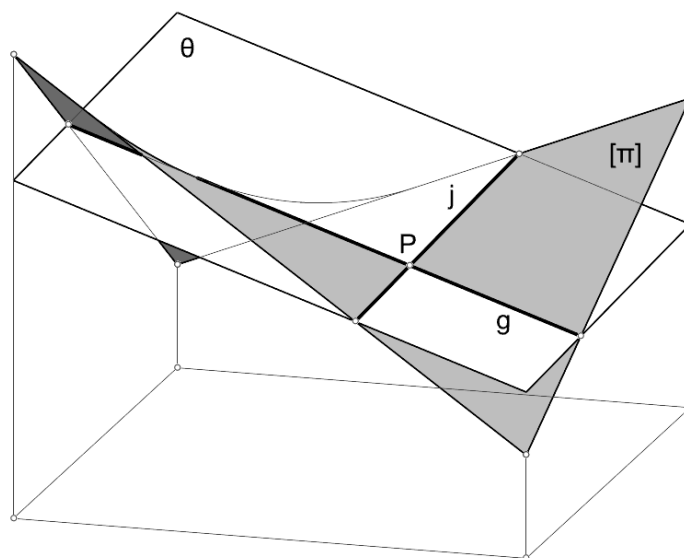


Fig. 2.54. Plano tangente ao parabolóide hiperbólico num ponto P .

Voltaremos a referir-nos ao parabolóide hiperbólico adiante quando falarmos da classe de superfícies translacionais.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de parabolóides hiperbólicos através dos dois sistemas de geratrizes retas a partir de quadriláteros enviesados. Para cada parabolóide hiperbólico, determine o seu ponto central.

Hiperboloide regado

O hiperboloide regado, ou hiperboloide empenado escaleno, é a superfície $[\pi]$ que fica definida dadas três diretrizes retas, a , b , e c , enviesadas entre si, com direções não contidas na mesma orientação (se as direções estivessem contidas na mesma orientação, a superfície gerada seria um parabolóide hiperbólico). Para definir geratrizes g da superfície, fixa-se uma das retas, por exemplo b , como aresta de um feixe de planos. Cada plano do feixe intersecta as retas a e c em pontos A e C , respetivamente, que definem a geratriz g . Obviamente, a geratriz g intersecta a diretriz b num ponto P . Note-se que, passando por P a reta b e a reta g , estas definem o plano θ tangente à superfície $[\pi]$ no ponto P .

O hiperboloide empenado escaleno é uma superfície de curvatura gaussiana negativa em todos os seus pontos.

Na figura 2.55 representa-se a porção de um hiperboloide empenado escaleno delimitada por um quadrilátero enviesado $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ e ilustra-se a determinação de uma geratriz g . As

retas **a** e **c** contêm dois lados opostos do quadrilátero enviesado. A reta **b** é qualquer reta que se apoie nas retas, **r** e **s**, que contêm os outros dois lados. A geração da superfície também pode ser feita de modo idêntico a partir de três diretrizes do outro sistema, por exemplo as retas **r**, **g** e **s**. Ou seja, o hiperboloide empenado escaleno é também uma superfície duplamente regrada. Desta construção decorre que a divisão provocada pelo feixe de planos numa das diretrizes, por exemplo **c**, não é proporcional à divisão obtida nas outras, por exemplo em **b** ou em **a**. Porém, as razões cruzadas que se podem obter entre quaisquer quatro pontos de uma das diretrizes, são exatamente as mesmas que se podem obter para os pontos homólogos das outras do mesmo sistema. Isto significa que o hiperboloide empenado escaleno pode ser obtido a partir do paraboloide hiperbólico por uma transformação projetiva. Nesta transformação, as retas impróprias do paraboloide hiperbólico são transformadas em retas próprias e uma das secções cónicas não degeneradas (que não se reduz a linhas retas) é transformada numa secção cónica contida no plano impróprio. Isto é, o hiperboloide empenado escaleno é uma superfície de cone diretor.

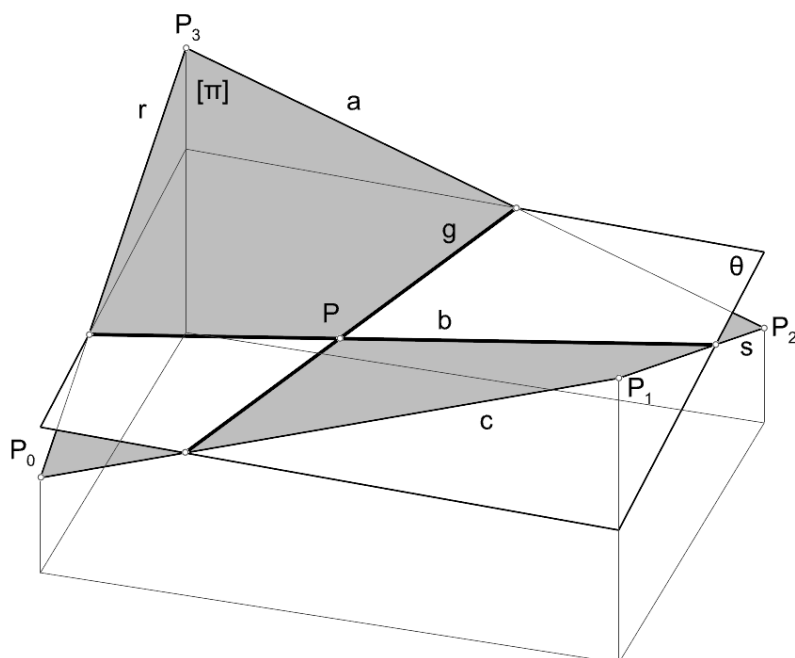


Fig. 2.55. Hiperboloide empenado escaleno delimitado por um quadrilátero enviesado $[P_0, P_1, P_2, P_3]$.

Daqui resulta que, se conduzirmos, por um ponto **V** qualquer, retas paralelas às geratrizes do hiperboloide empenado escaleno, obtemos, duplamente, uma superfície cónica de vértice **V**, ou seja, um cone diretor. Se o ponto **V** coincidir com o centro **O** do hiperboloide empenado escaleno, o cone diretor recebe a designação de **cone assíntotico**. As interseções planas produzidas no hiperboloide empenado escaleno são semelhantes às que se podem produzir num cone diretor por planos com a mesma orientação do plano secante. Estas propriedades ficarão mais claras adiante quando nos voltarmos a referir a esta superfície a propósito da classe das superfícies de revolução.

O centro **O** do hiperboloide empenado escaleno $[\pi]$ é o ponto médio de qualquer segmento de reta que una os dois pontos de tangência, **T** e **T'**, de dois planos θ e θ' paralelos entre si e tangentes à sua superfície. Para determinar o ponto **O** a partir das retas **a**, **b**, e **c** dadas, e considerando o feixe de planos passante pela reta **b**, procede-se do seguinte modo.

Conduz-se o plano, do feixe, paralelo à diretriz a . Este plano intersesta a diretriz c num ponto T . Pelo ponto T passa uma geratriz $a' \parallel a$ contida na superfície $[\pi]$. O plano $a'c$ é tangente à superfície $[\pi]$ no ponto T . De seguida, conduz-se o plano, do feixe, paralelo à diretriz c . Este plano intersesta a diretriz a num ponto T' . Pelo ponto T' passa uma geratriz $c' \parallel c$ contida na superfície $[\pi]$. O plano ac' é tangente à superfície $[\pi]$ no ponto T' . Como os dois planos são ambos tangentes a $[\pi]$ e paralelos entre si, o ponto O é o ponto médio do segmento $[TT']$ (figura 2.56).

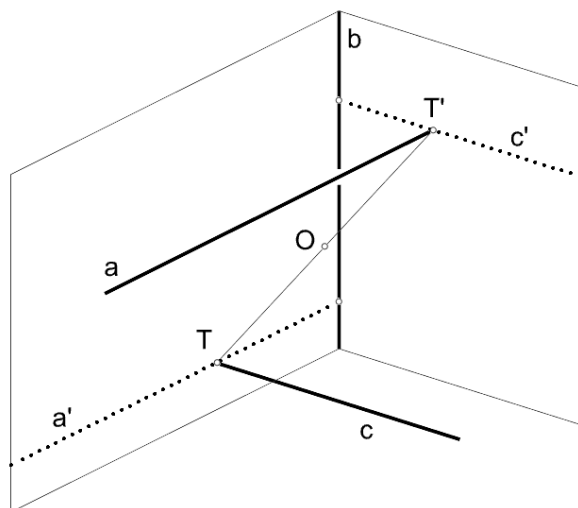


Fig. 2.56. Determinação do centro O do hiperboloide empenado escaleno definido pelas retas a , b , e c .

Determinado o centro O , é ainda possível determinar os eixos da superfície, que são os mesmos do cone assintótico. Definido o cone assintótico, e uma das suas diretrizes $[d]$ contida num plano α , os seus três eixos, perpendiculares entre, si podem determinar-se de acordo com um procedimento descrito por Chasles (1837, p.82). Conduz-se um plano β passante pelo eixo principal da diretriz $[d]$ e perpendicular ao plano α . No plano β constrói-se a linha cónica $[c]$ cujos vértices e focos são, respetivamente, os focos e vértices da diretriz $[d]$. A superfície cónica de vértice O e diretriz $[c]$ intersesta o plano α segundo outra linha cónica $[i]$. As linhas $[d]$ e $[i]$ intersestam-se em quatro pontos que formam um quadrilátero. O ponto de interseção das diagonais do quadrilátero, e os pontos de interseção resultantes dos prolongamentos dos lados opostos, pertencem aos três eixos da superfície do cone assintótico que são também os eixos do hiperboloide empenado escaleno.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação do hiperboloide regado através dos dois sistemas de geratrizes retas a partir de um quadrilátero enviesado. Note que o mesmo quadrilátero enviesado pode dar origem a hiperboloides diversos. Para cada um deles, determine o seu centro.

Superfície de conoide

Uma superfície de conoide $[\gamma]$ fica definida por uma reta a , uma curva $[m]$ (ou superfície núcleo) e uma orientação α de planos diretores (o que equivale a dizer que tem uma diretriz reta imprópria). O plano diretor ao deslocar-se no espaço, conservando a orientação, intersesta sucessivamente a reta a e a curva $[m]$ em pontos A e M que definem geratrizes g (figura 2.57).

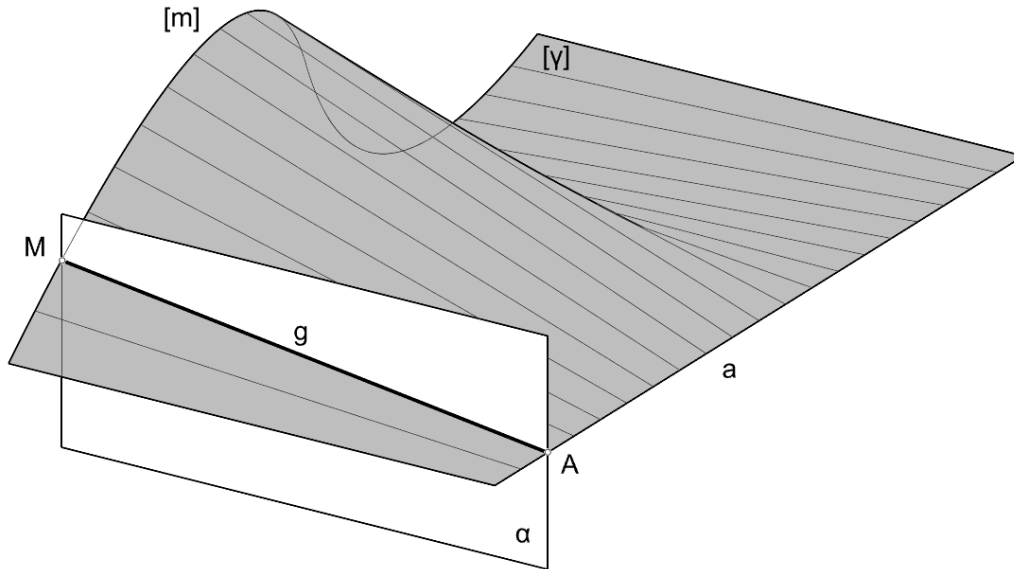


Fig. 2.57. Superfície de conoide definida por uma reta a , uma curva $[m]$ e uma orientação α de planos diretores.

Se a orientação do plano diretor for ortogonal à direção da diretriz reta, a superfície gerada é um **conoide reto**.

Os helicoides de plano diretor são um tipo de superfície de conoide, e são muito comuns em arquitetura. Um helicóide tem sempre uma hélice, em geral cilíndrica, como diretriz. A hélice cilíndrica é uma curva geodésica contida numa superfície cilíndrica de revolução. Quando a superfície cilíndrica é planificada a hélice transforma-se numa linha reta. Os parâmetros de uma hélice são o raio (da superfície cilíndrica que a contém) e o passo (distância entre dois pontos consecutivos da hélice pertencentes à mesma geratriz da superfície cilíndrica). Pode ainda ser ascendente no sentido direto (anti-horário) ou no sentido anti-horário. Na figura 2.58.a está representado um helicóide reto e na figura 2.58.b está representado um helicóide de núcleo cilíndrico.

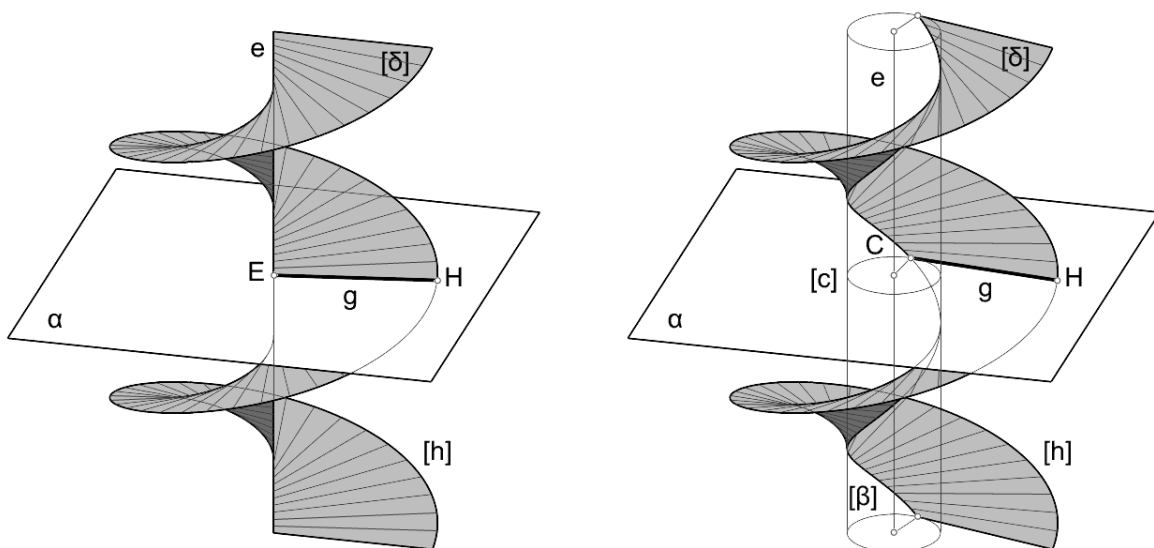


Fig. 2.58. Helicoides de plano diretor: a) helicóide reto, b) helicóide de núcleo cilíndrico.

O helicóide reto $[\delta]$ é definido por uma diretriz reta e (eixo da superfície), uma hélice cilíndrica $[h]$ de eixo e , e uma orientação α de planos diretores perpendiculares ao eixo e . À medida que o plano diretor se desloca no espaço, conservando a sua orientação, vai intersecando as diretrizes e e $[h]$ em pontos E e H , respetivamente, que definem as geratrizes g . Na figura apenas está representada a porção de superfície compreendida entre as duas diretrizes.

O helicóide de núcleo cilíndrico $[\delta]$ é definido por um núcleo cilíndrico de revolução $[\beta]$ de eixo e , uma hélice cilíndrica $[h]$ de eixo e , e uma orientação α de planos diretores perpendiculares ao eixo e . À medida que o plano diretor se desloca no espaço, conservando a sua orientação, vai intersecando a diretriz $[h]$ em pontos H , e o núcleo segundo circunferências $[c]$. A geratriz g fica definida, em cada caso, como uma das tangentes à circunferência $[c]$, passante pelo ponto H . Na figura apenas está representada a porção de superfície compreendida entre a hélice o núcleo.

Superfícies cilíndricas de eixo e intersecam os helicóides segundo hélices. Claro que no caso ilustrado na figura 2.58.b, o raio deve ser superior ao da superfície $[\beta]$.

Outras superfícies de conóide comuns são as de diretriz circunferencial e as de núcleo esférico. Na figura 2.59, os planos das diretrizes circunferenciais são paralelos às diretrizes retas e perpendiculares aos planos diretores. No caso do conóide de núcleo esférico, as geratrizes retas da superfície são tangentes à superfície esférica.

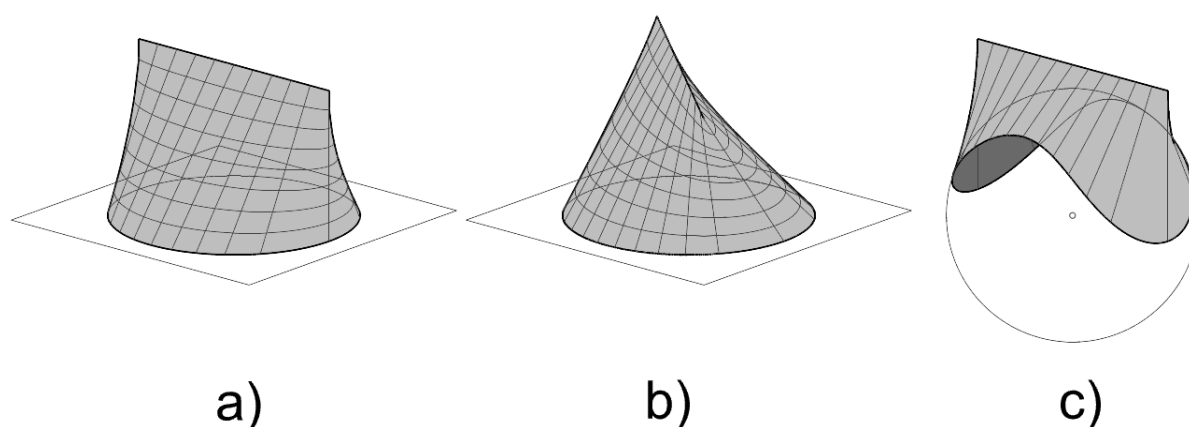


Fig. 2.59. Superfícies de conóide: a) conóide reto de diretriz circunferencial, b) conóide de diretriz circunferencial, c) conóide reto de núcleo esférico.

Nos casos das figura 2.59.a e 2.59.b, os planos paralelos à diretriz circunferencial intersecam o conóide segundo elipses. Em todos os casos, apenas se representou a porção de superfície entre as diretrizes.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de vários tipos de superfícies de conóide.

Superfície de cilindroide

Uma superfície de cilindroide $[\gamma]$ fica definida por duas curvas $[m]$ e $[n]$ (ou superfícies núcleo) e uma orientação de plano diretor α (o que equivale a dizer que tem uma diretriz reta imprópria). O plano diretor ao deslocar-se no espaço, conservando a orientação, interseca

sucessivamente as curvas $[m]$ e $[n]$ em pontos M e N que definem geratrizes g (figura 2.60). Na figura apenas se representou a porção de superfície compreendida entre as duas diretrizes.

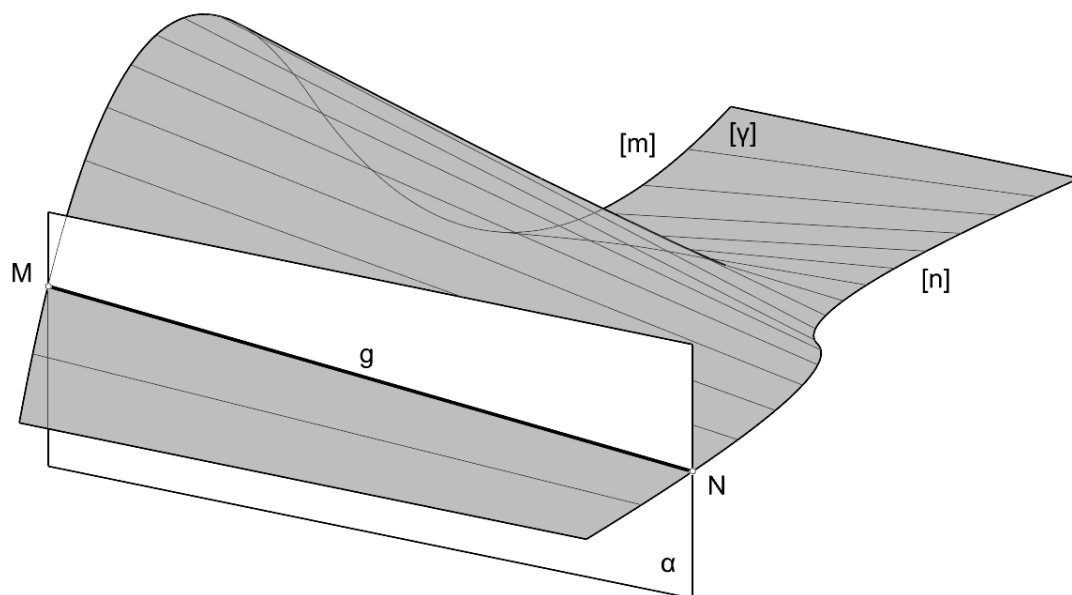


Fig. 2.60. Superfície de cilindroide definida por duas curvas $[m]$ e $[n]$ e uma orientação α de planos diretores.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de vários tipos de superfícies de cilindroide.

Tetraedroide

O tetraedroide $[\delta]$ é uma superfície que fica definida por duas diretrizes retas a e b , enviesadas entre si, e um cone diretor $[\pi]$ de revolução. Na figura 2.61, as duas retas a e b são ortogonais entre si e a direção do eixo e do cone diretor é simultaneamente ortogonal às direções das duas retas que definem a orientação α .

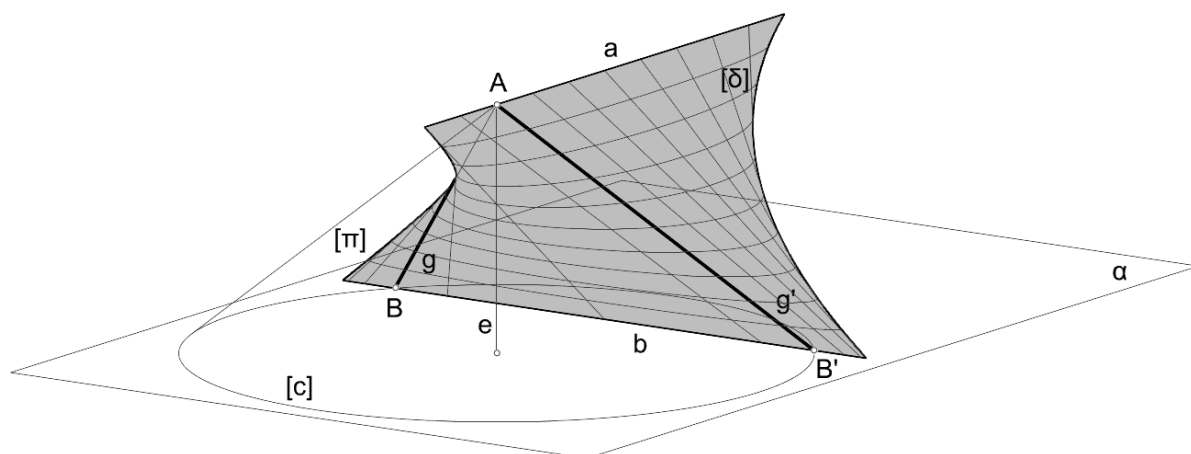


Fig. 2.61. Tetraedroide definido por duas retas a e b ortogonais entre si e um cone diretor $[\pi]$ de revolução.

Para definir geratrizes da superfície, tomam-se os pontos de uma das diretrizes retas como vértices de superfícies cónicas que se intersejam com a outra geratriz reta. No exemplo dado ilustra-se a determinação de um par de geratrizes g e g' . Toma-se um ponto A da diretriz a

como vértice de um cone diretor $[\pi]$. A superfície do cone diretor intersesta o plano α segundo a circunferência $[c]$. A circunferência $[c]$ intersesta a diretriz b em dois pontos B e B' que, com o ponto A , definem as geratrizes g e g' da superfície $[\delta]$. Apenas se representou a porção de superfície compreendida entre as diretrizes a e b . Esta superfície em particular goza da propriedade de que planos com a orientação α a intersestam segundo elipses. Quando esses planos passam pelas retas a e b as elipses degeneram em segmentos de reta.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de vários tipos de tetraedroides, considerando também casos em que o eixo do cone diretor não é ortogonal à orientação definida pelas direções das diretrizes, e casos em que as diretrizes não são ortogonais entre si.

Superfície de arco enviesado

Superfície de arco enviesado é uma designação genérica para designar um tipo de superfície empenada que fica definida por duas retas e uma curva (ou superfície núcleo), ou por uma reta e duas curvas (uma ou as duas curvas podem ser substituídas por superfícies núcleo). No exemplo da figura 2.62 consideramos uma superfície $[\beta]$ definida por uma reta a e duas curvas $[m]$ e $[n]$.

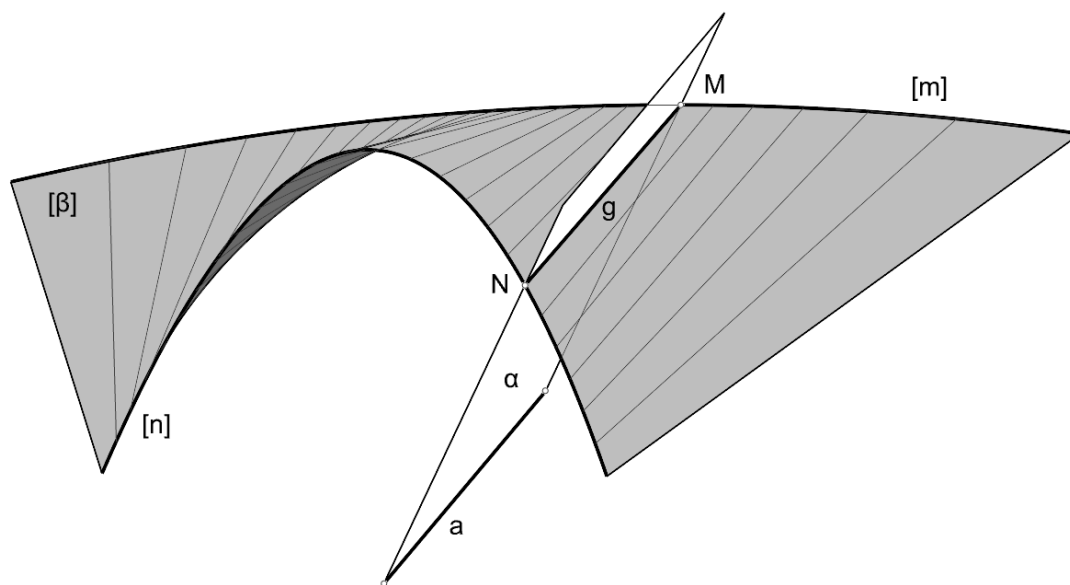


Fig. 2.62. Superfície de arco enviesado definida por uma reta a e duas curvas $[m]$ e $[n]$.

Para determinar geratrizes da superfície utiliza-se um feixe de planos passantes pela reta a . Cada plano α do feixe intersesta as curvas $[m]$ e $[n]$ em pontos M e N , respetivamente. Os pontos M e N definem a geratriz g . Note-se que todas as geratrizes também intersestam a reta a . No entanto, na figura, apenas está representada a porção de superfície compreendida entre as duas diretrizes $[m]$ e $[n]$. Esta é uma superfície de cone diretor.

Note-se que há algumas parecenças entre este tipo de superfície e as superfícies de conoide e de cilindroide. Com efeito, se a reta a for imprópria, a superfície degenera numa superfície de cilindroide ou de conoide.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de vários tipos de superfícies de arco enviesado.

Plano tangente a uma superfície empenada simplesmente regrada

Enquanto que numa superfície planificável o plano tangente é único ao longo de uma geratriz reta, no caso das superfícies empenadas em cada ponto T de uma geratriz reta g o plano tangente θ é distinto. Porém, todos os planos tangentes contêm a geratriz, isto é, definem um feixe de planos de que a geratriz é a aresta. No caso das superfícies duplamente regradas, o feixe de planos é definido pela geratriz g e por todas as geratrizes j do sistema contrário.

