Luís Miguel Cotrim Mateus - lmmateus@fa.ulisboa.pt

GDC

Sebenta

1. Revisões de geometria no plano e no espaço
2. Geometria e Design
    - 2.1. A geometria como suporte e estruturação da forma
    - 2.2. Geometria como representação
3. Geometria Descritiva
    - 3.1. Múltipla Projeção ortogonal (MPO)
    - 3.2. Projeções cotadas (PC)
    - 3.3. Axonometria
    - 3.4. Perspetiva linear
4. Estudo das superfícies
    - 4.1. Poliedros
    - 4.2. Superfícies de revolução
    - 4.3. Superfícies planificáveis
    - 4.4. Superfícies empenadas

1. Revisões de geometria no plano e no espaço

Curvas

O PONTO é uma entidade sem dimensão, isto é, adimensional.

A LINHA é uma entidade unidimensional gerada pelo movimento contínuo do ponto.

As linhas podem ser CURVAS ou não curvas; às linhas não curvas dá-se o nome de RECTAS.

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito. A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

Uma LINHA ESPACIAL ou TORSA é uma linha que não está contida num plano.

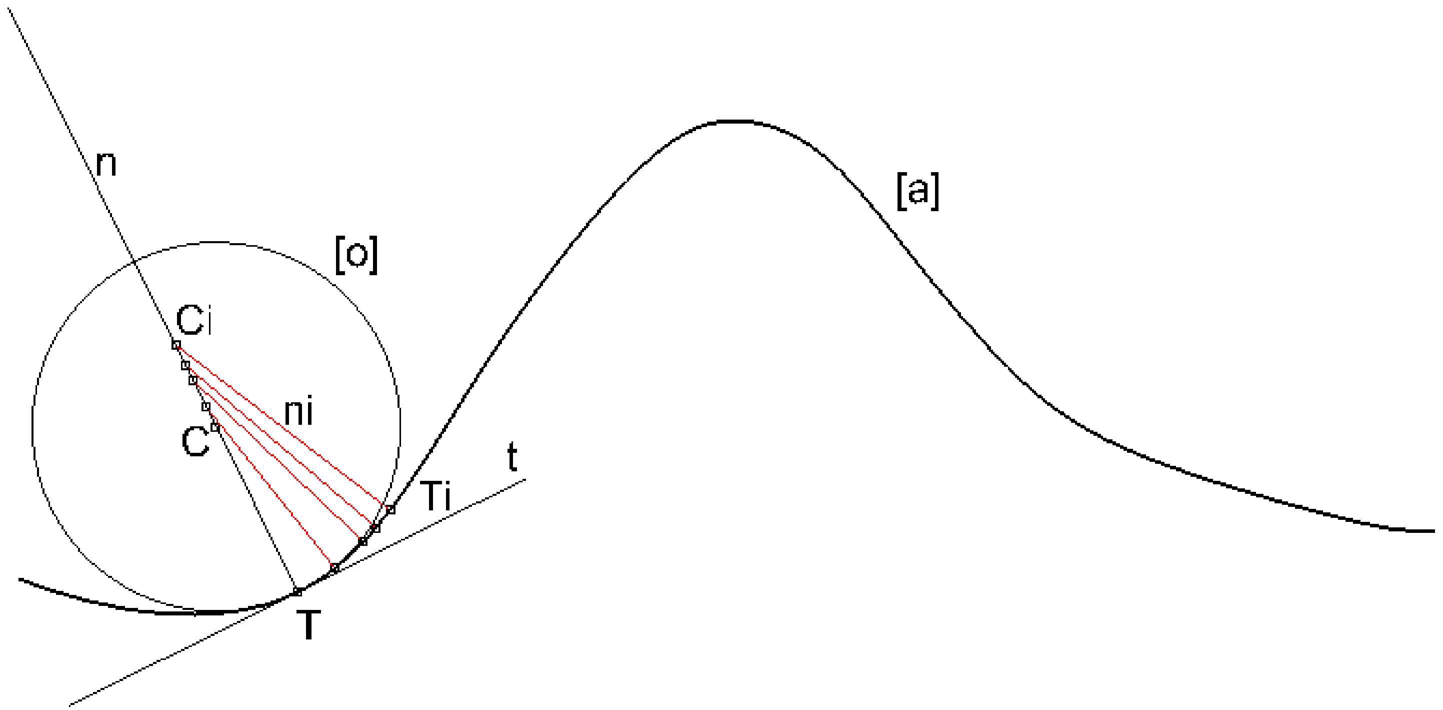
Uma linha curva plana está sempre contida num plano.

À excepção da circunferência, a CURVATURA das linhas varia.

A curvatura de uma linha num ponto é o inverso do RAIO DE CURVATURA da linha nesse mesmo ponto. E o raio de curvatura da linha num ponto é o raio da CIRCUNFERÊNCIA OSCULADORA à curva naquele ponto.

O centro desta, o ponto C na figura seguinte, pode ser considerado como a posição limite da intersecção de duas rectas normais à curva quando o arco, definido pelos pontos comuns à curva e às normais, tende para zero, conforme se ilustra na figura seguinte.

Curvas



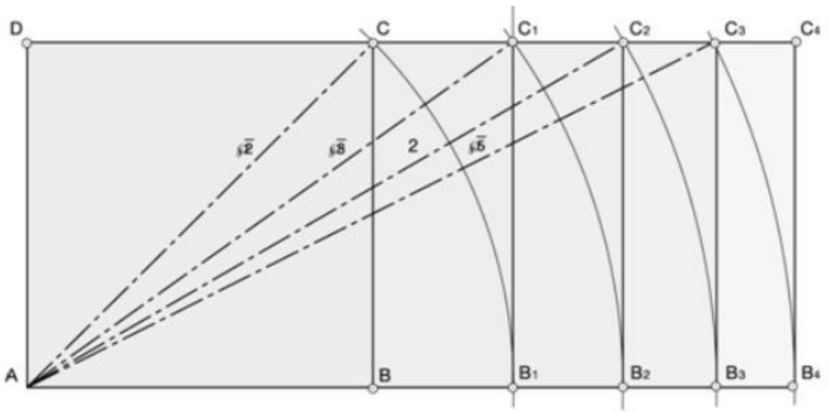
Na figura, às rectas *t* e *n* pode ser associado uma sistema de coordenadas rectangular, de origem em *T* que, como a curva é plana, está contido no plano da mesma. O terceiro eixo deste sistema de coordenadas, é uma recta passante pelo ponto *T* que é simultaneamente perpendicular às rectas *t* e *n* , e que se designa por recta BI-NORMAL à curva em *T* .

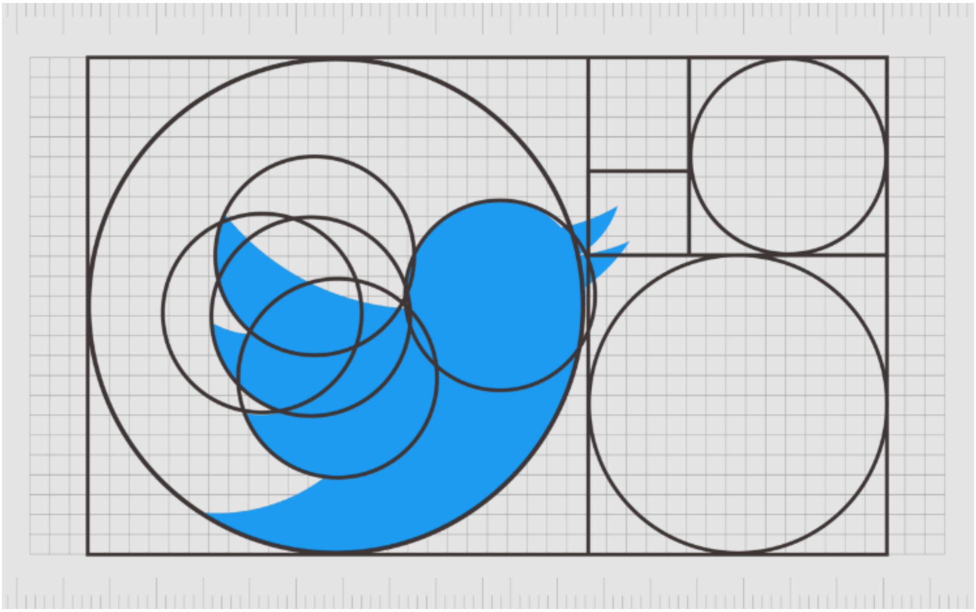
Estes conceitos podem ser estendidos às CURVAS TORSAS, isto é, às curvas não planas.

Numa curva torsa, a bi-normal roda em torno da tangente à medida que o ponto *T* se desloca na curva. À maior ou menor taxa de rotação da bi-normal, dá-se o nome de TORSÃO.

Proporções

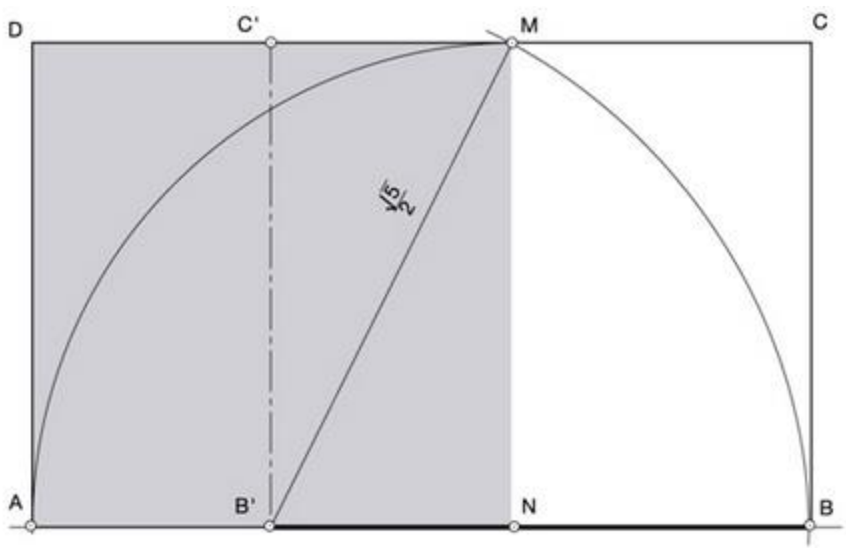
Rectângulo raíz de 2, de 3, de 4, de 5...





https://fabrikbrands.com/proportion-in-graphic-design-principles-of-design-proportion/

Rectângulo de ouro

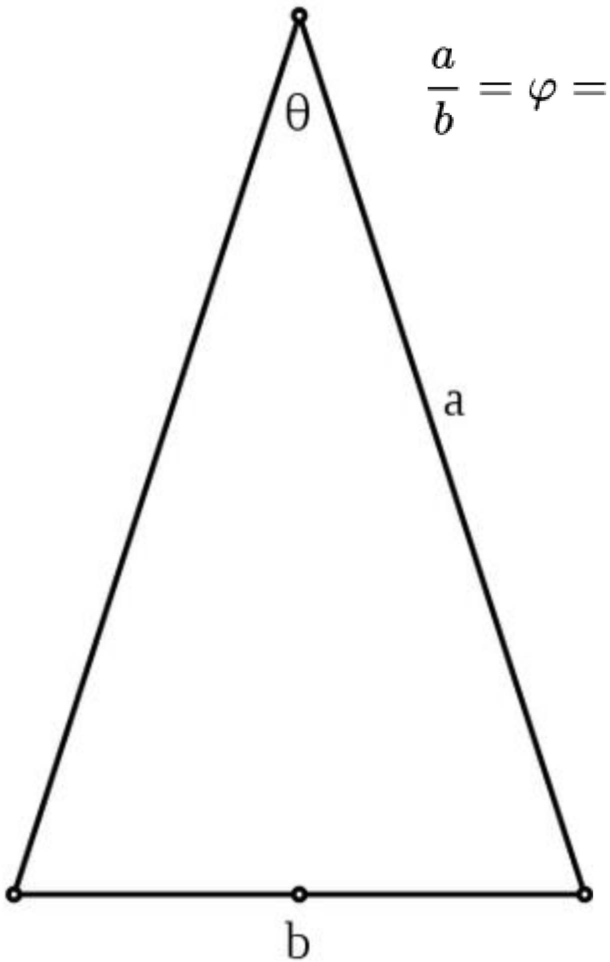


http://www.signoslapidarios.org/inicio/analisis-y-descripcion-de-las-formas/134-geometria-medieval

https://alvalyn.com/is-the-rule-of-thirds-an-ideal-proportion/

Razão áurea

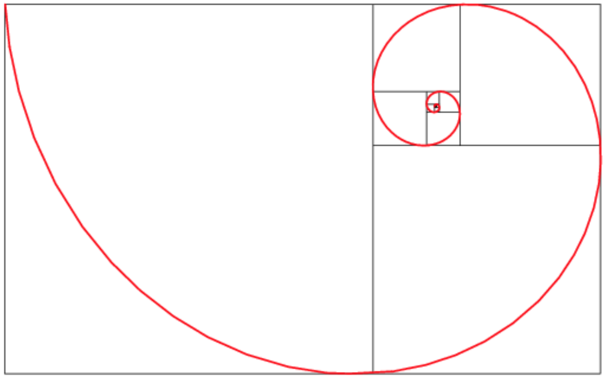
Triângulo de Ouro



$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics)

Espiral de Ouro (pode ser aproximada por quartos de circunferência)



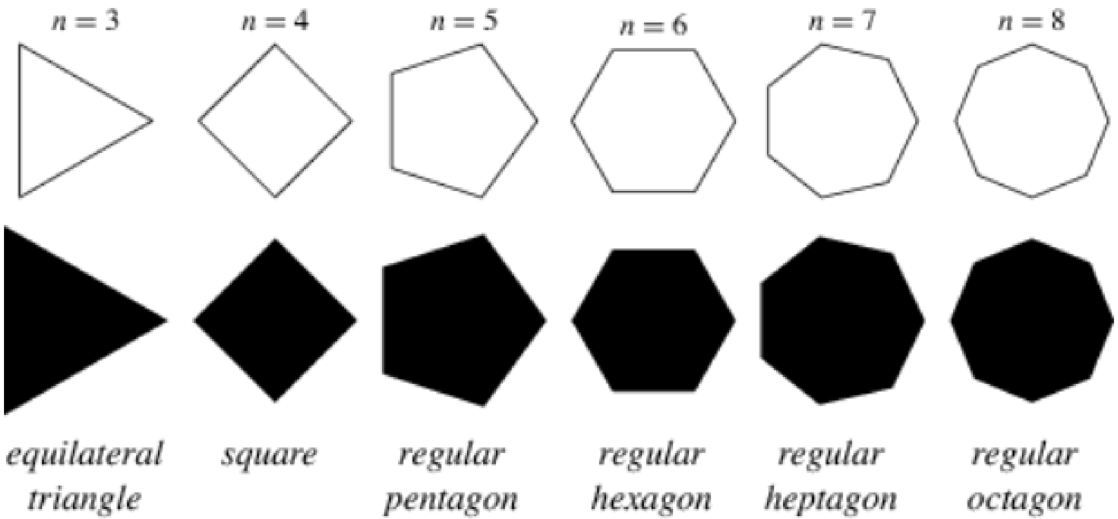
http://mathworld.wolfram.com/GoldenSpiral.html

https://www.sciencefriday.com/educational-resources/fibonacci-sequence-handy-mathematical-approach-looking-evolution/

https://insteading.com/blog/fibonacci-sequence-in-nature/

Polígonos e prismas regulares

http://mathworld.wolfram.com/RegularPolygon.html



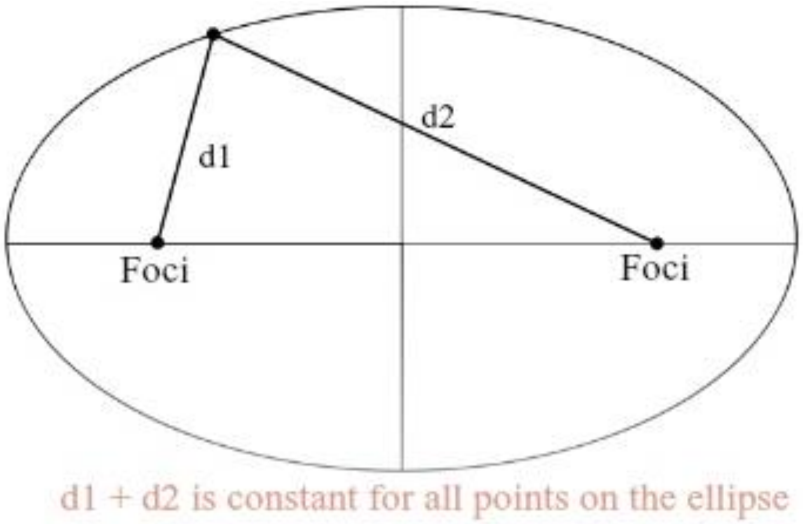
http://www.jiruibottle.com/Cheap-Polygon-Shape-Glass-Storage-Jar-Square-Clear-Glass-Jam-Food-Jar-for-Kitchen-pd47654663.html

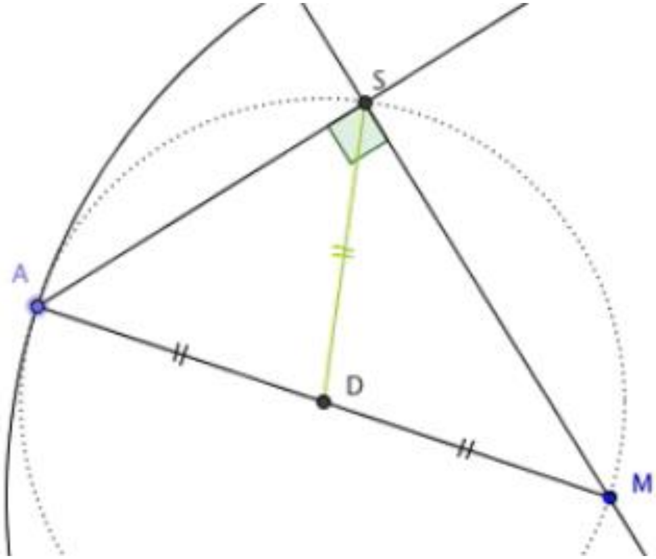
https://www.vooglam.com/blogDetail/polygon-glasses-frames-vogue-frames-vooglam

https://www.taylorllorentefurniture.com/furniture-seating/armchairs/designer-pentagon-armchair-pr027

Lugar geométrico

Elipse e circunferência como lugares geométricos

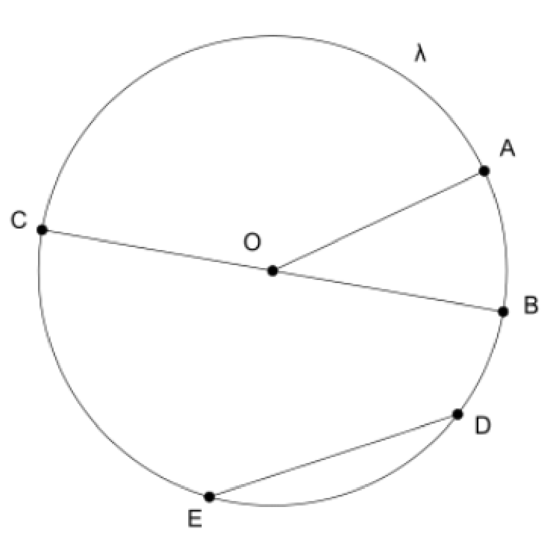




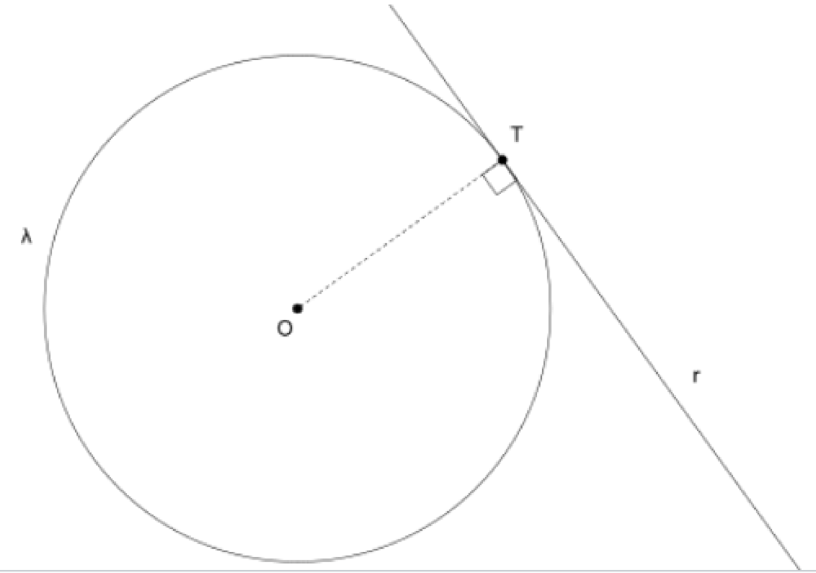
https://study.com/academy/lesson/locus-of-points-definition-methods-examples.html

https://www.google.com/search?sxsrf=ACYBGNRkMQAW9Yz71hxePEpD8pHu5WxRdA:1568585478551&q=circle+as+a+locus&tbm=isch&source=univ&client=firefox-b-d&sxsrf=ACYBGNRkMQAW9Yz71hxePEpD8pHu5WxRdA:1568585478551&sa=X&ved=2ahUKEwipwv6h7NPkAhVp8-AKHUPUDP8QsAR6BAgEEAE&biw=1374&bih=776#imgrc=IRdkXYd3KK3rkM:

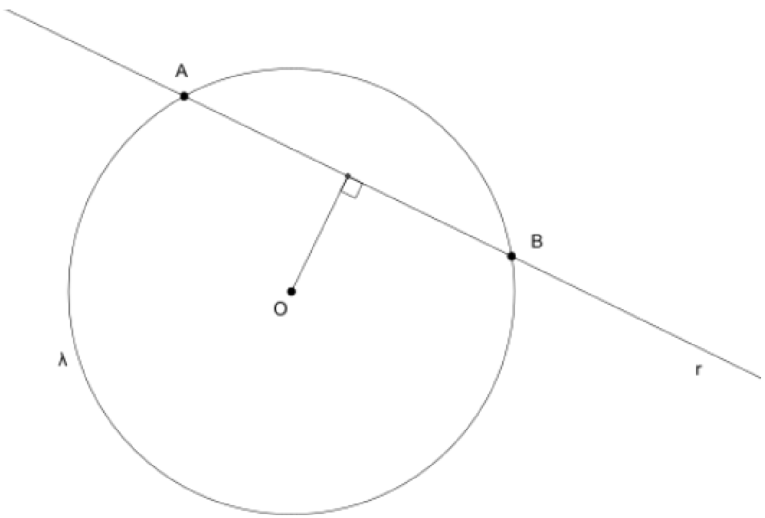
Circunferência



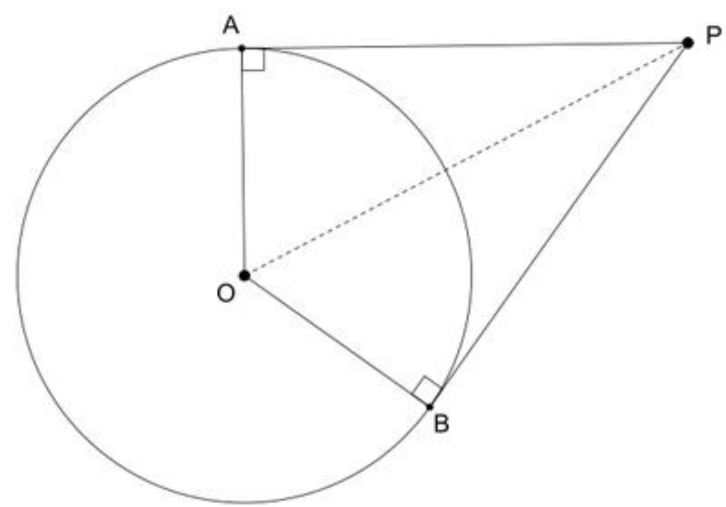
Exemplos de corda, diâmetro e raio de uma circunferência: Raio $\overline{AO}$, Diâmetro $\overline{BC}$ e Corda $\overline{ED}$.