No caso das superfícies simplesmente regradas, temos uma situação distinta. Se considerarmos uma curva $[m]$ passante pelo ponto T , e a respetiva reta j tangente à curva $[m]$ em T , o plano tangente θ fica definido pelas retas g e j . Considere-se o caso geral de uma superfície empenada $[\delta]$ definida por três diretrizes curvas $[a]$, $[b]$ e $[c]$. Considere-se a geratriz g da superfície que intersesta as diretrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$ nos pontos A , B e C , respetivamente. Sejam as retas t_A , t_B e t_C as retas tangentes às curvas $[a]$, $[b]$ e $[c]$ nos pontos A , B e C , respetivamente. Os planos $\theta_A \equiv gt_A$, $\theta_B \equiv gt_B$ e $\theta_C \equiv gt_C$ são os planos tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respetivamente.

Considere-se ainda um ponto T pertencente à geratriz g e distinto dos pontos A , B e C (figura 2.63).

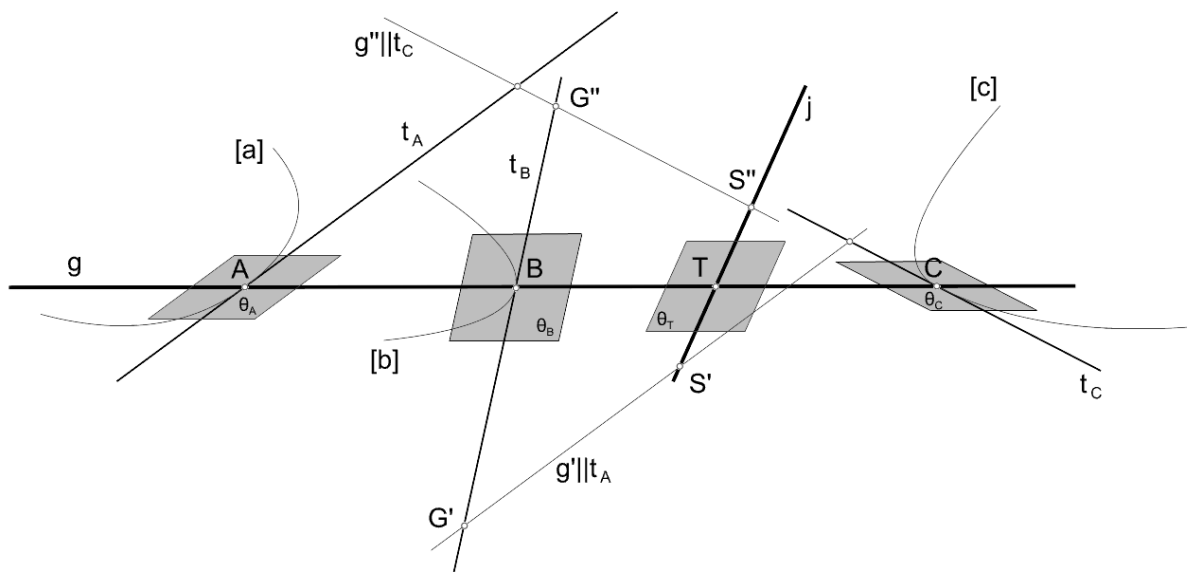


Fig. 2.63. Plano tangente a uma superfície empenada $[\delta]$, definida por três curvas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, passante por um ponto T pertencente à superfície.

Para determinar o plano θ_T tangente à superfície no ponto T , procede-se do seguinte modo. Como as retas t_A , t_B e t_C se confundem com as linhas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respetivamente, na vizinhança dos pontos de tangência, então a superfície $[\delta]$ confunde-se com o hiperboloide empenado escaleno $[\gamma]$ definido pelas três tangentes. As superfícies $[\delta]$ e $[\gamma]$ são concordantes (tangentes) ao longo da geratriz g . Determinar o plano tangente à superfície $[\delta]$ em T equivale a determinar o plano tangente à superfície $[\gamma]$ em T , o que implica a determinar a outra geratriz j da superfície $[\gamma]$ que intersesta a geratriz g no ponto T .

Pela reta t_C conduz-se um plano qualquer que intersectará as retas t_A e t_B em pontos J' e G' , respetivamente, que definem uma reta g' . Se o plano passante pela reta t_C for paralelo à reta t_A , a reta g' é paralela à reta t_A e o ponto J' é impróprio.

Pela reta t_A conduz-se um plano qualquer que intersectará as retas t_C e t_B em pontos J'' e G'' , respetivamente, que definem uma reta g'' . Se o plano passante pela reta t_A for paralelo à reta t_C , a reta g'' é paralela à reta t_C e o ponto J'' é impróprio.

Pela reta g' e pelo ponto T conduz-se o plano θ_T tangente às duas superfícies ($[\delta]$ e $[\gamma]$) no ponto T . Este plano intersecta a reta g'' no ponto S'' . Os pontos S'' e T definem a geratriz j , da superfície $[\gamma]$, concorrente com a geratriz g em T . A geratriz j intersecta a reta g' no ponto S' .

Note-se que é sempre possível fazer concordar um paraboloide hiperbólico com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g . Por exemplo, se intersectarmos o plano θ_C com um plano ω , paralelo às retas t_A e t_B , determinamos uma reta t'_C passante pelo ponto C . Neste caso, a superfície $[\gamma]$ concordante com a superfície $[\delta]$ fica definida pelas retas t_A , t_B e t'_C , todas paralelas ao plano ω e, por isso, é um paraboloide hiperbólico.

Se a curva $[c]$ for substituída por uma reta t_C imprópria, então a superfície $[\delta]$ é de plano diretor e também o é a superfície $[\gamma]$, isto é, a superfície $[\gamma]$ é um paraboloide hiperbólico.

Nestes dois casos, a determinação do plano θ_T tangente à superfície no ponto T é mais simples e deixa-se como exercício para o leitor.

Atividade proposta:

Para cada um dos tipos de superfícies empenadas definidos, conduza um plano tangente por um ponto pertencente à superfície.

Superfícies de revolução

Tradicionalmente, uma superfície de revolução é caracterizada por um perfil, plano ou não, que roda em torno de um eixo retilíneo. Isto é o que se pode designar por **revolução circular**. Porém vamos considerar outro tipo de superfícies que também vamos designar de revolução embora não sejam de revolução circular. Estas superfícies pedem emprestada a designação revolução porque, de algum modo está subjacente uma ideia de rotação.

Revolução circular

Uma superfície de revolução circular $[\alpha]$ é a que fica definida pela rotação de uma curva $[c]$ em torno de uma reta e que recebe a designação de eixo (figura 2.64.a). Todos os pontos da curva $[c]$ descrevem circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo. Estas, recebem a designação de **paralelos**. Planos passantes pelo eixo intersectam a superfície segundo curvas designadas **meridianos**. Os meridianos e os paralelos formam uma rede de linhas ortogonais na superfície. Se a superfície admitir planos tangentes perpendiculares ao eixo, pode acontecer uma de duas situações: i) os planos são tangentes em pontos que se designam **polos** (P e P' na figura) ou, ii) os planos são tangentes ao longo de paralelos que se designam **círculos polares** ($[p]$ na figura). Se um paralelo é o menor na sua vizinhança, e há paralelos para os dois lados do plano daquele, então o paralelo designa-se por **círculo de gola** ($[g]$ na figura). Se um paralelo é o maior na sua vizinhança, e há paralelos para os dois lados do plano daquele, então o paralelo designa-se por **equador** ($[e]$ e $[e']$ na figura).

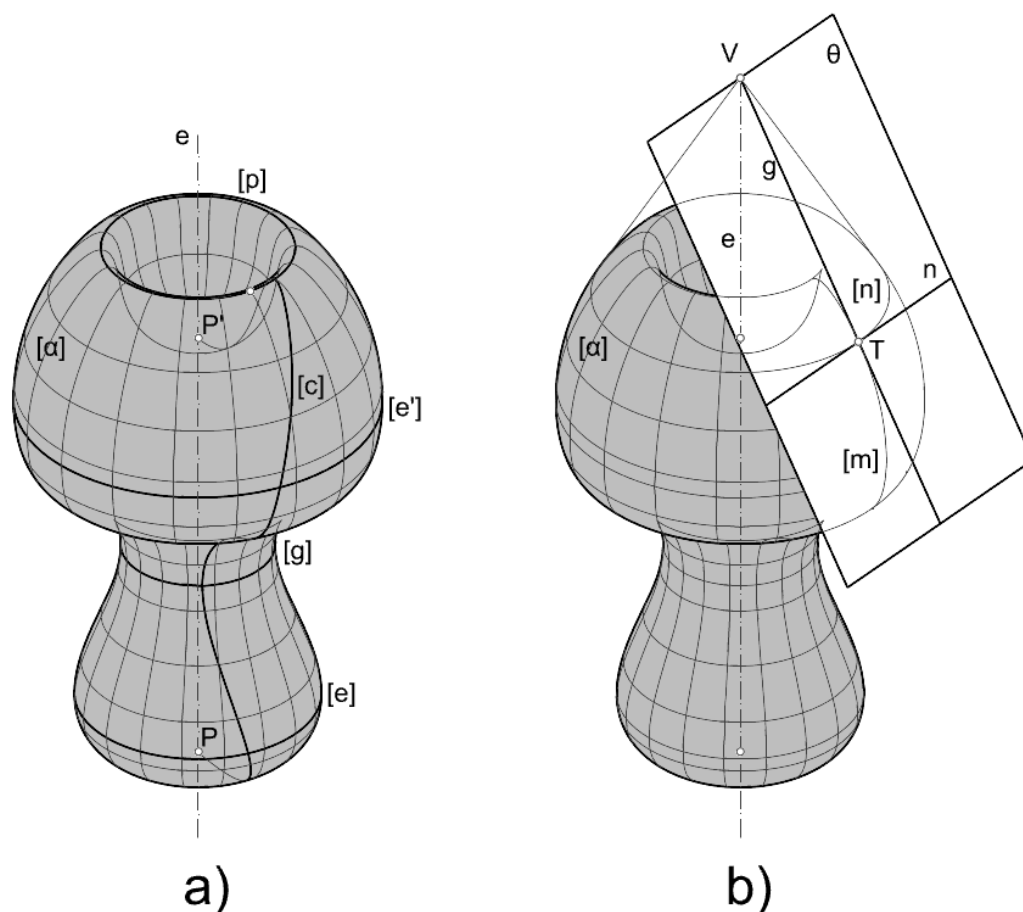


Fig. 2.64. Superfície de revolução definida pela curva $[c]$ e pelo eixo e : a) elementos notáveis, b) plano tangente conduzido por um ponto T da superfície.

O plano θ tangente à superfície $[\alpha]$, num ponto T , fica definido pelas retas n e g tangentes ao paralelo $[n]$ e ao meridiano $[m]$ passantes pelo ponto, respetivamente. Note-se que a reta g intersesta o eixo e num ponto V . O ponto V é o vértice de uma superfície cónica de revolução de eixo e concordante com a superfície de revolução $[\alpha]$ (figura 2.64.b). Ao longo de um paralelo é sempre possível fazer concordar outra superfície de revolução com a superfície $[\alpha]$ desde que partilhem a mesma superfície cónica concordante ao longo do paralelo.

Na PARTE I já nos referimos às superfícies cónicas e cilíndricas de revolução e à superfície esférica. Para além destas, há algumas superfícies de revolução circular notáveis que vamos passar a descrever de seguida.

Superfície tórica

Uma superfície tórica $[\epsilon]$ fica definida pela rotação de uma circunferência $[c]$ em torno de um eixo e coplanar que, em geral, não a intersesta. Também pode ser entendida como a superfície envolvente de uma família de esferas de raio constante com os centros pertencentes a uma circunferência $[d]$ (figura 2.65). As superfícies esféricas são concordantes com a superfície tórica. A superfície tórica tem um equador $[e]$ e um círculo de gola $[g]$ coplanares, e dois círculos polares $[p]$ e $[p']$ (na figura apenas o primeiro é visível). Os centros dos meridianos pertencem à circunferência $[d]$. A circunferência $[d]$ tem raio igual ao raio dos círculos polares.

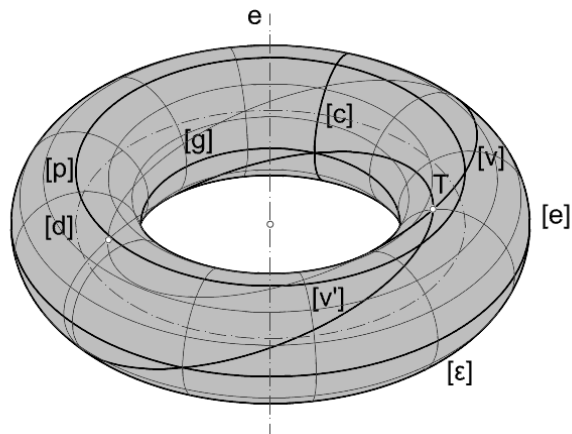


Fig. 2.65. Superfície tórica: a) definição, b) plano bitangente e respectivas circunferências.

Cada uma destas superfícies esféricas é concordante com a superfície tórica ao longo de um meridiano. Para além dos paralelos e dos meridianos, as superfícies tóricas, cujo eixo não as intersesta, admitem ainda duas famílias de circunferências definidas pelos planos bitangentes, isto é, tangentes à superfície simultaneamente em dois pontos T e T' (na figura apenas o primeiro é visível). Cada plano bitangente intersesta a superfície tórica segundo duas circunferências $[v]$ e $[v']$.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação da superfície tórica. Estude ainda as orientações de planos que intersestam a superfície segundo circunferências.

Esferoide ou elipsoide de revolução

Um esferoide $[\epsilon]$, ou elipsoide de revolução, é a superfície gerada pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos. Se a rotação for em torno do eixo maior, a superfície diz-se **esferoide alongado** (figura 2.66.a); se a rotação for em torno do eixo menor, a superfície diz-se **esferoide achatado** (figura 2.66.b). À semelhança da superfície esférica, um esferoide tem dois polos (na figura apenas está notado um polo) e um equador. Os meridianos de um esferoide são elipses.

O esferoide alongado tem dois focos. No caso do esferoide achatado, os focos da elipse geradora definem uma circunferência contida no plano do equador.

Um esferoide também pode ser obtido a partir de uma superfície esférica através de uma afinidade com plano fixo passante por uma circunferência máxima e direção ortogonal à orientação desse plano.

As interseções planas do esferoide são circunferências ou elipses.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de esferoides alongados e achatados. Para cada caso estabeleça uma afinidade que transforme o esferoide numa esfera.

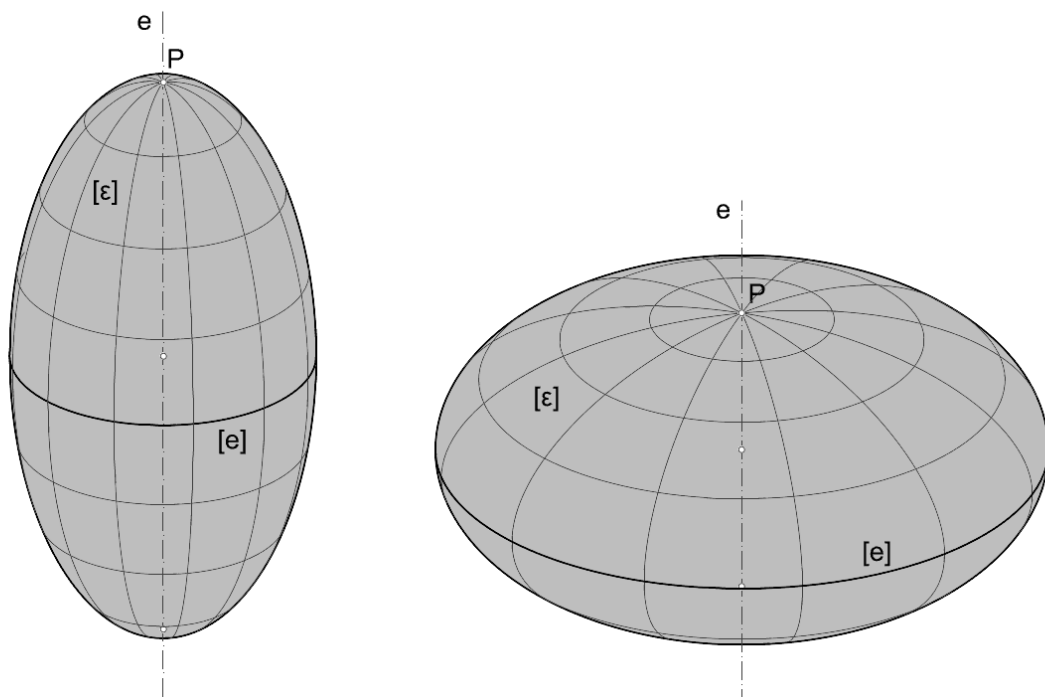


Fig. 2.66. Esferoide: a) alongado, b) achatado.

Paraboloide de revolução

Um paraboloide de revolução $[\pi]$ é a superfície gerada pela rotação de uma parábola em torno do seu eixo e (figura 2.67). O paraboloide de revolução tem um polo P e não tem equador nem círculo de gola. Os meridianos do paraboloide de revolução são parábolas. A superfície tem um foco F que coincide com o foco da parábola geradora.

As interseções planas do paraboloide de revolução são circunferências, elipses ou parábolas.

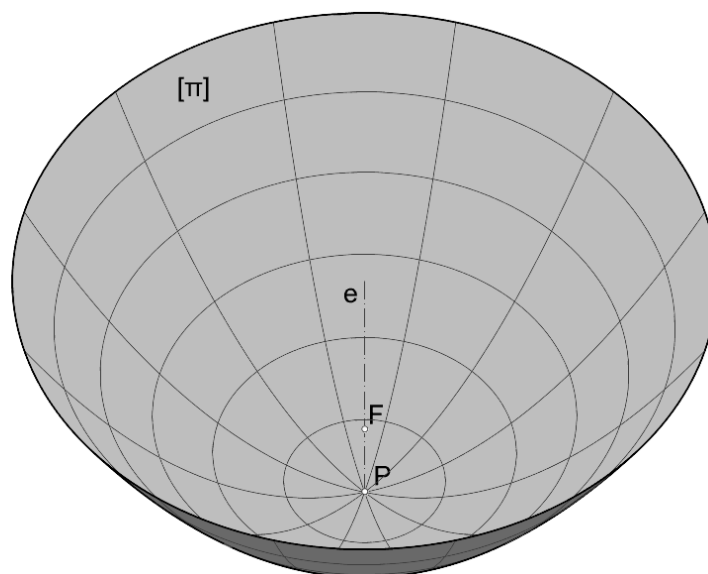


Fig. 2.67. Paraboloide de revolução.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação do parabolóide de revolução. Estude as orientações de planos que produzem interseções circunferenciais, elípticas e parabólicas.

Hiperboloide de revolução de duas folhas

Um hiperboloide de revolução $[\alpha]$ de duas folhas fica definido pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transversal e (eixo que passa pelos vértices e pelos focos da hipérbole). Os vértices da hipérbole correspondem aos polos P e P' do hiperboloide. Os focos F e F' da hipérbole são também os focos do hiperboloide. Na figura 2.68, para facilitar a visualização da superfície, apenas se representa metade da mesma (por relação a um plano meridional, uma vez que a superfície também está limitada por dois planos perpendiculares ao eixo).

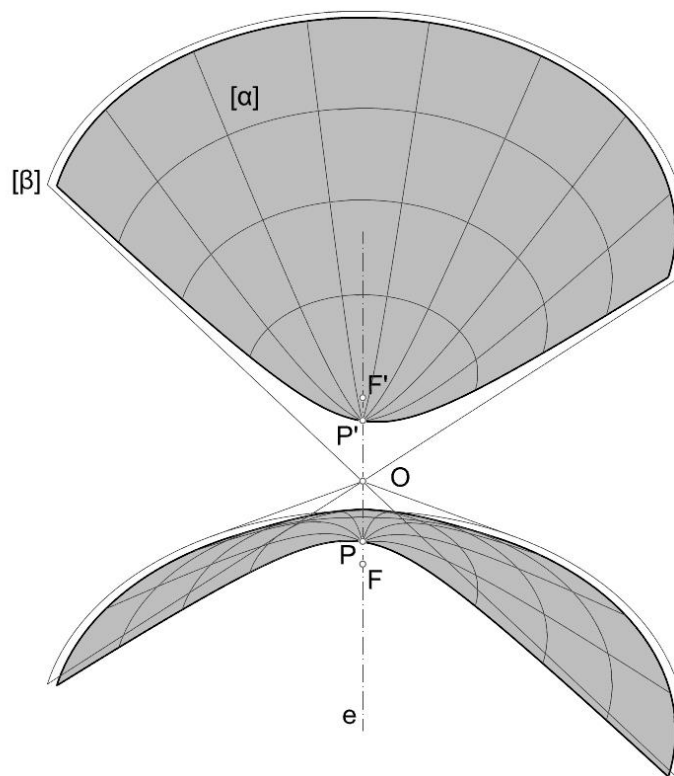


Fig. 2.68. Hiperboloide de revolução de duas folhas.

Os meridianos do hiperboloide são hipérboles. As assíntotas da hipérbole geradora definem, por revolução, uma superfície cônica $[\beta]$, designada por cone assintótico. O cone assintótico tem o mesmo centro O e o mesmo eixo e que o hiperboloide.

As interseções planas do hiperboloide de revolução de duas folhas, caso existam e não se reduzam a um ponto (caso do plano tangente), são circunferências, elipses, parábolas ou hipérboles. A interseção é circunferencial se o plano secante for perpendicular ao eixo; é parabólica se o plano secante for paralelo a uma geratriz do cone assintótico (a direção da geratriz é a do eixo da parábola); é hiperbólica se o plano secante for paralelo a duas geratrizes do cone assintótico (as assíntotas da hipérbole obtêm-se pela interseção do plano secante com os planos tangentes ao cone assintótico ao longo das geratrizes paralelas ao plano secante); e é elíptica nos restantes casos.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação do hiperboloide de revolução de uma folha. Estude as orientações de planos que produzem interseções circunferenciais, elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Hiperboloide de revolução de uma folha

Um hiperboloide de revolução $[\alpha]$ de uma folha fica definido pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo conjugado e (eixo perpendicular ao eixo transverso). Os vértices da hipérbole geradora, por rotação, vão dar origem ao círculo de gola $[g]$ da superfície. Os focos da hipérbole geradora, por rotação, vão dar origem a uma circunferência. Tal como no hiperboloide de revolução de duas folhas, as assíntotas da hipérbole geradora vão originar, por revolução, um cone assintótico $[\beta]$ (figura 2.69.a).

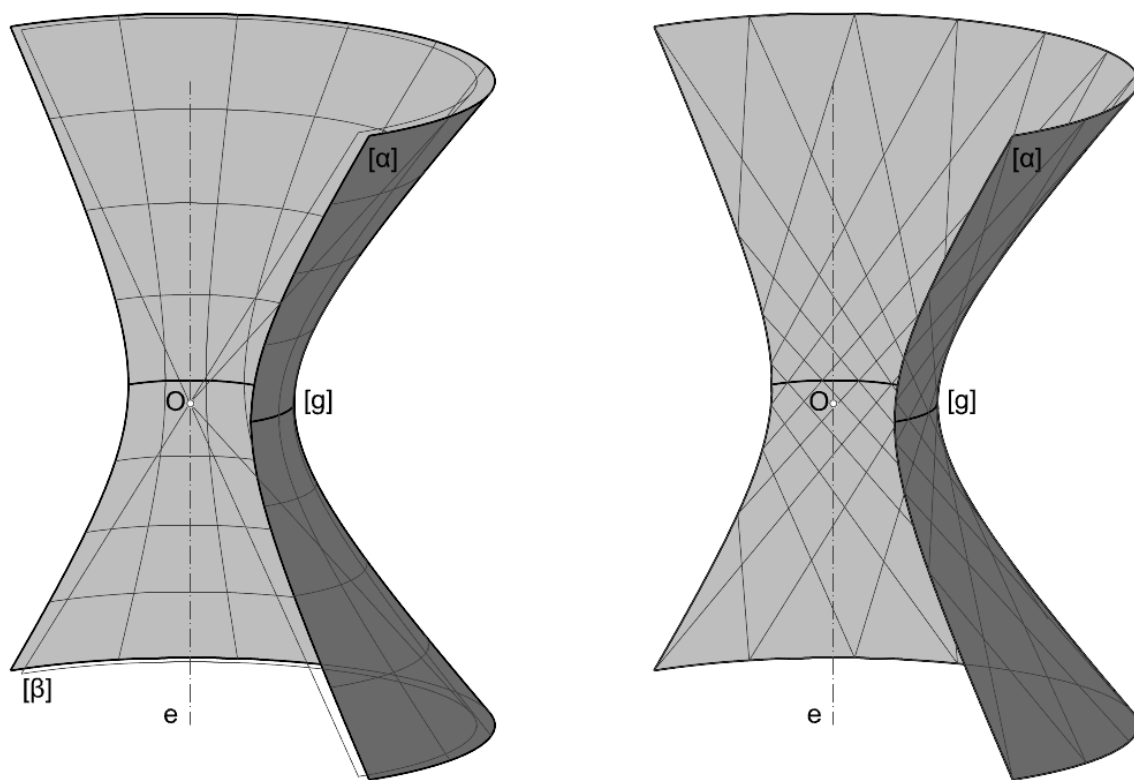


Fig. 2.69. Hiperboloide de revolução de uma folha: a) geração por revolução da hipérbole em torno do eixo conjugado, b) geração por revolução de uma reta enviesada relativamente ao eixo.

Curiosamente, esta superfície também pode ser gerada pela rotação de uma reta g enviesada em relação ao eixo e (figura 2.69.b). E nesse sentido, é um caso particular do hiperboloide empenado escaleno. Sendo uma superfície de revolução, qualquer plano passante pelo eixo é plano de simetria por reflexão. Daqui se compreende facilmente que a superfície admite dois sistemas de geratrizes retas, isto é, é duplamente regrada. Logo, um plano θ tangente à superfície, num ponto T , fica definido pelas duas geratrizes, uma de cada sistema, que se interseçam no ponto T . Por uma questão de clareza da representação, o cone assintótico apenas está representado na figura 2.69.a, e apenas se representa metade da mesma (por relação a um plano meridional, uma vez que a superfície também está limitada por dois planos perpendiculares ao eixo).

Qualquer plano intersesta a superfície de um hiperboloide de revolução de uma folha. Se a interseção não degenerar em duas retas (caso em que o plano é tangente à superfície, tendo como situação limite o caso em que o plano é tangente ao cone assintótico e a interseção produzida no hiperboloide degenera em duas retas paralelas entre si), é uma linha cónica. Será uma circunferência se o plano for perpendicular ao eixo; uma parábola se o plano for paralelo a uma geratriz do cone assintótico (a direção da geratriz é a do eixo da parábola); uma hipérbole se o plano for paralelo a duas geratrizes do cone assintótico (as assíntotas da hipérbole obtêm-se pela interseção do plano secante com os planos tangentes ao cone assintótico ao longo das geratrizes paralelas ao plano secante); e elipse nos restantes casos.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação do hiperboloide de revolução de duas folhas. Estude as orientações de planos que produzem interseções circunferenciais, elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Revolução elíptica

Considere-se uma superfície de revolução circular $[\pi]$ e um plano φ passante pelo eixo e de revolução. Considere-se uma afinidade cuja direção é ortogonal à orientação do plano φ . A superfície $[\pi']$, transformada da superfície $[\pi]$ por meio da afinidade referida, é uma superfície de **revolução elíptica**. Aos paralelos circunferenciais da superfície $[\pi]$, correspondem agora paralelos elípticos da superfície $[\pi']$. Numa superfície de revolução elíptica os meridianos já não são todos ortogonais aos paralelos. A partir de uma superfície de revolução circular é possível obter uma infinidade de superfícies de revolução elíptica. O eixo e de uma superfície de revolução elíptica passa pelos centros de todos os paralelos elípticos. Por transformação afim, nas condições descritas, obtêm-se o elipsoide a partir do esferoide, o paraboloides elíptico a partir do paraboloides de revolução, o hiperboloide elíptico de duas folhas a partir do hiperboloide de revolução de duas folhas, e o hiperboloide empenado escaleno a partir do hiperboloide de revolução de uma folha.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à obtenção de superfícies de revolução elíptica a partir de superfícies de revolução circular.

Pseudo revolução

Podemos considerar esta classe de superfícies de dois modos distintos.