Reta tangente a uma circunferência

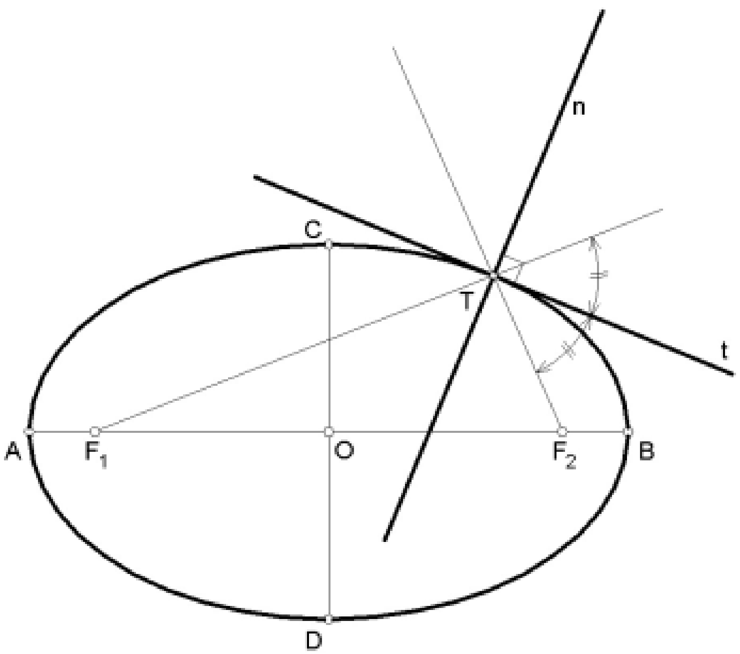


Reta secante a uma circunferência

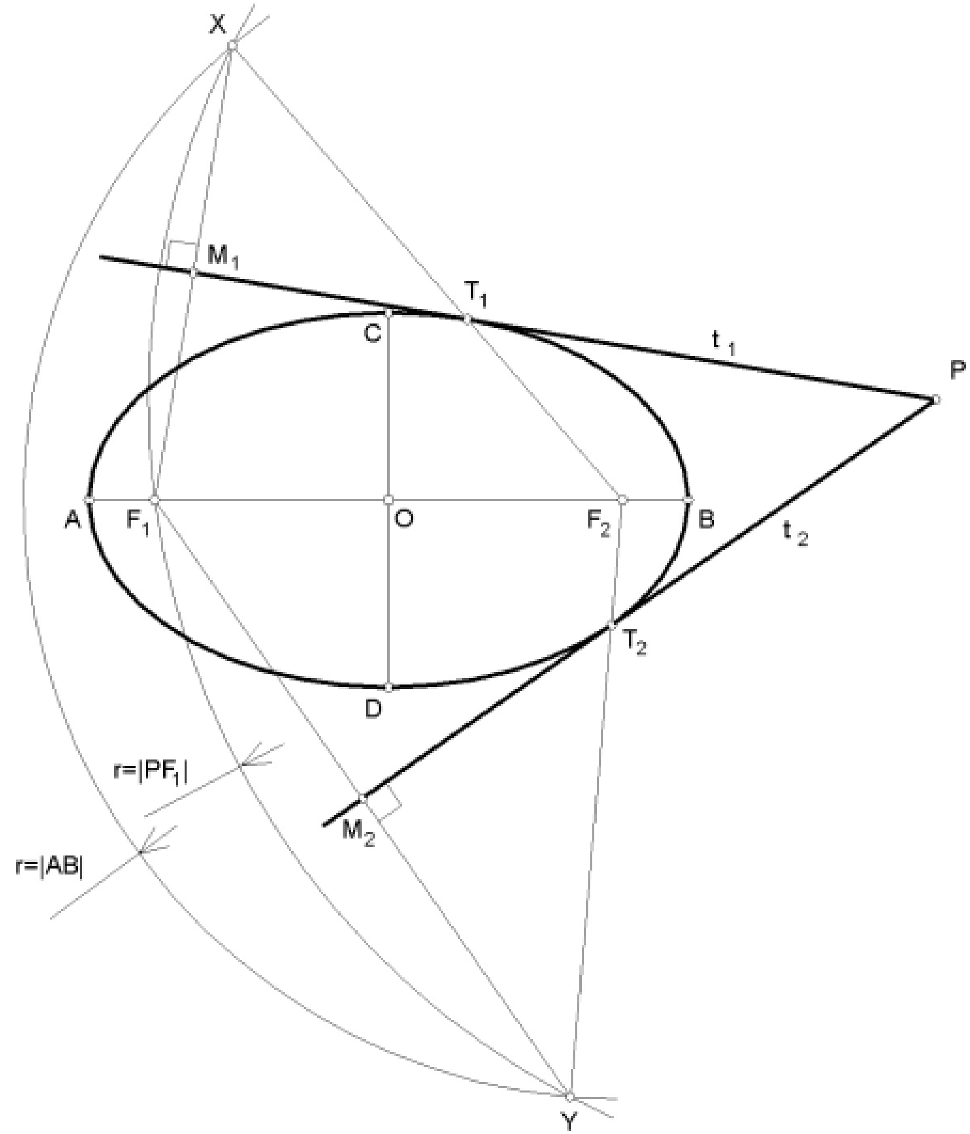


https://pt.wikipedia.org/wiki/Circunfer%C3%AAncia

Elipse



$$|AB| = |F_1T| + |F_2T| = K$$

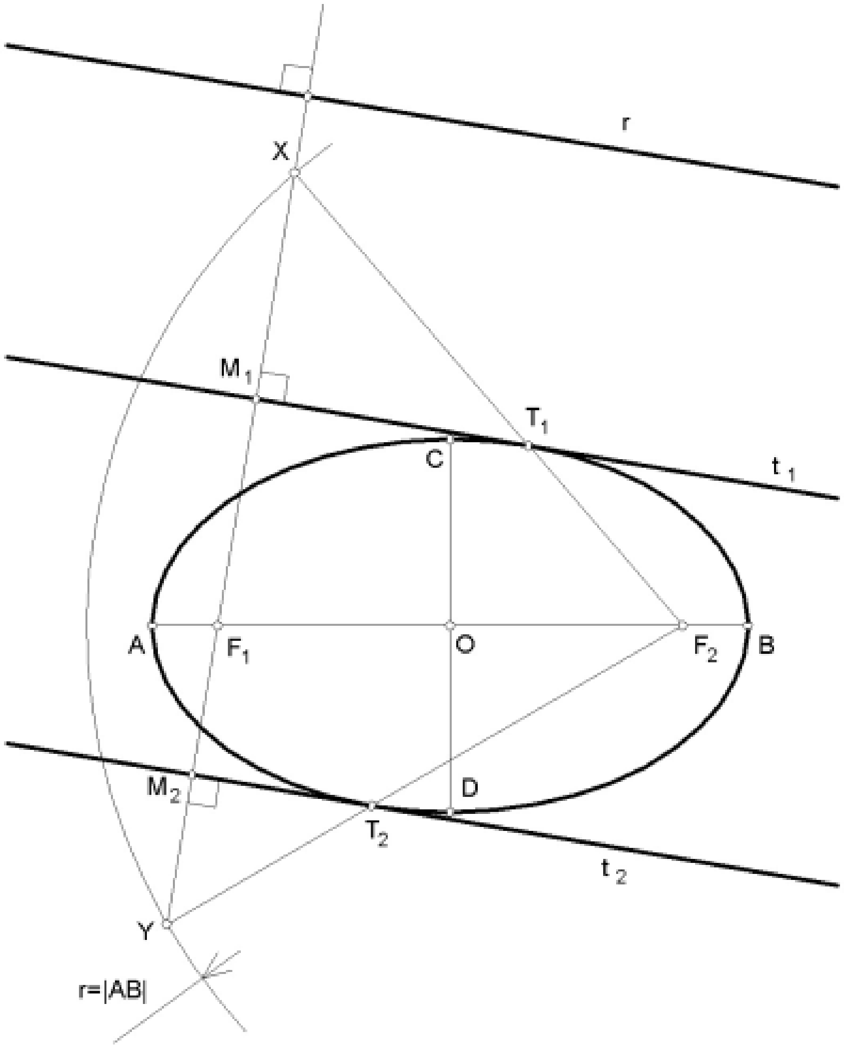


DEFINIÇÃO

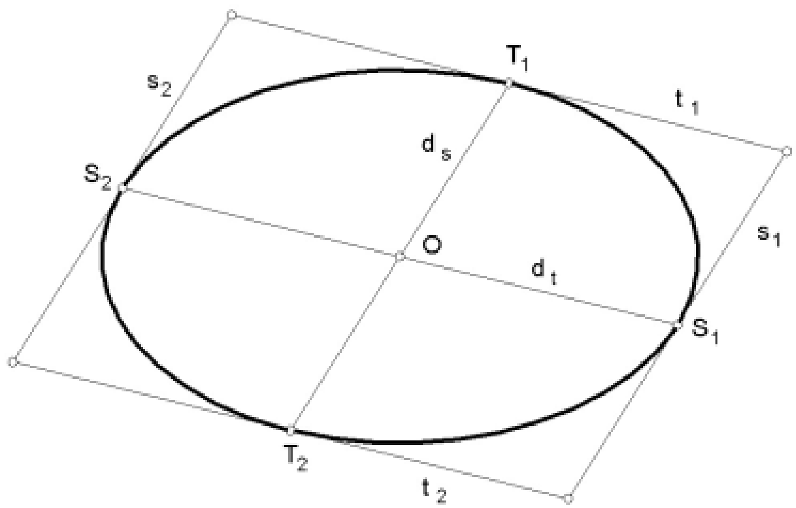
TANGENTE E NORMAL NUM PONTO DA CURVA

TANGENTE CONDUZIDA POR UM PONTO EXTERIOR À CURVA

Elipse



TANGENTE COM UMA DIRECÇÃO DADA



DIÂMETROS CONJUGADOS

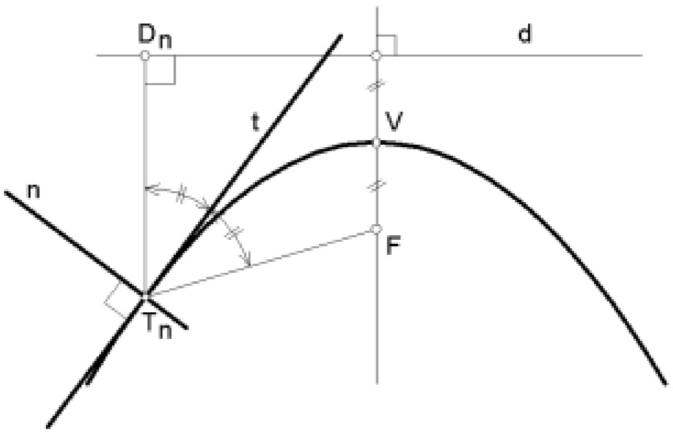
A elipse (e cilindro) no design

Exemplos

https://www.pamono.eu/ellipse-dining-table-1980s/?cn=pt&utm_medium=cpc&utm_source=google&utm_campaign=PLA_PT_8519981893_86068301669&utm_content=405453926052_c_&utm_term=pla-2089317491260___SU-500762&gclid=CjwKCAjwr_CnBhA0EiwAci5siuFi4dZOfOh9TvxIE0y1LBxkw_IWbZmgNx7X2-_9KFqzD6qOa9kxexoChpMQAvD_BwE

https://www.designconnected.com/Lighting/Floor-lights/Cylinder-Shaped-Shade-Table-and-Floor-Lamps_p11052

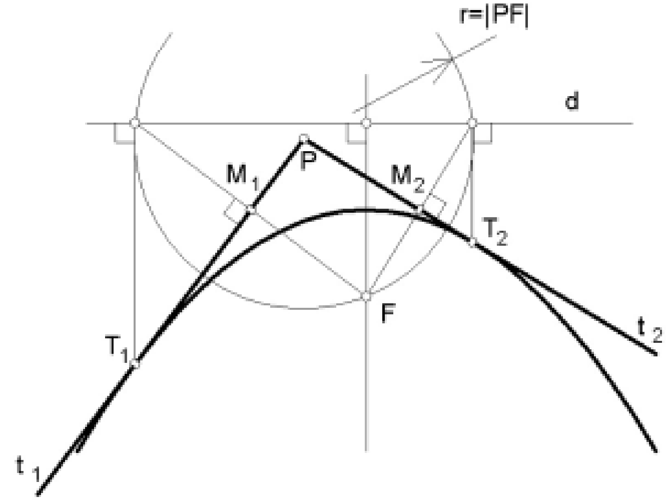
Parábola



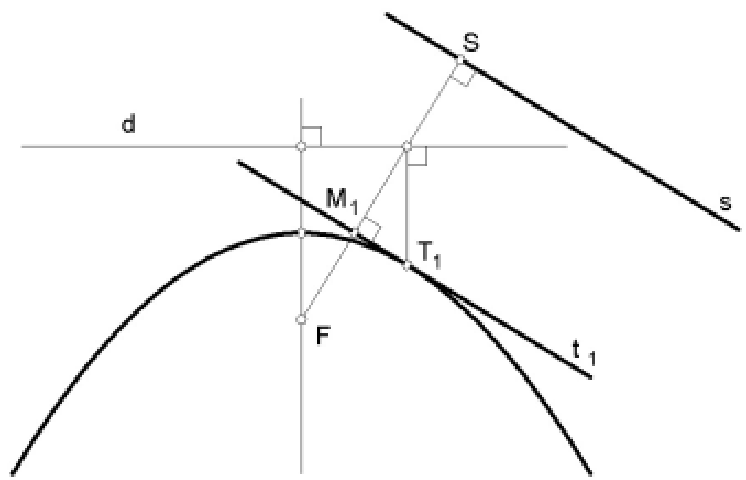
$$|T_n D_n| - |T_n F| = K = 0$$

DEFINIÇÃO

TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA



TANGENTE CONDUZIDA POR UM PONTO EXTERIOR À CURVA



TANGENTE COM UMA DIRECÇÃO DADA

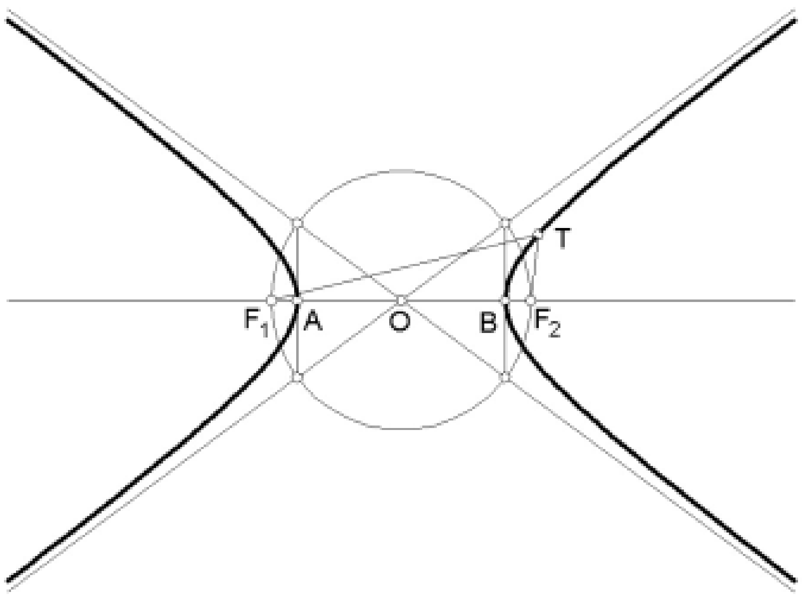
A parábola no design

Exemplos

https://retaildesignblog.net/2017/02/19/parabolic-shaped-shelves-by-takayoshi-kitagawa/

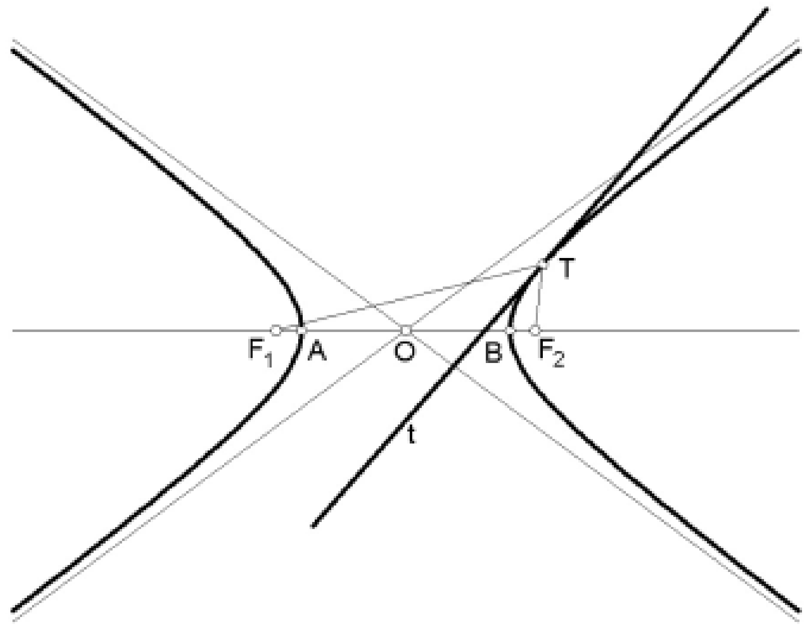
https://naotrivial.wordpress.com/tag/parabola/

Hipérbole



$$|AB|=|F_1T|-|F_2T|=K$$

DEFINIÇÃO

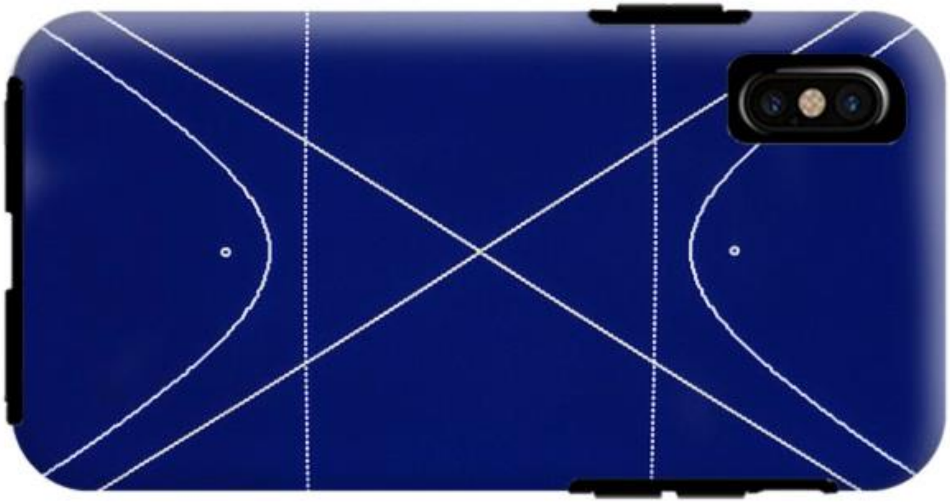


TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA

A hipérbole no design

Exemplos

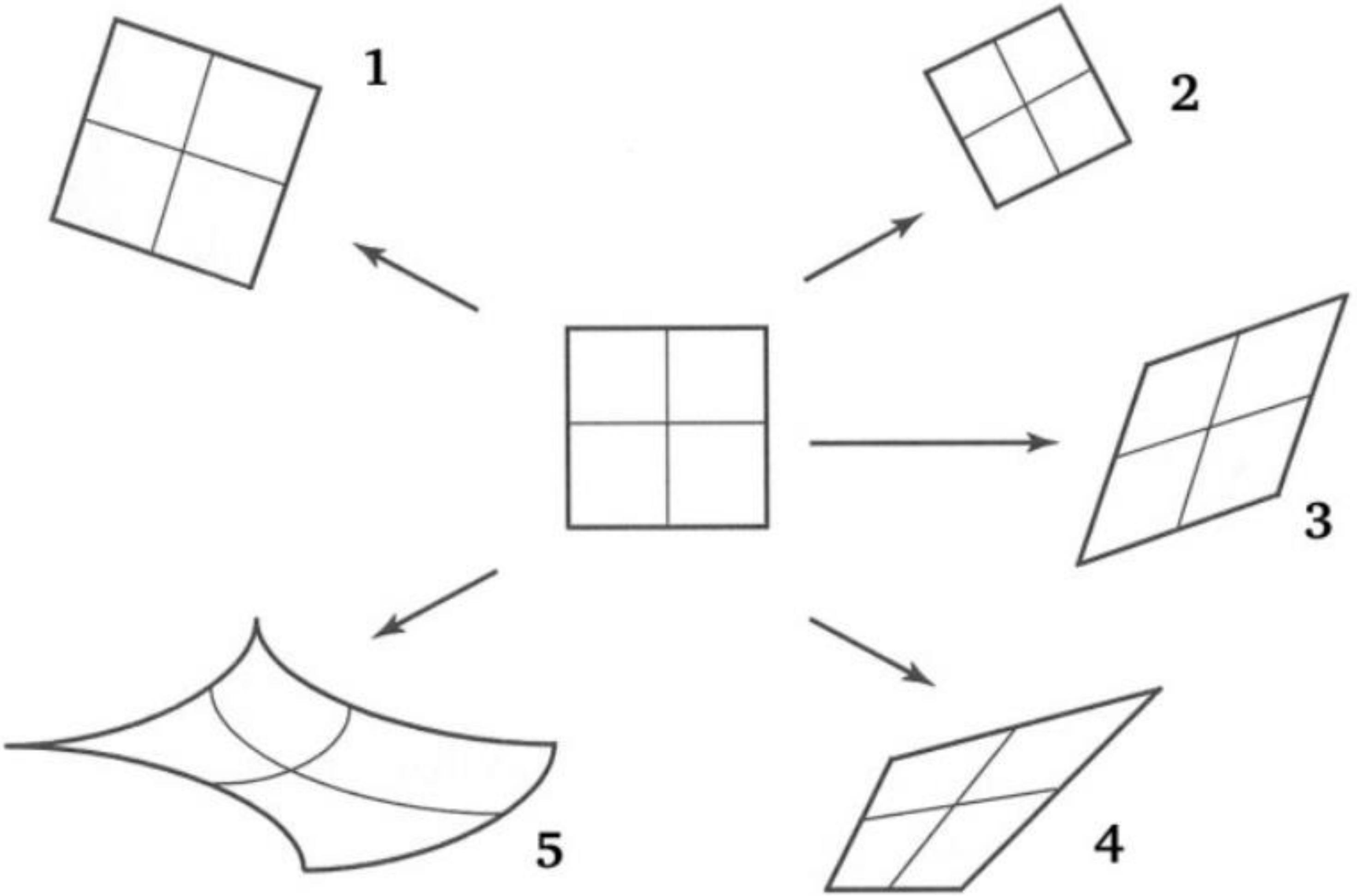
https://www.lightology.com/index.php?module=prod_detail&prod_id=399500



https://prints.sciencesource.com/featured/hyperbola-pierre-berger.html?product=iphone-case-cover&phoneCaseType=iphonexstough

Transformações geométricas no plano

1- Euclidiana (rígida)
2- Homotética (escala)
3- Afim
4- Projectiva
5- Topológica



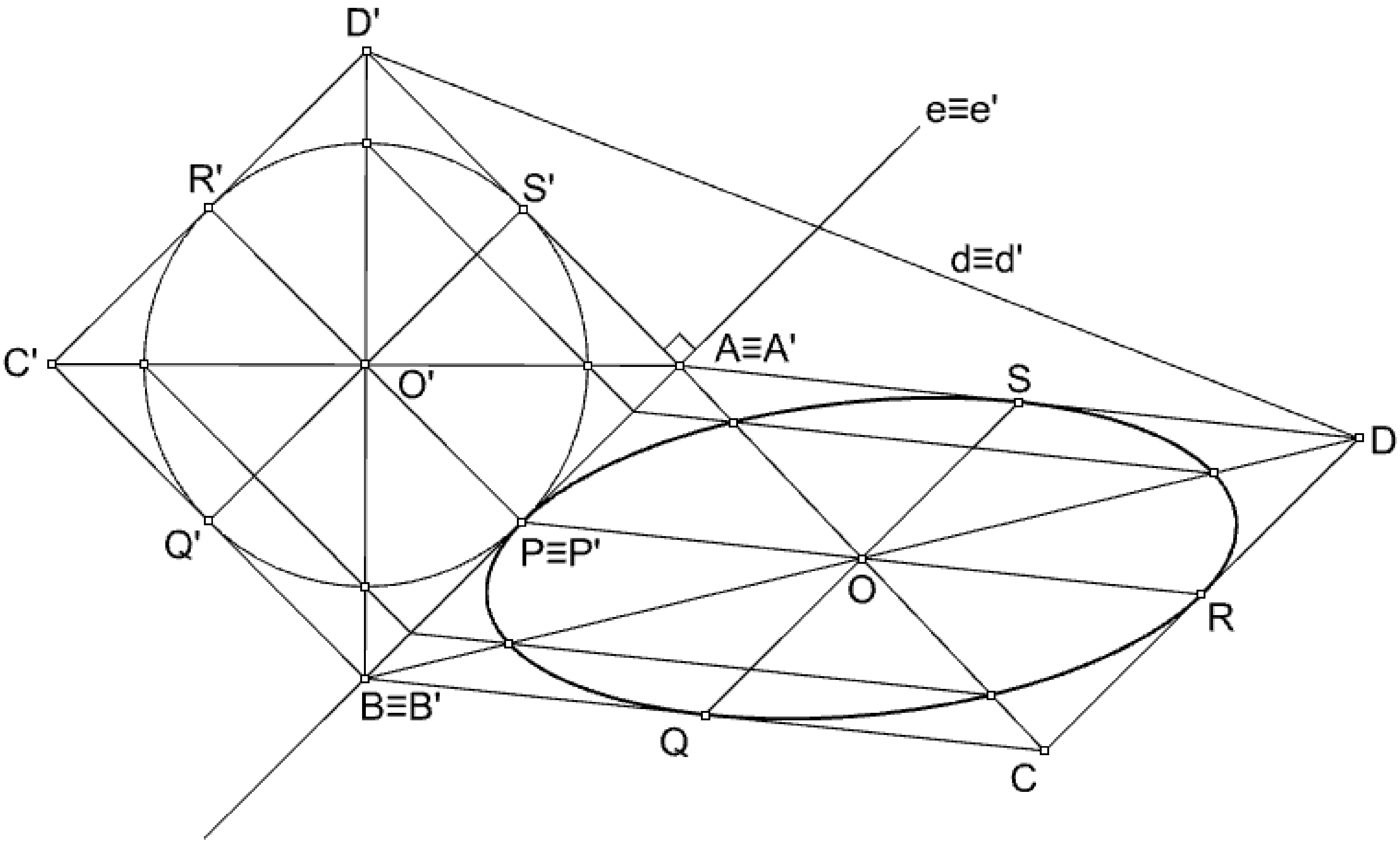
http://tarsadalominformatika.elte.hu/tananyagok/buildingspatial/lecke1_lap1.html

Otimização topológica no Design

TO flow (source: 3DPrint.com)

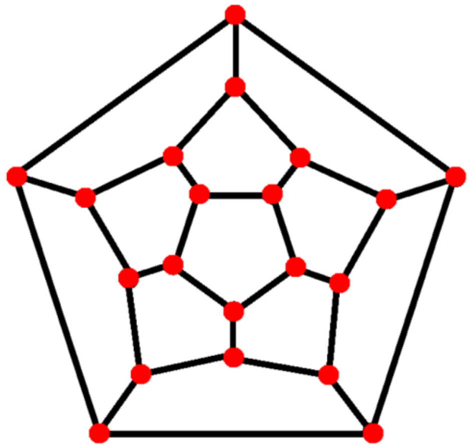
https://engineeringproductdesign.com/knowledge-base/topology-optimization/

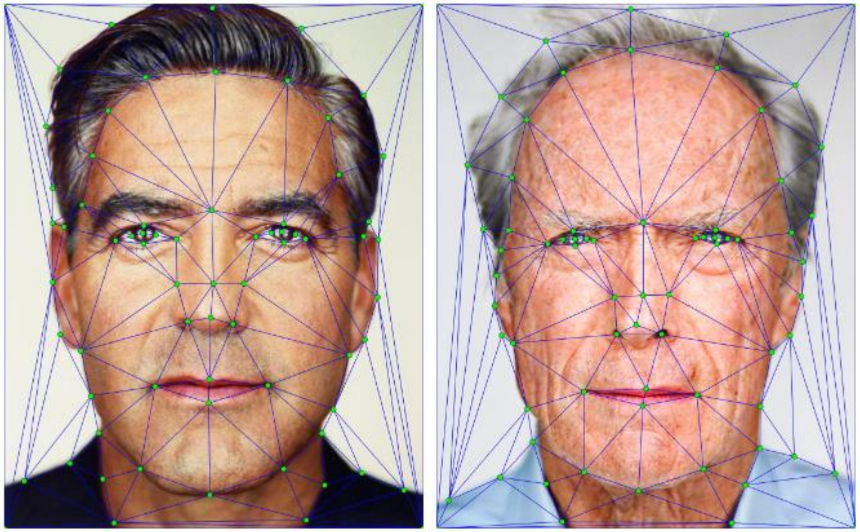
Afinidade



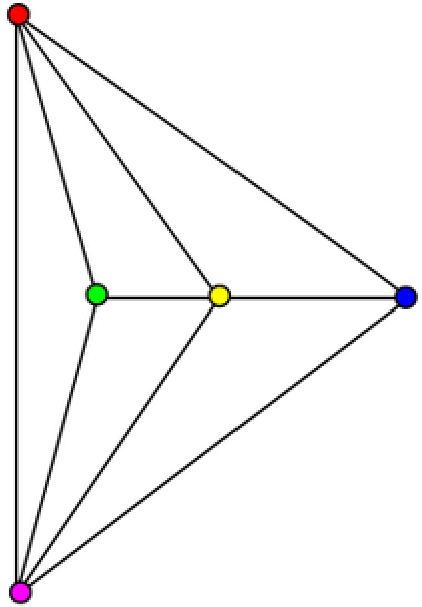
Tesselações e grafos

Fórmula de Euler aplicada a tesselações planas
V+F = A+2

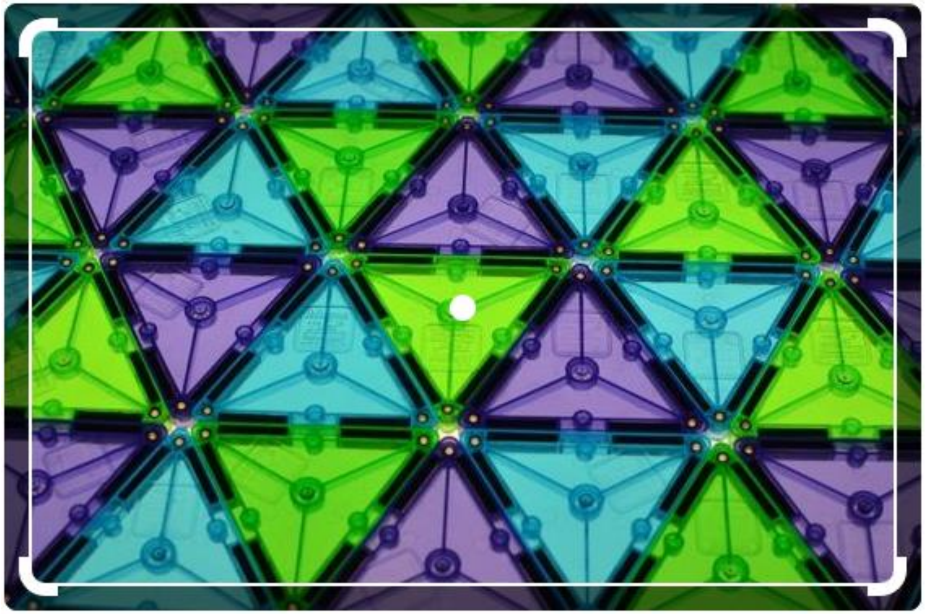




https://inst.eecs.berkeley.edu/~cs194-26/fa17/upload/files/proj4/cs194-26-abw/

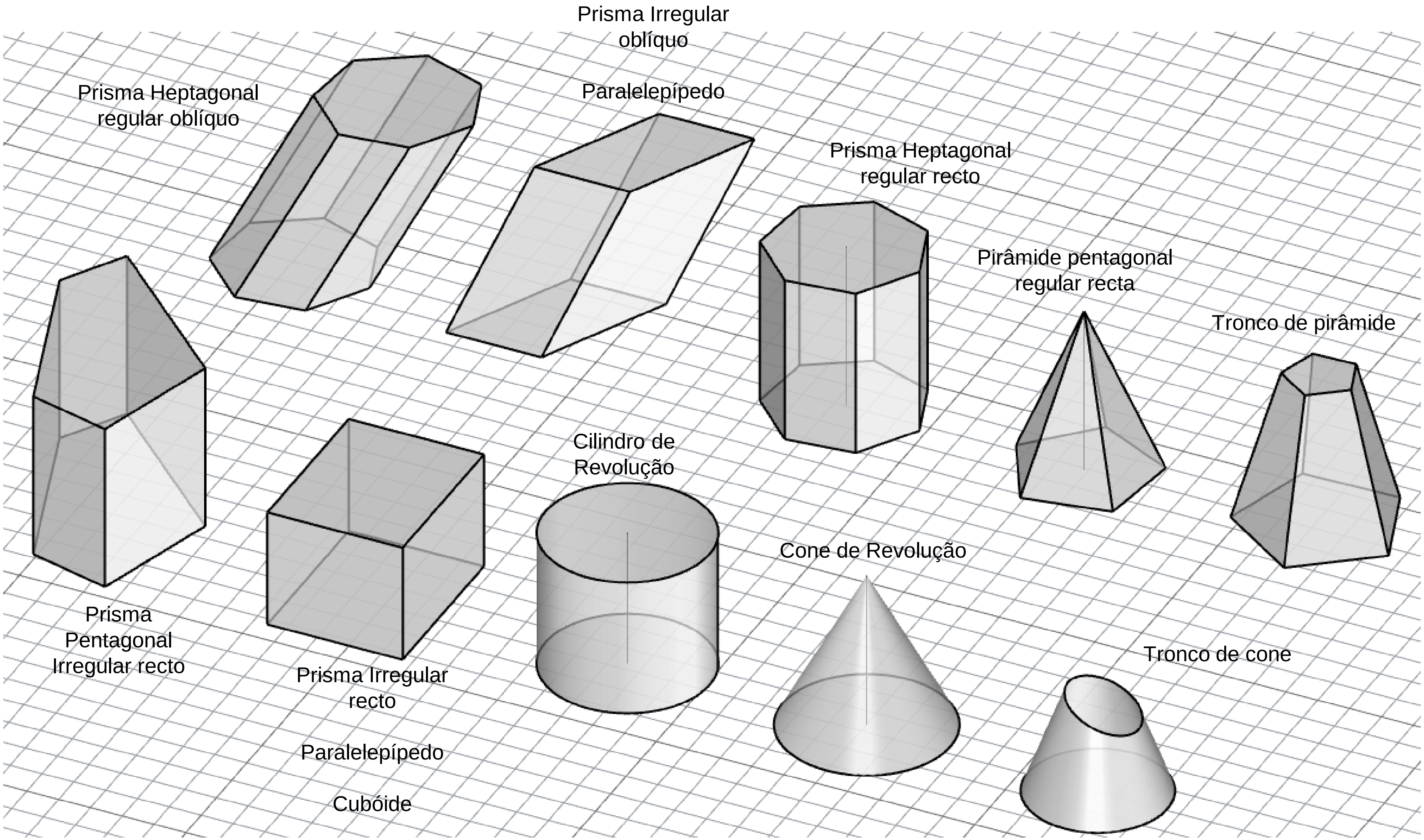


https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph



https://www.pinterest.pt/pin/408349891206221472/

Sólidos e volumes



Prisma Recto: Faces laterais são rectângulos. **Pirâmide Recta:** Vértice e centroide da base definem uma recta perpendicular à base.
Prisma Regular: Prisma cujas bases são polígonos regulares. **Pirâmide Regular:** Prisma cuja base é um polígono regular.
Prisma Regular Recto: Bases são polígonos regulares e as faces laterais são rectângulos. **Pirâmide Regular Recta:** Pirâmide recta e regular.
Prisma Oblíquo: Faces laterais são paralelogramos. **Pirâmide Oblíqua:** Pirâmide não recta.
Poliedro: Sólido delimitado por faces planas.

Nota 1: Para alguns autores Prisma Regular é o mesmo que Prisma Regular Recto. https://www.mathwords.com/r/regular_prism.htm
Nota 2: Para alguns autores Prisma Regular Recto tem a restrição das faces rectangulares serem quadrados. https://mathworld.wolfram.com/Prism.html

Posições relativas das rectas e dos planos

Duas rectas podem ser, entre si:
- Paralelas
- Concorrentes
- Enviesadas

Duas rectas concorrentes podem ser, entre si:
- Oblíquas
- Perpendiculares

Duas rectas enviesadas podem ser, entre si:
- oblíquas
- ortogonais

Duas rectas concorrentes, oblíquas entre si, dividem o plano que as contém em 4 regiões iguais duas a duas, e cada uma dessas regiões designa-se ângulo.

Duas rectas perpendiculares dividem o plano que as contém em 4 regiões iguais, e cada uma dessas regiões designa-se ângulo recto.

Ângulo é a porção de plano delimitada por duas semirectas com a mesma origem.

Dois planos podem ser, entre si:
- Paralelos
- Concorrentes

Dois planos concorrentes podem ser, entre si:
- Oblíquos
- Perpendiculares

Dois planos concorrentes, oblíquos entre si, dividem o espaço em 4 regiões iguais duas a duas, e cada uma dessas regiões designa-se diedro.

Diedro é a porção de espaço delimitada por dois semiplanos com a mesma recta de origem.

Dois planos perpendiculares dividem o espaço em 4 diedros iguais, e cada um desses diedros designa-se quadrante.

A inclinação entre dois planos mede-se através de um ângulo contido num plano perpendicular à recta comum aos dois planos. Esse ângulo designa-se por rectilíneo do diedro.

A inclinação de uma recta em relação a um plano mede-se através do menor ângulo que esta fará com uma recta concorrente do plano. Estas duas rectas definem um plano perpendicular ao primeiro plano considerado.

Uma recta de maior declive de um plano em relação a outro é sempre perpendicular à recta comum aos dois planos.

2. Geometria e Design

2.1. A geometria como suporte e estruturação da forma

Formas

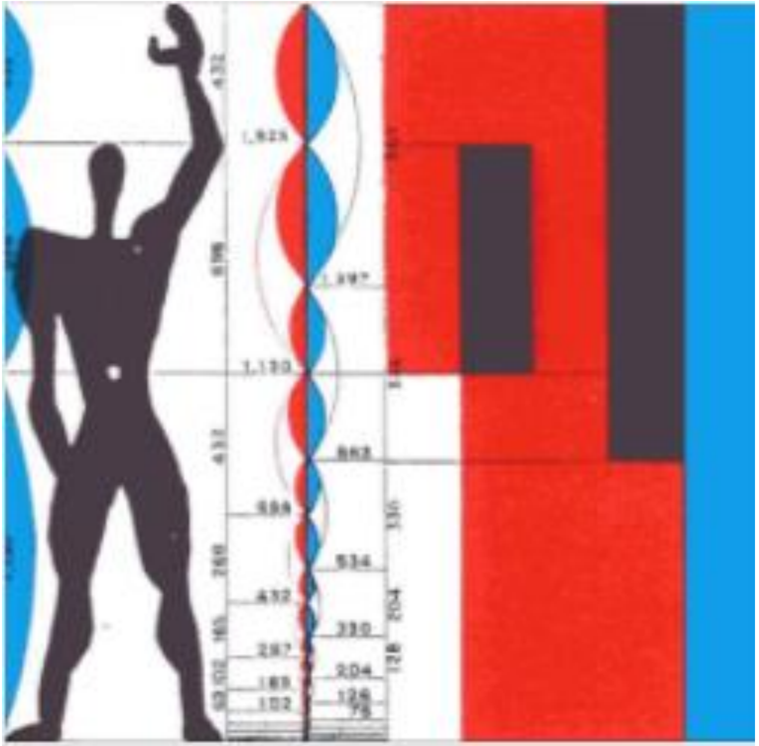
https://www.freelogoservices.com/blog/2019/07/09/shapes-in-logo-design/

https://www.pinterest.pt/pin/476607573051367978/

https://slidesdocs.com/background/design-buildings-and-other-3d-geometric-shapes-powerpoint-background_1dfd27e9bb

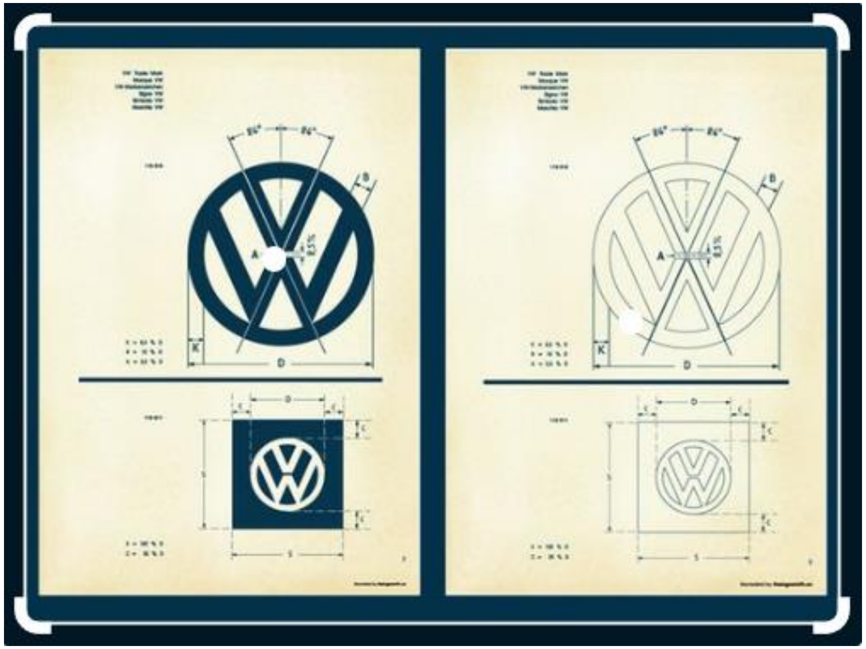
https://pngtree.com/freebackground/abstract-geometric-shapes-subtle-colors-in-3d-room-design-concept_3989628.html

Traçados reguladores



The Modulor (1946) by Le Corbusier

https://www.idesign.wiki/en/the-modulor-1946/



https://www.pinterest.pt/pin/641622278161822147/

https://community.ptc.com/t5/Mathcad/Fine-Spline/td-p/698455

Relação forma material

https://www.sklum.com/pt/comprar-cadeiras-de-sala-de-jantar/67728-cadeira-de-metal-com-bracos-quadrados.html

https://www.dutchcrafters.com/Amish-Childs-Wooden-Chair/p/46431

https://www.archiproducts.com/en/products/kelly-wearstler/natural-stone-chair-hume-chair_635972

https://www.sothebys.com/en/buy/auction/2020/important-design-2/shiro-kuramata-glass-chair

https://www.pamono.eu/plastic-chair-in-yellow-1970s

https://kavehome.com/pt/pt/p/pufe-vicka-cordeiro-branco-o-70-cm

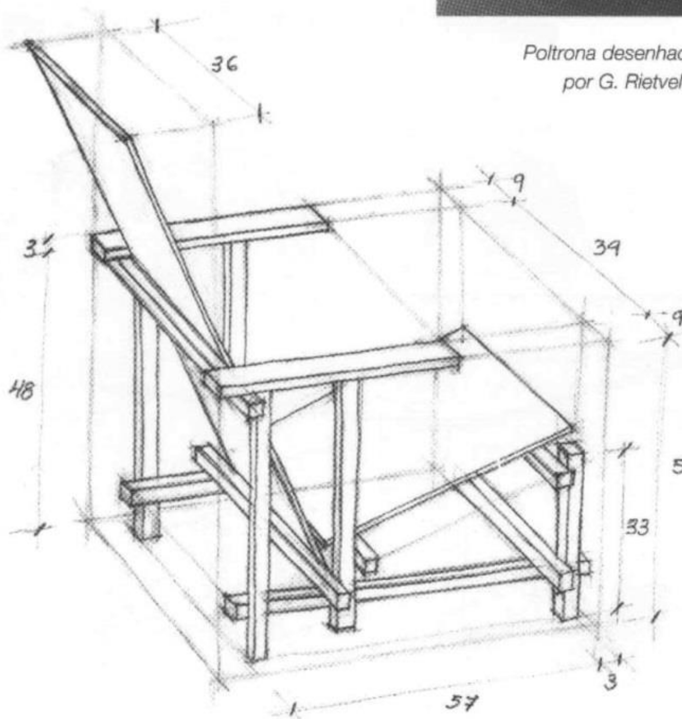
2.2. Geometria como representação

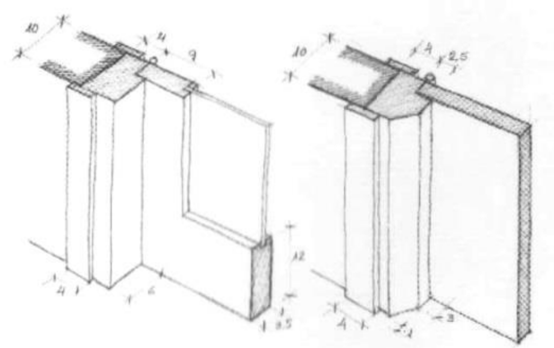
Representação e concepção

Desde os esquiços...