No primeiro modo temos um “eixo de revolução” reto e , um perfil $[s]$ e uma curva $[r]$, contida plano perpendicular ao eixo e , concorrente com o perfil $[s]$ num ponto I . Considere-se ainda a projeção ortogonal, E , do ponto I no eixo e . À medida que a linha $[s]$ roda em torno no eixo e , todos os seus pontos P vão sendo afetados de uma transformação de escala de centro C , pertencente ao eixo e , e direção ortogonal ao eixo. O fator de escala é determinado pelo rácio $\frac{I_R'E}{I_RE}$, em que I_R corresponde a uma rotação do ponto I em torno no eixo e , e I_R' corresponde à interseção da semirreta $E I_R$ com a curva $[r]$ (figura 2.70). Deste modo, após uma dada rotação da linha $[s]$, a linha $[s]_R$ dá origem à linha $[s]_{R'}$. Se a linha $[s]$ for uma BSpline, a aplicação da escala aos pontos de controlo da linha $[s]_R$ dá origem aos pontos de controlo da linha $[s]_{R'}$. Considerando uma revolução completa obtém-se a superfície $[\pi]$.

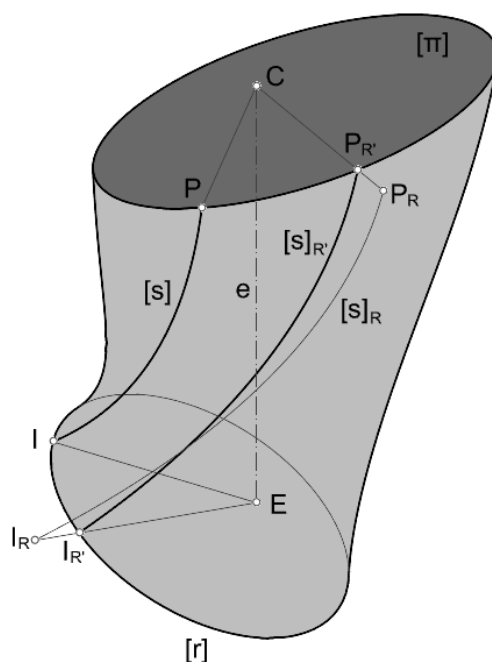


Fig. 2.70. Superfície de pseudo revolução $[\pi]$ gerada por um “eixo de revolução” e , um perfil $[s]$ e uma curva $[r]$.

A outra forma de considerarmos uma superfície que, na sua geração, remete para a ideia de revolução, é a seguinte. Seja dada uma curva $[e]$ que serve como “eixo de revolução” e uma curva perfil $[s]$. Seja P um ponto da curva $[s]$ e seja α o plano normal à curva $[e]$ passante pelo ponto P . O plano α intersesta a curva $[e]$ num ponto C , centro de uma circunferência $[c]$, de raio $\overline{PC}$, contida no plano α . A superfície de pseudo revolução $[\pi]$ gerada é o lugar geométrico de todas as circunferências $[c]$ (figura 2.71).

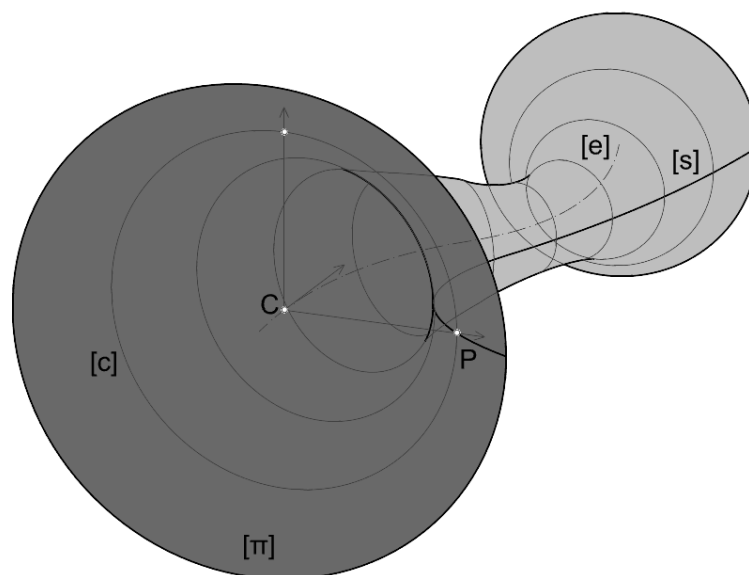


Fig. 2.71. Superfície de pseudo revolução gerada por um “eixo de revolução” $[e]$ e um perfil $[s]$.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de superfícies de pseudo revolução.

Superfícies translacionais

Uma superfície translacional fica definida pelo movimento de uma curva $[g]$ mantendo uma dada relação com uma curva $[d]$ fixa. As curvas podem ser planas ou não e podem intersestar-se ou não. A curva móvel $[g]$ pode conservar a direção em todos os seus pontos ou pode ajustar-se à curva $[d]$ de acordo com uma determinada regra.

Uma superfície tubular $[\delta]$ pode ser considerada como uma superfície translacional gerada pela deslocação de uma circunferência $[c]$ cujo centro O pertence sempre a uma curva $[e]$ e cujo plano é sempre normal à curva $[e]$ (figura 2.72). Com efeito, esta superfície também pode ser considerada como de pseudo revolução, no sentido que demos a esta definição anteriormente.

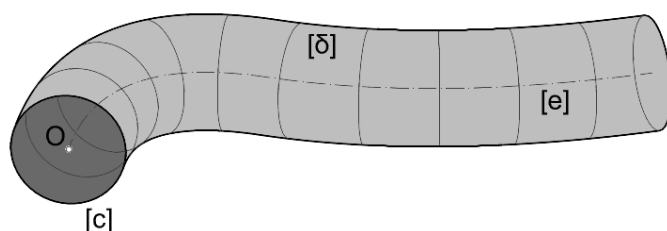


Fig. 2.72. Superfície tubular.

Outro exemplo são as superfícies geradas por extrusão de uma curva ao longo de uma reta. Na figura ilustram-se a superfície cilíndrica de diretriz elíptica $[e]$ (figura 2.73.a), a superfície cilíndrica de diretriz parabólica $[p]$ (figura 2.73.b) e a superfície cilíndrica de diretriz hiperbólica $[h]$ (figura 2.73.c).

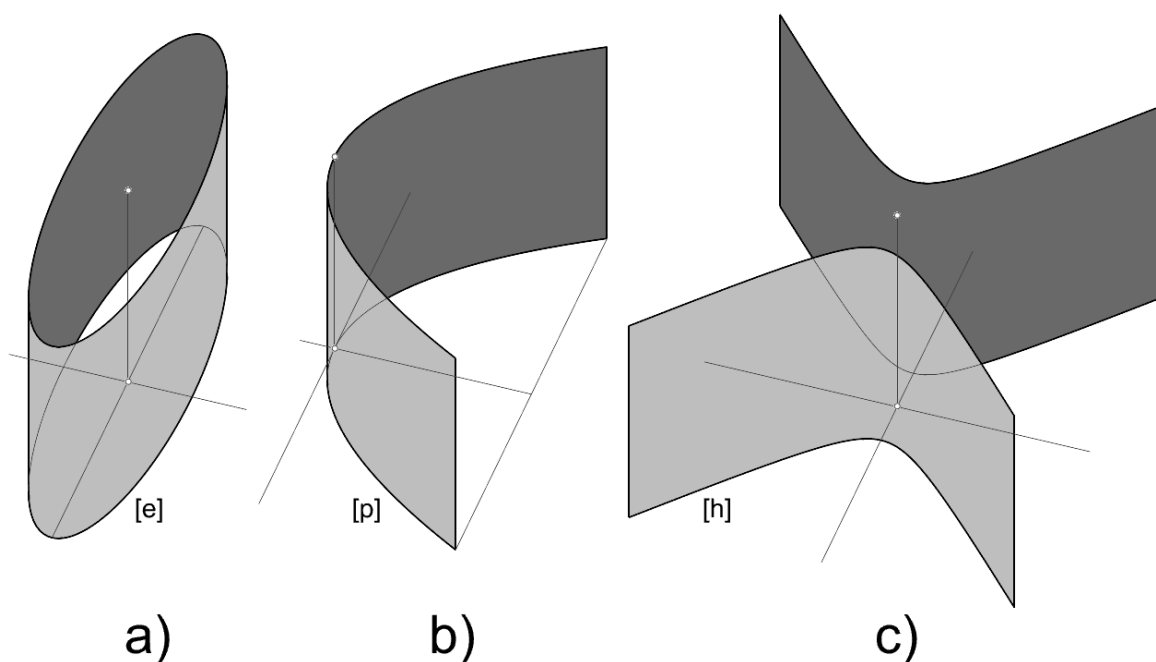


Fig. 2.73. Superfícies cilíndricas como superfícies translacionais: a) gerada pela extrusão de uma elipse, b) gerada pela extrusão de uma parábola, c) gerada pela extrusão de uma hipérbole.

Na extrusão, as curvas mantêm a orientação e a direção em todos os seus pontos.

O parabolóide hiperbólico $[\alpha]$ (figura 2.73.a) e o parabolóide elíptico $[\beta]$ (2.73.b) podem ser gerados como superfícies translacionais fazendo deslocar uma parábola $[p]$ apoiada noutra parábola $[q]$. No exemplo, os planos das duas parábolas são perpendiculares entre si. A parábola móvel, por exemplo $[q]$, conserva a orientação e a direção em todos os seus pontos. O ponto de interseção I entre as duas parábolas, considerado sobre a parábola móvel, é sempre o mesmo.

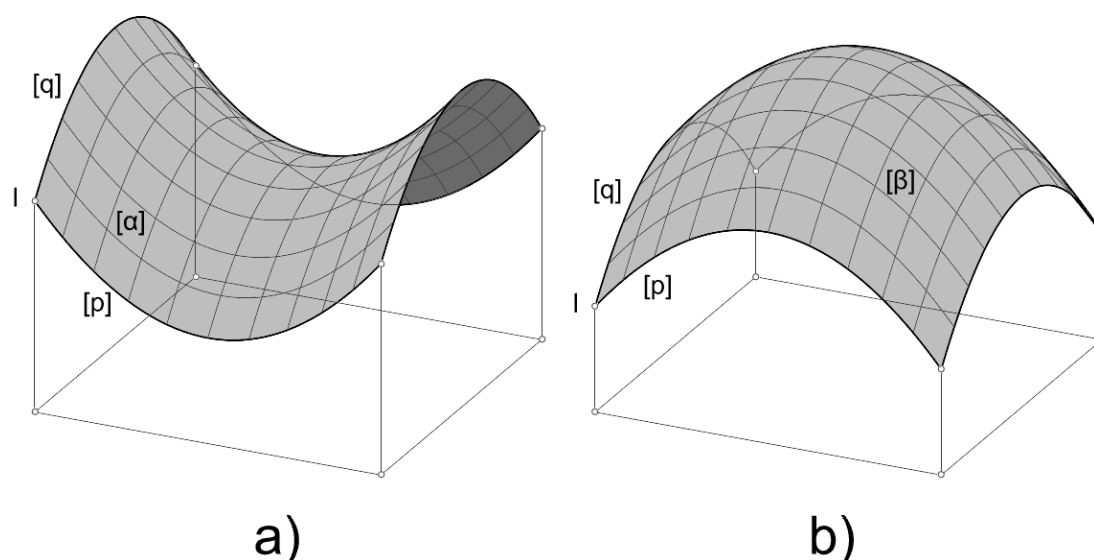


Fig. 2.74. Superfícies translacionais: a) parabolóide hiperbólico, b) parabolóide elíptico.

Se as duas parábolas tiverem a concavidade voltada para lados opostos, a superfície gerada é o parabolóide hiperbólico; se tiverem a concavidade voltada para o mesmo lado, a superfície gerada é o parabolóide elíptico. No caso do parabolóide elíptico, se as duas parábolas forem iguais, a superfície é um parabolóide de revolução.

Atividade proposta:

Tirando partido da utilização de um ADMG3D, proceda à modelação de superfícies translacionais.

Quádricas

Do ponto de vista da geometria projetiva, as quádricas são o lugar geométrico dos pontos de interseção dos elementos homólogos de duas estelas correlativas, uma de retas e outra de planos. Na figura 2.74 ilustra-se a obtenção de uma superfície esférica $[\alpha]$ obtida deste modo.

A referência a este modo de gerar as quádricas não se faz pela aplicabilidade prática mas sim pelo carácter unificador da definição. A estela de retas p fica definida pelo seu centro C e pelos pontos Q de um plano qualquer (na figura consideraram-se pontos dispostos numa grelha contida no plano xy). A estela de planos fica definida pelo seu centro D e por planos α perpendiculares às retas p da estela de retas. A cada reta p corresponde um, e apenas um, plano α . Um ponto P da superfície esférica fica definido pela interseção de uma reta p e do plano α correspondente (não representado na figura). Os pontos C e D também pertencem à superfície da esfera assim gerada. Este é um caso particular de estelas correlativas. De um

modo mais geral, duas estelas são correlativas se as duplas razões que se puderem formar com quaisquer quatro retas (semirretas) complanares da estela de retas forem as mesmas que se podem formar com os quatro planos correspondentes da estela de planos.

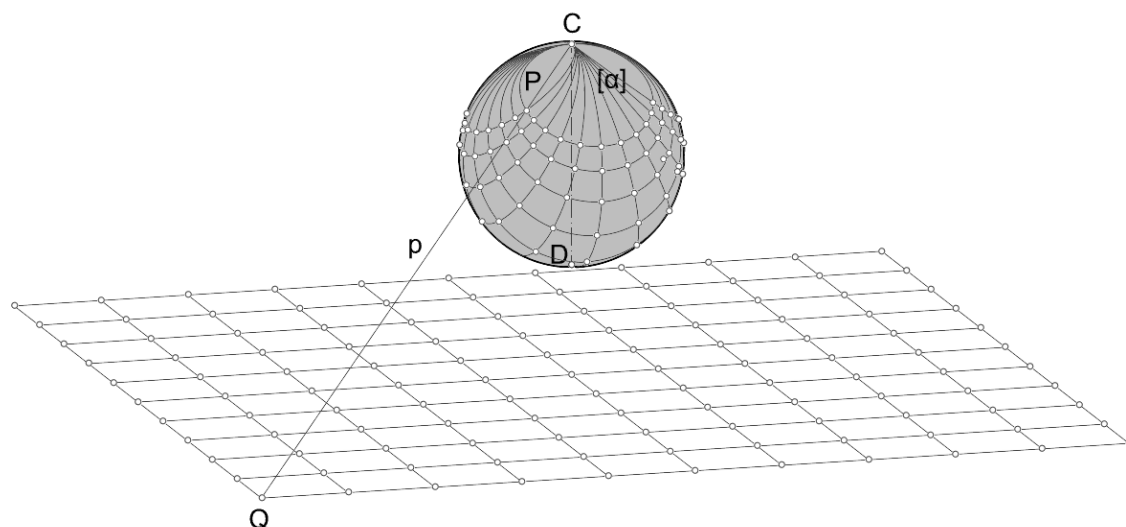


Fig. 2.75. Superfície esférica resultante da interseção de duas estelas correlativas.

As superfícies quádricas são casos particulares das classes que estivemos a analisar até agora. Trata-se de superfícies que podem ser definidas por equações de segundo grau e correspondem à generalização da noção de linha cônica. As quádricas são as seguintes superfícies: elipsoide (de que os esferoides e a superfície esférica são casos particulares), parabolóide elíptico (de que o parabolóide de revolução é um caso particular), parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de duas folhas (de que o parabolóide de revolução de duas folhas é um caso particular), hiperbolóide empenado escaleno (de que o hiperbolóide de revolução de uma folha é um caso particular), superfície cônica elíptica (de que a superfície cônica de revolução é um caso particular), superfície cilíndrica elíptica (de que a superfície cilíndrica de revolução é um caso particular), a superfície cilíndrica parabólica e a superfície cilíndrica hiperbólica. A transformação afim de uma quádrica resulta sempre numa quádrica do mesmo tipo. A transformação projetiva de uma quádrica pode resultar numa quádrica de tipo diferente.

Atividade proposta:

Proceda a uma pesquisa e produza um quadro que organize todos os tipos de quádricas. Modele cada uma delas.

Superfícies NURBS

A superfícies NURBS são uma extensão tridimensional da formulação das linhas de Bézier, BSplines e NURBS. As ideias e conceitos abordados a respeito das linhas são agora transpostos para as superfícies.

Tal como uma linha de Bézier tem um polígono de controlo, uma superfície de Bézier tem uma **mesh de controlo**, cujos vértices são o pontos de controlo da superfície. E o mesmo se aplica à concatenação de superfícies de Bézier e à generalização da representação NURBS das superfícies que permite a edição dos pesos associados aos pontos de controlo.

Na figura 2.76 ilustramos uma superfície de Bézier $[\beta]$ em que as linhas correspondentes à coordenada paramétrica u (entre 0 e 1) são do segundo grau e as linhas correspondentes à coordenada paramétrica v (entre 0 e 1) são do terceiro grau.

A *mesh* de controlo da superfície é definida pelos pontos $C_{00}, C_{10}, \dots, C_{32}$ dispostos matricialmente. As polygonais $[C_{00}C_{10}C_{20}C_{30}]$ e $[C_{02}C_{12}C_{22}C_{32}]$ definem as curvas correspondentes às coordenadas $v = 0$ e $v = 1$, respetivamente; e as polygonais $[C_{00}C_{01}C_{02}]$ e $[C_{30}C_{31}C_{32}]$ definem as curvas correspondentes às coordenadas $u = 0$ e $u = 1$, respetivamente. Estas quatro curvas definem os limites da superfície $[\beta]$ para os intervalos paramétricos considerados. As polygonais $[C_{01}C_{11}C_{21}C_{31}]$, $[C_{10}C_{11}C_{12}]$ e $[C_{20}C_{21}C_{22}]$ não correspondem a nenhuma curva da superfície.

Aplicando, por exemplo, a construção de De Casteljaú às polygonais $[C_{00}C_{10}C_{20}C_{30}]$, $[C_{01}C_{11}C_{21}C_{31}]$ e $[C_{02}C_{12}C_{22}C_{32}]$ obtêm-se pontos de controlo de curvas u da superfície. Na figura ilustra-se a determinação da curva de coordenada paramétrica $u = 2/3$, que é uma curva de grau 2. De modo análogo, podem determinar-se os pontos de controlo de qualquer curva de coordenada v .

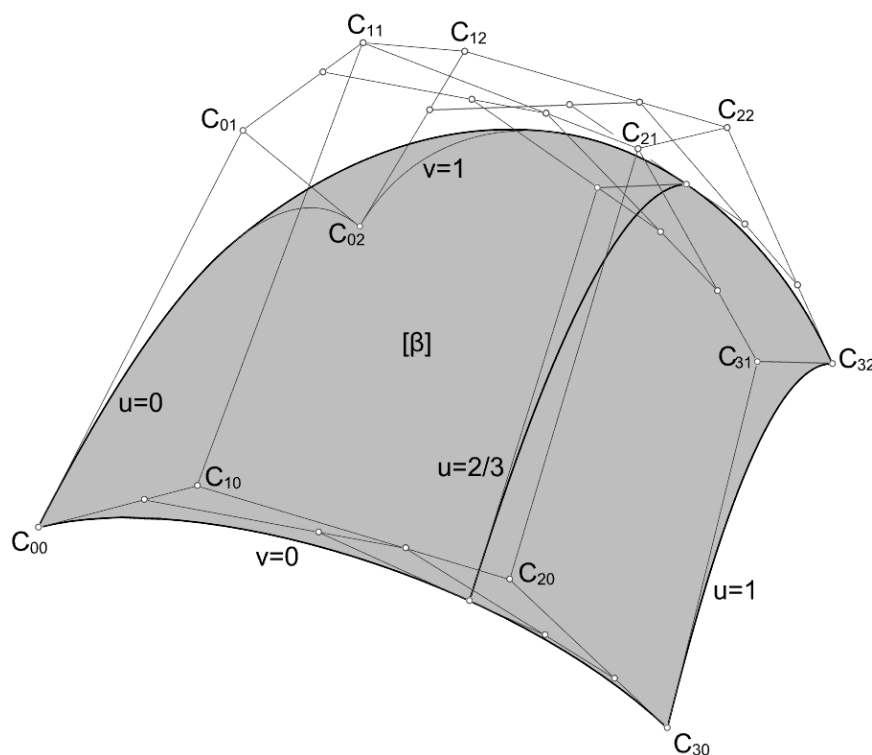


Fig. 2.76. Superfície de Bézier.

Generalizando, as superfícies NURBS podem representar vários tipos de superfícies atrás mencionados. Por exemplo, na figura 2.77 representa-se uma superfície NURBS $[\alpha]$ equivalente a uma superfície translacional gerada pelo deslocamento da linha $[m]$ apoiada na linha $[n]$, mantendo a direção em todos os seus pontos. Neste caso, a *mesh* de controlo é definida por regiões planas em forma de paralelogramo.

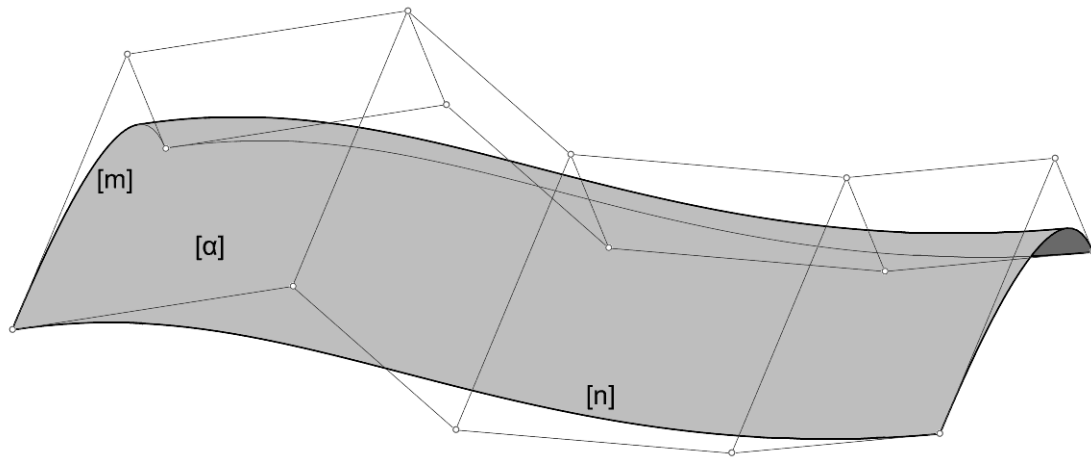


Fig. 2.77. Superfície translacional como superfície NURBS.

Do exemplo anterior, deduz-se facilmente que o parabolóide hiperbólico (figura 2.74.a) e o parabolóide elíptico (figura 2.74.b) podem ser representados como superfícies de Bezier de grau 2.

Tal como as linhas NURBS de grau 2 permitem representar rigorosamente as linhas cónicas, as superfícies NURBS de grau 2 permitem representar rigorosamente as superfícies quádricas através de uma escolha adequada da *mesh* de controlo e da atribuição dos pesos adequados aos pontos de controlo da superfície de Bézier de base. E a mesma superfície pode ser representada de modos distintos. Na figura 2.78 vemos duas representações distintas do parabolóide de revolução $[\alpha]$.

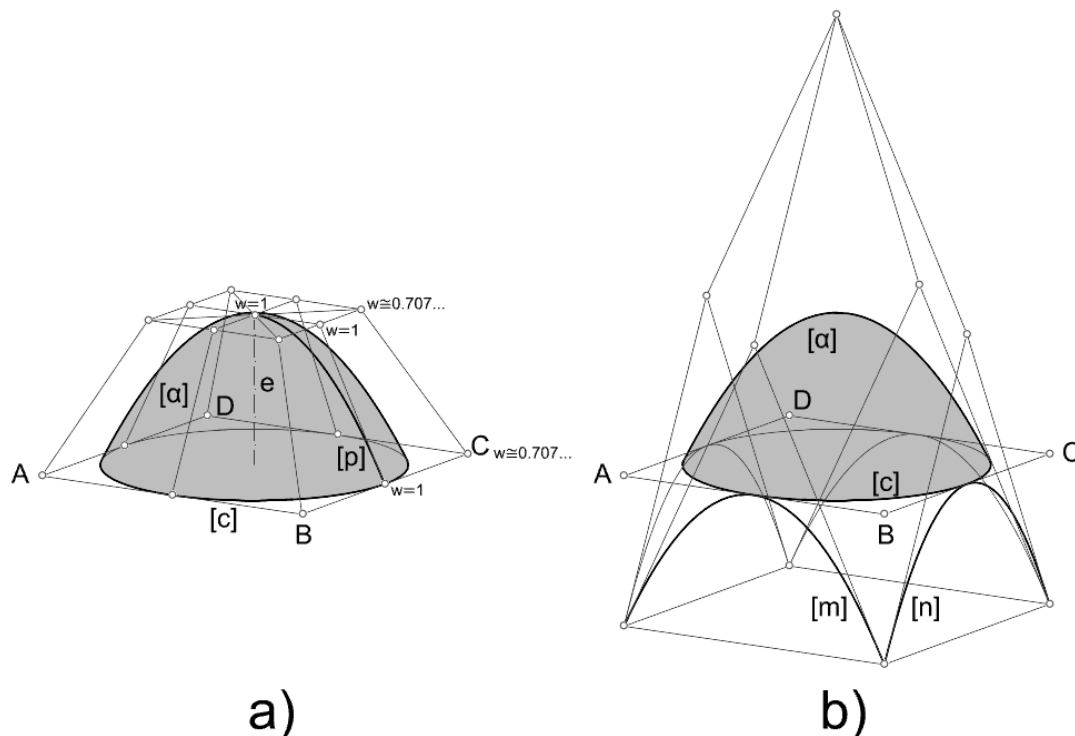


Fig. 2.78. Representação do parabolóide de revolução: a) como superfície translacional, b) como superfície de revolução.

À esquerda, temos a sua representação como superfície de revolução e, à direita, a sua representação como superfície translacional. Em ambos os casos apenas se destaca a porção

de parabolóide delimitada pelo plano do quadrado $[ABCD]$, que contem a circunferência $[c]$ da superfície.

Na figura 2.78.a temos o parabolóide gerado pela rotação da parábola $[p]$ em torno do eixo e . A mesh de controlo define uma espécie de pirâmide quadrangular truncada. Os pesos dos pontos de controlo diagonalmente opostos são iguais a $\sqrt{2}/2 \cong 0.707 \dots$. Os demais pontos de controlo têm peso igual a **1**. O parabolóide é representado por uma superfície NURBS de grau **2**. Na figura 2.78.b temos o parabolóide gerado pela translação da parábola $[m]$ apoiando-se na parábola $[n]$. Ambas as parábolas são congruentes, com eixos paralelos, e contidas em planos perpendiculares entre si. Neste caso, a mesh de controlo define quatro regiões em forma de losangos congruentes entre si. Todos os pesos associados aos pontos de controlo são iguais a **1** e o parabolóide é representado por uma superfície de Bézier de grau **2**.

Não é indiferente a forma como a superfície do parabolóide é representada. No caso da figura 2.78.a a circunferência $[c]$ é uma linha isoparamétrica da superfície, enquanto que no caso da 2.78.b isso já não acontece. Com efeito, no primeiro caso as linhas isoparamétricas são circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo e e parábolas contidas em planos passantes pelo eixo e . No segundo caso, as linhas isoparamétricas são parábolas contidas em planos paralelos aos das duas parábolas $[m]$ e $[n]$.

Na figura 2.79.b vemos uma superfície NURBS $[\beta]$ gerada a partir de 4 linhas que a delimitam, as linhas $[m]$, $[n]$ e $[p]$, de grau 2, a linha $[q]$ de grau 3 (figura 2.79.a). As linhas $[m]$ e $[n]$ estão contidas na família u , e as linhas $[p]$, $[q]$ estão contidas na família v . Na geração da superfície, as linhas de cada família têm de ter o mesmo grau; havendo graus diferentes prevalece o maior, uma vez que é possível representar uma BSpline através de outra de grau superior (caso da linha $[p]$). Por outro lado, sendo de grau idêntico, têm de ter o mesmo número de pontos de controlo; havendo diferente número de pontos de controlo, prevalece o número superior, pelo que a linha com menor número de pontos de controlo tem de ser subdividida de modo a ficar com o mesmo número de pontos de controlo (caso da linha $[n]$).