Poltrona desenhada
por G. Rietveld.

Esboço a lápis em
axonometria ortogonal,
da poltrona Rietveld.



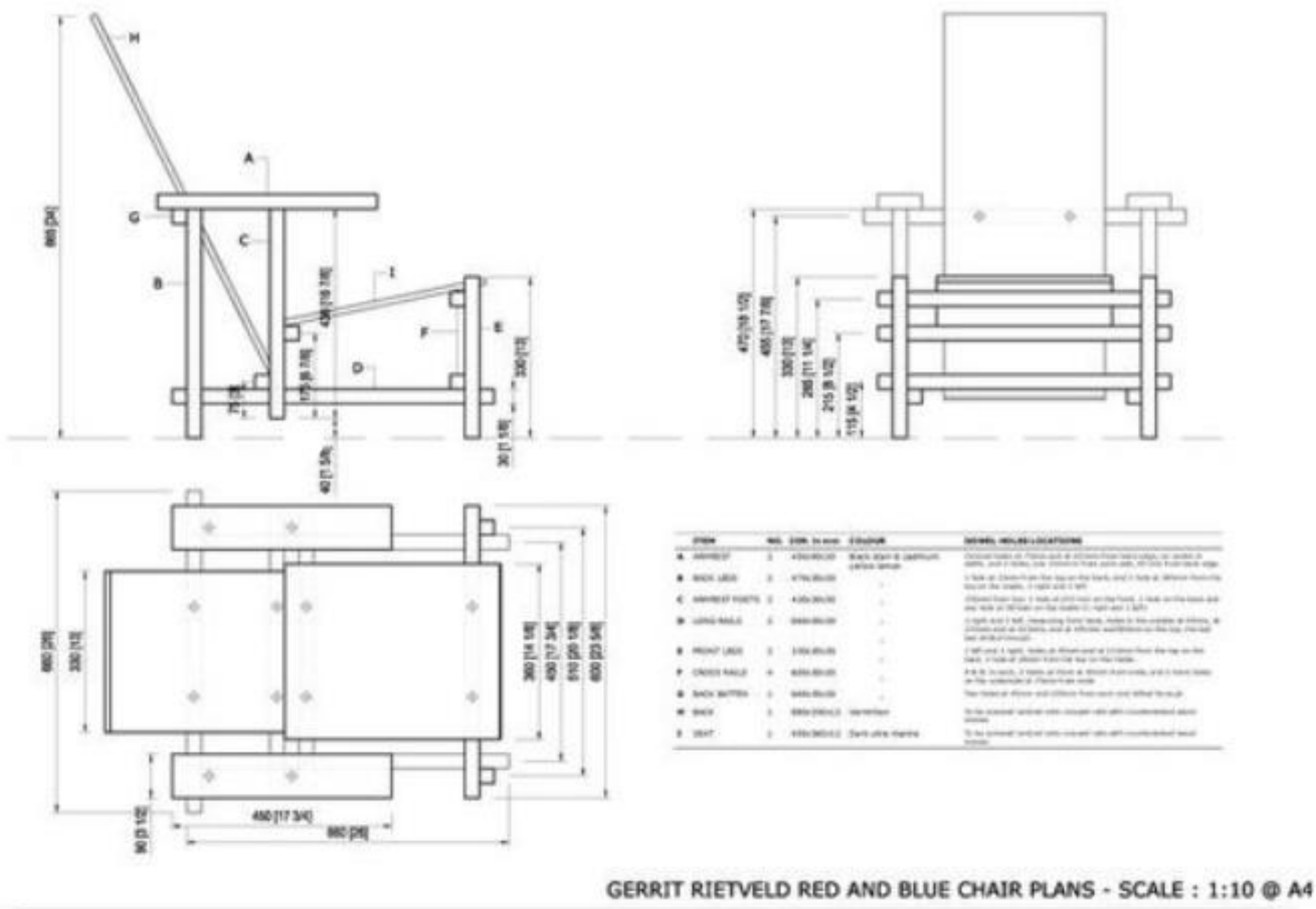


Esboço a lápis em axonometria ortogonal, a
partir de secções horizontais de portas de
madeira, uma com vidro e outra maciça.

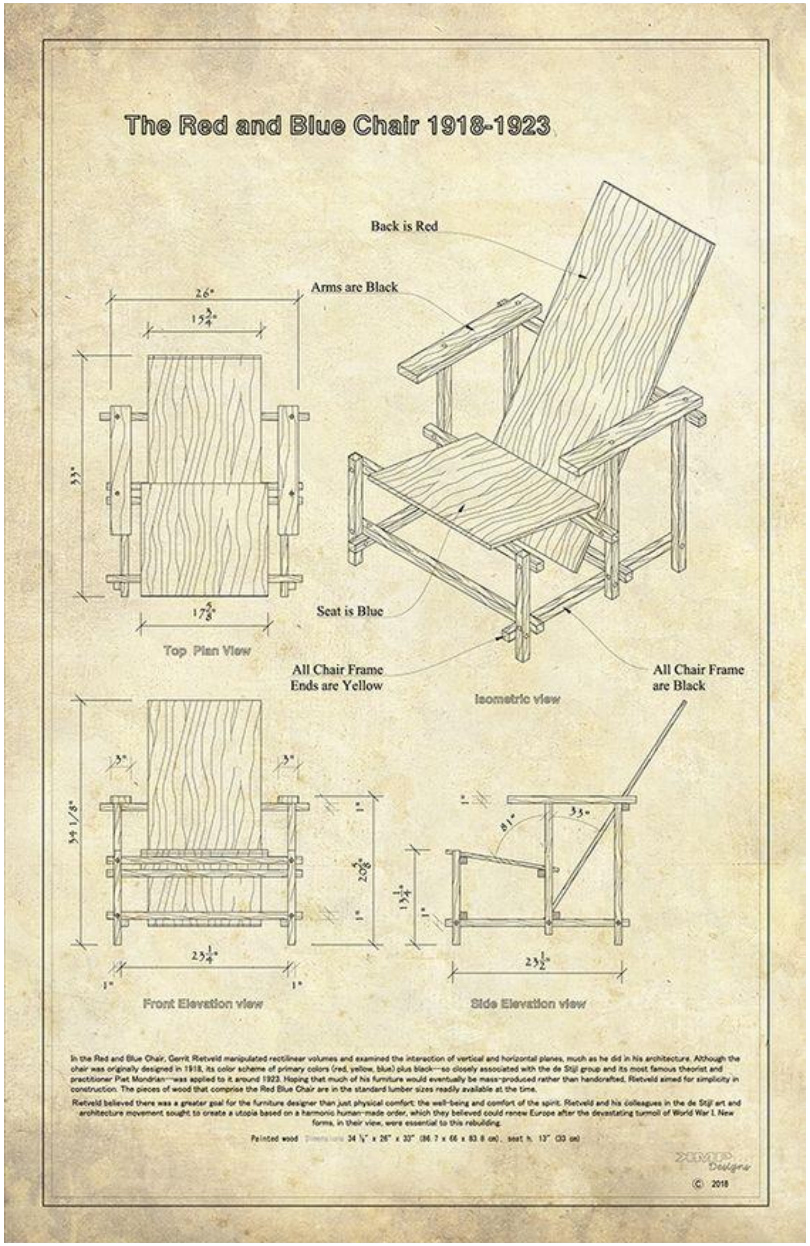
In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

Representação e concepção

…até aos desenhos técnicos…



Representação e concepção



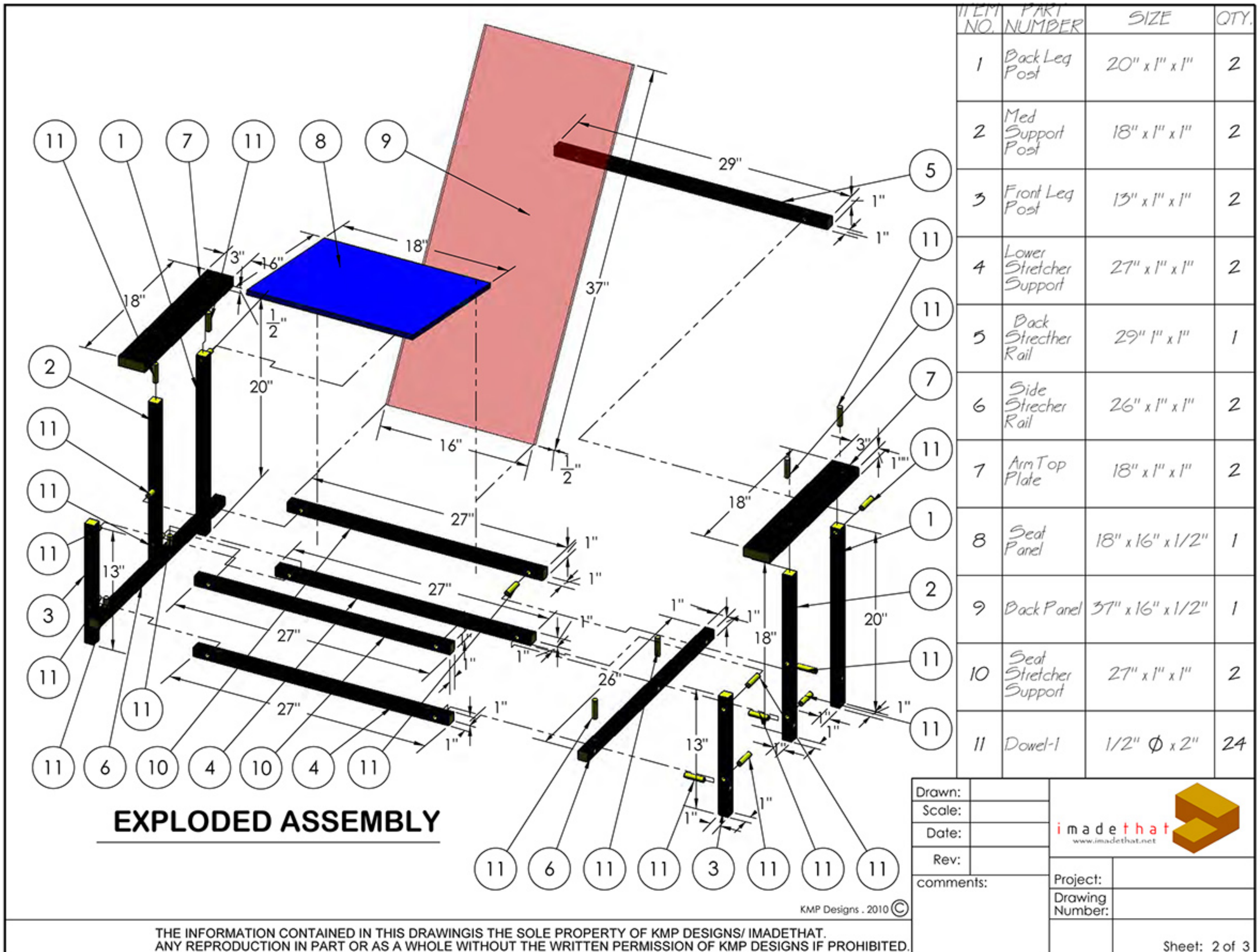
https://www.pinterest.pt/pin/91620173662593614/

... e perspetivas,…

https://www.pinterest.pt/pin/410531322295655704/

Representação e concepção

... e axonometrias explodidas.

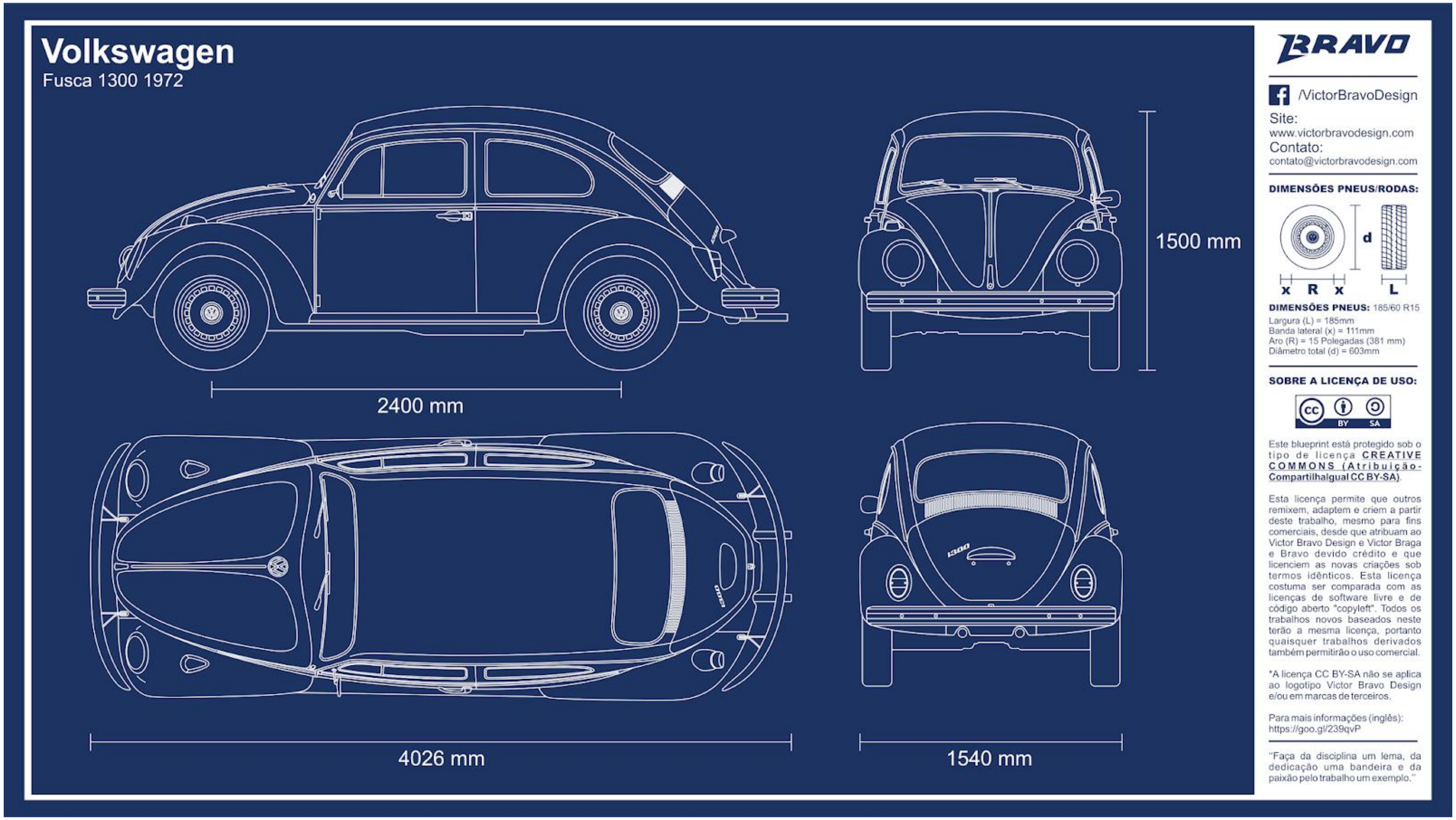


Múltipla Projecção Ortogonal (MPO)

O sistema de representação da Múltipla Projecção Ortogonal (MPO) corresponde a uma extensão do sistema diédrico ou da dupla projecção ortogonal (DPO).

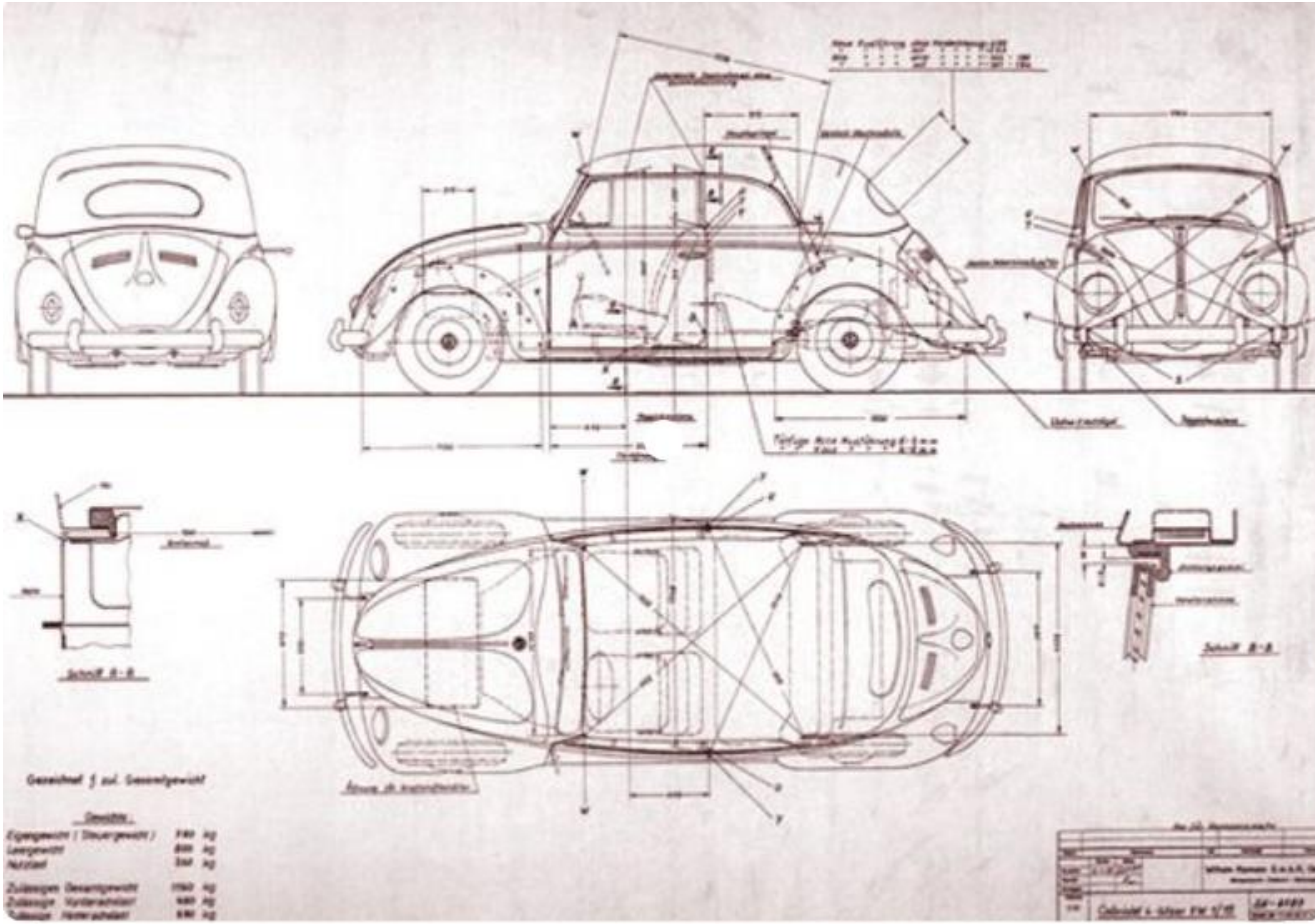
Neste sistema não existe limite ao número de planos de projecção que devem ser orientados de modo a facilitar os problemas da representação. Na figura seguinte encontram-se relacionadas três projecções (2 cortes e 1 planta) de um edifício.

Os métodos auxiliares da representação da DPO (rebatimentos, rotações, mudanças de plano de projecção) são obviamente válidos na MPO.