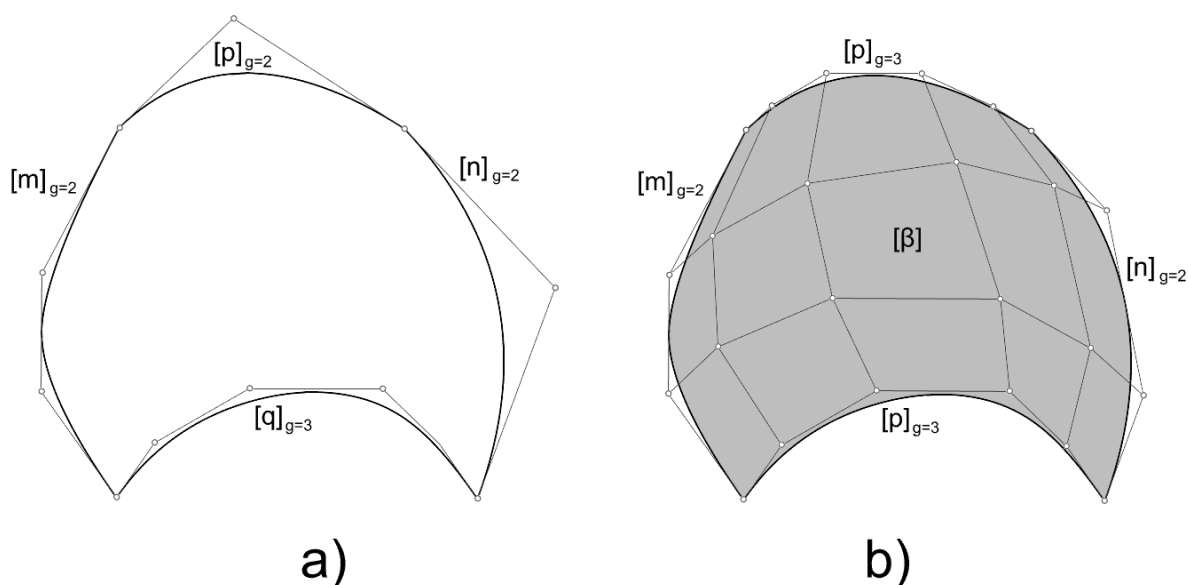


Fig. 2.79. Superfície NURBS: a) linhas limite, b) superfície gerada a partir das linhas limite.

Deste modo é possível ter os pontos de controlo da superfície dispostos matricialmente como se referiu anteriormente. Neste caso, todos os pontos de controlo da superfície têm peso igual a **1**, mas poderiam ser adotados pesos diferentes.

A implementação deste tipo de superfície pode variar ligeiramente em função do ADMG3D utilizado.

Atividade proposta:

Proceda à modelação sistemática das várias superfícies NURBS e analise-as quanto grau das mesmas.

Sólidos

Já referimos anteriormente que consideramos um sólido como um volume finito delimitado por uma ou várias superfícies. Esta definição vai ao encontro do modo como este tipo de entidades é utilizada em áreas como a arquitetura, o design e as engenharias. As operações que se realizam sobre sólidos implicam, em geral, operações realizadas sobre as suas superfícies. Assim, todo o estudo feito anteriormente relativo às superfícies encontra aplicação óbvia e direta quando tratamos de sólidos, o que ficará ainda mais evidente na próxima secção a pretexto das operações geométricas.

Operações geométricas

Esta secção deve ser encarada como um desenvolvimento da secção homóloga da PARTE I deste texto.

Subdivisão de superfícies

Uma superfície pode ser subdividida através de outras superfícies que a intersejam ou através de linhas que nela estão contidas, o que é equivalente, uma vez que uma superfície que possa ser subdividida por outra, também o é pela linha de interseção entre ambas. Assim, a condição que deve ser cumprida para que possa existir uma subdivisão é que as linhas contidas na superfície, no seu conjunto, permitam definir regiões na superfície. No exemplo da figura 2.80, a superfície $[\alpha]$ pode ser subdividida por algumas das linhas ou conjuntos de linhas.

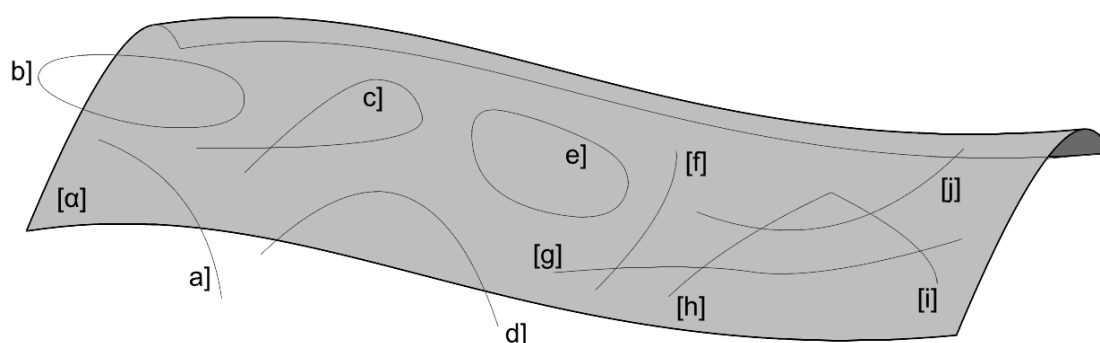


Fig. 2.80. Subdivisão de uma superfície através de linhas nela contidas.

Atividade proposta:

Quais das linhas, ou conjuntos de linhas, podem subdividir a superfície $[\alpha]$?

Outra forma de subdividir uma superfície, definida parametricamente, é estabelecendo um subdomínio no domínio da superfície. Suponhamos que a superfície $[\alpha]$ está parametrizada, em u e v , entre 0 e 1 . Por exemplo, se considerarmos um subdomínio de u entre 0.2 e 0.4 , e um subdomínio de v entre 0.5 e 0.9 , a estes corresponde uma porção $[\alpha']$ da superfície $[\alpha]$, conforme se mostra na figura 2.81.

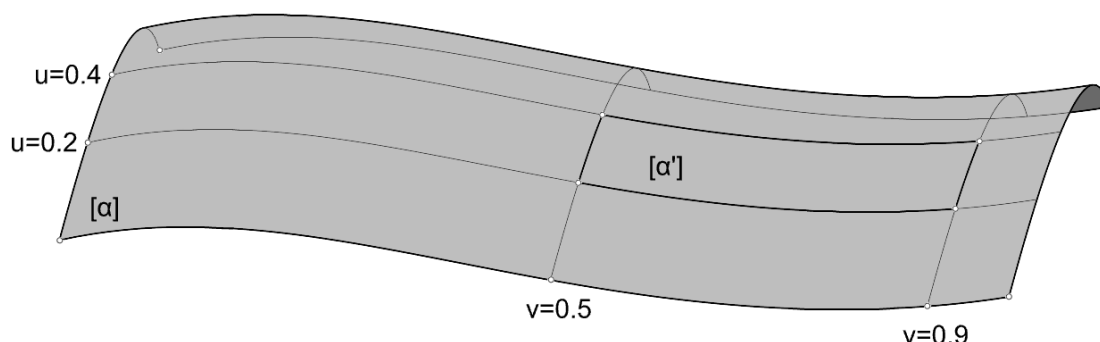


Fig. 2.81. Subdivisão de uma superfície através da definição de um subdomínio em uv da mesma.

Atividade proposta:

Analise o caso relativo à figura 2.78. discuta o impacto da forma como a superfície é parametrizadas na subdivisão por subdomínio paramétrico.

Concordâncias

Já nos referimos a diferentes tipos de continuidade entre superfícies. As concordâncias entre superfícies estendem o conceito de tangência. Definimos que duas superfícies são concordantes se, ao longo da linha comum, partilharem os mesmos planos tangentes. Quando apenas nos ocupamos deste tipo de relação estamos a considerar uma continuidade **G1**. Com efeito, já operámos com este conceito quando definimos superfícies com núcleo. O que vamos fazer agora é exemplificar a concordância entre superfícies com alguns casos que, sendo particulares, podem ser generalizados para as superfícies da classe considerada.

Concordância entre um hiperboloide de revolução de duas folhas e um parabolóide de revolução

A concordância entre duas superfícies de revolução com o mesmo eixo, caso exista, é sempre um paralelo, isto é, é sempre uma circunferência contida num plano perpendicular ao eixo. Quaisquer duas superfícies de revolução $[\alpha]$ e $[\beta]$ concordantes ao longo de um paralelo $[p]$ admitem uma superfície cônica de revolução $[\pi]$ (ou cilíndrica de revolução) concordante com ambas ao longo desse paralelo, e também uma superfície esférica com elas concordante. Com efeito, a determinação da superfície $[\pi]$ costuma ser um passo intermédio na resolução da concordância entre duas superfícies. No exemplo da figura 2.82 é dado um hiperboloide de revolução de duas folhas $[\alpha]$ de eixo vertical e e um paralelo $[p]$ nele contido. Pretende-se representar o parabolóide de revolução $[\pi]$ concordante com o hiperboloide $[\alpha]$ ao longo de $[p]$.

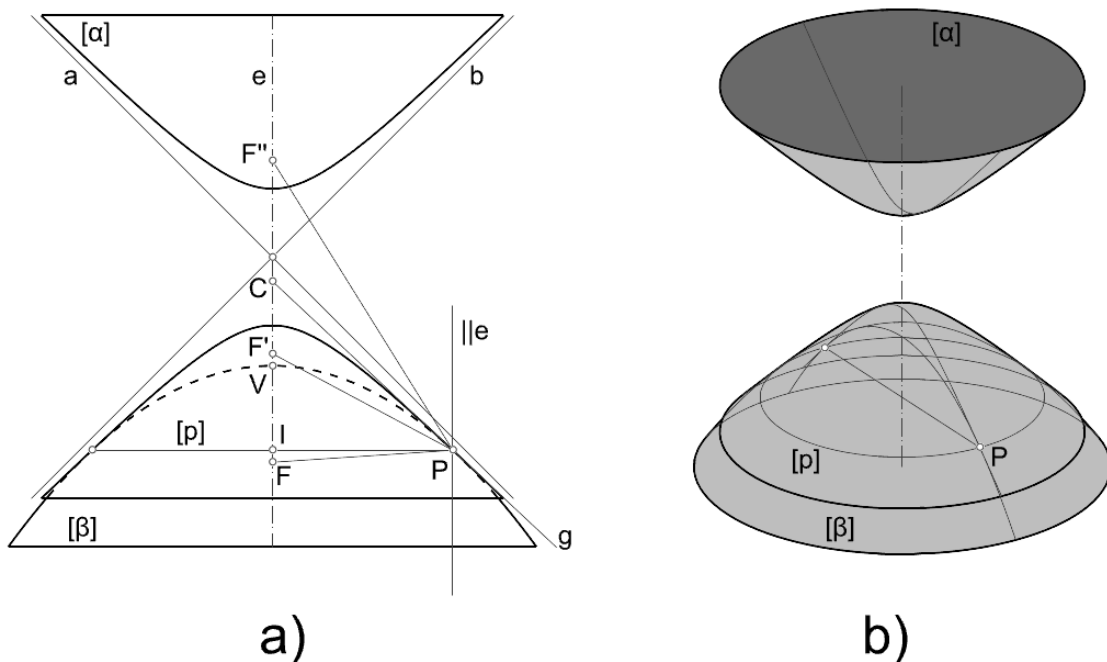


Fig. 2.82. Concordância entre um hiperboloide de revolução de duas folhas e um parabolóide de revolução: a) em projeção frontal, b) modelo tridimensional.

Note-se que, embora tratando-se de um problema espacial, a sua resolução é muito simples recorrendo às projeções. Por essa razão, esse é o método aqui utilizado. Depois, a partir da representação em projeção é relativamente simples e direto produzir um modelo tridimensional. Ou, pondo as coisas de outro modo, a projeção frontal do conjunto equivale a uma construção a executar no plano frontal passante pelo eixo do hiperboloide e pode, por isso, estar integrada no processo de modelação. Vemos assim que a modelação tridimensional não é independente da representação através de projeções.

Na figura 2.82.a, o hiperboloide $[\alpha]$ é definido através de uma projeção ortogonal num plano paralelo ao eixo e . São dadas as assíntotas a e b da hipérbole de contorno e os seus focos F' e F'' . É dada ainda a projeção do paralelo $[p]$ que se reduz a um segmento de reta. Pelo ponto P conduziu-se a reta g tangente à hipérbole de contorno do hiperboloide, e geratriz de uma superfície cónica concordante com o hiperboloide. O ponto C , de interseção entre a reta g e o eixo e , é o vértice da superfície cónica concordante. O vértice V do paraboloide (e da sua parábola de contorno) pretendido é o ponto médio do segmento $[IC]$, em que I é o ponto de interseção do eixo e com o plano do paralelo $[p]$ (porquê?). A reta g deverá ser simultaneamente tangente à hipérbole de contorno do hiperboloide e à parábola de contorno do paraboloide. Assim, o foco F do paraboloide (e da sua parábola de contorno) pode ser determinado fazendo FP simétrica da reta $||e$ por reflexão segundo a reta g (porquê?). Determinados os pontos F e V , a representação do paraboloide é imediata. Resolvido o problema, a modelação tridimensional da solução não oferece dificuldades (figura 2.82.b). Note-se que apenas considerámos uma porção limitada das superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto?

Estenda o estudo a outros pares de superfícies de revolução.

Concordância entre o hiperboloide regrado e o paraboloide regrado

Anteriormente vimos que qualquer superfície simplesmente regrada admite, ao longo de uma geratriz reta g , uma infinidade de hiperboloides regrados concordantes. Definido um desses hiperboloides, vimos ainda como determinar um plano tangente à superfície simplesmente regrada num ponto T qualquer da geratriz g (ver figura 2.63). Agora a questão é, dado um hiperboloide regrado, como definir um paraboloide regrado (paraboloide hiperbólico) concordante com o hiperboloide regrado. É óbvio que, resolvendo esta questão, se está a resolver também a questão da concordância entre um paraboloide hiperbólico e uma superfície simplesmente regrada (porquê?).

Assim, seja definido o hiperboloide regrado $[\alpha]$ através de três retas a , b e c enviesadas entre si e com direções não contidas todas na mesma orientação. Considere-se ainda a geratriz g do hiperboloide, ao longo da qual o paraboloide hiperbólico $[\beta]$ há de ser concordante com o hiperboloide (figura 2.83). A geratriz g intersesta as geratrizes a , b , e c nos pontos A , B e C , respetivamente. Os planos $\theta_A \equiv ga$, $\theta_B \equiv gb$ e $\theta_C \equiv gc$ tangentes ao hiperboloide nos pontos A , B e C , respetivamente, também serão tangentes ao paraboloide hiperbólico.

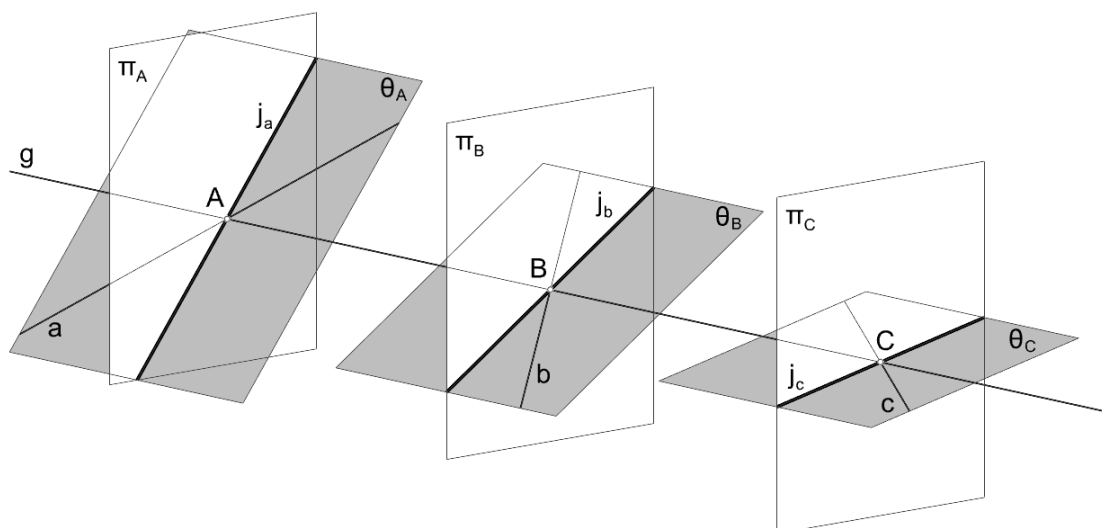


Fig. 2.83. Concordância entre um hiperboloide regado e um paraboloid hiperbólico.

Como se sabe, o paraboloid hiperbólico é uma superfície de plano diretor, isto é, todas as suas geratrizes, de um mesmo sistema, têm as suas direções contidas numa única orientação. Assim, um paraboloid hiperbólico $[\beta]$ fica definido do seguinte modo. Escolha-se uma orientação de planos π qualquer. Conduzam-se, pelos pontos A , B e C , respetivamente, os planos π_A , π_B e π_C com orientação π . O paraboloid hiperbólico fica definido pelas retas j_A , j_B e j_C resultantes da interseção daqueles planos com os planos tangentes. Daqui resulta evidente que há uma infinidade de soluções para a questão.

Atividade proposta:

Responda às questões levantadas no texto?

Para cada uma das superfícies simplesmente regadas estudadas, estude a forma de conduzir um paraboloid hiperbólico concordante ao longo de uma geratriz.

Geração de uma superfície por concordância com outra

Os casos das superfícies regadas com núcleo são um exemplo daquilo a que nos referimos neste ponto. O exemplo que vamos dar é o seguinte. Considere-se uma superfície cônica de revolução $[\alpha]$ de eixo vertical e , e a interseção $[i]$ nela produzida por um plano paralelo ao eixo. Sabe-se, neste caso, que $[i]$ é uma hipérbole (porquê?). Queremos agora definir uma superfície $[\beta]$ regada concordante com a superfície $[\alpha]$, com plano diretor perpendicular ao eixo e .

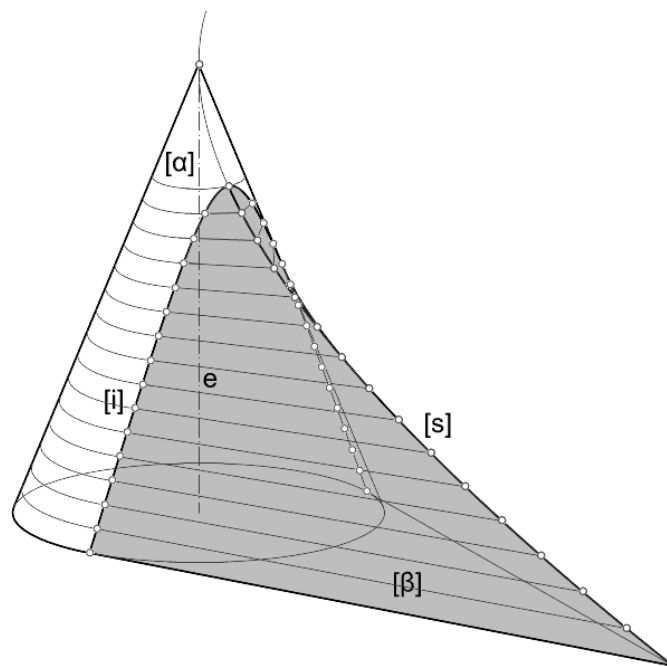


Fig. 2.84. Concordância entre uma superfície cônica de revolução e uma superfície regrada de plano diretor.

A superfície $[\beta]$ regrada é o lugar geométrico das várias retas tangentes aos paralelos da superfície $[\alpha]$ passantes pelos pontos onde estes intersectam a linha $[i]$. Trata-se de uma superfície de cilindroide. Um facto curioso acerca desta superfície é ter uma linha $[s]$ de auto interseção parabólica (na figura, apenas se representou a porção de superfície compreendida entre a linha $[i]$ e a linha $[s]$ considerando apenas uma das folhas da superfície cônica).

Normalmente, os ADMG3D dispõem de funcionalidades que permitem gerir algumas opções acerca questão da concordância entre superfícies. Mas muitas vezes esse processo não é imediato.

Atividade proposta:

Idealize e modele outras situações em que uma superfície pode ser gerada por concordância com outra ao longo de uma linha nela contida.

Interseções e operações booleanas

Na PARTE I tratámos deste tópico no contexto da representação através de projeções. Por essa razão reduzimos o estudo a alguns exemplos simples e dividimos o foco entre a natureza dos resultados obtidos com as operações e entre os métodos de construção das projeções. Nesta PARTE II, o foco coloca-se sobretudo na natureza dos resultados obtidos.

Quando utilizamos um ADMG3D para o cálculo gráfico de interseções entre superfícies e/ou sólidos, em geral, não devemos esperar representações matematicamente exatas.

Normalmente estas aplicações resolvem as interseções com elevadíssima precisão mas sempre de forma aproximada. Por exemplo, se intersetarmos duas superfícies algébricas de grau 2 devemos esperar como resultado um curva de grau 4. Porém, na generalidade dos ADMG3D, em particular naqueles que implementam a representação NURBS, o resultado dessa interseção é produzido através de uma aproximação com uma curva de grau 3. Até mesmo a interseção produzida numa superfície cônica pode vir representada através de uma

curva de grau 3, o que, em geral, não é matematicamente correto (na verdade é possível representar parametricamente uma curva de grau 2 através de uma curva de grau 3, mas não é isso que ocorre em geral na prática num ADMG3D), embora possa ser uma aproximação altamente precisa. Se, para efeitos práticos, estas curvas possam ser utilizadas diretamente sem grandes questionamentos, pensamos que a compreensão da natureza das operações realizadas sobre as entidades geométricas é benéfica para aumentar a proficiência na utilização dos ADMG3D.

Assim, sob este ponto de vista, vamos ocupar-nos de alguns casos que ilustram o que acabámos de afirmar.

Interseções planas em superfícies quádricas

As superfícies quádricas são representadas por equações algébricas de grau 2. Por essa razão, a interseção entre um plano e uma quádrica é, em geral, uma linha cónica. Acima já foram indicados, para cada uma das quádricas, o tipo de interseção plana que pode ocorrer. Neste ponto vamos dar dois exemplos.

Interseção cíclica no elipsoide

Uma interseção plana numa quádrica diz-se cíclica se o resultado for uma circunferência. As interseções cíclicas numa quádrica de revolução são produzidas por planos perpendiculares ao eixo. No caso das quádricas de revolução elíptica, há duas orientações de planos que produzem interseções cíclicas. Essas orientações são simétricas, por reflexão, em relação a planos perpendiculares ao eixo. E são ortogonais a um dos planos de simetria (por reflexão) da superfície, passante pelo seu eixo. Vejamos o caso do elipsoide $[\alpha]$, de centro O , definido pelos seus três eixos principais $[AB]$, $[CD]$ e $[EF]$, representado na figura 2.85 através de duas projeções ortogonais.

A existência de interseções cíclicas no elipsoide é facilmente compreendida pelo facto de este poder ser gerado por transformação afim (e também projetiva) da esfera. As interseções planas da superfície esférica dão sempre lugar a circunferências. Estas, por transformação afim, em geral dão lugar a elipses. No exemplo dado, face à relação entre as dimensões relativas dos eixos do elipsoide, as duas orientações cíclicas procuradas, θ' e θ'' , são projetantes em relação à projeção **1**, e têm inclinação compreendida entre a vertical (dada por E_1F_1) e a horizontal (dada por C_1D_1). Para determinar essas orientações, procede-se do seguinte modo. Considera-se uma superfície esférica $[\beta]$ qualquer, com centro R pertencente ao eixo $[EF]$, e com o contorno tangente ao contorno no elipsoide por relação à projeção **2**. Note-se que os pontos F' e F'' são os focos do contorno da projeção **2** do elipsoide. Os contornos da projeção **1** da superfície esférica e do elipsoide interseitam-se nos pontos G_1 , H_1 , I_1 e J_1 . As retas GH e IJ , em conjunto com a direção projetante **1**, definem as orientações θ' e θ'' .

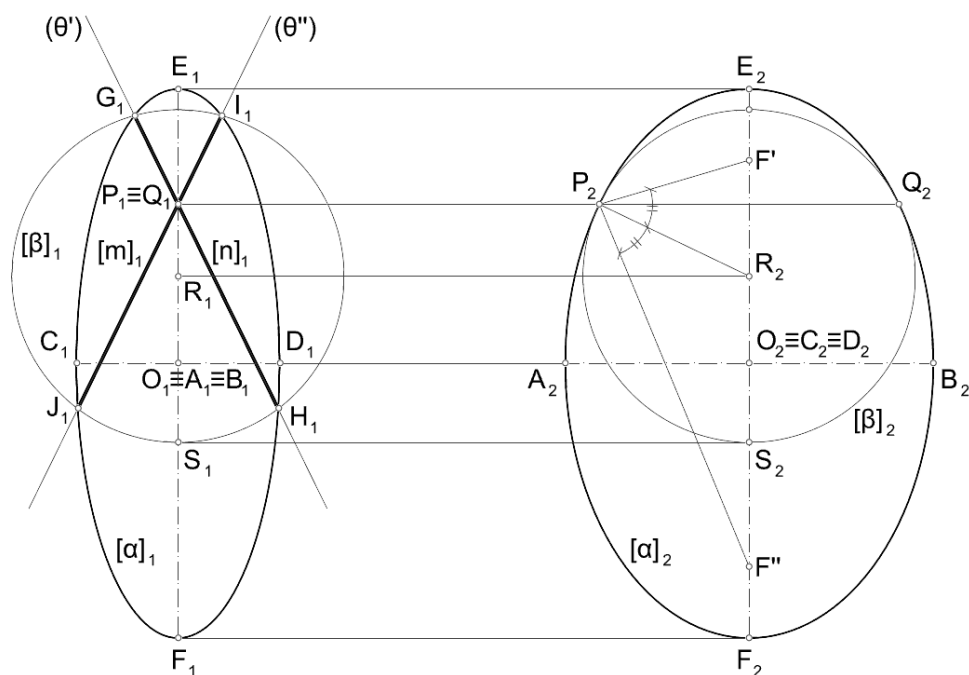


Fig. 2.85. Interseções cíclicas no elipsoide.

Atividade proposta:

Estude a questão das intersecções cíclicas para as demais quádricas de revolução elíptica.

Interseção parabólica no hiperboloide regrado

O hiperboloide regrado, também designado por hiperboloide empenado escaleno ou hiperboloide de revolução elítica de uma folha, admite como interseção plana os vários tipos de cónicas. Sendo uma superfície duplamente regrada, se um plano contém uma geratriz reta da superfície, é obrigatoriamente tangente à superfície. E o ponto de tangência é aquele em que essa geratriz intersesta a outra, de sistema contrário, contida no plano. Esse ponto de interseção pode ser próprio ou impróprio. No caso de ser impróprio, as duas geratrizes são paralelas entre si e o plano é tangente à superfície cônica assíntótica. Qualquer plano com esta orientação, e não tangente à superfície cônica assíntótica, intersesta o hiperboloide regrado segundo uma parábola.

Seja dado um hiperboloide regrado $[\alpha]$ através do seu eixo e vertical, da **elipse de gola** $[g]$ (análoga ao círculo de gola) de centro O , e de uma geratriz g (figura 2.86). Note que se o eixo e for vertical, as projeções horizontais das geratrizes são tangentes à projeção horizontal da elipse de gola (ou do círculo de gola no caso do hiperboloide de revolução de uma folha).

Começamos por determinar o traço horizontal do hiperboloide. Trata-se da elipse $[h]$ homotética da elipse $[g]$, passando aquela pelo traço horizontal da geratriz g (ponto não notado no desenho). De seguida determinamos o traço horizontal $[h']$ da superfície cônica assíntótica. É também uma elipse homotética das elipses $[h]$ e $[g]$, e passa pelo traço horizontal da reta $g' \parallel g$. Para que a interseção seja parabólica, o plano secante θ deve ser paralelo a um plano θ' tangente à superfície cônica assíntótica. Assim, conduziu-se um plano θ' tangente nas condições descritas e um plano secante θ qualquer paralelo ao plano tangente. O plano θ' ficou definido pelo seu traço horizontal, $h_{\theta'}$, e pela geratriz j' ; o plano θ

ficou definido pelo seu traço horizontal, $h_\theta \parallel h_{\theta'}$ e pela reta $j \parallel j'$. O plano θ intersesta curva $[h]$ nos pontos A e B pertencentes à interseção parabólica $[p]$. A reta j intersesta o hiperboloide no ponto P também pertencente à parábola $[p]$. Para determinar o ponto P considerou-se um plano π auxiliar passante pela reta j . Esse plano intersesta o hiperboloide segundo a hipérbole $[i]$. O ponto P resulta da interseção da curva $[i]$ com a reta j . Como a reta j contém M , ponto médio do segmento $[AB]$, e como uma parábola é uma curva de Bézier de grau 2, o ponto de controlo C da curva $[p]$ dista do ponto P o mesmo que este dista do ponto M . Uma vez determinados os pontos A , B e C , a curva parabólica $[p]$ fica automaticamente determinada.

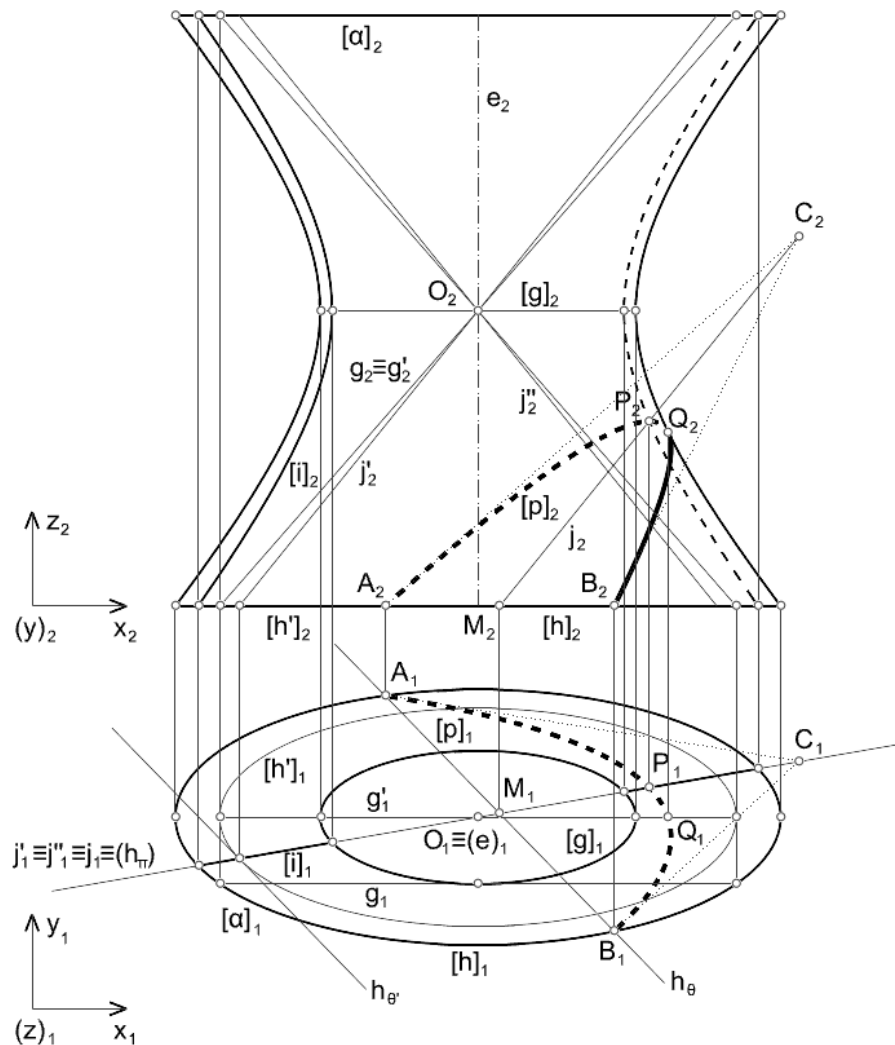


Fig. 2.86. Interseção parabólica no hiperboloide regrado.

Atividade proposta:

Estude os outros tipos de interseção plana do hiperboloide regrado.

Generalize esse estudo às demais quádricas.

Interseções planas em superfícies de revolução

A interseção plana numa superfície de revolução pode ser aproximada pela determinação dos pontos de interseção do plano secante com os paralelos da superfície, contidos em planos perpendiculares ao eixo. É claro que, utilizando um ADMGD não determinamos a interseção

ponto a ponto. Porém, ter esta noção pode ser importante como incremento do rigor mental com que se opera.

Interseções entre superfícies cónicas (incluindo as cilíndricas)

Mais uma vez, na prática, a determinação, no sentido computacional prático do ponto de vista do utilizador, da interseção entre duas superfícies cónicas (ou entre quaisquer duas superfícies) definidas em posição faz-se com um clique no ADMG3D com que se estiver a operar. No entanto, estudar as interseções não é apenas aplicar um procedimento mecânico para determinar as linhas resultantes. Muitas vezes é necessário colocar o problema em equação, isto é, é necessário garantir que a interseção é de determinado tipo. Por exemplo, a interseção entre as duas superfícies pode resultar numa única linha sem auto interseções; pode ser uma linha com uma ou mais auto interseções; ou pode ser composta por mais que uma linha. Analisemos estes casos recorrendo a duas superfícies cilíndricas (figura 2.87).

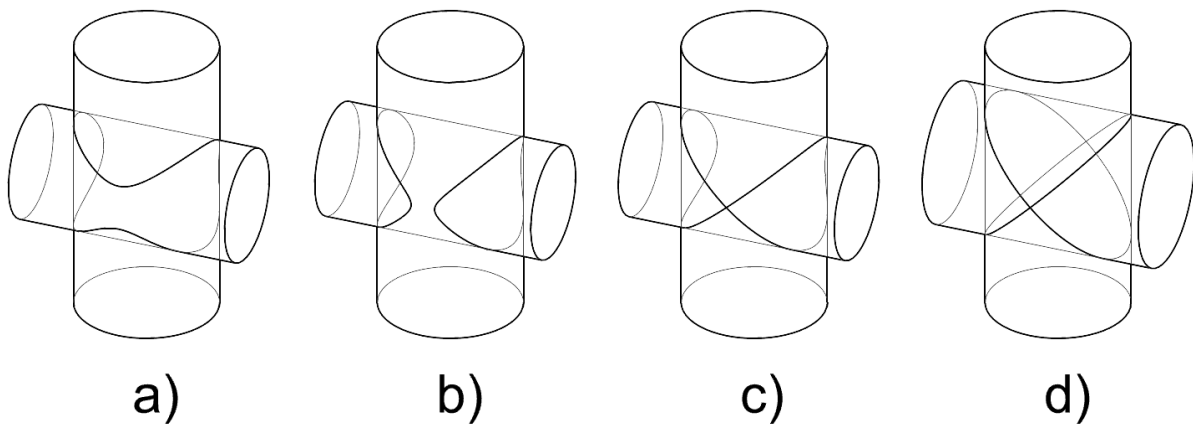


Fig. 2.87. Tipos de interseção: a) arrancamento, b) penetração, c) beijamento ou penetração tangencial, d) penetração com beijamento duplo.

No caso do **arrancamento** há apenas uma linha de interseção; do caso da **penetração** há uma linha de entrada e uma linha de saída; no **beijamento**, ou **penetração tangencial**, há uma linha com um ponto duplo; e no caso da **penetração com beijamento duplo** há duas linhas planas que se intersejam em dois pontos.

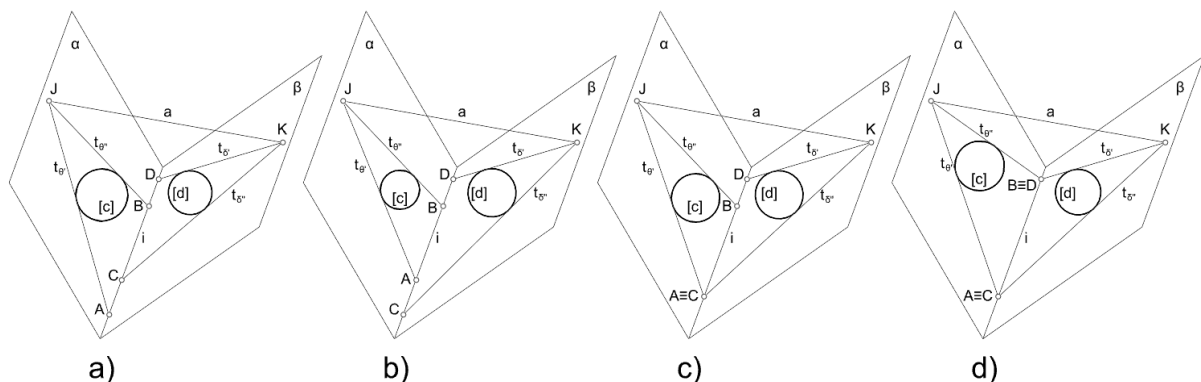


Fig. 2.88. Tipos de interseção entre duas superfícies cónicas com diretrizes contidas em planos oblíquos entre si: a) arrancamento, b) penetração, c) beijamento ou penetração tangencial, d) penetração com beijamento duplo.

Ora, para garantir que a interseção entre duas superfícies cilíndricas, entre duas superfícies cónicas, ou entre uma superfície cónica e uma cilíndrica é de determinado tipo, é necessário

um conjunto de operações prévias ao cálculo das linhas de interseção. Na figura 2.88, para o caso de duas superfícies cónicas, iremos exemplificar como se garante que a interseção é de determinado tipo.

A reta a fica definida pelos vértices das duas superfícies cónicas e intersesta os planos, α e β , das diretrizes $[c]$ e $[d]$ nos pontos J e K , respetivamente. Os planos α e β intersesta-se segundo a reta i . Os planos $\theta' \equiv at_{\theta'}$ e $\theta'' \equiv at_{\theta''}$ são os planos tangentes à superfície cónica de diretriz $[c]$; os planos $\delta' \equiv at_{\delta'}$ e $\delta'' \equiv at_{\delta''}$ são os planos tangentes à superfície cónica de diretriz $[d]$. As retas $t_{\theta'}$ e $t_{\theta''}$, concorrentes no ponto J , intersesta a reta i nos pontos A e B ; as retas $t_{\delta'}$ e $t_{\delta''}$, concorrentes no ponto K , intersesta a reta i nos pontos C e D . A relação entre os pontos A , B , C e D determina o tipo de interseção entre as duas superfícies, conforme consta na figura.

Atividade proposta:

Elabore esquemas semelhantes ao da figura 2.88 para o caso da interseção entre uma superfície cónica e uma superfície cilíndrica, e para o caso da interseção entre duas superfícies cilíndricas.

Elabore esquemas semelhantes ao da figura 2.88 para o caso em que as duas diretrizes são coplanares.

O mesmo pode ser adaptado a outros casos, incluindo superfícies prismáticas e piramidais.

Atividade proposta:

Repita a atividade anterior considerando superfícies piramidais e prismáticas, e a combinação destas com superfícies cónicas ou cilíndricas.

Interseções entre superfícies de revolução com eixos concorrentes

Notámos acima que planos perpendiculares ao eixo de uma superfície de revolução intersesta-na segundo paralelos. Também vimos que, caso haja interseção, duas superfícies de revolução com o mesmo eixo se intersesta segundo paralelos. De onde resulta que uma superfície esférica com centro pertencente ao eixo de uma superfície de revolução a intersesta segundo paralelos. Assim, uma superfície esférica com centro no ponto de interseção dos eixos de duas superfícies de revolução, caso as intersesta, fá-lo-á segundo paralelos das mesmas. E os pontos de interseção entre paralelos contidos na mesma superfície esférica pertencem à linha comum às duas superfícies de revolução. Mais uma vez, na prática, utilizando um ADMG3D, não se determinará a interseção entre as superfícies ponto a ponto fazendo uso desta propriedade. Mas o seu entendimento pode ser útil em contexto operativo.

Atividade proposta:

Modelando a interseção entre duas superfícies de revolução com eixos concorrentes, mostre que é verdade o que foi dito.

Operações booleanas

Na PARTE I deste texto já nos referimos às operações booleanas (ver figura 1.89). Neste ponto, e através da figura 2.89, figura vamos apenas cruzar aquele tópico com os tipos de interseção que vimos atrás. Em cada linha temos um tipo de operação booleana (de cima para baixo: subtração, união e interseção). Em cada coluna temos um tipo de interseção (da esquerda para

a direita: arrancamento, penetração e beijamento). Neste caso omitimos a penetração com beijamento duplo.

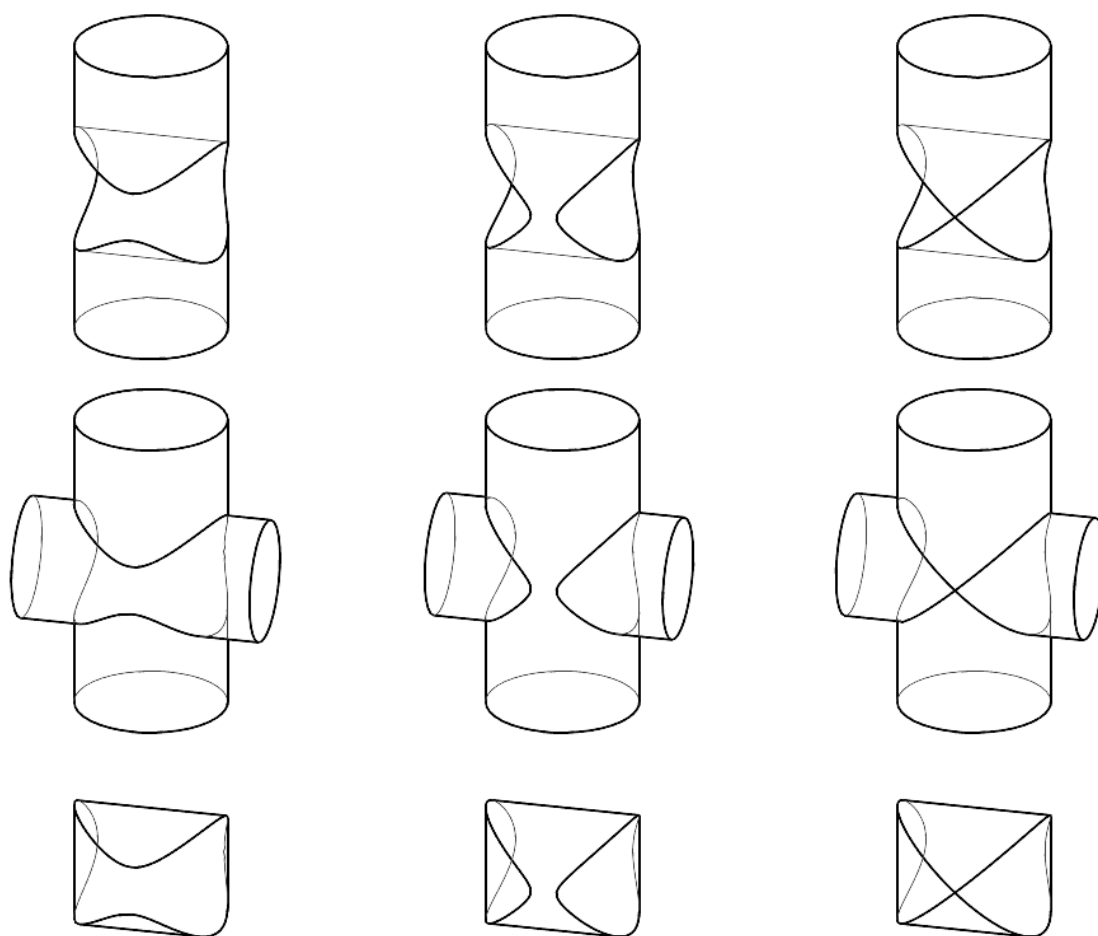


Fig. 2.89. Operações booleanas e tipos de interseção.

Atividade proposta:

Modele cada uma das situações ilustradas na figura 2.89. Considere os pares cilindro/cilindro, cilindro/cone e cone/cone. Verifique se o ADMG3D que está a utilizar apresenta limitações na determinação das linhas de interseção.

Transformações geométricas

As transformações euclidianas e afins e, em parte, as transformações projetivas, já foram abordadas anteriormente na PARTE I. Foram sobretudo tratadas no plano embora com algumas menções à generalização ao espaço. E a sua aplicação foi sobretudo no contexto das projeções.

O que pretendemos fazer nesta secção é estender a noção de transformação geométrica ao espaço, fazendo uma revisão das transformações euclidianas, afins e projetivas, e introduzir a noção de transformação topológica. Fá-lo-emos de modo empírico e baseados em exemplos e não através de exposições matemáticas formais que pouco ou nada dizem a arquitetos, designers e até mesmo a engenheiros.

Isometrias

As isometrias são transformações que preservam a distância entre pontos. No espaço, as isometrias incluem a **translação** (segundo uma direção), a **rotação** (em torno de um eixo), a **reflexão** (relativamente a um plano), e algumas combinações específicas destas como a **rotação helicoidal** (também designada de parafuso; nesta transformação, a direção da translação é ortogonal à orientação da rotação), a **reflexão deslizante** (combinação de uma reflexão com uma translação) e a **reflexão rotativa** (combinação de uma reflexão com uma rotação em que o eixo da rotação é ortogonal à orientação do plano da rotação). Para além das distâncias entre pontos, as isometrias preservam ângulos, áreas e volumes. Sempre que está envolvida uma reflexão, as figuras transformadas não têm **orientações idênticas**. Por exemplo, sujeito a uma reflexão, um referencial de mão direita é transformado num referencial de mão esquerda.

Dados dois objetos congruentes é sempre possível combinar rotações, translações e reflexões de modo a considerar um objeto como transformação do outro.

Se os dois objetos tiverem orientações idênticas, existe sempre uma rotação, ou uma translação ou uma rotação helicoidal que transforma um objeto no outro. Se as retas que unem pontos homólogos forem todas paralelas entre si, a transformação é a translação; se as retas que unem pontos homólogos forem todas paralelas a um plano, a transformação é a rotação; e nos casos restantes é a rotação helicoidal.

A título de exemplo, vamos considerar a rotação helicoidal entre dois objetos congruentes Σ e Σ' com orientações idênticas (figura 2.90).

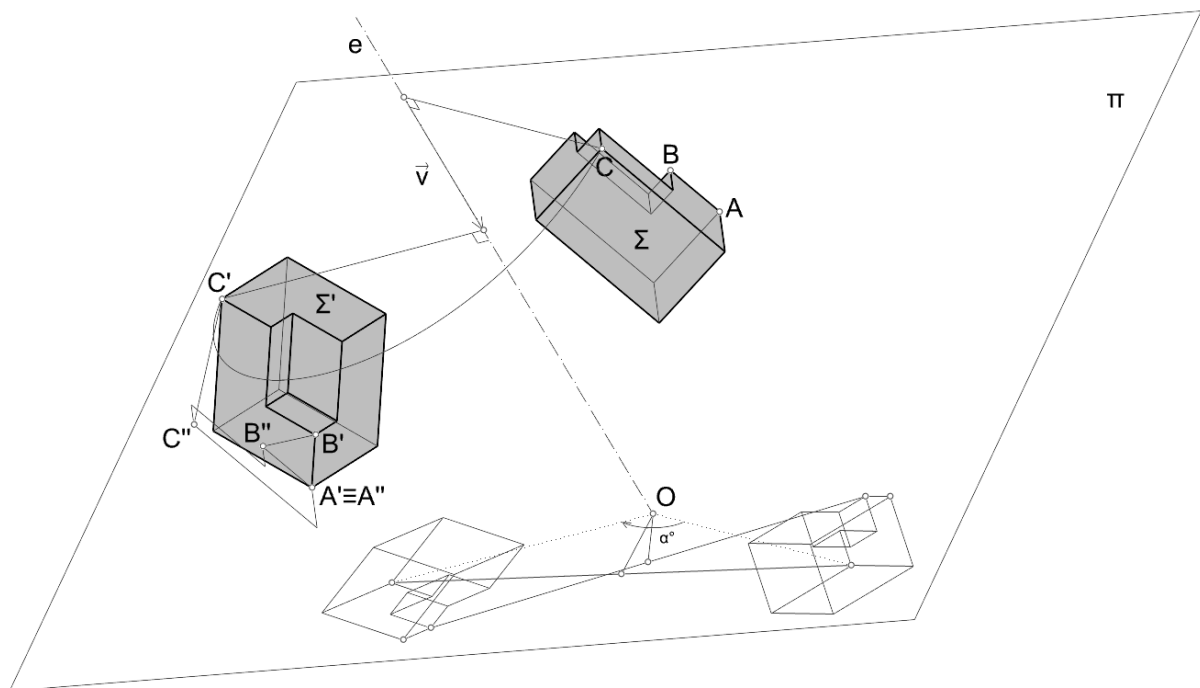


Fig. 2.90. Rotação helicoidal.

Para determinar os parâmetros da rotação helicoidal (o eixo e , o ângulo α° de rotação, e o vetor $\vec{v}$ de translação) pode proceder-se do seguinte modo. Considera-se uma translação auxiliar de um dos objetos até dois pontos homólogos A' e A'' (A'' é o transformado de A por translação) coincidirem. De seguida definem-se duas retas que unam dois pares de pontos homólogos, por

exemplo $B'B''$ e $C'C''$. As direções destas duas retas definem a orientação π ortogonal ao eixo e da transformação de rotação helicoidal. Projetem-se ortogonalmente os objetos Σ e Σ' num plano com orientação π . O eixo e passa pelo centro O , da rotação de α° que, no plano π , transforma a projeção do objeto Σ na projeção do objeto Σ' , ou vice-versa. O comprimento do vetor $\vec{v}$ é dado pela distância entre dois planos com orientação π passantes por dois pontos homólogos, por exemplo C e C' . Na figura está representada a trajetória helicoidal descrita pelo ponto C até ser mapeado no ponto C' .

Se os dois objetos tiverem **orientações não idênticas**, existe sempre uma reflexão, ou uma reflexão deslizante, ou uma reflexão rotativa que transforma um objeto no outro. Se as retas que unem pontos homólogos forem todas paralelas entre si, a transformação é uma reflexão; se as direções das retas que unem pontos homólogos estiverem todas contidas na mesma orientação, então a transformação é uma reflexão deslizante; nos restantes casos a transformação é uma reflexão rotativa. Em todos os casos, o plano de simetria por reflexão contém os pontos médios dos segmentos de reta que unem pontos homólogos entre os dois objetos.

Atividade proposta:

Dado um objeto, aplique-lhe uma sequência de isometrias e determine os objetos transformados. Considerando os resultados do passo anterior, procure determinar qual a isometria a que corresponde a sequência aplicada e que produz o mesmo efeito.

Dilações e semelhanças

As dilações e as semelhanças não preservam as dimensões mas preservam as proporções. Uma dilação é uma ampliação ou uma redução operada a partir de um centro O e de um fator superior ou inferior a 1 , respetivamente. Uma semelhança é o produto de uma isometria por uma dilação (Veloso, 1998).

Atividade proposta:

O que acontece no caso em que o fator da dilação é menor que 0 ? E se for igual a -1 ?

Dado um objeto, aplique-lhe uma sequência de isometrias e dilações. Considerando os resultados do passo anterior, procure determinar uma semelhança (produto de uma isometria por uma dilação) que produza o mesmo efeito.

Transformações afins

As transformações afins, ou simplesmente as afinidades, são um tipo de transformação geométrica que, conservando o paralelismo entre as linhas, não preserva a distância entre pontos nem os ângulos entre as retas. As isometrias, as dilações, as semelhanças, e suas combinações, são casos particulares de afinidades. Ao conservar o paralelismo entre as linhas, para cada direção de linhas sujeita à transformação é preservada a razão de comprimentos. Nas afinidades, a um ponto impróprio corresponde sempre um ponto impróprio. A projeção paralela (**homologia com afinidade**), a **escala numa direção**, e o **cisalhamento** são exemplos de afinidades. No espaço, estas transformações ficam definidas dados o plano ε dos pontos duplos da transformação, a direção d da transformação, e um par de pontos homólogos A e A' . No caso do cisalhamento a direção da transformação está contida na orientação do plano dos pontos duplos; no caso da escala segundo uma direção, a direção da transformação é ortogonal à orientação do plano dos pontos duplos; e na projeção

paralela a direção da transformação é oblíqua à orientação do plano dos pontos duplos. Na figura 2.91 colocam-se as três transformações em paralelo aplicadas à transformação de um cubo $[ABCDEFGH]$. Por comodidade de leitura, o plano dos pontos fixos é projetante na figura.

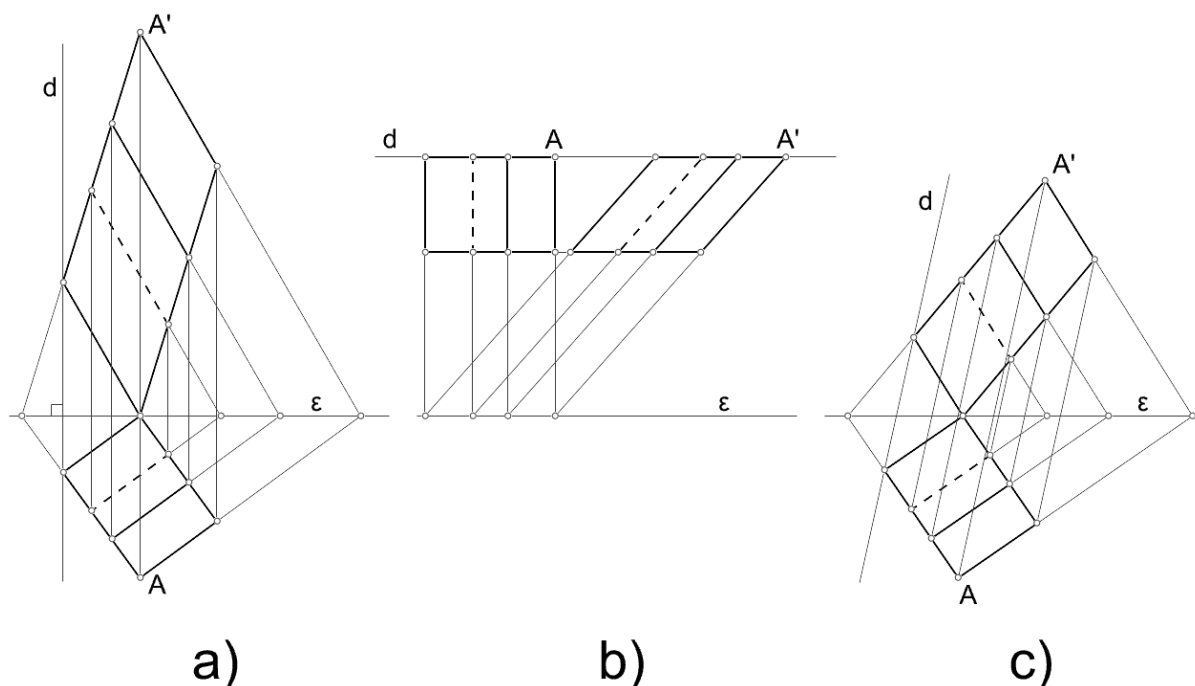


Fig. 2.91. Exemplos de transformações afins: a) escala numa direção, b) cisalhamento, c) projeção paralela.

Note-se que, no plano, a transformação de cisalhamento preserva a área e no espaço preserva o volume. Note-se que uma combinação de afinidades é ainda uma afinidade. E como as isometrias, as dilações e as semelhanças são casos particulares de afinidades, se a combinação envolver alguma destas transformações, o resultado também é uma afinidade.

Atividade proposta:

Tirando partido de um ADMG3D procure aplicar estes três tipos de afinidade a diversos objetos. Como sugestão, considere a associação destes objetos a um cubo envolvente.

Transformações projetivas

As transformações projetivas correspondem a uma classe mais geral de transformações geométricas que incluem as precedentes. Podem ser de dois tipos, as colineações e as correlações. No primeiro caso os elementos transformados são do mesmo tipo, isto é, pontos são transformados em pontos, retas são transformadas em retas e planos são transformados em planos. O paralelismo não é preservado e a um ponto próprio pode corresponder um ponto impróprio, e vice-versa. No caso das correlações, os elementos transformados são de tipos diferentes. A um ponto corresponde uma reta (no caso bidimensional) ou, a uma reta corresponde um plano (no caso tridimensional). Já nos referimos à correlação a propósito da definição de uma quádrlica. Nestas transformações é invariante a razão cruzada (ver PARTE I).

Um exemplo de transformação projetiva é a **homologia**, como se ilustra na figura 2.92 com uma homologia espacial. A homologia espacial entende-se muito facilmente a partir da homologia plana e fica definida por um centro de projeções O , um plano de pontos fixos ϵ , e um par de pontos homólogos, por exemplo B e B' . Na figura vemos a transformação que

mapeia um cubo $[ABCDEFGH]$ num cuboide $[A'B'C'D'E'F'G'H']$. Na verdade, a transformação mapeia o espaço sobre si próprio. Os pontos do plano α' , associado ao cuboide, correspondem aos pontos impróprios do espaço do cubo. São exemplo os pontos J'_1, J'_2 e J'_3 que correspondem aos pontos impróprios das retas que contêm as arestas do cubo. Os pontos impróprios do espaço do cuboide correspondem aos pontos do plano β no espaço do cubo. A distância entre o ponto O e o plano β é igual à distância entre o plano α' e o plano ε (ver figura 1.19 na PARTE I). Obviamente, estes planos são paralelos entre si.