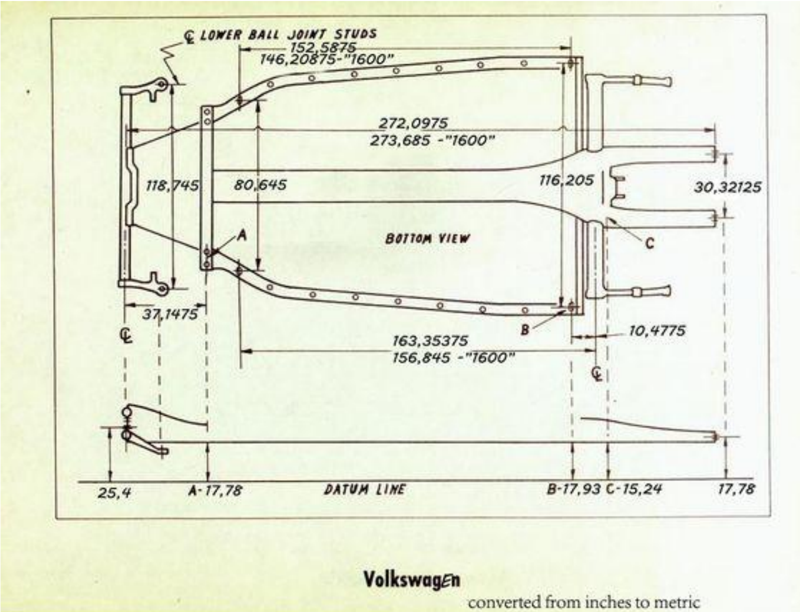
https://www.victorbravodesign.com/2018/05/auto-evolucao-volkswagen-fusca-1300-1972.html

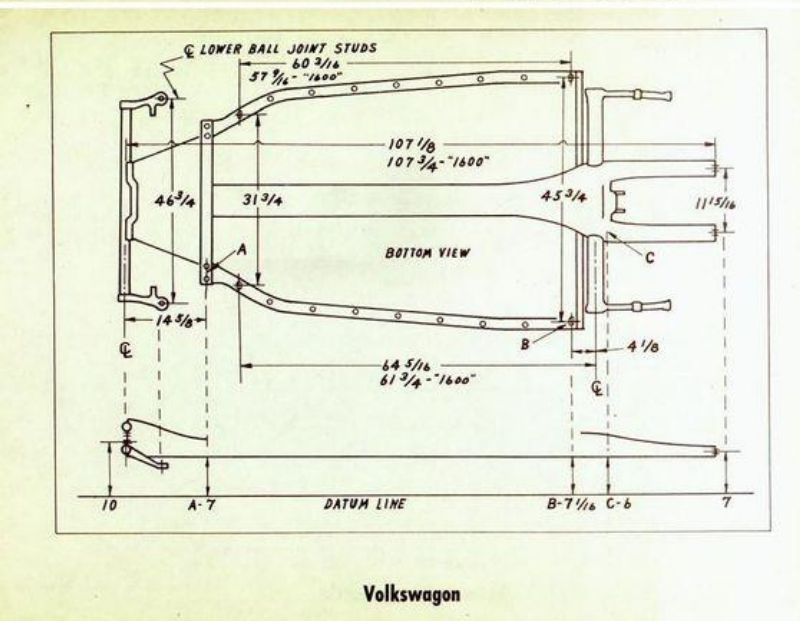
Vistas e detalhes



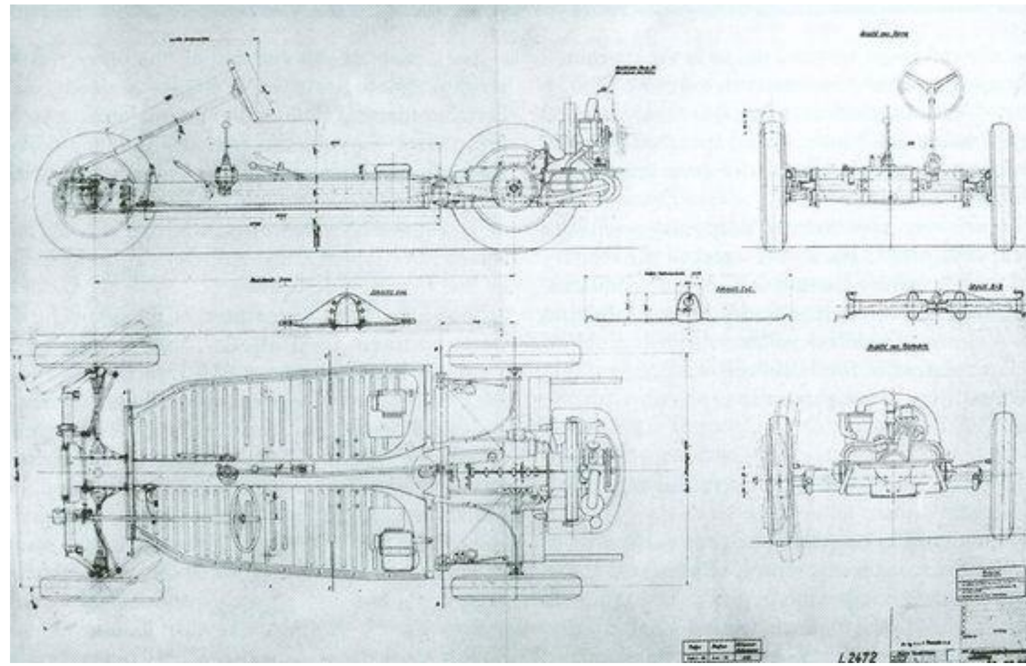
https://br.pinterest.com/pin/414260865704644894/

Desenhos de especialidades



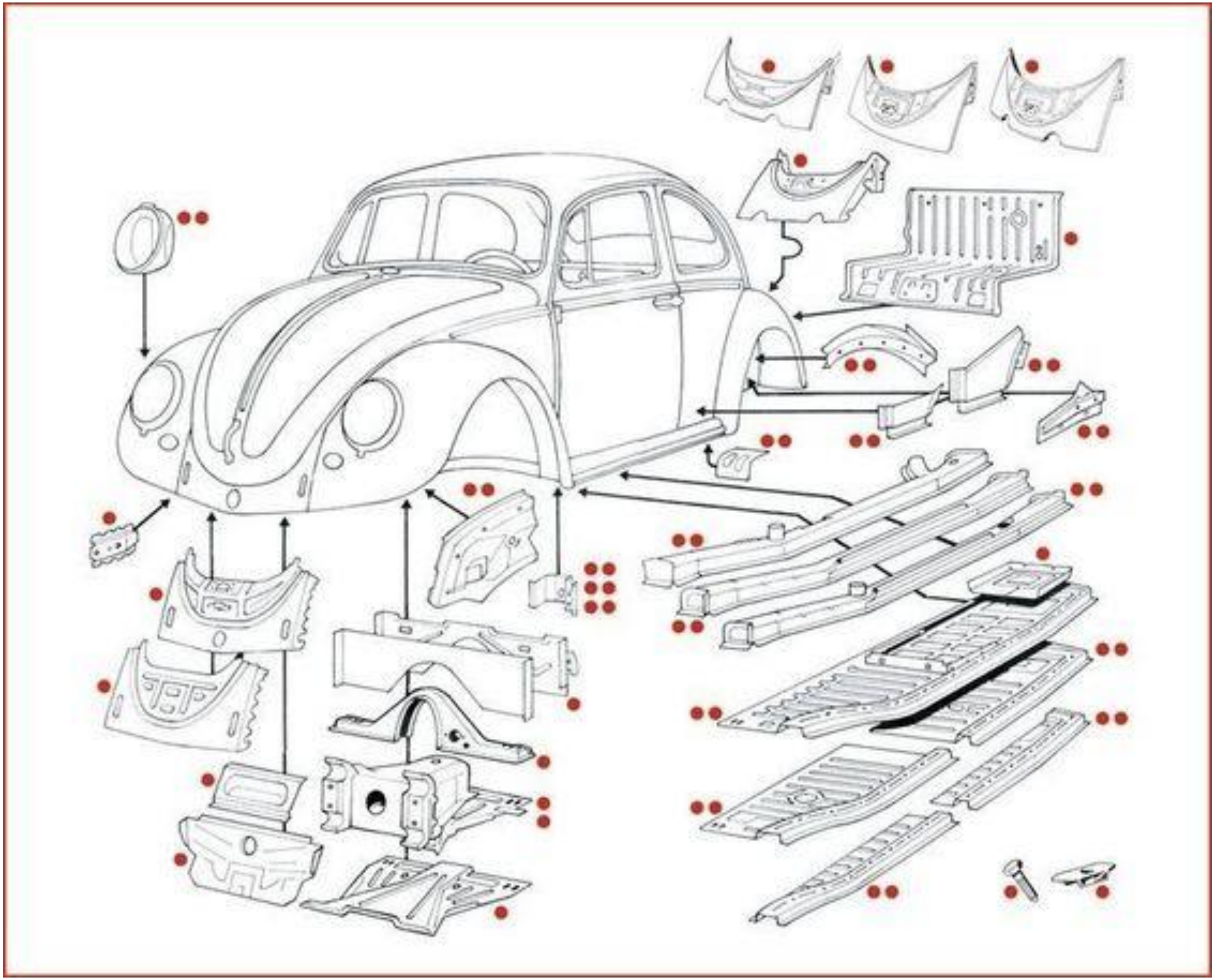


https://br.pinterest.com/pin/1196337393718475/



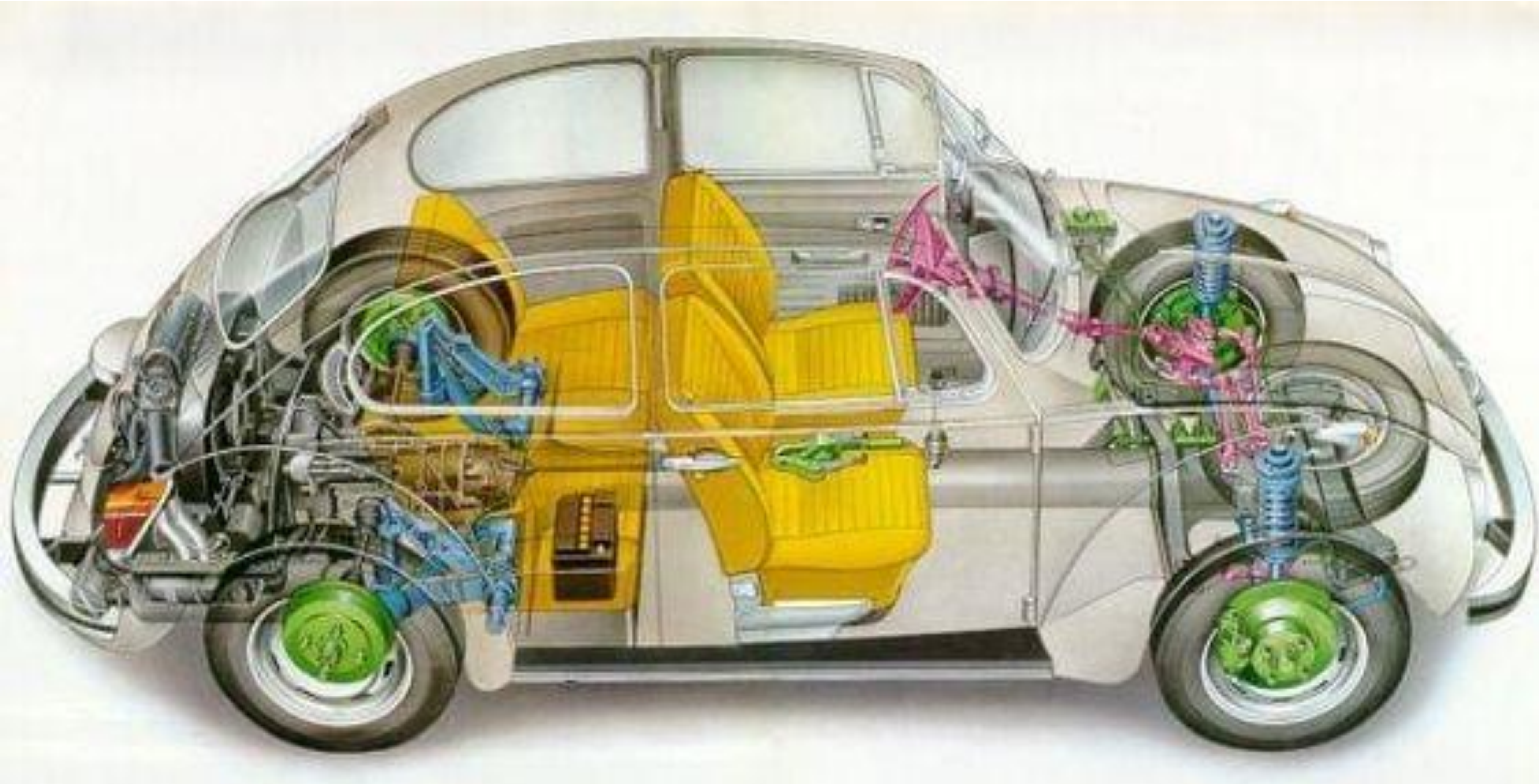
https://br.pinterest.com/pin/718957528000495313/

Instruções de montagem



https://br.pinterest.com/pin/5911043258628996/

Visualizações em transparência



https://br.pinterest.com/pin/55521007898431973/

Marketing e publicidade

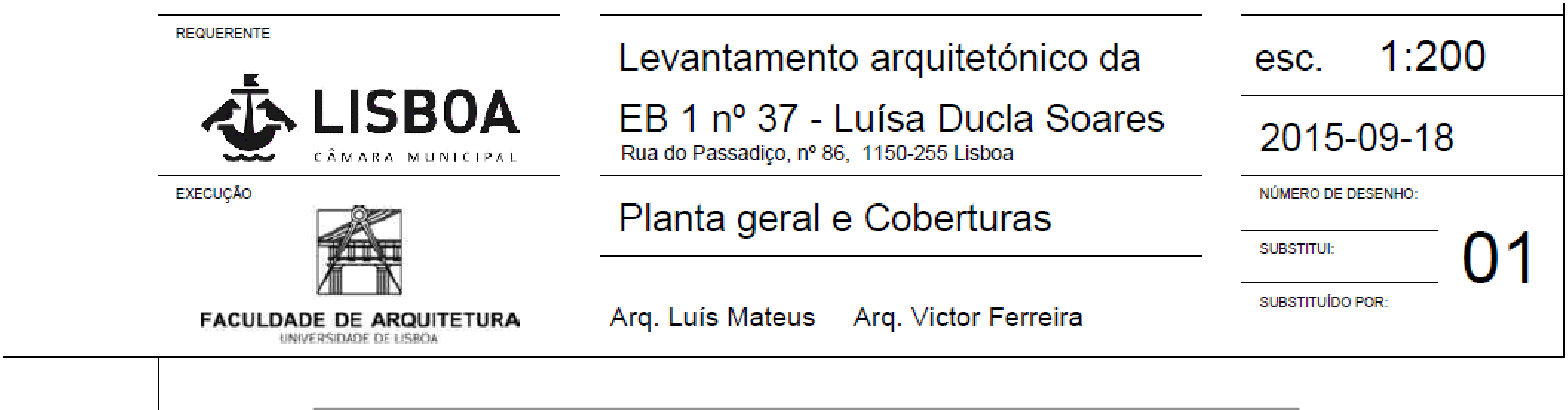
https://br.pinterest.com/pin/191332684162320127/

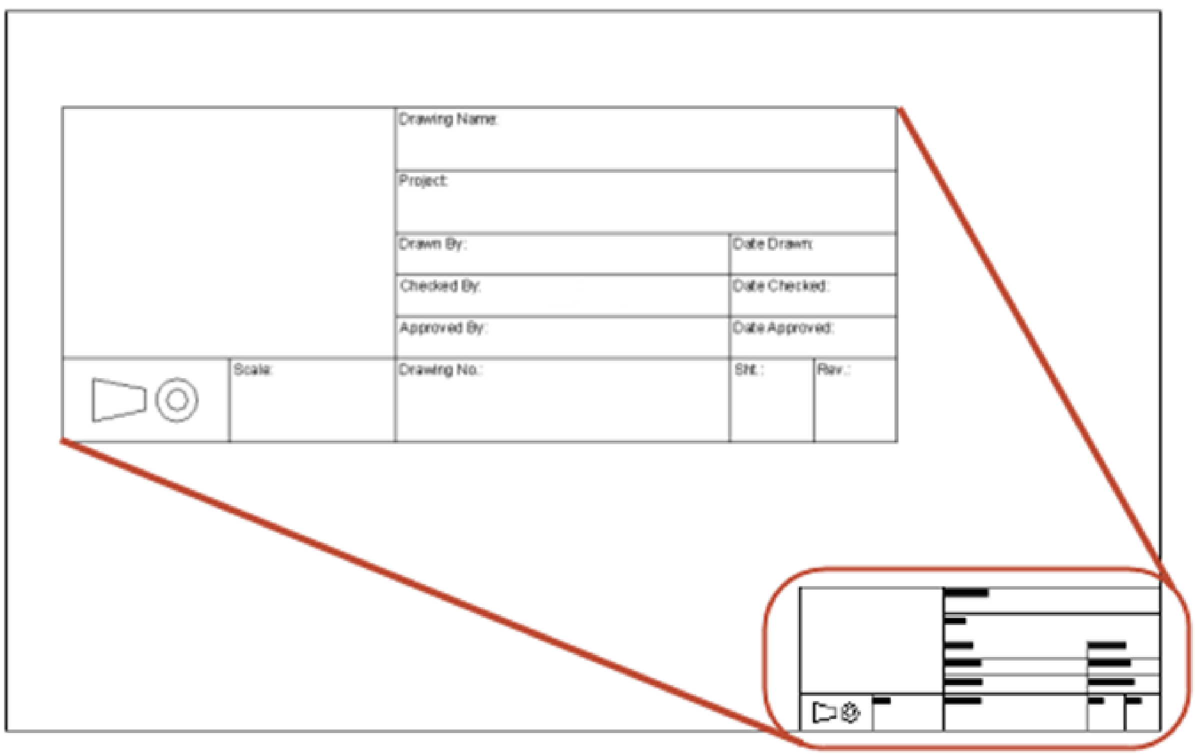
https://www.pngmart.com/image/463213

Objeto real

https://motortudo.com/fusca-78-1300-l-ganha-troca-de-oleo-a-cada-7500-km/

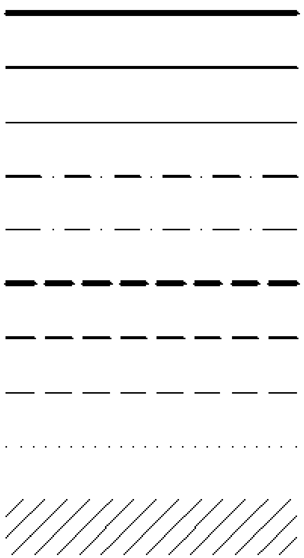
Legenda dos desenhos





https://cqeacademy.com/cqe-body-of-knowledge/product-process-design/technical-drawings-gdt/

Tipos de linhas e a sua utilização mais comum



TRAÇO CONTÍNUO GROSSO (arestas vistas em primeiro plano em desenho de peças, linhas de corte em desenho de peças ou arquitectura)

TRAÇO CONTÍNUO MÉDIO (arestas vistas em primeiro plano em desenho de arquitectura)

TRAÇO CONTÍNUO FINO (linhas de chamada e cotagens, linhas de segundo plano em desenho de arquitectura, formas vizinhas em desenho de peças ou de arquitectura)

TRAÇO PONTO MÉDIO (localização dos cortes em desenhos de arquitectura ou de peças)

TRAÇO PONTO FINO (eixos de peças, posições extremas de peças móveis, indicação de rotações de peças, arestas "para cá" do plano de corte em desenho de peças)

TRAÇO INTERROMPIDO GROSSO (arestas e linhas de contorno ocultas em desenho de peças)

TRAÇO INTERROMPIDO MÉDIO (arestas e linhas de contorno ocultas em desenho de peças e em desenho de arquitectura)

TRAÇO INTERROMPIDO FINO (arestas e linhas de contorno ocultas em desenho de arquitectura e em desenho de peças)

TRAÇO PONTILHADO (arestas "para cá" do plano de corte em desenho de arquitectura)

TRACEJADO (indicação genérica de superfícies em corte, não é comum utilizar-se no desenho de arquitectura)

Estas regras devem ser adaptadas a cada caso. Em geral a o desenho técnico de peças é mais “carregado” que o desenho técnico de arquitectura.
Estas regras relativas aos traçados são mais ou menos aceites e o seu significado é mais ou menos conhecido. Porém pode sempre considerar-se uma expressão com “assinatura” própria de cada um. Podem também por vezes ser utilizadas cores para tornar os traçados mais expressivos.

Nomenclatura e articulação das peças desenhadas

Em Arquitectura:
- Planta (planta de tectos; planta do r/c; planta do piso 1; planta de implantação; planta de localização; etc.)
- Corte (corte A-B; corte transversal A-B; corte longitudinal A-B; corte alçado A-B; etc.)
- Alçado (alçado 1; alçado sul; alçado principal; alçado tardóz; alçado lateral direito; etc.)

A articulação entre peças desenhadas é livre mas tem de ser coerente.

Em desenho de peças:
- Vista (vista superior; vista inferior; vista frontal; vista principal; vista posterior; vista lateral esquerda; etc.)
- Corte (corte A-B; etc.)

Em particular no desenho de peças é comum haver a referência a dois métodos de representação e articulação entre vistas: i) método europeu e, ii) método americano.

No método europeu o objecto interpõe-se entre o observador e o plano de projecção.
No método americano o plano de projecção interpõe-se entre o observador e o objecto.

A consequência prática da adopção de um destes métodos verifica-se no modo como as vistas se articulam entre si.
No método europeu, se considerarmos a vista principal, a vista lateral esquerda encontra-se à direita desta, e a vista inferior situa-se acima desta.
No método americano passa-se exactamente o contrário, a vista inferior fica abaixo da vista principal e a vista lateral esquerda fica à esquerda da vista principal.

3. Geometria Descritiva

Geometria Descritiva, o que é?

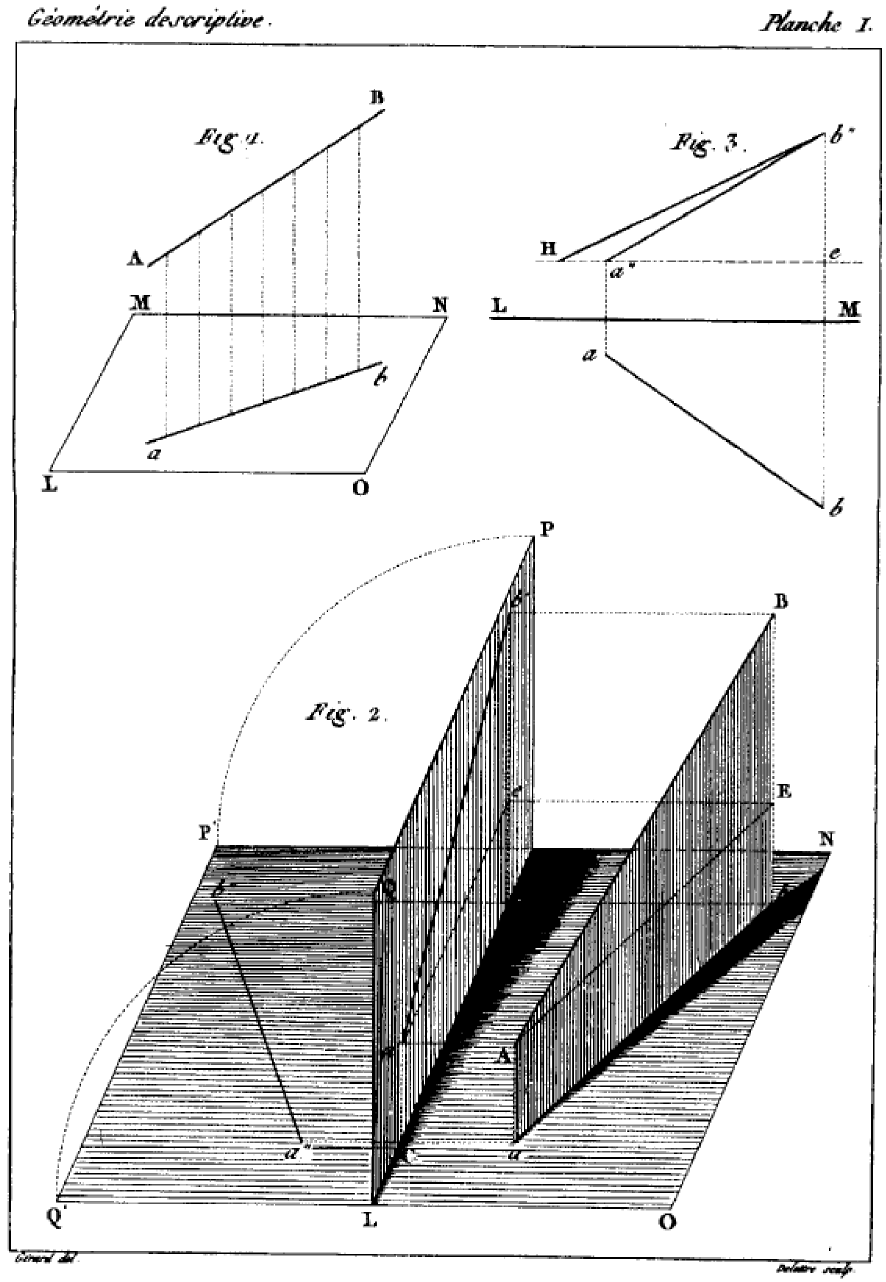
Tal como foi definida pelo seu autor, Gaspard Monge (1746-1818), a geometria descritiva é a arte (ou ciência?) que tem dois objectivos principais:

“O primeiro é representar com exactidão, sobre desenhos que não têm mais que duas dimensões, os objectos que têm três, e que são susceptíveis de definição rigorosa.”