Naturalmente a combinação de uma homologia com outra, ou com uma afinidade, é também uma transformação projetiva.

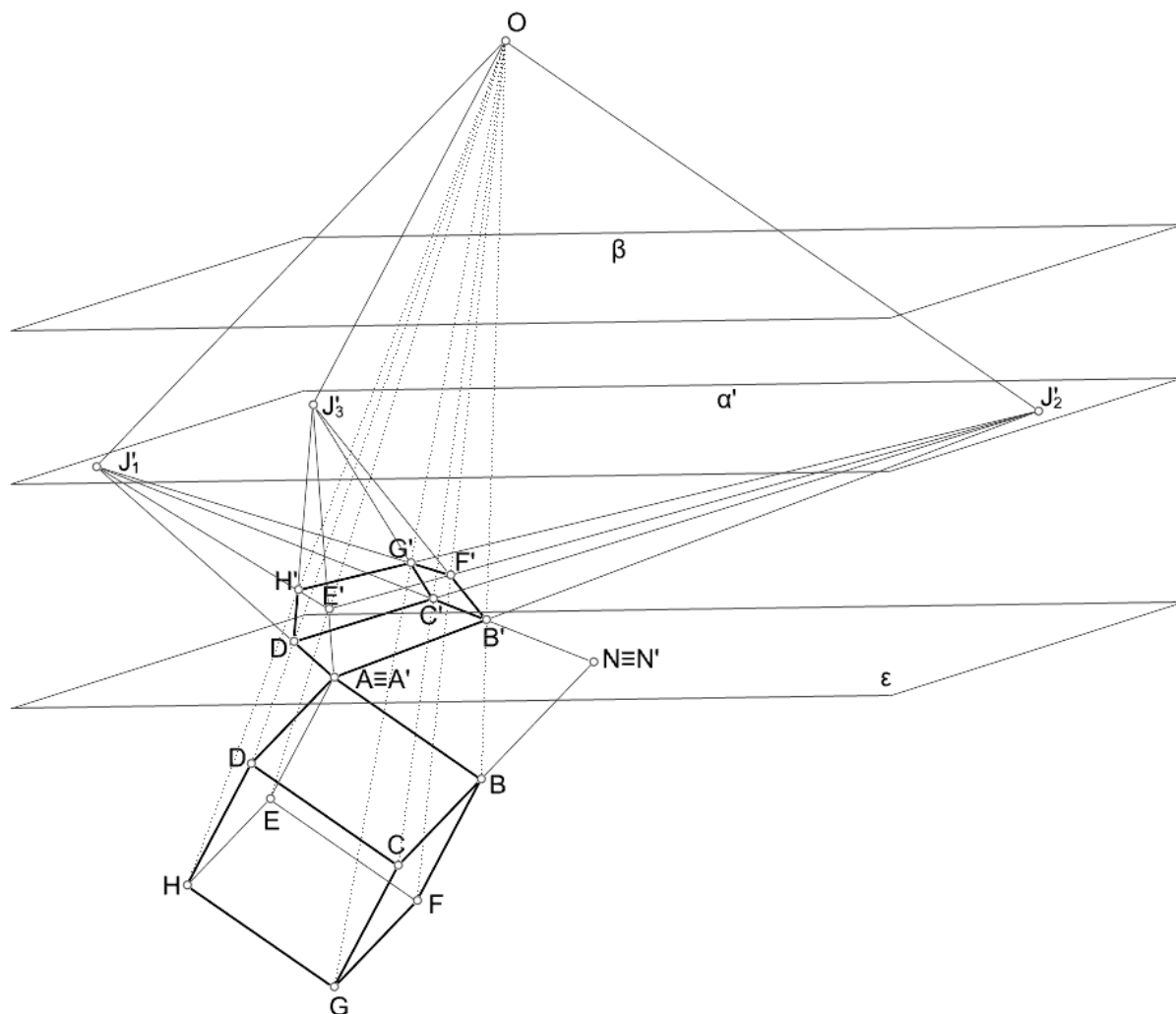


Fig. 2.92. Homologia espacial.

Atividade proposta:

Tirando partido de um ADMG3D procure aplicar estes três tipos de afinidade a diversos objetos com faces planas. Como sugestão, considere a associação destes objetos a um cubo envolvente.

Transformações topológicas

As transformações topológicas são ainda uma classe mais geral de transformações geométricas. Se nas colineações a uma reta corresponde uma reta, numa transformação

projetiva, a uma reta corresponde uma curva. A noção de vizinhança é importante para entender, ainda que informalmente, este tipo de transformação. Se considerarmos um ponto P pertencente a uma superfície $[\alpha]$ e um conjunto de pontos vizinhos contidos num disco $[d]$, que inclui o ponto P no seu interior, os pontos transformados dos vizinhos do ponto P , são os vizinhos do ponto P' transformado de P quando, por exemplo, a superfície $[\alpha]$ se transforma na superfície $[\alpha']$ (figura 2.93).

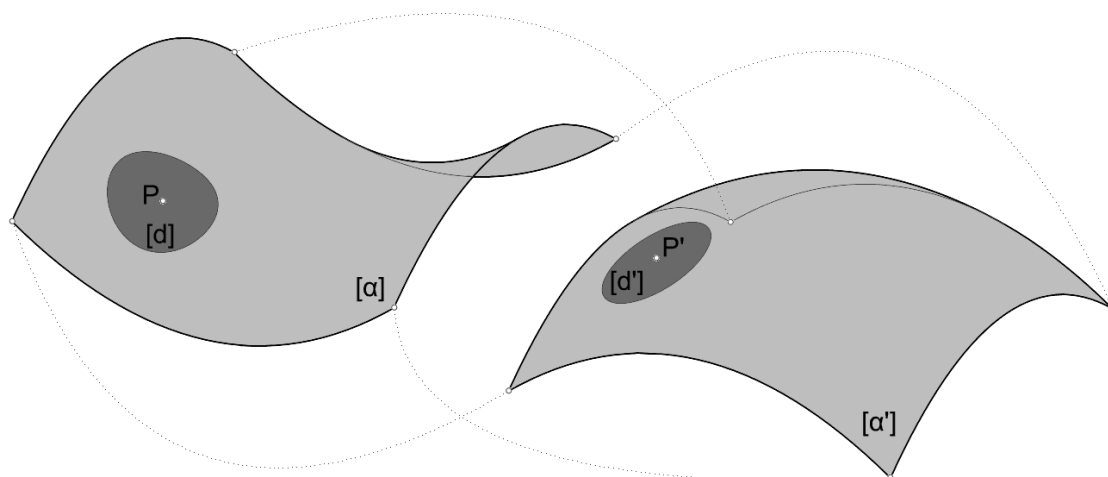


Fig. 2.93. Noção informal de vizinhança.

Também se pode pensar na generalização topológica das correlações. Por exemplo, a uma estela de planos pode corresponder uma estela de linhas curvas.

Aqui a noção de vizinhança é mais difícil de apreender mas pode ainda ser considerada. Diríamos que a linhas vizinhas correspondem planos vizinhos.

Do ponto de vista prático, reconhecemos uma transformação topológica quando qualquer uma das superfícies da figura 2.94 se transforma em qualquer uma das outras.

O que há de comum em todos os casos da figura é que, de algum modo, todas as superfícies são equivalentes a uma superfície esférica (figura 2.94.c). Podemos pensar de forma intuitiva. Imagine-se que a superfície do cubo é de borracha. Se insuflarmos o interior com ar, a superfície do cubo acaba por deformar-se continuamente até assumir a forma da esfera. E o mesmo é válido para qualquer uma das superfícies da figura. Por essa razão, diz-se que todas as superfícies são **homeomórficas**, e topologicamente equivalentes e a uma esfera.

Nos exemplos da figura 2.95, as superfícies já não são equivalentes a uma superfície esférica mas sim equivalentes a uma superfície tórica com um “buraco” (figura 2.95.d). Isto é, é possível imaginar uma deformação contínua entre qualquer uma das superfícies e a superfície de um toro com um buraco (figura 2.95.d).

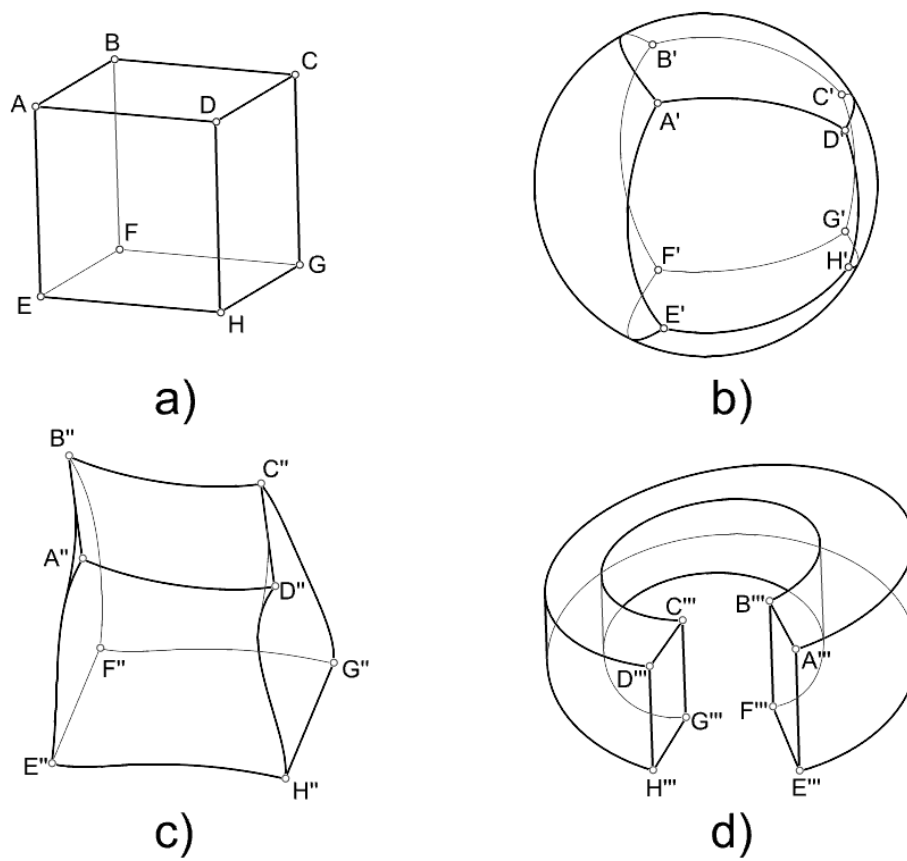


Fig. 2.94. Transformação topológica entre superfícies equivalentes a uma superfície esférica.

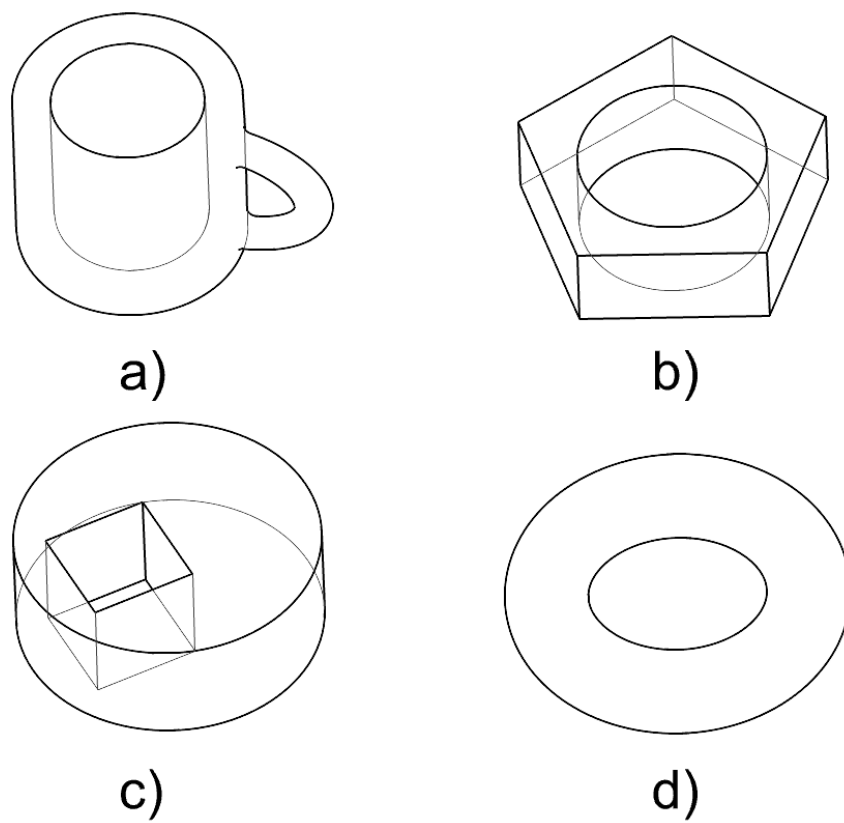


Fig. 2.95. Transformação topológica entre superfícies equivalentes a uma superfície tórica.

Assim, é possível distinguir topologicamente superfícies consoante o número de “buracos” que têm.

Atividade proposta:

Escolha objetos do quotidiano e considere as suas superfícies externas (casos que encerrem volume). Verifique a que objeto são topologicamente equivalentes (esfera, toro com um buraco, toro com dois buracos, etc.).

Análise o seu ADMG3D e identifique, das transformações que implementa, quais as que sendo topológicas não pertencem a nenhuma das outras classes. Como sugestão verifique se as transformações transformam retas em curvas.

Aplicações

O ato de projetar consiste em criar, mentalmente, modelos das nossas ideias. Esses modelos formais e/ou conceptuais podem ser representados de diversos modos, por exemplo através de desenhos em papel, maquetas físicas, desenhos em suporte digital, maquetas digitais, textos, descrições orais, etc. A criação de modelos geométricos representativos do ato criativo consubstancia-se através da modelação geométrica, isto é, através de abstrações geométricas com um nível de detalhe adequado ao fenómeno a que dizem respeito. Essas abstrações podem ser mais ou menos precisas consoante a fase do projeto em que nos encontramos. Como as formas de pensar não são independentes das ferramentas que dominamos [Mitchel e McCullough, 1994], a conceção geométrica é coetânea do processo de representação. E nesse contexto, os ADMG3D, a par de outros métodos, desempenham um papel fundamental.

Modelação paramétrica

Nos processos tradicionais de representação, qualquer alteração de uma parte da ideia significa refazer, uma a uma, todas as outras partes em que aquela alteração se repercute. Com a modelação paramétrica, é definida uma cadeia de restrições e relações tais que a alteração numa parte dessa cadeia é idealmente propagada, com reparações mínimas, sem a necessidade de alterar manualmente cada uma das partes da cadeia de modelação (Woodbury, 2010). Neste sentido, a modelação paramétrica pode ser aplicada a qualquer sequência de projeto que envolva operações de natureza algorítmica.

A título de exemplo considere-se o seguinte caso.

Um arquiteto pretende colocar vãos numa parede com uma dada altura de $3m$ e com comprimento l que pode variar. Os vãos têm forma quadrada com $1m^2$ e os seus centros não devem distar menos que $2m$ dos topos da parede. Designemos por d essa distância. Entre centros de vãos consecutivos a distância deve ser igual a $2.5m$. Designemos por v essa distância. Os vãos devem estar igualmente espaçados e centrados na parede. As letras l e d e representam valores variáveis, ou seja, parâmetros.

Uma abordagem possível ao problema é, dado um comprimento l específico, resolver manualmente a distribuição dos vãos. Porém, se quisermos testar muitos valores de l , esta abordagem torna-se muito trabalhosa e repetitiva. A alternativa é estruturar e hierarquizar as restrições que definem o problema e, com isso, definir um algoritmo que as aplique sequencialmente. Esse algoritmo pode depois ser implementado através de uma ferramenta de modelação paramétrica implementada no ADMG3D que se entender.

Agora, definir o algoritmo não deve ser confundido com a utilização de uma aplicação informática específica. Definir o algoritmo significa definir a cadeia de operações que leva ao resultado.

Analisando o problema, verifica-se que, para ter um vão, o valor de l tem de ser pelo menos 4 metros, para permitir que o seu centro diste o valor mínimo admissível dos extremos da parede. Para ter dois vãos, o valor de l tem de ser pelo menos 6 metros. Mas o que acontece se l for igual a 5 metros, por exemplo? Neste caso apenas poderá ter um vão mas este deve estar centrado na parede. Assim, a cadeia de decisões pode ser a seguinte:

1. Se l for menor que 4 metros, a parede não tem nenhum vão.

2. Se l for maior que 4 metros, calcule-se a diferença entre l e duas vezes o valor mínimo admissível para d , isto é, $l - 4$.
3. Se $l - 4$ for menor que 2,5 metros, a parede só tem um vão que deve estar centrado na mesma.
4. Se $l - 4$ for maior ou igual a 2,5 metros, deve calcular-se $(l - 4)/2,5$.
5. A parte inteira n da divisão $(l - 4)/3$ determina o número de vãos possíveis, que será $n + 1$.
6. Como os vãos têm de estar centrados na parede e a distância entre os seus centros tem de ser exatamente 2,5 metros, então o valor sobranete da operação $(l - 4) - 2,5n$ deve ser dividido por 2 sendo o resultado desta operação somado ao valor mínimo admissível para a distância d para se obter a distância d dos vãos extremos aos topos da parede.

Note-se que, até ao momento, a elaboração do algoritmo não dependeu em nada de qualquer ferramenta informática. Em geral é útil acompanhar os passos do algoritmo através de esquemas gráficos que ajudem ao raciocínio. Após ter-se uma ideia das operações a realizar, então pode-se passar à sua implementação num ADMG3D. É claro que o processo pode ser iterativo, isto é, pode ir-se experimentando à medida que se vai implementando, quase como se estivesse a fazer um esboço.

Na figura 2.96 ilustra-se a aplicação do algoritmo para oito valores diferentes de l .

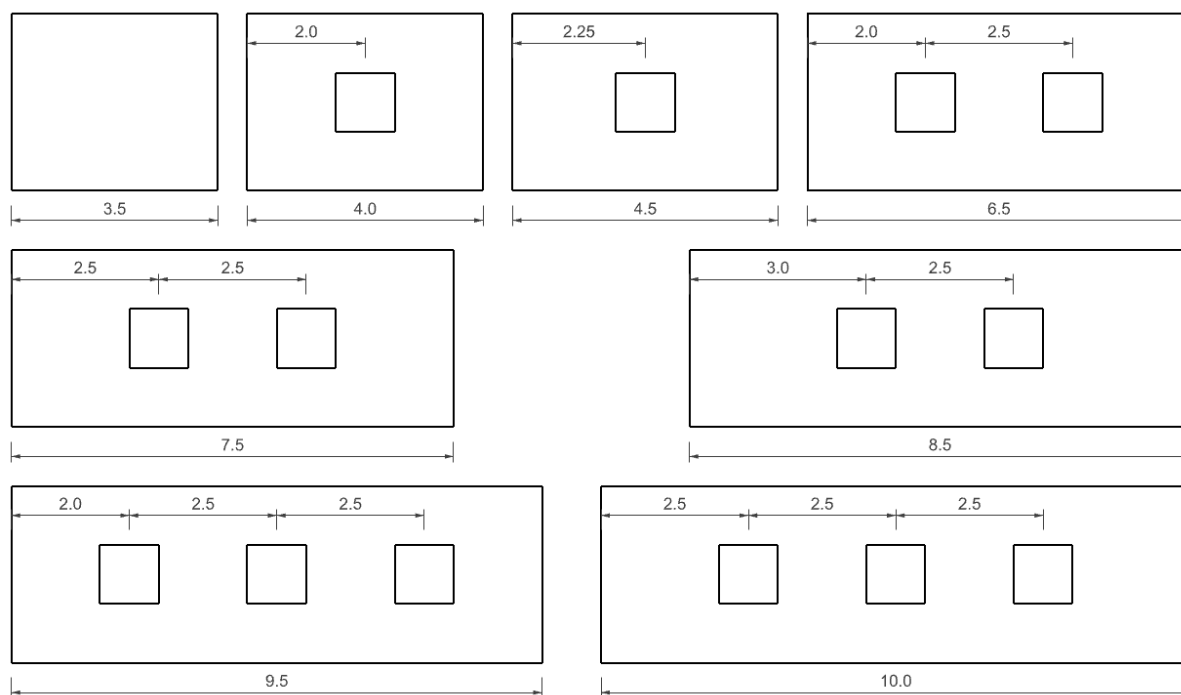


Fig. 2.96. Aplicação de um algoritmo para distribuição dos vãos numa parede.

Atividade proposta:

Para cada um dos exemplos da figura 2.96, verifique que estão cumpridas as condições impostas no enunciado.

Considere-se ainda outro exemplo.

Um designer pretende modelar um candeeiro do tipo *abatjour*. O difusor do candeeiro deverá ter a forma de um tronco de cone ou de um tronco de cilindro. O plano inferior deve ser horizontal e o plano superior deve ter uma inclinação entre 0° e 30° . As geratrizes do difusor devem divergir 15° da vertical, no máximo. O diâmetro da parte inferior do difusor deve variar entre 25 centímetros e 50 centímetros. Se o diâmetro for inferior ou igual a 30 centímetros, o difusor deve ter obrigatoriamente a forma de um tronco de cilindro. A altura do difusor deve ser igual a uma vez e meia o diâmetro da base. A altura da base do difusor é 15 centímetros.

Este enunciado indica-nos que há valores variáveis dentro de certos intervalos (a inclinação do plano superior da base, a inclinação das geratrizes do difusor, e o diâmetro da base), isto é, são parâmetros. Depois, há valores que são condicionados por outros (a altura do difusor). E por fim há valores constantes (a altura da base do difusor, a orientação da base inferior do difusor).

Neste caso, o algoritmo poderia ser qualquer coisa como:

1. Especifica-se o diâmetro d da base do difusor no intervalo definido.
2. Se d for menor ou igual a 30 centímetros, então o difusor tem a forma de tronco de cilindro, caso contrário pode ter a forma de tronco de cone (mas não se exclui que possa ter a forma de tronco de cilindro).
3. No caso do tronco de cilindro, especifica-se apenas a inclinação α do plano superior do difusor no intervalo definido, uma vez que as geratrizes têm de ser verticais.
4. No caso contrário, especifica-se a inclinação α do plano superior do difusor, e a inclinação β das geratrizes do difusor em relação à vertical, ambas nos intervalos definidos.

Na figura 2.97 ilustra-se a aplicação do algoritmo para diferentes combinações dos parâmetros d , α e β . Os difusores estão representados numa vista lateral de modo a que o plano superior seja projetante.

Atividade proposta:

Para cada um dos exemplos da figura 2.96, verifique que estão cumpridas as condições impostas no enunciado.

Imagine uma situação de composição formal que possa transformar em algoritmo. Defina os passos do algoritmo.

Na modelação paramétrica a ideia que fica subjacente não é a da modelação de um objeto mas sim a ideia da modelação de uma família de objetos. O algoritmo permite obter várias **instâncias** (objetos individuais) da família.

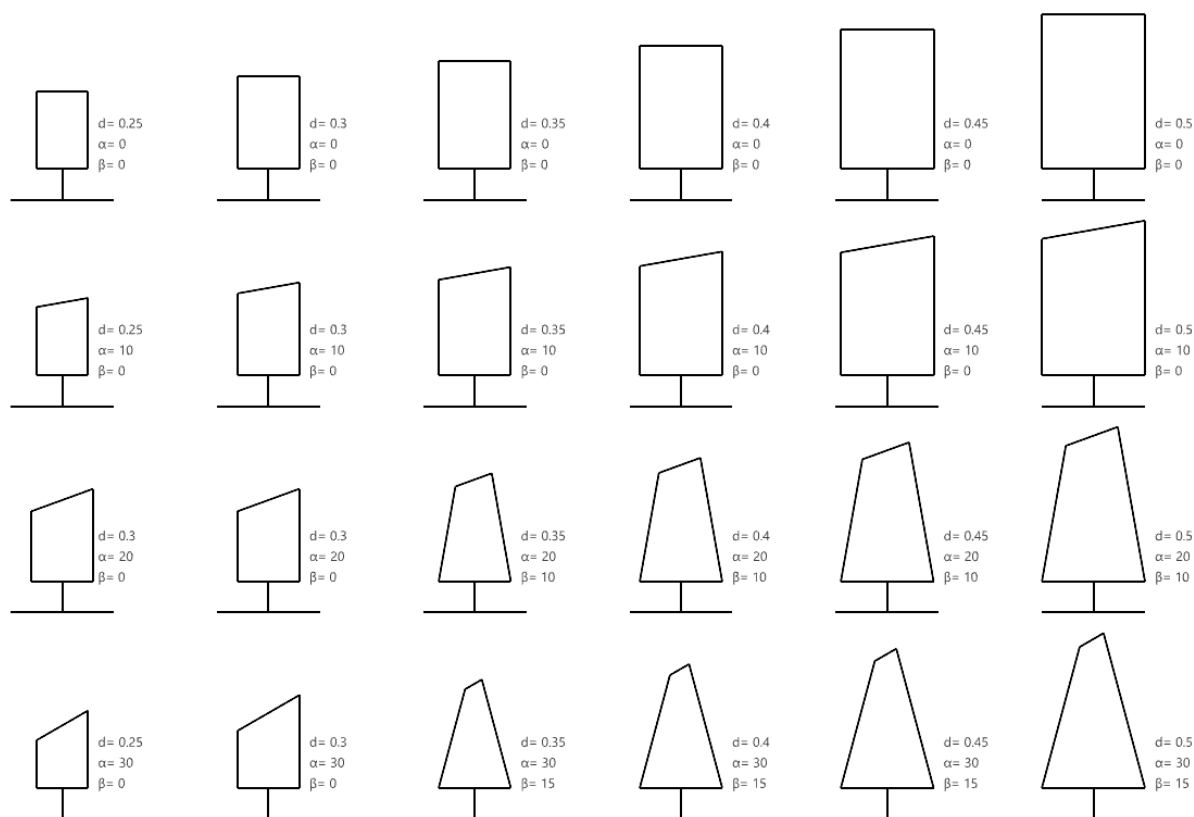


Fig. 2.97. Aplicação de um algoritmo para geração de difusores de abatjour.

Estruturação de um projeto

A conceção de um projeto de arquitetura passa por muitas fases, desde as primeiras ideias, mais ou menos difusas, até à produção de documentação técnica para a construção. Em todas essas fases a geometria está presente por via da representação e por via da estruturação das formas e dos espaços. Essa presença pode ser formal ou conceptual.

Quando dizemos que a presença é formal queremos dizer que se traduz diretamente em forma, por exemplo a utilização de uma malha ordenadora para estruturar a planimetria de um projeto, a utilização de operações booleanas para gerar espaços a partir de determinadas primitivas geométricas, ou a utilização de determinado tipo de superfícies como elemento projetual.

Por exemplo, ao analisar a planta da *Villa Rotonda* de Andrea Palladio (figura 2.98), verifica-se a presença de uma matriz geométrica ordenadora. É claramente perceptível a presença de dois eixos de simetria por reflexão. Por pouco poderia haver ainda outros dois eixos de simetria por reflexão diagonais em relação aos primeiros. O ponto de interseção dos dois eixos é o centro da composição. Com este centro temos uma circunferência e um quadrado nela inscrito. A limitar o volume principal outro quadrado. E no final de cada escadaria, meio quadrado. O mesmo tipo de constatação pode ser, eventualmente, verificada para as alturas do edifício.

Atividade proposta:

No caso da *Villa Rotonda*, procure encontrar desenhos de corte ou alçado e estenda a análise à altimetria.

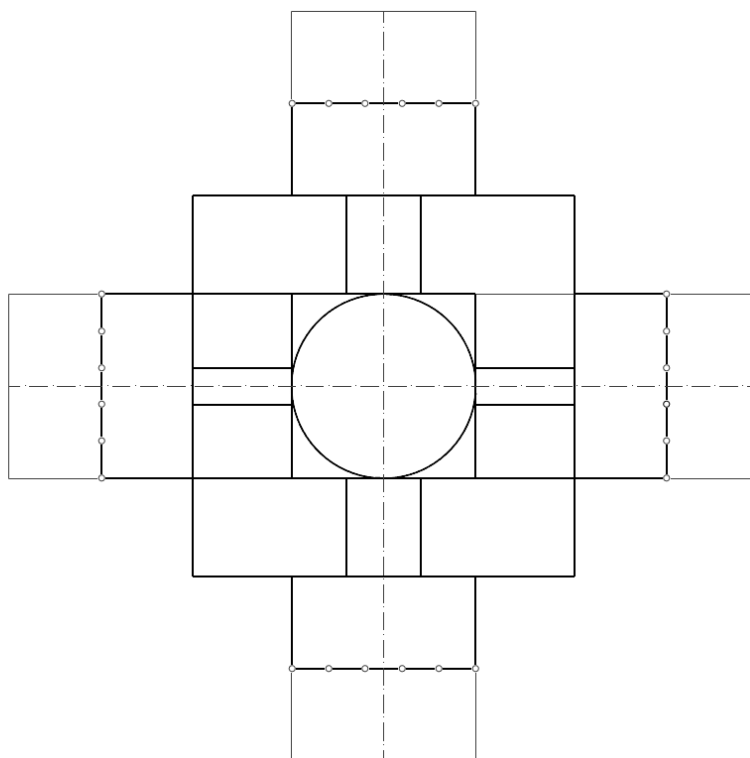


Fig. 2.98. Matriz geométrica da planta da *Villa Rotonda* de Andrea Palladio.

Atividade proposta:

Escolha exemplos de projetos de arquitetura analise-os do ponto de vista das malhas, da geometria base organizadora e dos princípios gerativos.

O projeto da casa Guardiola de Peter Eisenman é um claro exemplo da utilização sistemática de operações booleanas aplicadas a vários cubos e paralelepípedos para gerar a forma e o espaço (figura 2.99).

Na figura está representada uma fase inicial do projeto em que se procurou estudar a volumetria através da subtração e união entre formas cúbicas.

Atividade proposta:

Escolha exemplos de projetos de arquitetura analise-os do ponto de vista das operações booleanas e das transformações geométricas enquanto recurso compositivo.

Outro exemplo que ilustra bem como a geometria está no cerne da concepção e o projeto do restaurante *Los Manantiales* do arquiteto Felix Candela (figura 2.100).

Neste projeto é utilizado um parabolóide hiperbólico base definido por um quadrilátero enviesado $[ABCD]$. Este parabolóide é depois intersecado com dois setores correspondentes a um oitavo de círculo cada, simétricos, por reflexão. No perímetro é intersecado por planos que produzem interseções hiperbólicas. A repetição destes dois setores preenche o espaço dando origem a uma projeção horizontal octogonalizada que faz lembrar as pétalas de uma flor.

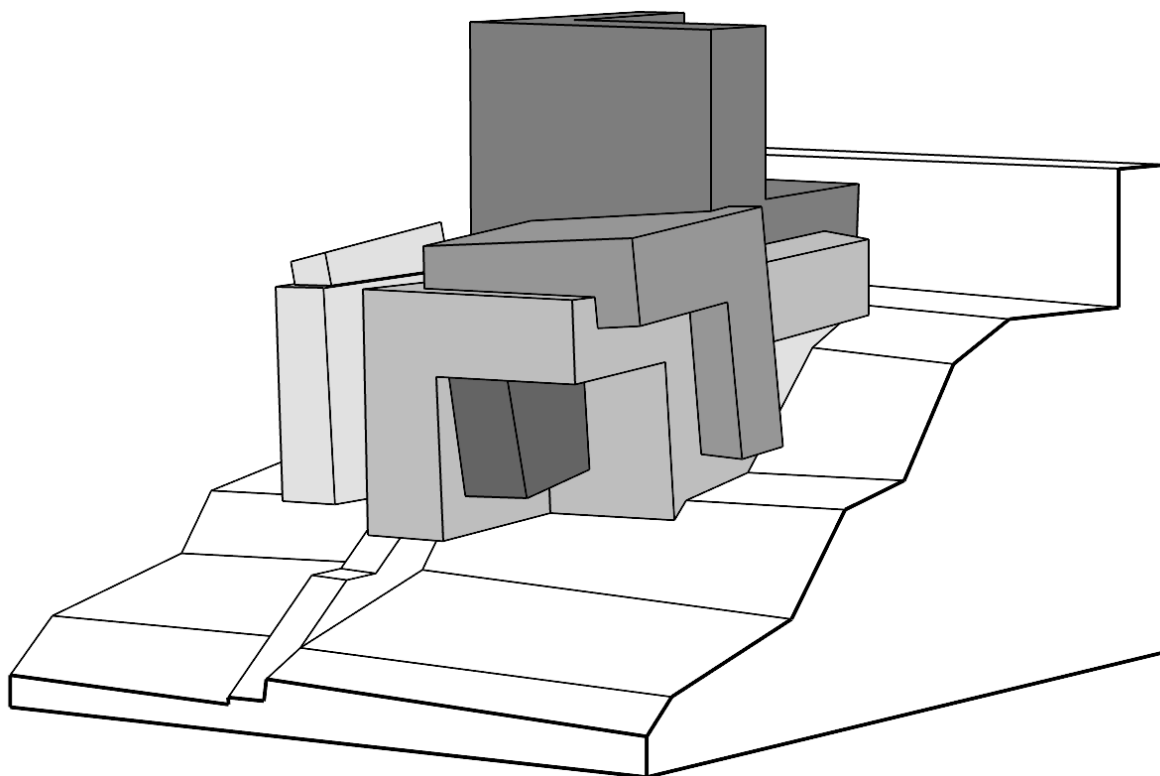


Fig. 2.99. Operações booleanas entre cubos como modo de obter a volumetria do edifício.

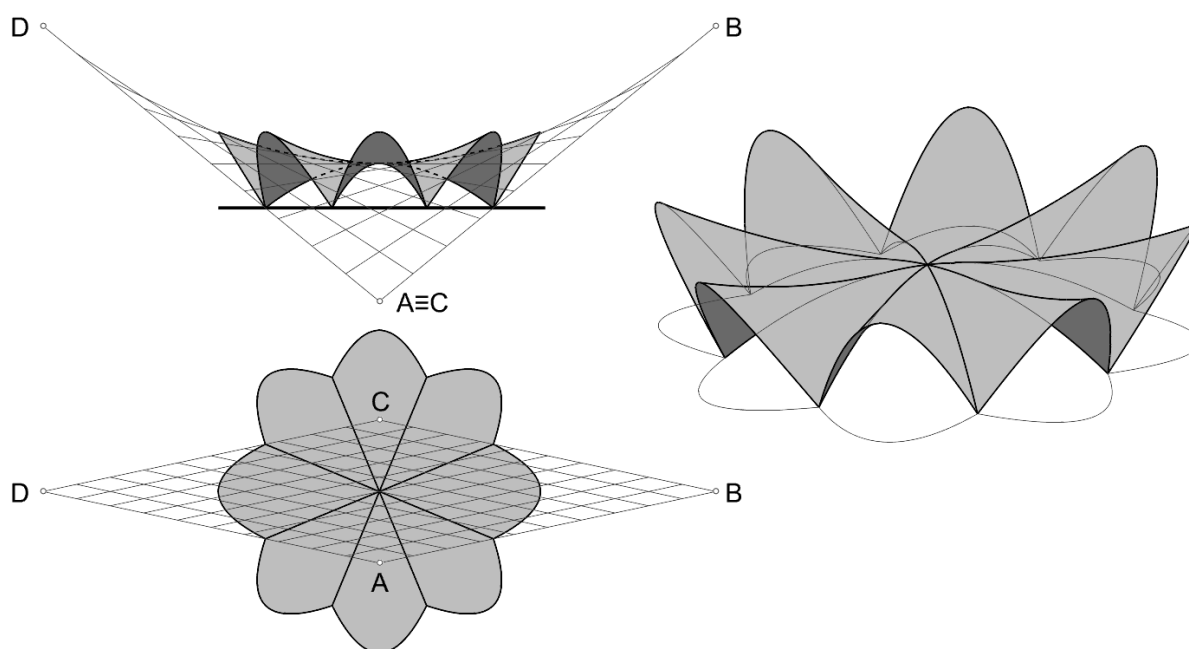


Fig. 2.100. Estrutura geométrica do projeto de *Los Manantiales* baseada na repetição de um parabolóide hiperbólico.

Atividade proposta:

Escolha exemplos de projetos de arquitetura e analise-os do ponto de vista das primitivas geométricas que são utilizadas para compor a forma. Procure entender as operações geométricas que lhes estão subjacentes. Como sugestão, pesquise projetos do arquiteto Felix Candela.

Quando dizemos que a presença é conceptual, queremos dizer que a tradução em forma não é direta. É por exemplo a elaboração de um grafo que traduz as relações entre as várias partes de um programa funcional, ou uma abstração destinada a simulações específicas que não necessitam de uma representação literal da forma.

Na figura seguinte, à esquerda temos representada a planta de um edifício com os vários compartimentos identificados com uma letra. A letra **M** representa o espaço exterior.

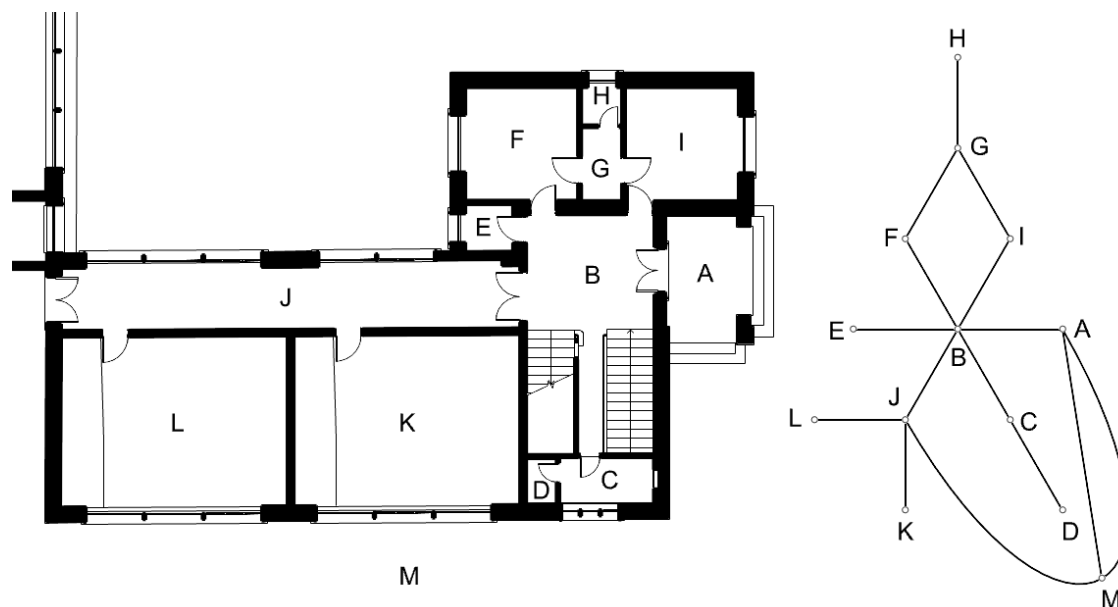


Fig. 2.101. Grafo das ligações (passagens ou portas) entre os espaços de um edifício.

À direita, na figura, temos o **grafo** que representa as ligações (passagens) entre os vários compartimentos (incluindo o exterior do edifício). Esta é uma representação topológica das ligações entre espaços. Neste tipo de representação não importa a dimensão das linhas, a sua forma, a dimensão dos espaços nem a sua configuração. Apenas interessa que **nós** é que são ligados e que **arestas** os ligam. Note-se que o nó **M** tem duas ligações ao nó **A**. Isto significa que há duas passagens do exterior para o espaço **A**. Neste caso não se está a considerar o sentido das ligações uma vez que todas se podem fazer nos dois sentidos. Porém, se houver restrições, o sentido das ligações pode ser indicado com uma seta.

Outra representação que se pode fazer é o grafo de adjacências entre os espaços (figura 2.102). Neste caso pretende-se uma representação que ilustre se há paredes a separar os espaços. Mais uma vez, a forma e as dimensões são irrelevantes.

No grafo da esquerda considerou-se a adjacência com o exterior (apenas não existe para o espaço **G**). Duas linhas a ligar os mesmos nós significa que há duas paredes partilhadas pelos espaços (neste exemplo apenas acontece na relação com o exterior). No grafo da direita omitiram-se as adjacências com o exterior.

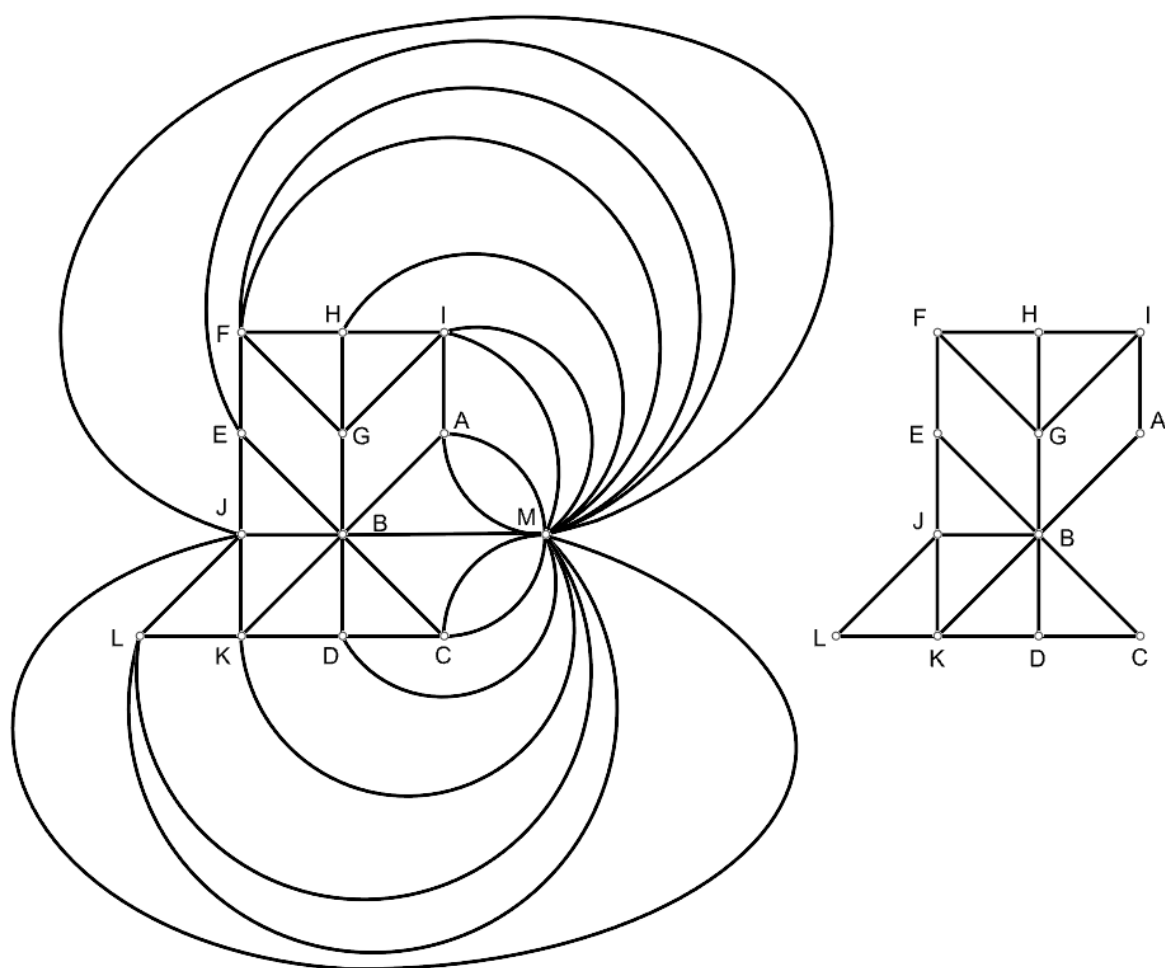


Fig. 2.102. Grafo de adjacências entre os espaços de um edifício.

Atividade proposta:

Escolha exemplos de projetos de arquitetura e analise-os do ponto das ligações e adjacências entre espaços.

Este tipo de representação, por descartar as propriedades métricas, possibilita representações que permitem estudar alguns problemas de forma mais abstrata, como lógicas de segmentação de espaços, hierarquias funcionais e lógicas distributivas, entre outros. Em certo sentido, os grafos correspondem a representações topológicas. Veja-se o exemplo das representações esquemáticas das linhas de metro.

Para aprofundar o estudo sobre grafos e sua relação com a arquitetura, recomenda-se a leitura do segundo capítulo de *Lecciones de Algebra y Geometría* (Alsina e Trillas, 1995).

Modelação de edifícios

Tendencialmente, quando nos referimos a modelação de edifícios, pensamos num modelo tridimensional detalhado e acabado com elevado grau de detalhe e verosimilhança visual com o objeto a que se refere. Isso pode ser assim, mas não é sempre o caso. É importante que esta noção seja desmontada. Um modelo, e especificamente um modelo de um edifício, é uma representação com um determinado nível de abstração que se considera adequado para um determinado propósito. Pode ser apenas uma volumetria geral sem detalhe, pode ser

bidimensional ou tridimensional, pode ser apenas geométrico, ou pode conter informação associada.

No exemplo da figura 2.103 pretende-se chamar a atenção para o facto de a modelação geométrica ser, essencialmente, um processo de desenho no espaço.



Fig. 2.103. Modelação geométrica de uma pequena estrutura funerária.

Consoante a orientação dos vários elementos a modelar, é preciso estruturar uma geometria base, muitas vezes plana. Essas geometrias planas consubstanciam-se como uma espécie de ancoras que suportam o posicionamento dos elementos volumétricos. Estamos a falar de eixos, de projeções, de linhas auxiliares que relacionam vários elementos através de alinhamentos. Sendo a modelação um processo eminentemente tridimensional, não deixa de necessitar da geometria no plano. Por outro lado, depois de o modelo estar concluído para o fim desejado, a obtenção de desenhos bidimensionais a partir do modelo pode operar-se automaticamente, bastando para tanto que o utilizador da ADMG3D especifique os planos de projeção que pretende. Os desenhos da figura 2.104 foram obtidos desta forma a partir do modelo ilustrado na figura 2.103. É importante reforçar que isto não se faz apenas quando tudo está decidido e se pretendem obter desenhos finais. Pelo contrário, é um processo que pode e deve interagir com procura da forma. Estes desenhos, ou outros obtidos a partir do modelo, podem servir como base para elaborar um esboço, testar uma ideia que depois volta ao espaço digital da modelação. E mesmo a modelação pode ser feita de forma exploratória como se estivéssemos a produzir uma maquete de estudo.

Naturalmente a modelação pode ter diversos níveis de complexidade. Na figura 2.105 está representado um modelo volumétrico do Mosteiro da Batalha (aproximadamente 170m de largura). Este modelo serviu de base à impressão 3D à escala 1/200. Por isso, o nível de detalhe foi ajustado à dimensão final do produto pretendido. Isto é, não fez sentido modelar detalhes que não tivessem expressão após o processo de fabricação. Este é um raciocínio análogo ao que fazemos quando desenhamos numa folha de papel. A escala determina o nível de informação a incorporar no desenho e no modelo. Para além da escala, o fim a que se destina o modelo tem implicações no modo como é produzido. Neste caso, era necessária uma subdivisão em volumes encerrados, ou à “**prova de água**”, para possibilitar a impressão 3D.

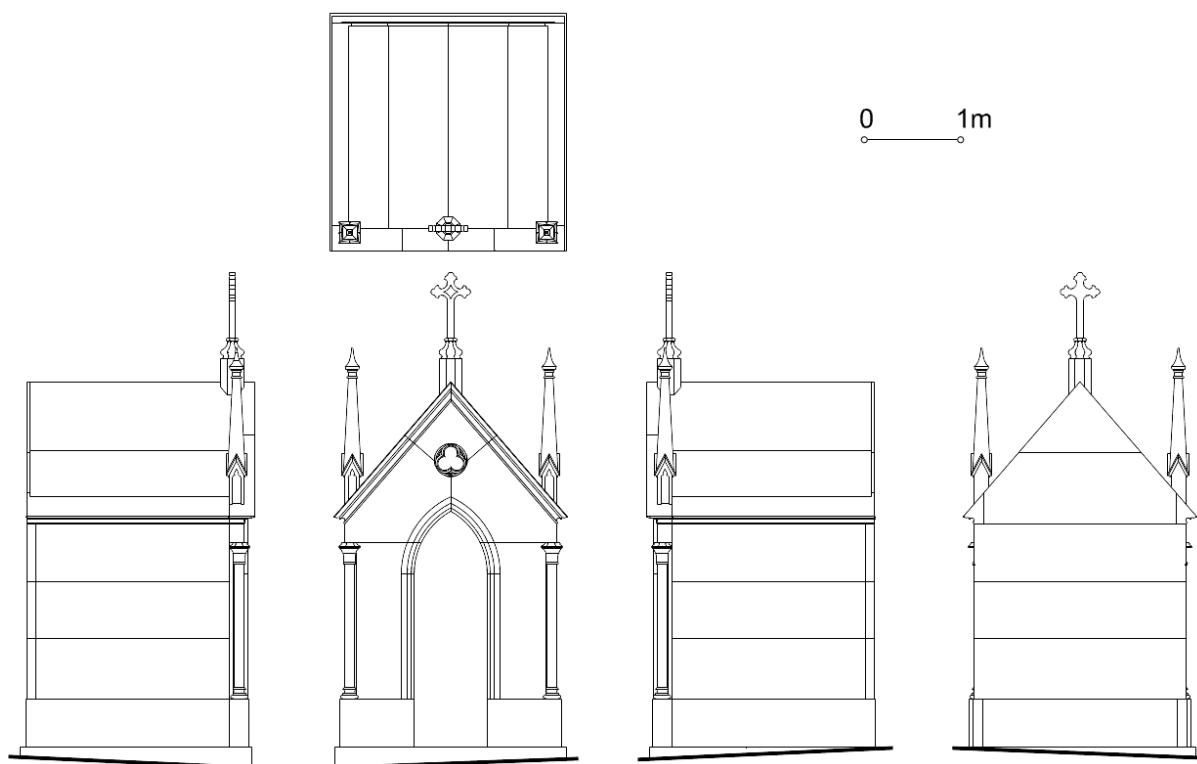


Fig. 2.104. Desenhos 2D extraídos automaticamente a partir do modelo 3D.

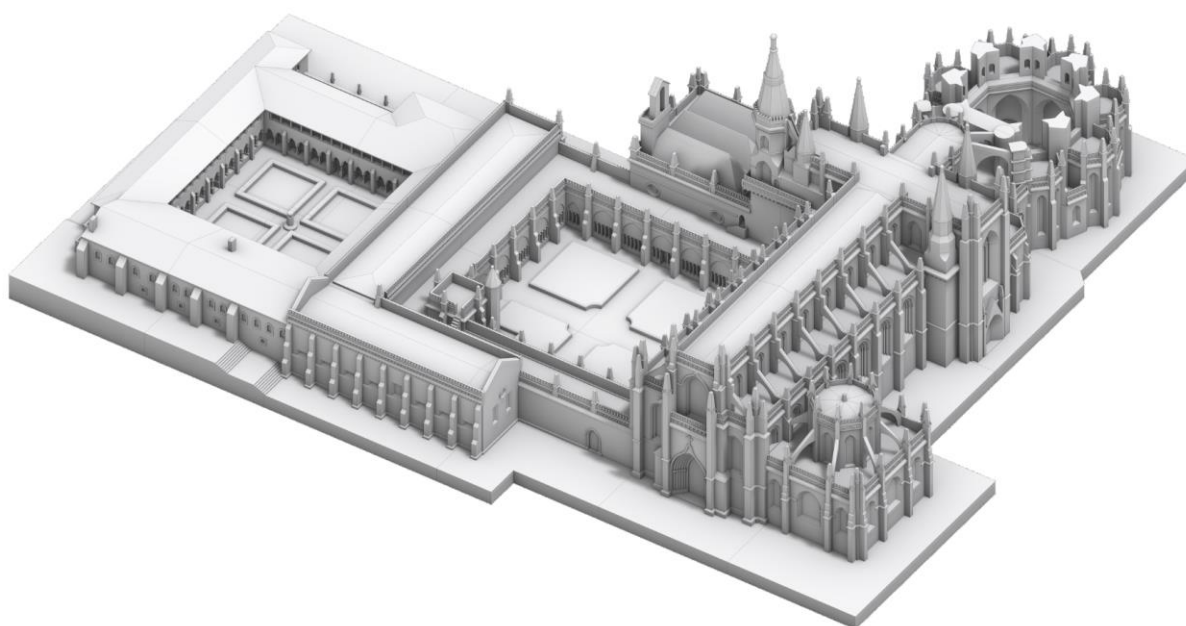


Fig. 2.105. Modelo volumétrico do Mosteiro da Batalha.

Uma vantagem evidente de se dispor de um ADMG3D é a possibilidade de modelar formas orgânicas, isto é, formas que escapam aos processos gerativos baseados em operações geométricas explícitas como interseções de sólidos ou superfícies definidas. Do mesmo modo, a exploração do espaço interior também é uma vantagem. Nos exemplos da figura 2.106. e 2.107 simula-se a colocação de uma cobertura tênsil sobre o terraço do edifício 6 da Faculdade de Arquitetura da Universidade de Lisboa (FAUL).

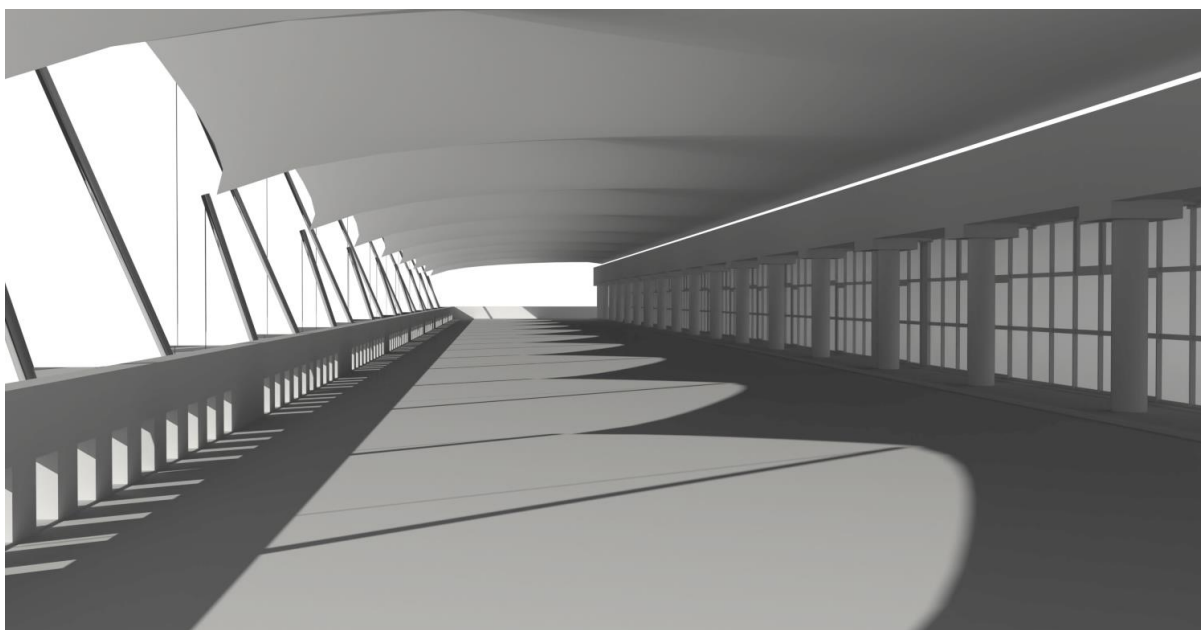


Fig. 2.106. Vista interior de cobertura tênsil sobre o terraço do edifício 6 da FAUL, numa manhã de novembro às 10h.