“O segundo objectivo da geometria descritiva é o de deduzir da descrição exacta dos corpos tudo o que segue necessariamente das suas formas e das suas posições relativas.”

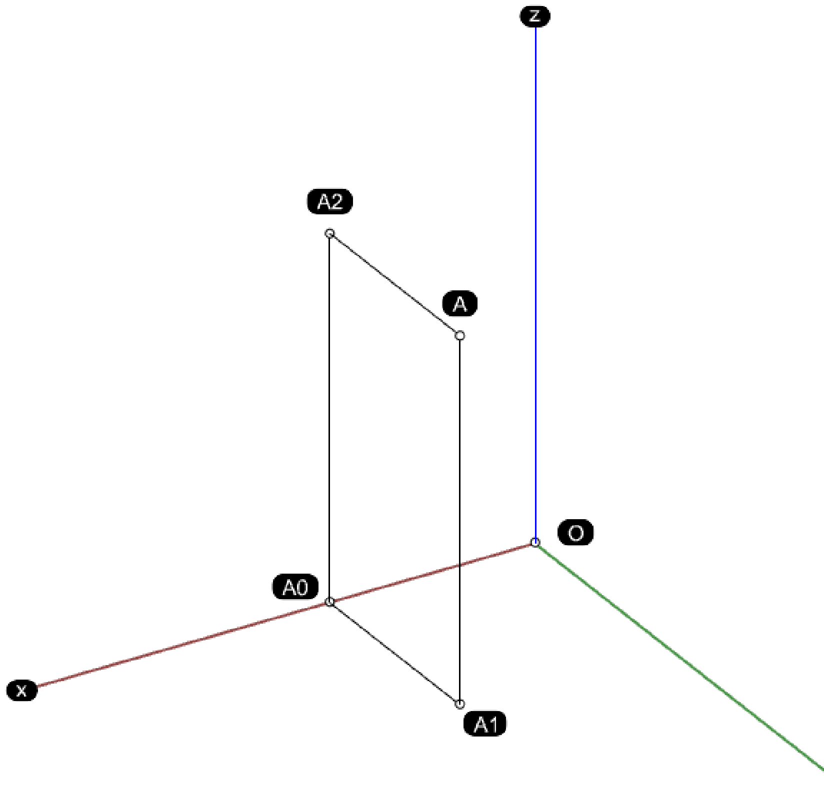
Para o efeito, considerou um sistema de representação baseado nas projecções ortogonais sobre dois planos de projecção perpendiculares entre si. Trata-se da dupla projecção ortogonal, também conhecida como método de Monge.

Hoje, podemos considerar a geometria descritiva como a parte da geometria que se ocupa dos sistemas de representação (dupla projecção ortogonal, axonometria, projecções cotadas, perspectiva) e de tudo aquilo que pode ser estudado através destes métodos. Pode ainda considerar-se que o estudo gráfico da geometria do espaço através de ferramentas de modelação 3D se econtra no âmbito da geometria descritiva.



O referencial cartesiano de mão direita

Face às ligações entre a geometria descritiva e a geometria algébrica, e por uma questão de uniformização, hoje consideram-se como planos de projecção os planos coordenados x.z (plano coordenado frontal) e x.y (plano coordenado horizontal). O plano coordenado y.z assume a orientação de perfil.



À distância de um ponto A ao plano x.y dá-se o nome de COTA. A cota pode ser observada na projecção frontal sobre o plano x.z através do comprimento do segmento [A_0A_2].

À distância de um ponto A ao plano x.z dá-se o nome de AFASTAMENTO. O afastamento pode ser observado na projecção horizontal sobre o plano x.y através do comprimento do segmento [A_0A_1].

À distância de um ponto A ao plano de perfil y.z dá-se o nome de ABCISSA. A abcissa pode ser observada no eixo x através do comprimento do segmento [A_0O].

As abcissas, afastamentos e cotas podem ser positivas, negativas ou nulas.

Um ponto fica definido num referencial através do terno (ABCISSA, AFASTAMENTO, COTA).
Por exemplo, o ponto A tem as coordenadas (20.0, 21.0, 35.0).

É importante notar que muitas vezes, na representação em Arquitectura, o referencial é implícito e não tornado explícito nos desenhos. Nesse caso as coordenadas são relativas e não absolutas.

As rectas e os planos no referencial cartesiano

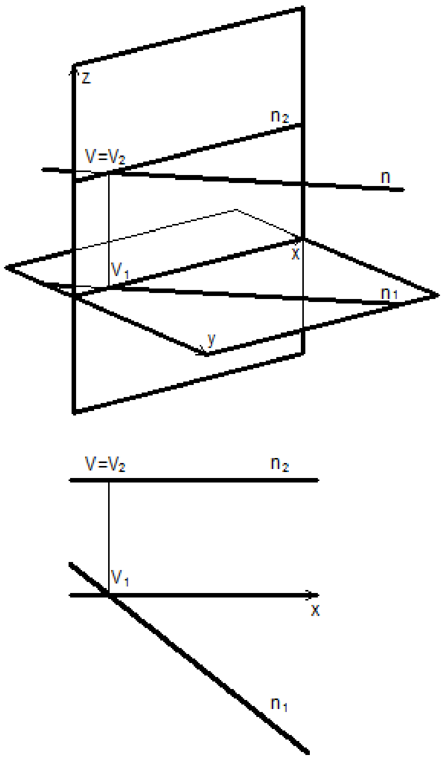
A TAXONOMIA DAS RECTAS E PLANOS baseia-se na <u>posição relativa que estes assumem relativamente a um par de planos de projecção ou coordenados, um considerado frontal (x.z) e o outro considerado horizontal (x.y)</u>. Note-se que, se considerarmos como plano frontal, o plano y.z, uma recta que era de frente e nível (fronto-horizontal), passa a ser de topo.

TAXONOMIA DAS RECTAS:
- Recta de nível.
- Recta de topo ➔ projectante (no PFP).
- Recta de frente e nível (ou fronto-horizontal).
- Recta de frente.
- Recta vertical ➔ projectante (no PHP).
- Recta de perfil.
- Recta oblíqua.

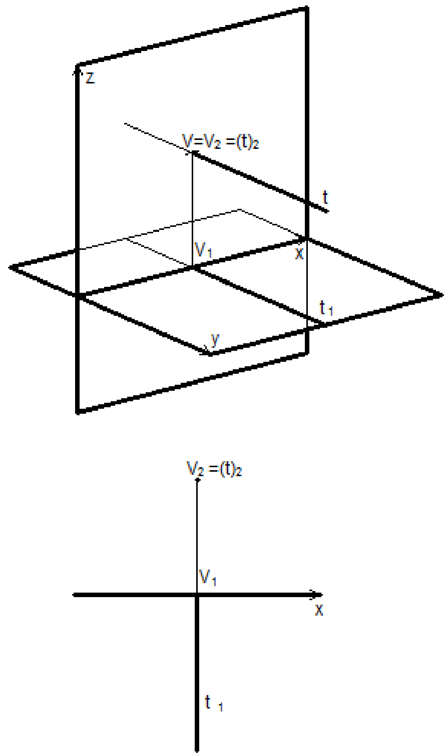
TAXONOMIA DOS PLANOS:
- Plano de nível ➔ projectante (no PFP).
- Plano de topo ➔ projectante (no PFP).
- Plano de perfil ➔ projectante (no PFP e no PHP).
- Plano vertical ➔ projectante (no PHP).
- Plano frontal ➔ projectante (no PHP).
- Plano oblíquo.
- Plano de rampa.

Tipos de rectas

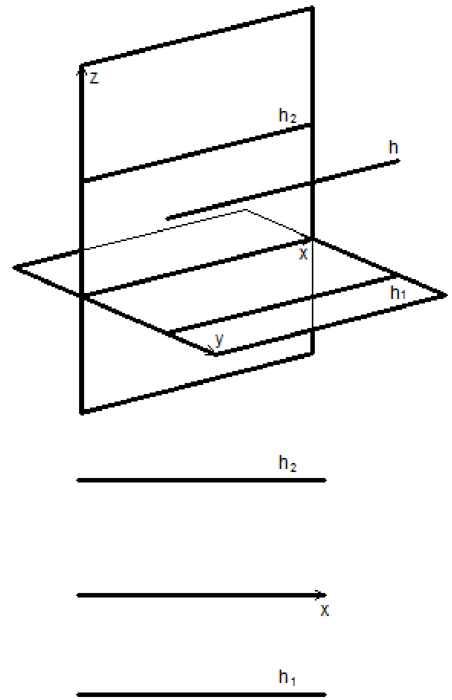
RECTA DE NÍVEL



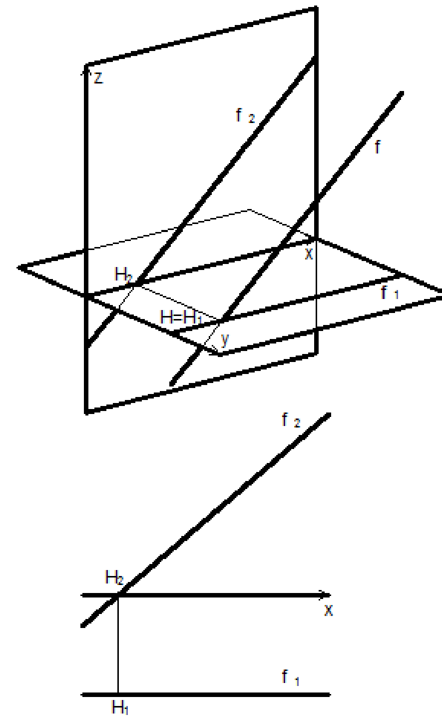
RECTA DE TOPO



RECTA FRONTO-HORIZONTAL



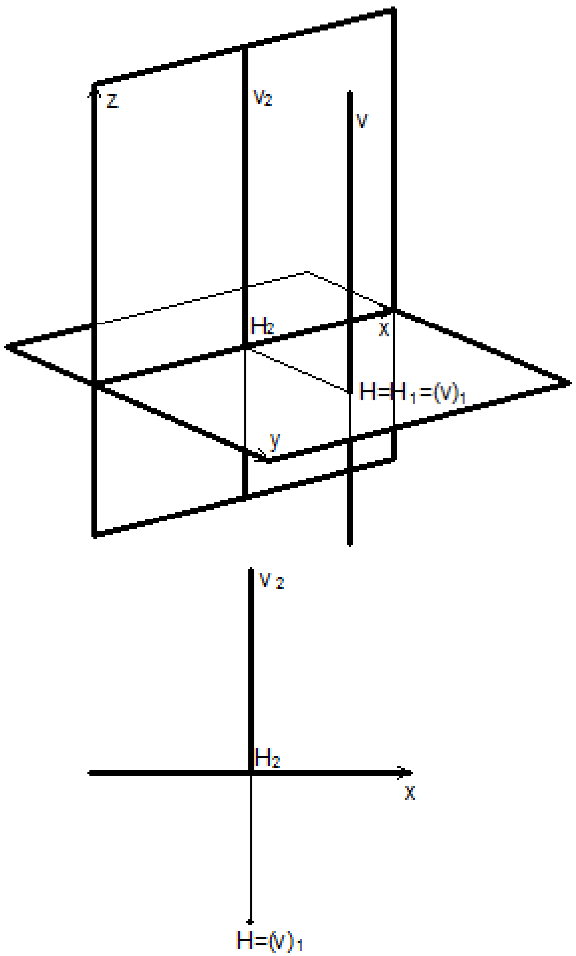
RECTA DE FRENTE



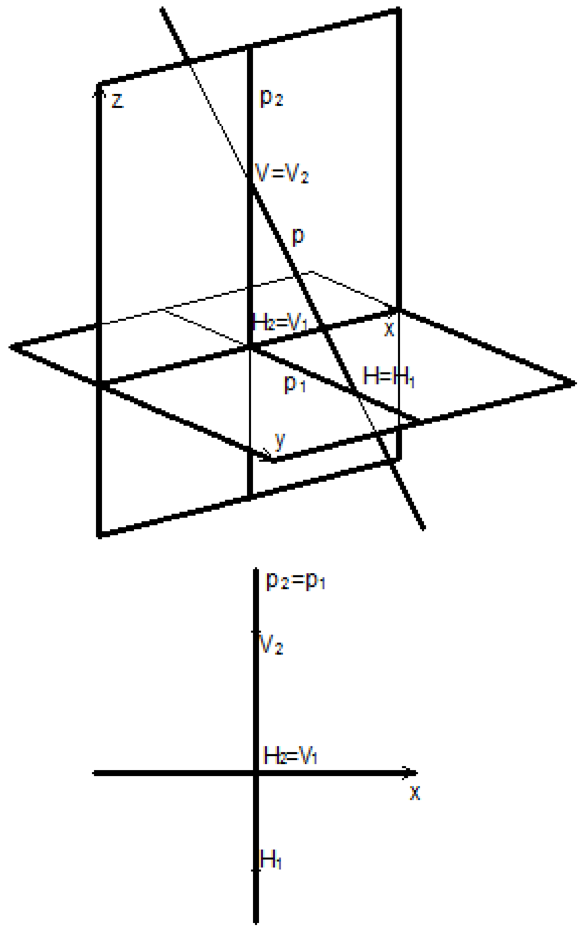
Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Tipos de retas

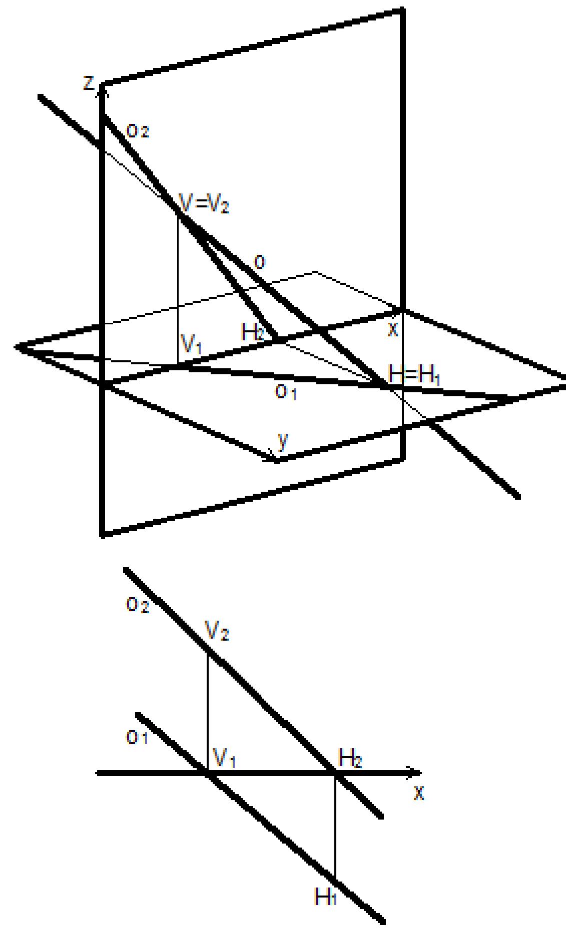
RECTA VERTICAL



RECTA DE PERFIL

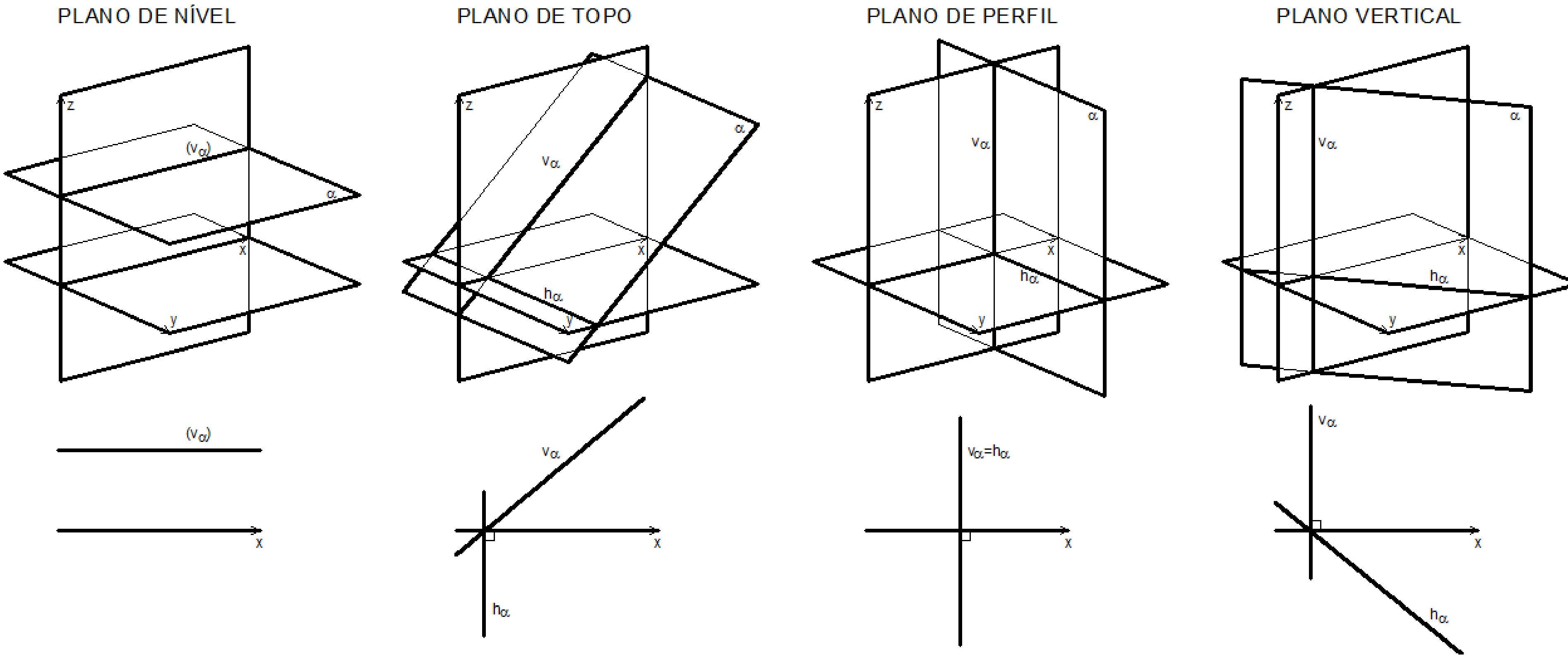


RECTA OBLÍQUA



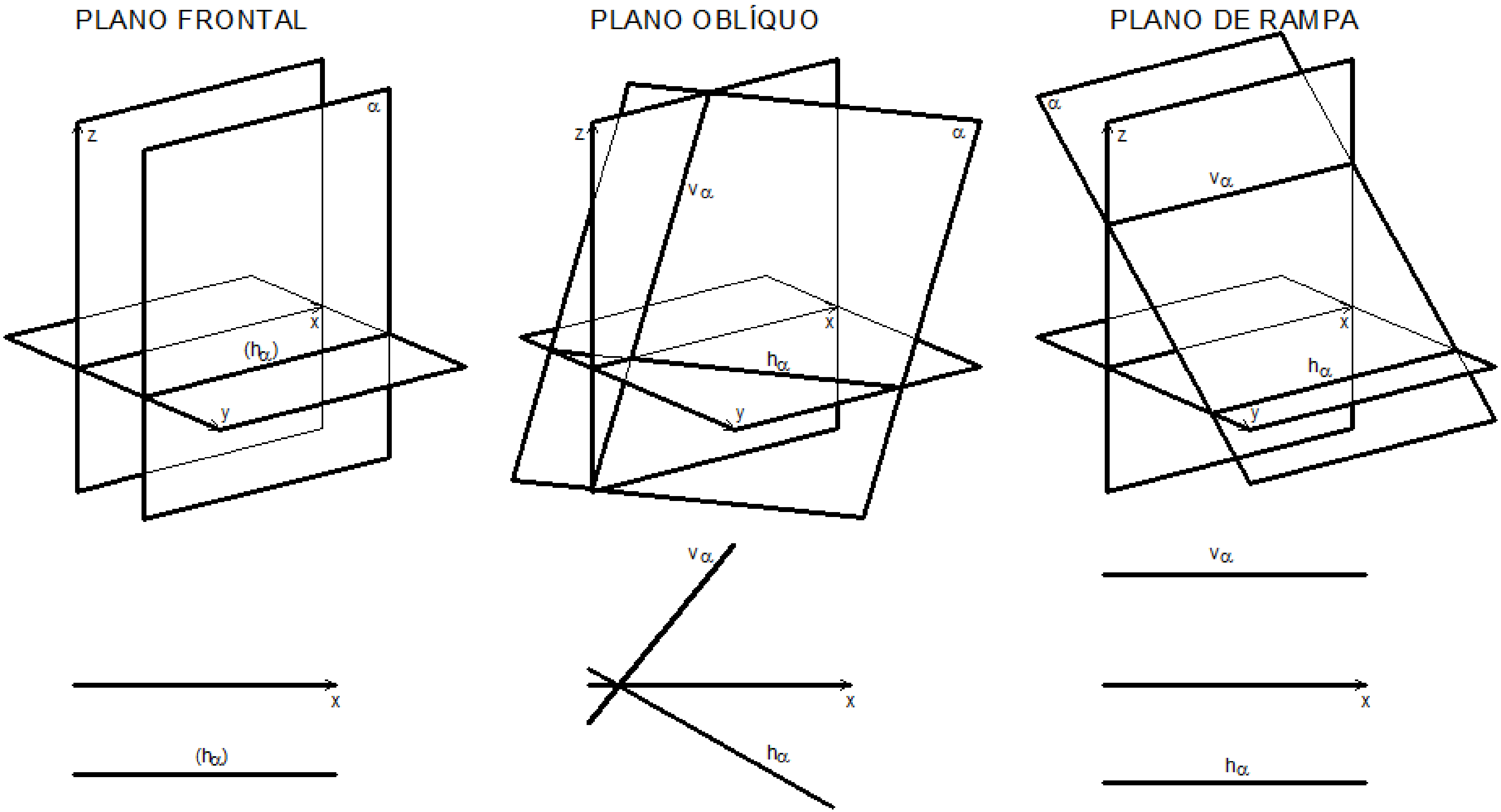
Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Tipos de planos



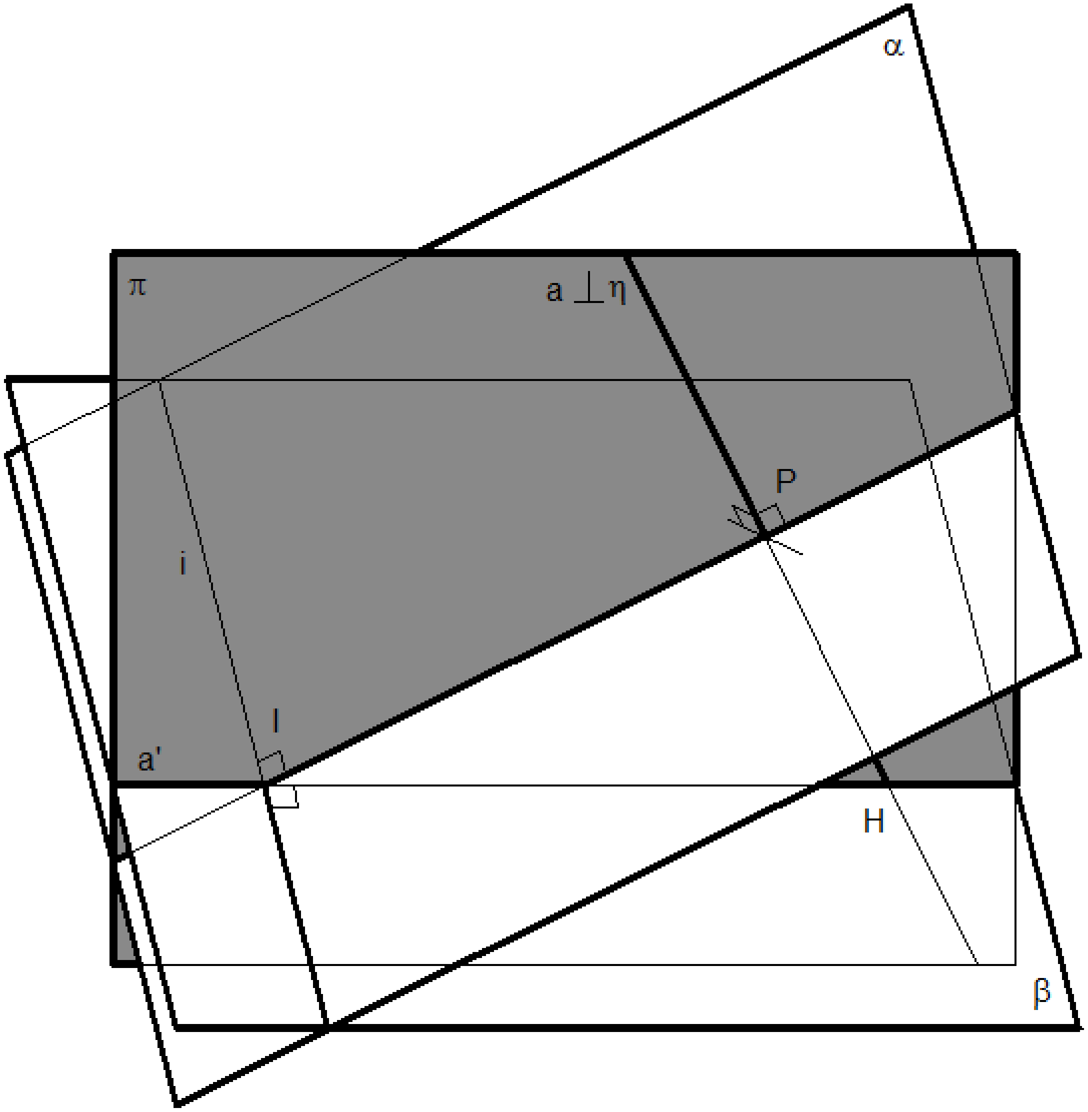
Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Tipos de planos



Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

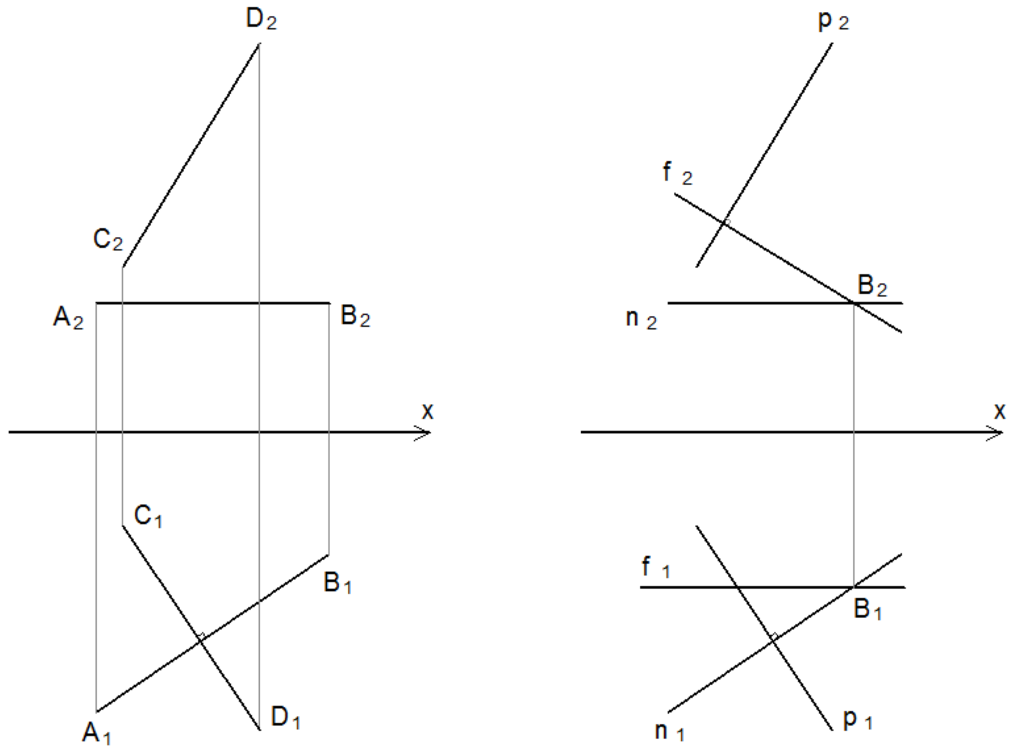
Perpendicularidade



Perpendicularidade (dupla projecção ortogonal)

As projecções duas rectas em DPO, perpendiculares ou ortogonais entre si, só serão perpendiculares se uma das rectas for paralela ao plano de projecção (figura à esquerda).

Como consequência da afirmação anterior, se uma recta for perpendicular a um plano α, as projecções (em DPO) frontal e horizontal da recta, são perpendiculares às projecções das rectas frontais e horizontais, respectivamente, do plano α.

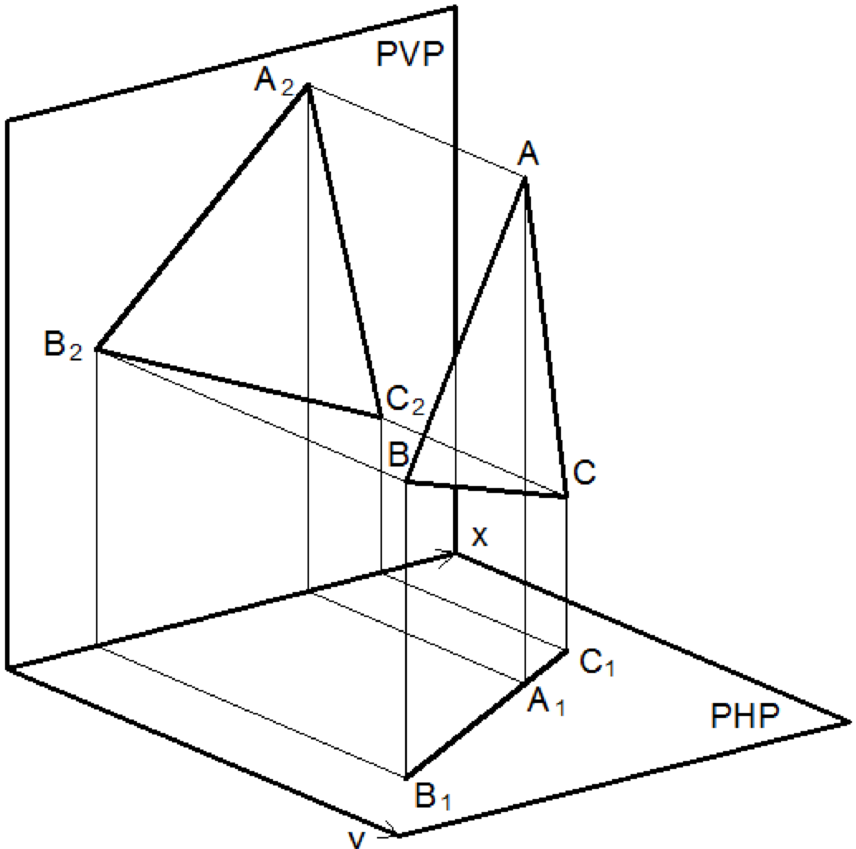


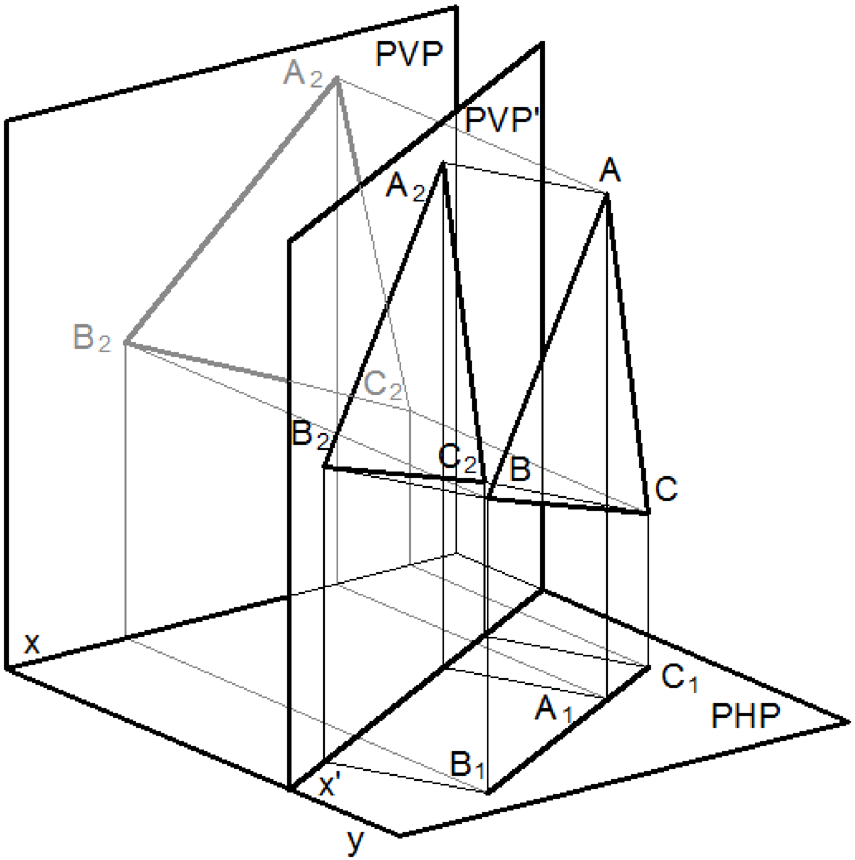
Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

3.1. Múltipla projeção ortogonal (MPO)

A mudança do plano de projecção (Da DPO à MPO)

A operação da mudança do plano de projecção é o que está na base da múltipla projecção ortogonal. Na prática posiciona-se o novo plano de projecção em função de uma necessidade prática (determinação de uma verdadeira grandeza de uma medida, de um ângulo, etc.) Na prática da Arquitectura e do Design, é a operação base que permite resolver problemas concretos (desenhar o perfil de uma escada, desenhar o perfil de um encaixe, etc.).

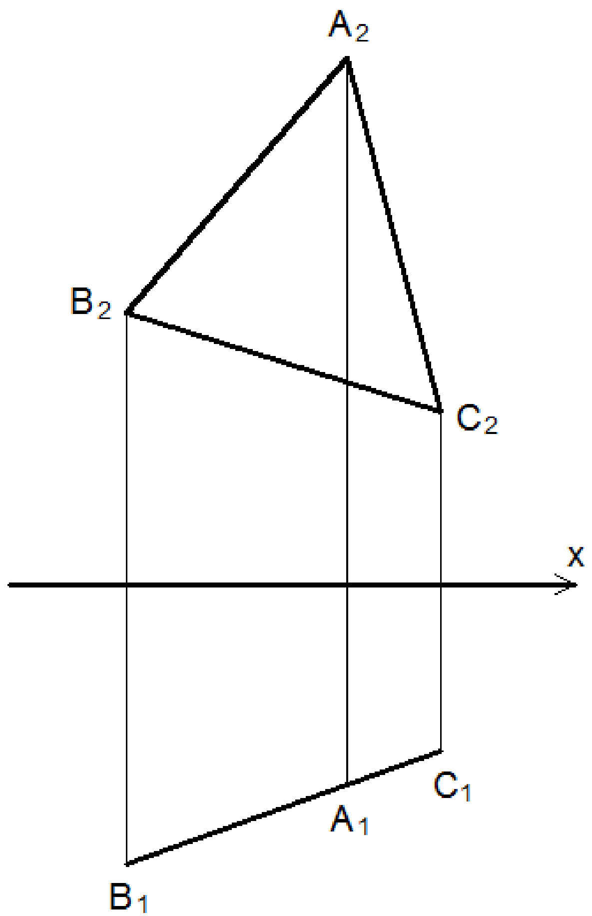


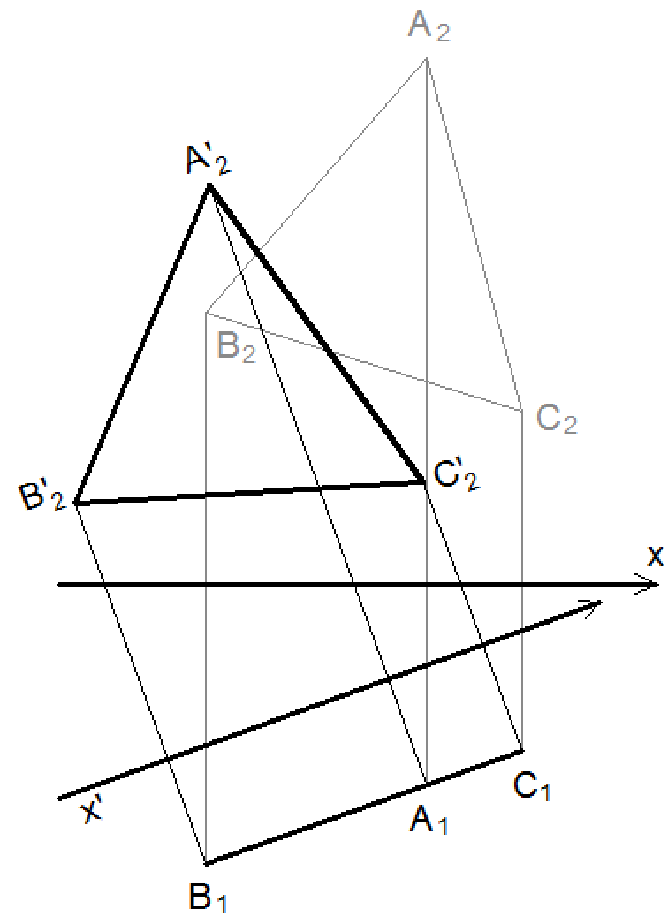


Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

A mudança do plano de projecção (Da DPO à MPO)

Neste exemplo utilizou-se uma mudança do plano vertical de projecção para obter a verdadeira grandeza da área do triângulo na projecção 2'. Na verdade passou-se da dupla projecção ortogonal (DPO) para a múltipla projecção ortogonal (MPO). Neste caso passou a ter-se 3 projecções do triângulo. Note-se ainda que, como se tratou de uma nova projecção num plano vertical, as cotas não se alteraram.



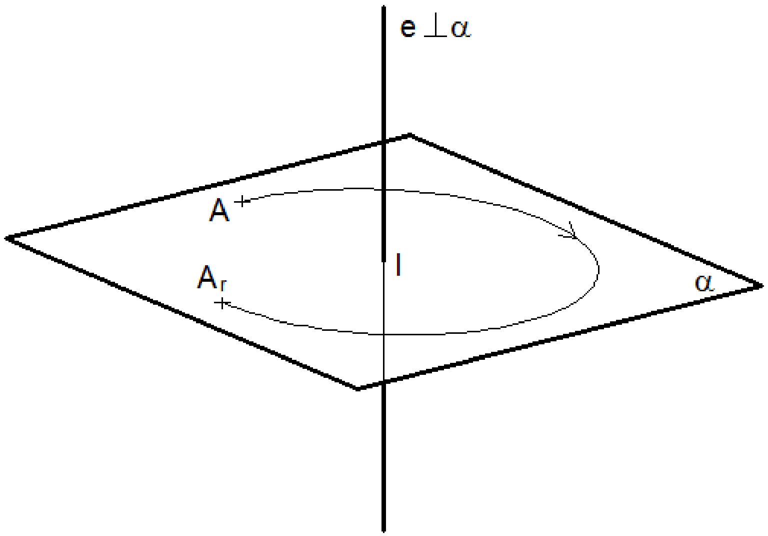


Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

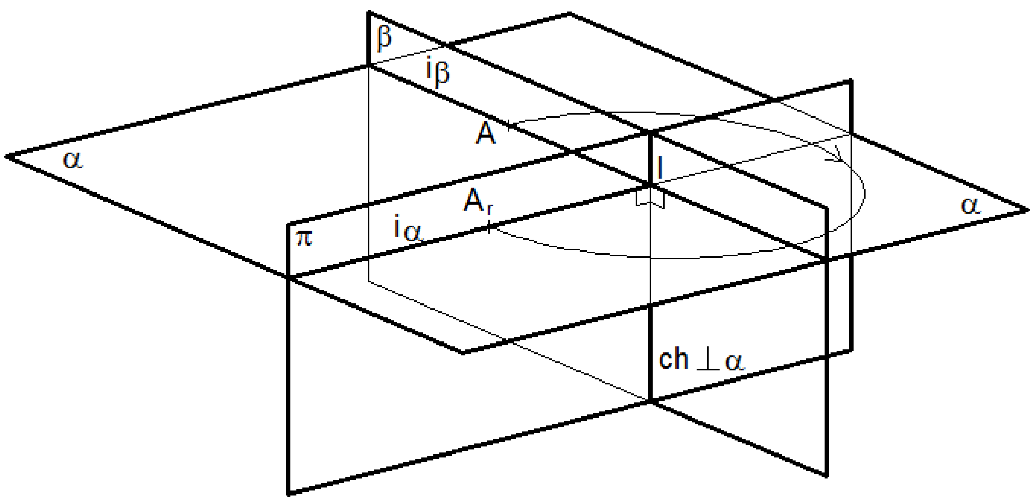
Rotações e rebatimentos (princípios gerais)

Numa rotação (ou rebatimento) cada ponto descreve um arco contido num plano perpendicular ao eixo (à charneira).
O rebatimento é um caso particular da rotação. O rebatimento corresponde a uma rotação de um plano, até ficar coincidente com outro, em torno de um eixo que é a recta comum aos dois planos.

ROTAÇÃO DE UM PONTO A

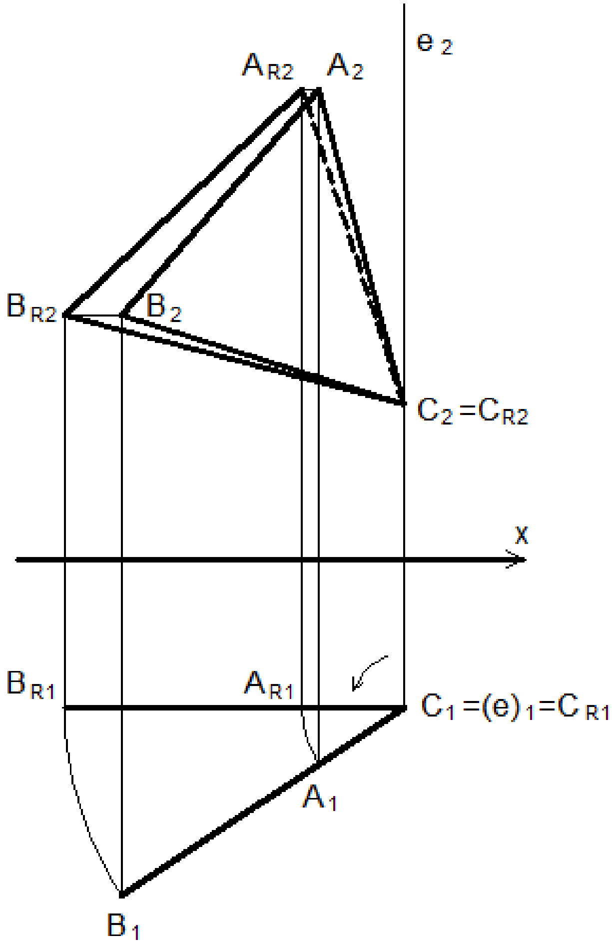


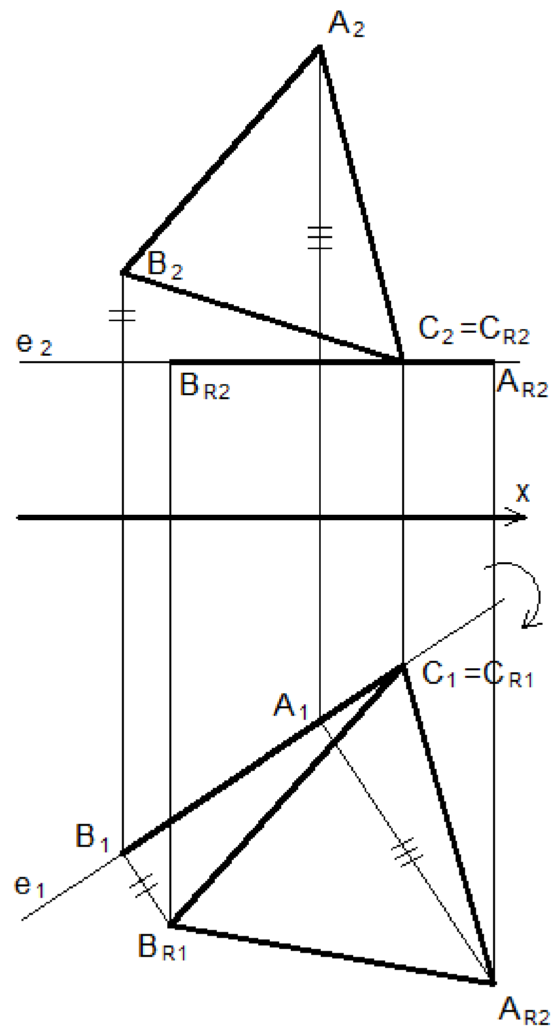
REBATIMENTO DE UM PLANO β



Rebatimento de planos projectantes (MPO)

À esquerda: Rebatimento de um plano vertical para uma plano frontal (charneira vertical).
À direita: Rebatimento de um plano vertical para um plano de nível (charneira horizontal).