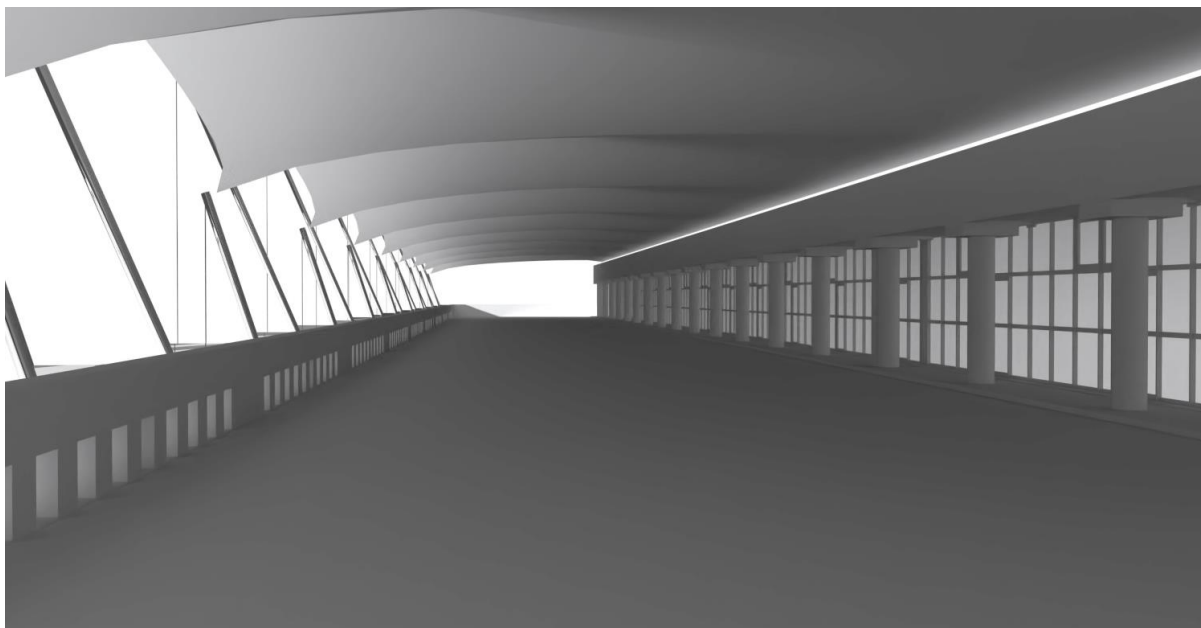


Fig. 2.107. Vista interior de cobertura tênsil sobre o terraço do edifício 6 da FAUL, numa manhã de julho às 10h.

Neste exemplo o objetivo foi a simulação da forma da cobertura sobre um espaço existente e testar como a luz do sol tem diferentes capacidades de penetrar no terraço no inverno e no verão. A ideia de simulação é muito importante quando se constrói um modelo. O que se pretende simular com o modelo? Devemos sempre colocar esta questão.

Outro objetivo pode ser a caracterização construtiva de um edifício. No exemplo da figura 2.108 apresenta-se um excerto de um modelo de informação de um edifício (modelo BIM) em que não é apenas modelada a geometria, mas em que esta está vinculada a elementos construtivos que estão caracterizados em termos materiais. Esta caracterização, pode incluir não só as características materiais mas também preço, fabricante, fase da obra em que devem ser construídos, aspetos relacionados com a manutenção, entre muitos outros.

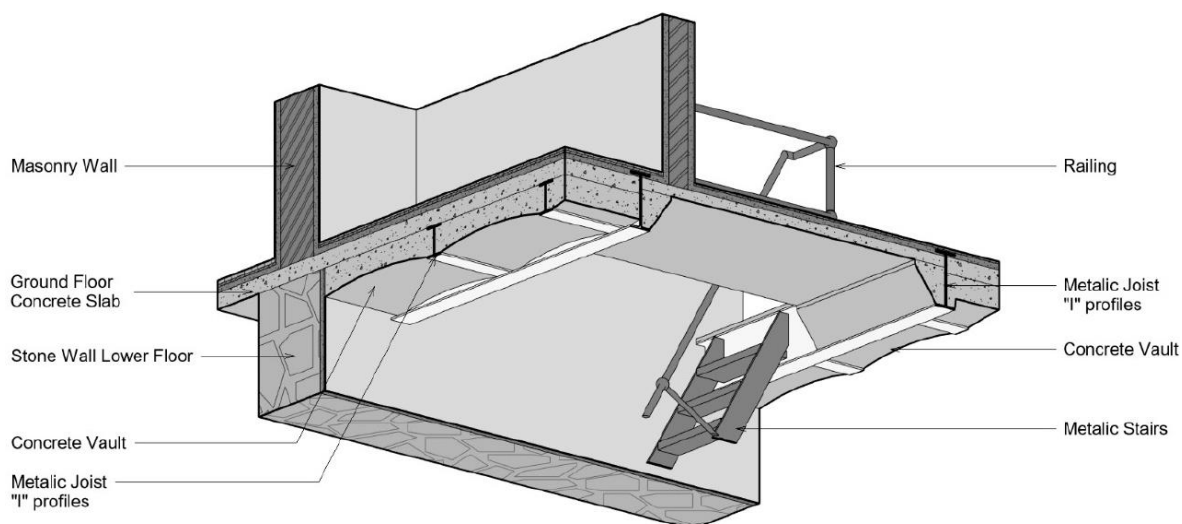


Fig. 2.108. Excerto de um modelo BIM de um edifício (retirado de Rocha et al., 2020).

Atividade proposta:

Procure incorporar as noções discutidas nesta secção na elaboração de modelos nos projetos que estiver a desenvolver.

Modelação de terrenos

Em arquitetura, o terreno é a primeira forma a considerar. Na PARTE I deste texto já abordámos a questão da modelação de terrenos. Fizemo-lo com recurso à representação geométrico descritiva bidimensional. Porém, todas aquelas operações podem ser realizadas espacialmente com a vantagem se ficar facilitado o processo de cálculo de volumes associados à manipulação do terreno.

E comum que a informação inicial de que se dispõe sobre um terreno sejam as curvas de nível e alguns pontos cotados (figura 2.109). Com estes dados é possível criar um **modelo digital de terreno** (MDT) através de superfícies ou redes trianguladas (figura 2.110). Neste processo, mais uma vez, é muito importante atender ao fim que se vai dar ao modelo pois este condiciona a resolução do modelo. Neste caso, resolução significa a maior ou menor quantidade de triângulos que se vai utilizar para representar o modelo do terreno ou a maior ou menor concordância entre a superfície e os dados. No exemplo da figura 2.111 o modelo digital de terreno serviu para mapear as cotas através de uma escala de cinzentos, em que cinzentos mais escuros significam alturas maiores e cinzentos mais claros significam cotas menores. Dispondo de um modelo digital de terreno, todas as operações de escavação e aterro, a que nos referimos na PARTE I, podem agora ser realizadas tridimensionalmente. Note que a configuração específica que se pretende modelar obrigará a implementar estratégias igualmente específicas para lidar com situações como arruamentos, edifícios existentes, e outros constrangimentos. Isto é, num projeto, a modelação de um terreno vem sempre a par da modelação de edifícios.

Atividade proposta:

Procure produzir modelos digitais de terreno a partir de curvas de nível e pontos cotados. Note que terá de mobilizar noções referidas anteriormente acerca de malhas trianguladas e superfícies.

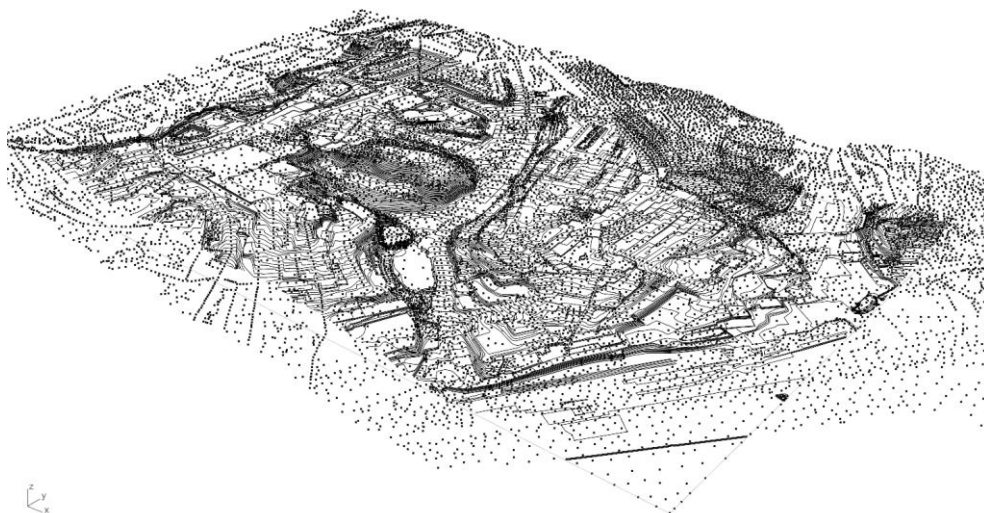


Fig. 2.109. Curvas de nível e pontos cotados.

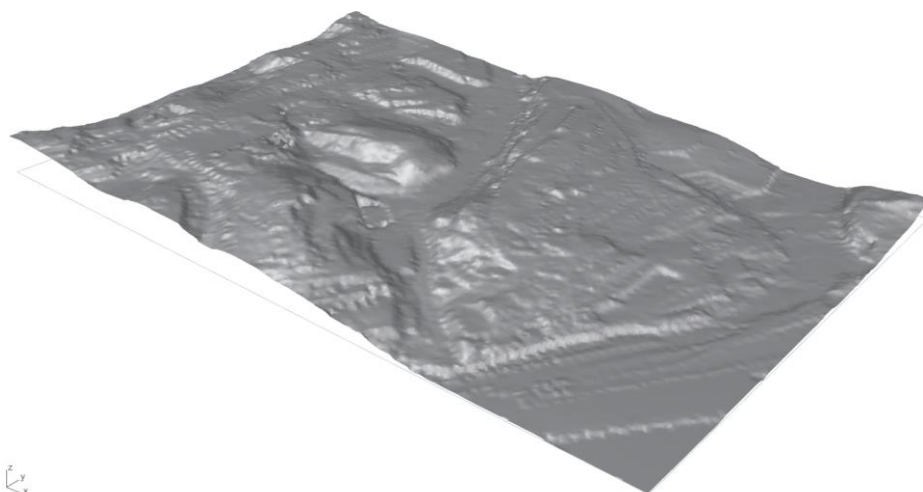


Fig. 2.110. Modelo digital de terreno (MDT) obtido a partir das curvas de nível e pontos cotados.

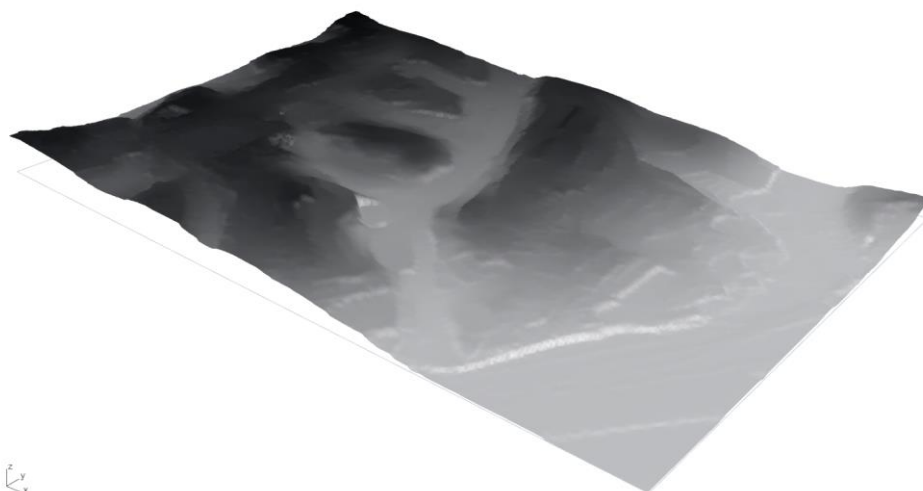


Fig. 2.111. Modelo digital de terreno com um mapeamento das cotas em escalas de cinzento.

Estereotomia

A estereotomia é uma disciplina que se situa entre a geometria e a arquitetura. Estuda o corte dos materiais, em geral a pedra ou a madeira, para a construção com um propósito essencialmente estrutural. As soluções de estereotomia acompanham-nos ao longo da história da arquitetura. As soluções mais comuns são os arcos circulares ou de múltiplos centros, as abóbadas e as cúpulas. Esta disciplina começou a perder relevância no princípio do século XX com o advento do betão armado, quando esta solução construtiva começou a substituir os sistemas estruturais baseados na construção em pedra. Investigação recente, como a desenvolvida pelo arquiteto Fallacara (2012) tem procurado fazer reviver este campo do conhecimento. A abordagem contemporânea tira partido dos meios computacionais como modo de enriquecer os repertórios formais, através da aplicação de transformações topológicas aos modelos tradicionais, e como modo de integrar a definição da forma com o cálculo estrutural.

No exemplo da figura 2.112 começa-se por uma solução estereotómica composta de tetraedros, num material pétreo, dispostos de forma auto suportarem-se. No contorno há uns elementos cuja forma se adapta a receber os tetraedros. Essa disposição está associada a uma superfície $[\alpha]$. Através de uma transformação topológica, a superfície $[\alpha]$ é aplicada sobre uma superfície $[\alpha']$ transformando a solução estereotómica.

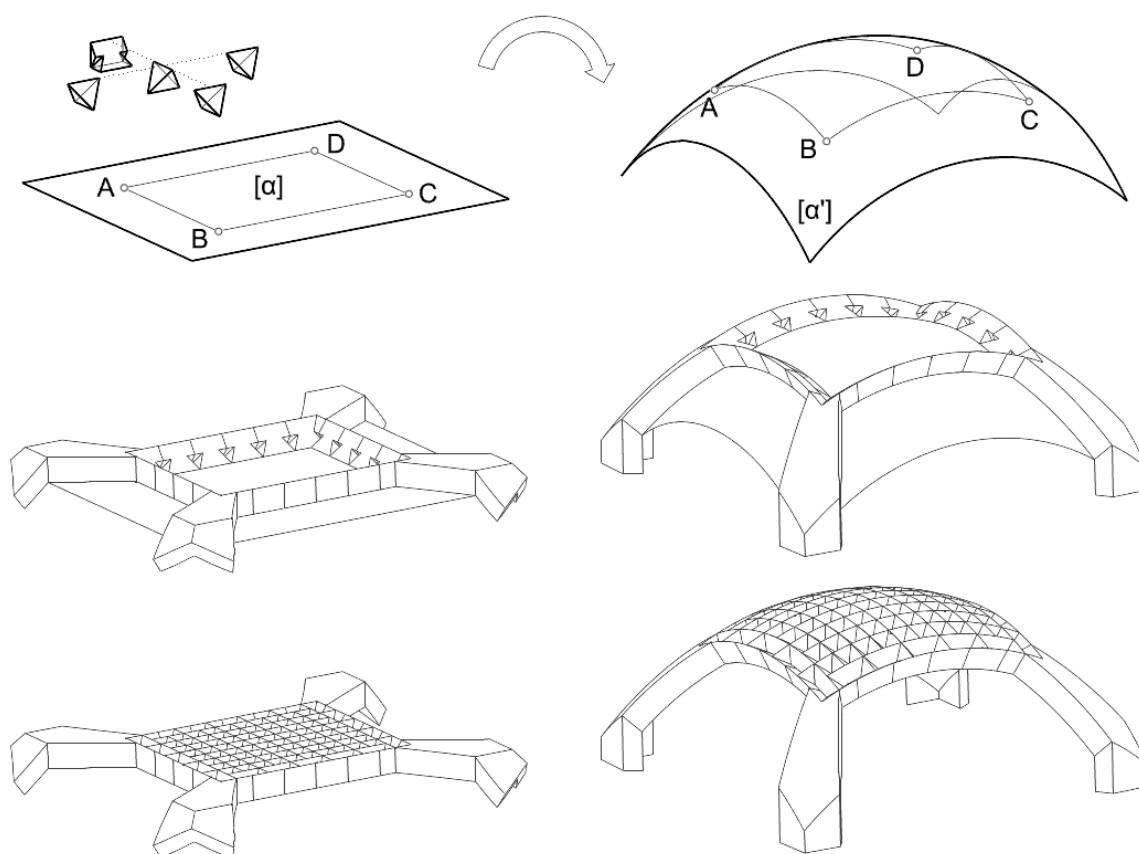


Fig. 2.112. Modelo digital de terreno com um mapeamento das cotas em escalas de cinzento.

Nesta transformação, pouco importa se os elementos que eram iguais passam agora a ser diferentes. Se antes do século XX essa era uma questão relevante face aos processos construtivos, hoje com as tecnologias de fabricação digital essa questão perde relevância.

Cada elemento pode corresponder a um ficheiro distinto que alimenta uma máquina de corte de pedra. A conceção dos apoios tira igualmente partido da transformação topológica que pode operar-se nos dois sentidos.

Atividade proposta:

Analise exemplos de construções estereotómicas presentes em edifícios existentes. Procure produzir modelos que as representem.

De seguida, aplicando transformações topológicas, estude novos repertórios formais estereotómicos derivados dos primeiros.

Formas orgânicas

A modelação de formas orgânicas é potenciada pelos meios computacionais. Entendemos por forma orgânica aquela que, de algum modo, pela sua complexidade e padrão gerativo, nos faz lembrar processos presentes na natureza ou em atividades humanas e que escapam a uma formulação simples através de operações sobre formas básicas. Estes padrões podem servir de inspiração para a criação de formas em arquitetura, design ou nas engenharias. O modo de capturar essas formas pode ser mais ou menos gráfico ou mais ou menos analítico.

O exemplo da figura 2.113 vem do mundo da culinária e corresponde a uma forma de pasta italiana (Legendre, 2011, p.155). Mas pode ser perfeitamente aplicado ao design ou à arquitetura.

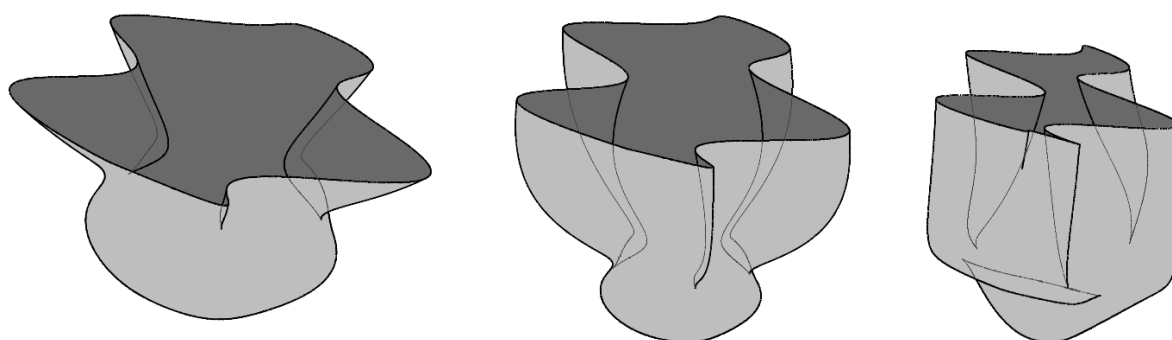


Fig. 2.113. Exemplo de uma forma orgânica inspirada pela

A parametrização uv da superfície à esquerda é dada pelas fórmulas seguintes:

$$X = \cos\left(\frac{u}{75}\pi\right) \left(\sin\left(\frac{v}{50}\pi\right) + 3\sin\left(\frac{v}{200}\pi\right) + \frac{3v}{1000} \cos\left(\frac{u+25}{25}\pi\right) \right)$$

$$Y = \sin\left(\frac{u}{75}\pi\right) \left(\sin\left(\frac{v}{50}\pi\right) + 3\sin\left(\frac{v}{200}\pi\right) + 0.7\left(\frac{v}{100}\right)^2 \sin\left(\frac{u}{15}\pi\right) \right)$$

$$Z = 2 \left(1 - \left(\cos\left(\frac{v}{200}\pi\right) \right)^5 + \left(\frac{v}{100} \right)^{4.5} \right)$$

Com u no intervalo entre 0 e 150 e v no intervalo entre 0 e 100.

Alterando alguns valores nos divisores das fórmulas e os intervalos dos parâmetros, é possível obter variantes, como as que se ilustram ao centro e à direita na figura. Naturalmente esta trata-se de uma formulação analítica.

Já o exemplo da figura 2.114 inspira-se em formas tórico ovoides que nos remetem para alguma arquitetura contemporânea como a produzida pela arquiteta Zaha Hadid.

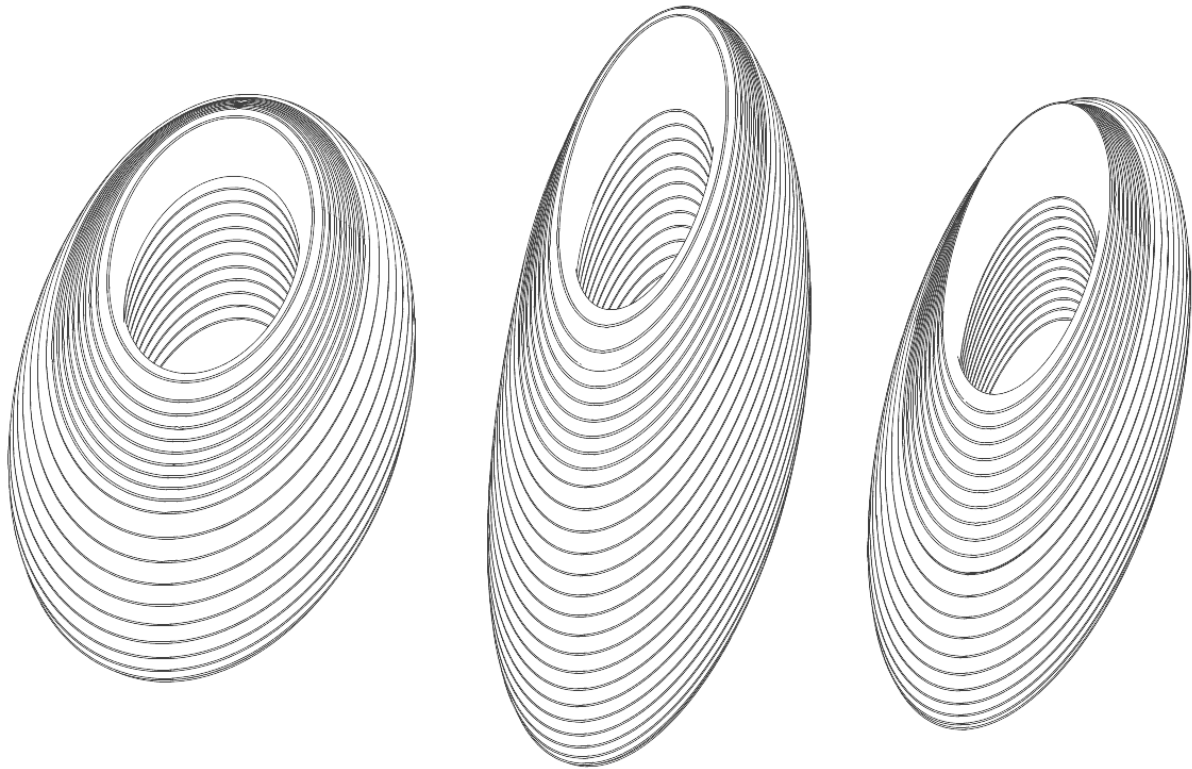


Fig. 2.11X. Exemplo de uma forma orgânica inspirada em estruturas ovoides.

Neste caso, a parametrização da forma processou-se de modo gráfico através de um ADMG3D. Dada a natureza paramétrica do modelo produzido, foi possível obter várias instâncias do mesmo.

Atividade proposta:

Analise exemplos de arquitetura de formas orgânicas e procure inferir que processos gerativos podem estar na sua gênese. De seguida procure traduzir esses processo em modelos paramétricos.

PARTE III – Captura da Realidade

(em desenvolvimento)

Referências

- Aguilar, L. (1997). *Alguns conceitos geométricos*. SPB Editores.
- Albuquerque, L. (1969). *Elementos de geometria projectiva e geometria descritiva*. Livraria Almedina.
- Alsina, C., & Trillas, E. (1995). *Lecciones de Algebra y Geometria (7ª)*. Gustavo Gili.
- Arnheim, R. (1969). *Visual thinking*. University of California Press.
- Asensi, F. I. (1996). *Geometría Descriptiva Superior y Aplicada (4th ed.)*. Editorial Paraninfo.
- Asensi, F. I. (2000). *Geometría descriptiva (24ª)*. Editorial Paraninfo.
- Aubert, J. (1996). *Axonometrie, théorie, art et pratique des perspectives parallèles*. Editions de la Villette.
- Bois, Y.-A. (1984). Avatars de l'axonométrie. Em *Images et imaginaires d'architecture* (pp. 129–134). Centre Georges Pompidou.
- Boyer, C. (1999). *História da Matemática* (E. Gomide, Trad.; 2nd ed.). Editora Edgard Blücher Ltda.
- Chasles, M. (1837). *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. M. Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale.
- Coxeter, H. S. M. (sem data). *Regular Polytopes* (3rd ed.). Dover.
- Coxeter, H. S. M. (1974). *Projective Geometry* (Second Ed.). Springer-Verlag.
- Coxeter, H. S. M., Longuet-Higgins, M. S., & Miller, J. C. P. (1954). Uniform polyhedra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*(246), 401–450.
- Deforges, Y. (1981). *Le graphisme technique. Son histoire et son enseignement*. Champ Vallon.
- Estrada, M. F., Correia de Sá, C., Queiró, J. F., Silva, M. do C., & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Universidade Aberta.
- Euclid. (1925a). *The Thirteen Books of the Elements* (Thomas L. Heath, Trad.; 2nd ed., Vol. 2). Dover.
- Euclid. (1925b). *The Thirteen Books of The Elements* (Sir Thomas L. Heath, Trad.; 2nd ed., Vol. 1). Dover.
- Euclid. (1925c). *The Thirteen Books of The Elements* (S. T. L. Heath, Trad.; 2nd ed., Vol. 3). Dover.
- Fallacara, G. (2012). *Stereotomy. Stone Architecture and New Research*. Presses des Ponts.
- Fraser, I., & Henmi, R. (sem data). *Envisioning Architecture: An Analysis of Drawing*. John Wiley and Sons, Inc.
- Godeaux, L. (1936). *As geometrias* (J. da S. Paulo (1960), Trad.). Europa-América.

- Hachette, J. N. (1828). *Traité de géométrie descriptive* (2ème.). Corby, Libraire Éditeur.
<https://doi.org/10.3931/e-rara-58640>
- Hilbert, D. (1930). *Fundamentos da Geometria* (P. L. Fortes & A. J. F. Oliveira (2003), Trans.; 2ª Ed.). Gradiva.
- Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1952). *Geometry and the imagination* (P. Nemenyi, Trans.; 2ª ed.). Chelsea Publishing Company.
- Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics* (2nd ed.). Addison Wesley.
- Lawson, B. (2004). *What Designers Know*. Elsevier.
- Legendre, G. (2011). *Pasta by Design*. Thames & Hudson.
- Mateus, L. (2004). *Sistema axonométrico de representação. História, Teoria e Prática* [Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica]. Universidade Técnica de Lisboa, Faculdade de Arquitectura.
- Meserve, B. (1954). *Fundamental concepts of Geometry*. Dover.
- Mitchell, W. J., & McCullough, M. (1994). *Digital Design Media* (2ª ed.). Reinhold, Van Nostrand.
- Monge, G. (1797). *Géométrie Descriptive* (Bibliothèque nationale de France). Baudouin (Éditions Jacques Gabay, fac-similé 1989).
- Poncelet, J. V. (1865). *Traité des propriétés projectives des figures: Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain (Tome 1)* (G. Villars, Ed.; 2ª ed.).
- Poncelet, J. V. (1866). *Traité des propriétés projectives des figures: Ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain (Tome 2)* (G. Villars, Ed.; 2ª ed.).
- Pottman, H., Asperl, A., Hofer, M., & Kilian, A. (2007). *Architectural Geometry* (1st ed.). Bentley Institute Press.
- Rocha, G., Mateus, L., Fernández, J., & Ferreira, V. (2020). A Scan-to-BIM Methodology Applied to Heritage Buildings. *Heritage*, 3(1), 47–67. <https://doi.org/10.3390/heritage3010004>
- Sá, R. (1982). *Edros. Projeto*.
- Serres, M. (1993). *As origens da geometria* (A. Simões & M. da G. Pinhão (1997), Trans.). Terramar.
- Veloso, E. (1998). *Geometria, Temas actuais*. Instituto de Inovação Educacional.
- Viana, V. (2020). *Aplicações Didáticas sobre Poliedros para o Ensino da Geometria* [Doutoramento, Tese Vera Lúcia Viana Lopes.pdf].
- Wikipedia contributors. (2024, novembro 14). Dual uniform polyhedron. *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.
https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dual_uniform_polyhedron&oldid=1257453144

Wikipedia contributors. (2025a, maio 2). *De Boor's algorithm* [Wikipedia, The Free Encyclopedia].

https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=De_Boor%27s_algorithm&oldid=1288375716

Wikipedia contributors. (2025b, maio 8). Cross product. *Wikipedia, The Free Encyclopedia*.

https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cross_product&oldid=1289418058

Wildberger, N. (Diretor). (2009). *Parametrizing circles* [Gravação de vídeo].

<https://www.youtube.com/watch?v=xp0H3Aw0j6E>

Woodbury, R. (2010). *Elements of Parametric Design*. Routledge.