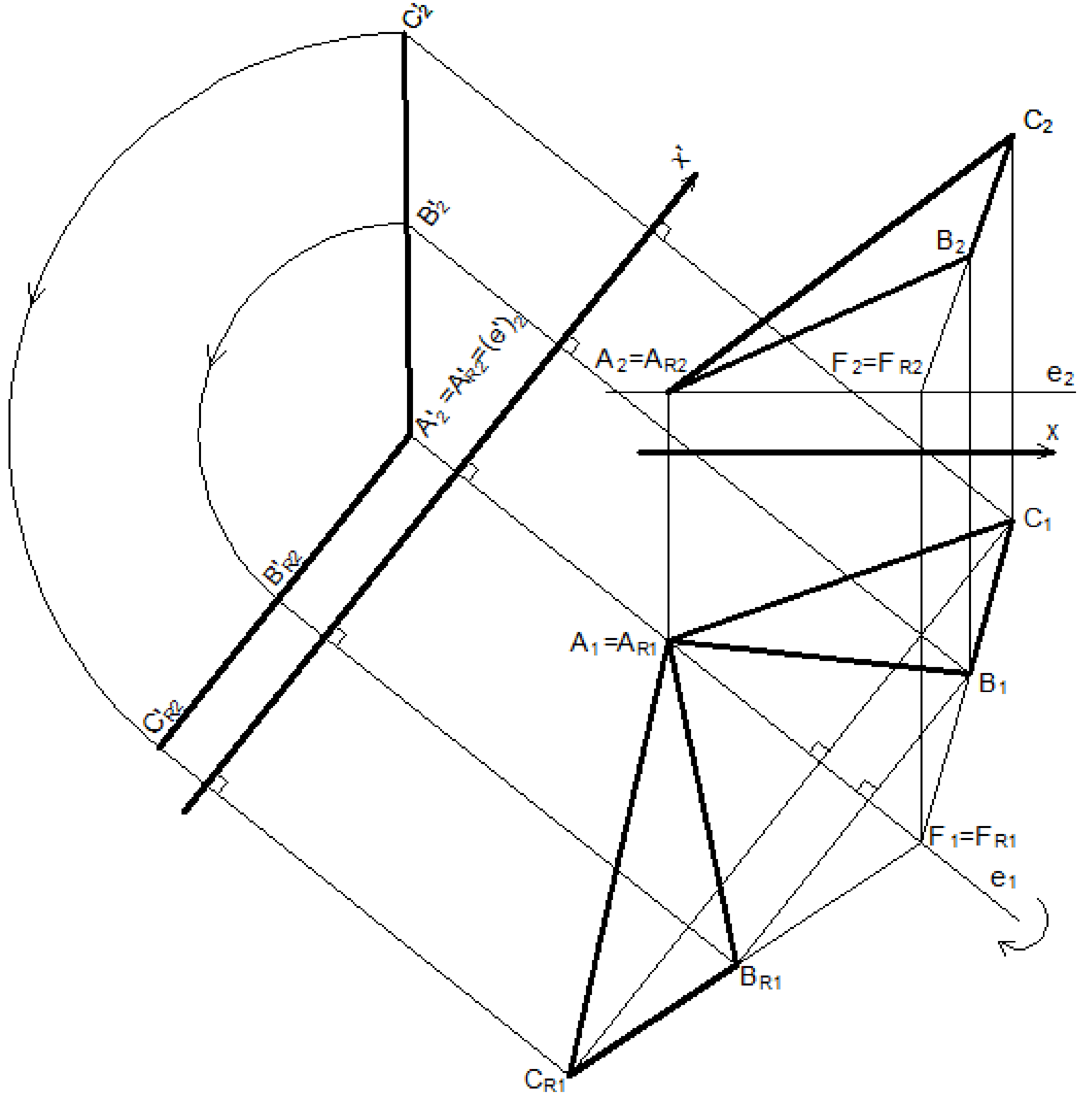




Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Rebatimento de planos oblíquos (MPO)

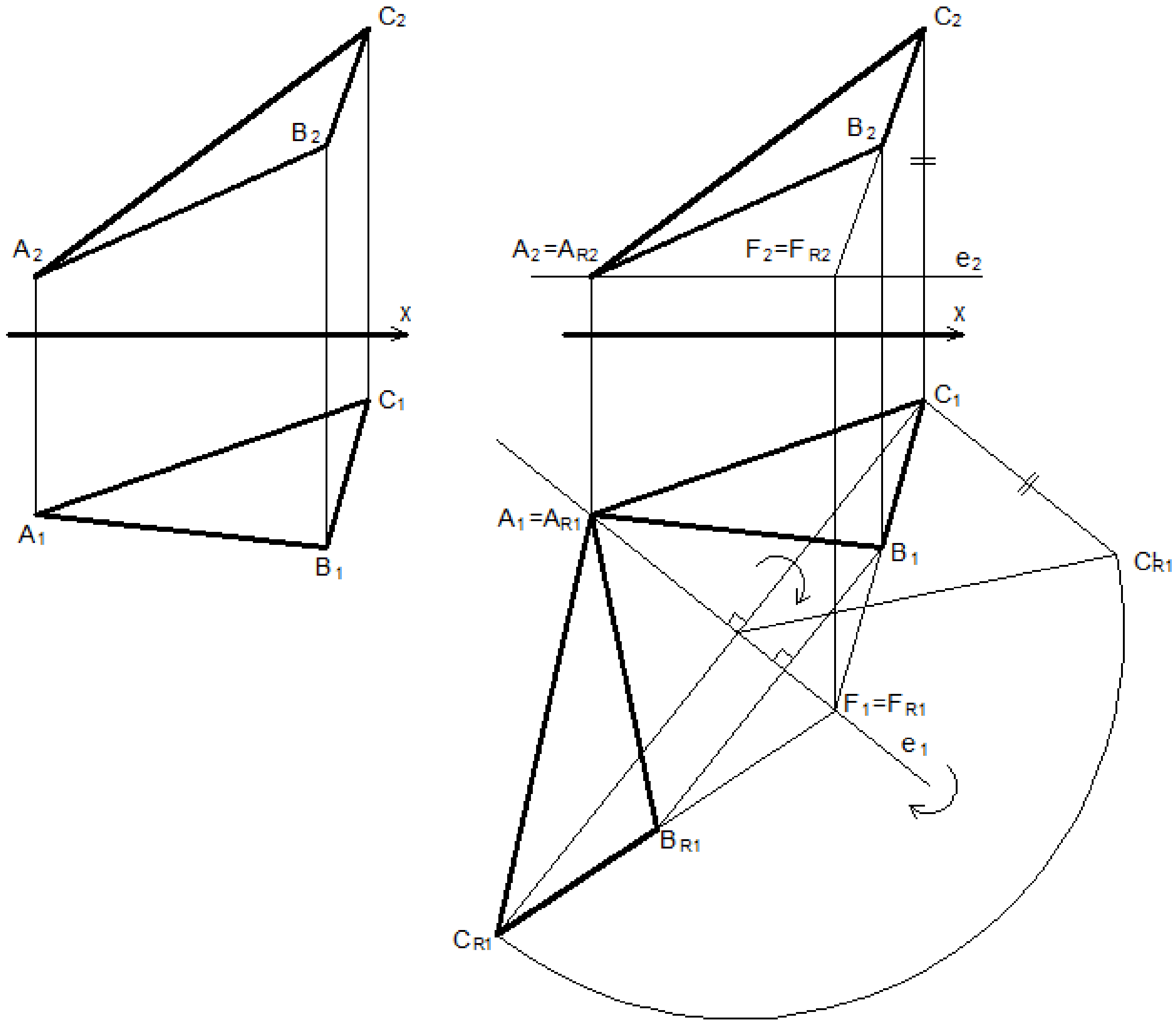
Rebatimento de um plano vertical para um plano de nível (**utilização da mudança de planos como método auxiliar**).



Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Rebatimento de planos oblíquos (MPO)

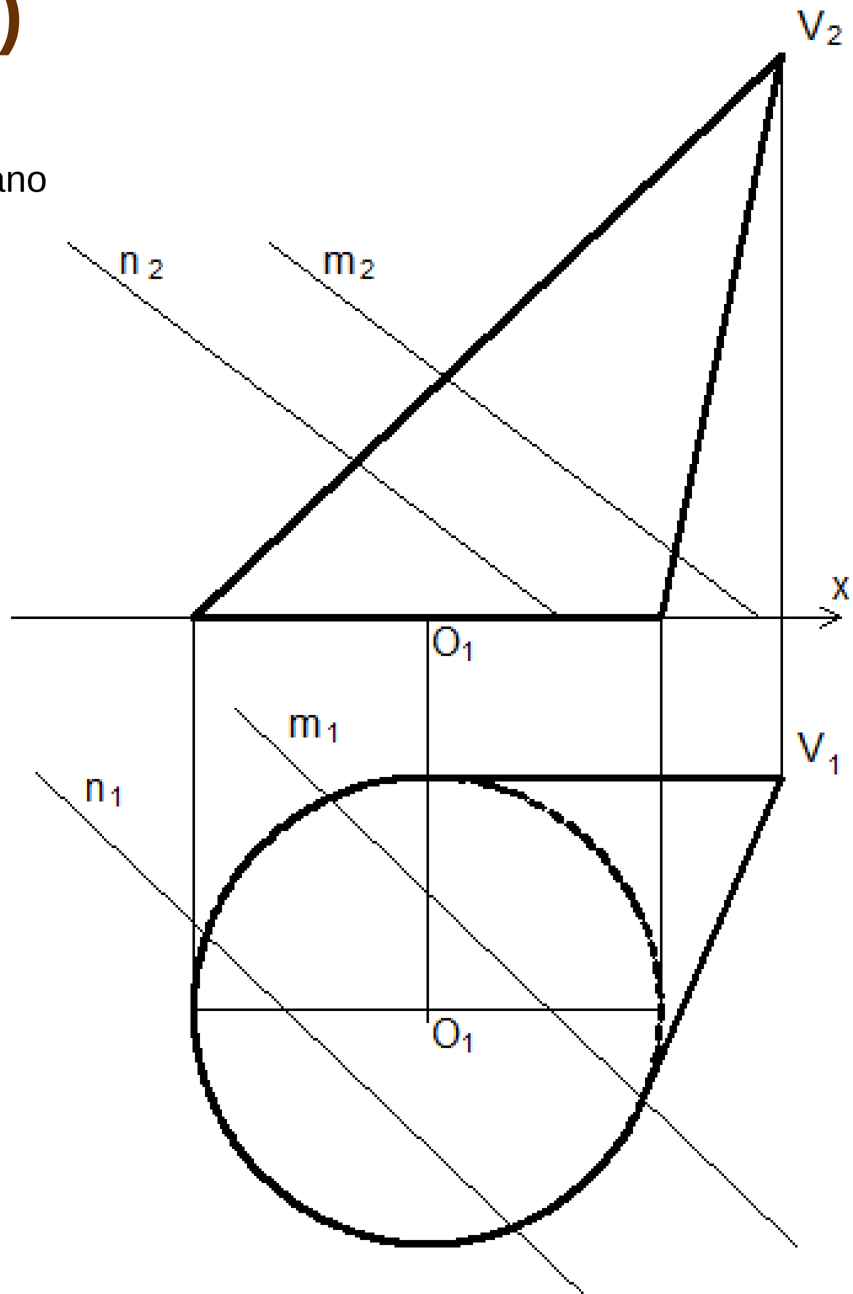
Rebatimento de um plano vertical para um plano de nível (**método do triângulo do rebatimento**).



Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

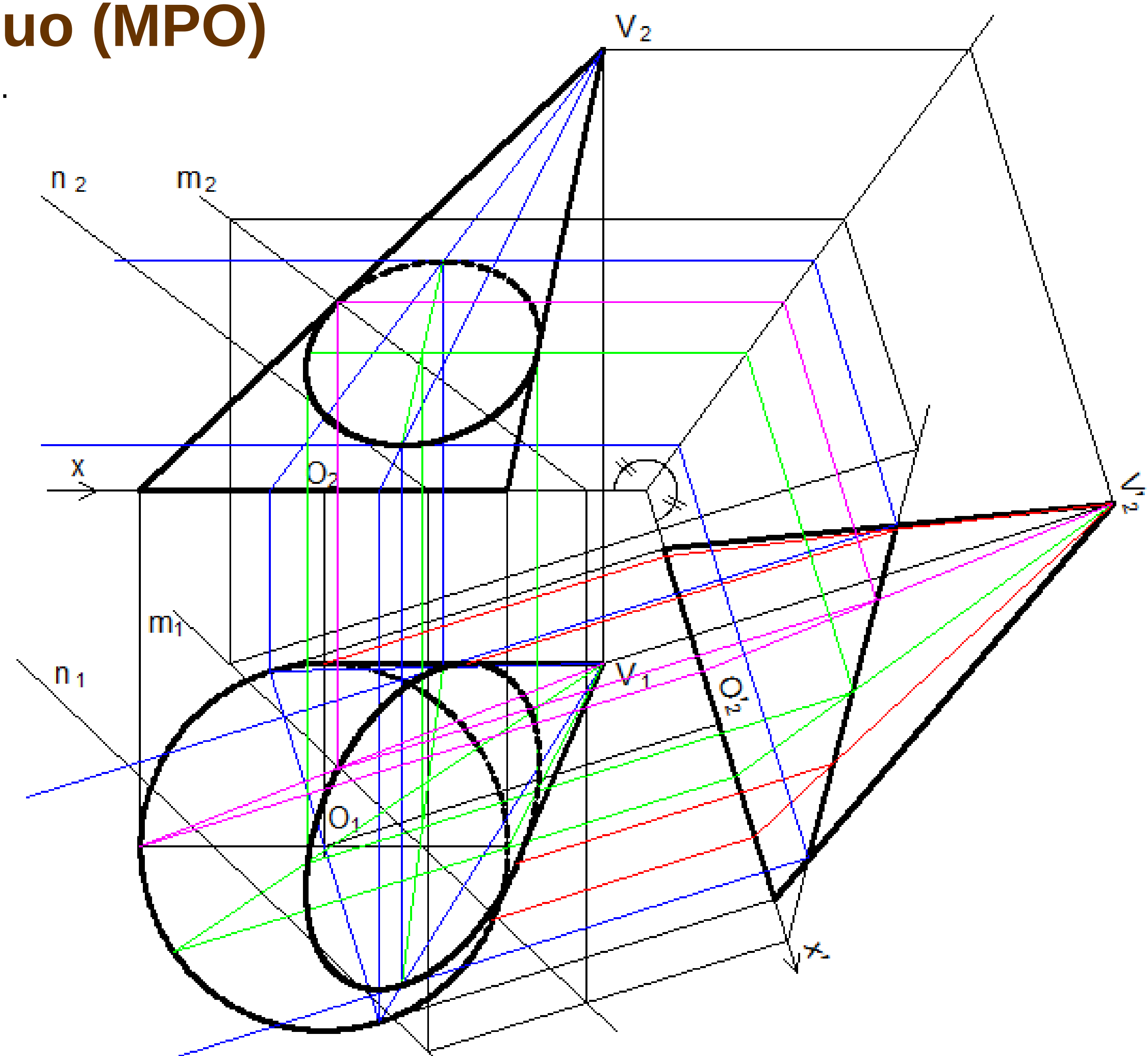
A determinação de uma secção cónica num cone oblíquo (MPO)

Dados:
As rectas m e n definem o plano que produz a secção.



A determinação de uma secção cónica num cone oblíquo (MPO)

Resolução.

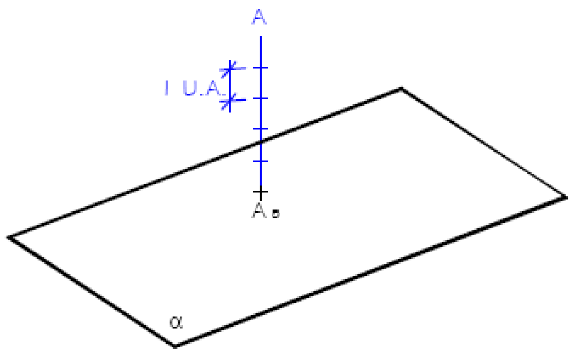


3.2. Projecções Cotadas (PC)

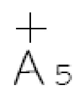
Projecções cotadas

Trata-se de um sistema bastante prático para resolver problemas relacionados com superfícies, em particular os que assumem prepoderência numa dada vista, em geral a planta.

. Representação do ponto; unidade altimétrica; cotas inteiras; escalas



(visto em Perspectiva)



(visto em Cotadas)

No sistema das Projecções Cotadas os pontos são definidos pela sua projecção horizontal num plano HORIZONTAL ou de REFERÊNCIA, associada a um valor numérico em índice. Esse índice corresponde à cota do ponto medida em UNIDADES ALTIMÉTRICAS (U.A.). Uma unidade altimétrica pode ser, por exemplo: 1cm, 1m, 3cm, 1dm, etc.

Projecções cotadas

Se a cota do ponto for expressa por um número inteiro de unidades altimétricas então diz-se que o ponto tem cota INTEIRA ou REDONDA.

Neste Sistema de Representação é fundamental a indicação da ESCALA a que se produzem os desenhos. A escala pode ser NUMÉRICA ou GRÁFICA.

exemplos de escalas numéricas:

1/10

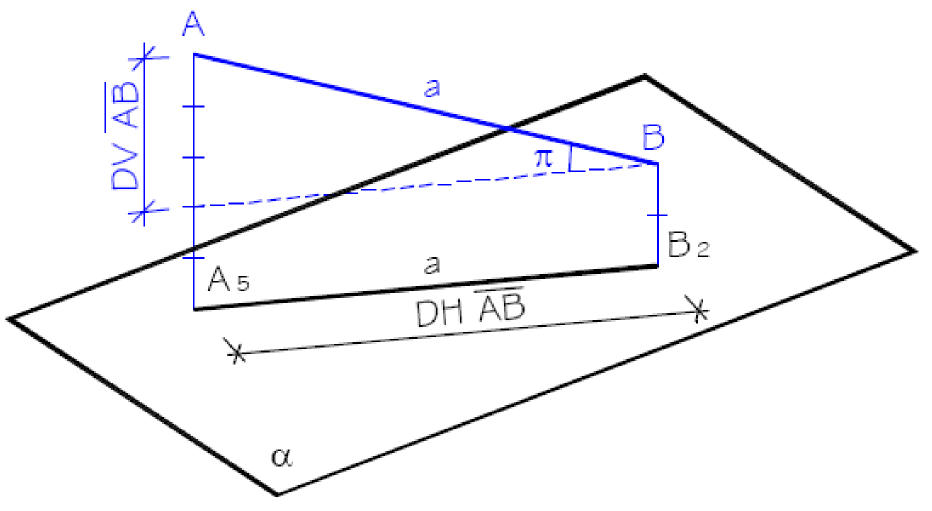
1/25 000

0,01

exemplo de escala gráfica:

Projecções cotadas

. Representação da recta; noção de declive de uma recta; graduação da recta



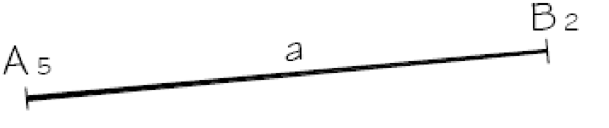
exemplo:

U.A.=1cm

esc. =1/1

DV = distância vertical

DH = distância horizontal



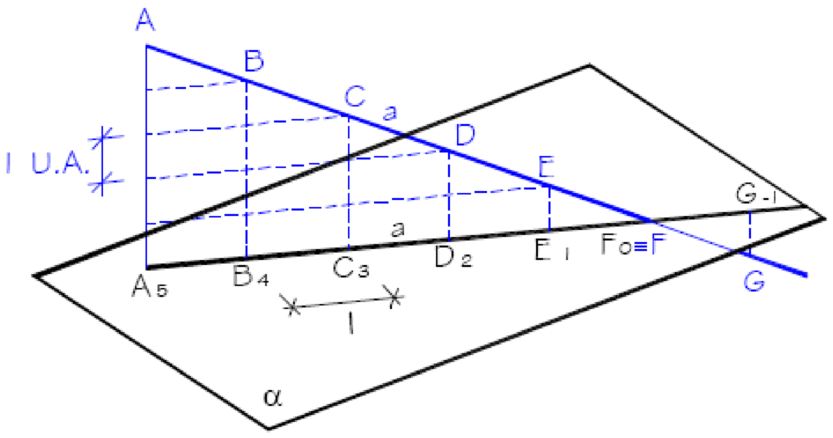
(visto em Perspectiva)

(visto em Cotadas)

Projecções cotadas

A recta fica definida pelas projecções de dois dos seus pontos. O ponto de cota 0 da recta é o seu TRAÇO HORIZONTAL.

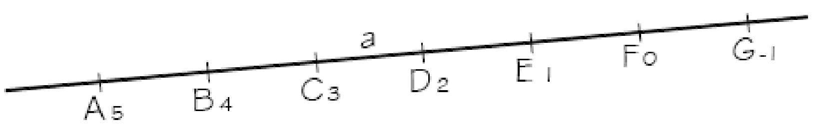
À distância horizontal entre dois pontos, de uma recta, de cota redonda consecutiva, dá-se o nome de INTERVALO (I).



<u>exemplo:</u>

U.A. = 1cm

esc. = 1/1



(visto em Perspectiva)

(visto em Cotadas)

Projecções cotadas

O DECLIVE (d) de uma recta pode ser determinado pela razão entre as distâncias, vertical e horizontal, de dois dos seus pontos, e corresponde à tangente trigonométrica do ângulo π que mede a INCLINAÇÃO (i) da recta. Pode ainda ser determinado pela razão entre a unidade altimétrica e o intervalo.

$$\boxed{d = DV / DH}$$

$$\boxed{d = tg\ \pi}$$

$$\boxed{d = U.A. / I}$$

$$\boxed{i = arc\ tg\ \pi}$$

O declive de uma recta vem expresso por um índice, por exemplo: 0,4 ou 40%.

A inclinação de uma recta vem expressa em graus, por exemplo 50^0.

Projecções cotadas

exemplo:

U.A. = 2cm

Esc. = 1/1

dados:

A_5

B_{12}

DH **AB** = 28 cm

problema:

a) determine o declive a recta **A.B**

resolução:

$d = DV\ \mathbf{AB} / DH\ \mathbf{AB} \Leftrightarrow d = ((12-5)x2)/28 \Leftrightarrow d = 14 / 28 = 0.5 = 50\%$

Projecções cotadas

Duas rectas são PARALELAS se tiverem projecções paralelas, o mesmo declive, e “subirem” no mesmo sentido.

A operação de GRADUAÇÃO de uma recta corresponde à determinação dos seus pontos de conta redonda.

<u>exemplo:</u>

<u>dados do problema:</u>

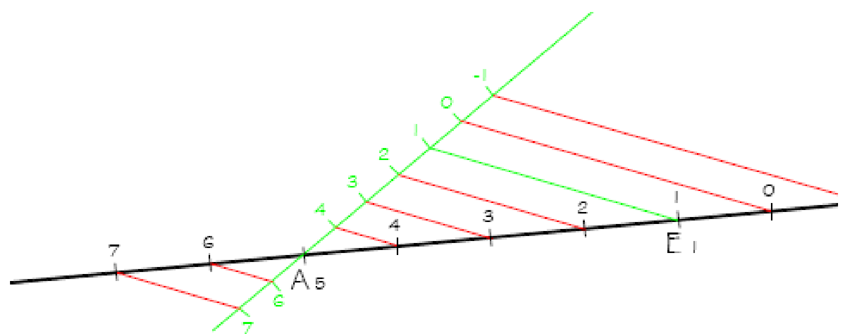
U.A. = 1cm

esc. = 1/1

<u>resolução do problema:</u>

U.A. = 1cm

esc. = 1/1



Projecções cotadas

A resolução gráfica deste problema passa por dividir um segmento em partes iguais.

Primeiro conduz-se, por A ou B, uma recta qualquer. Sobre essa recta efectua-se uma divisão em número e proporção equivalentes à que se pretende.

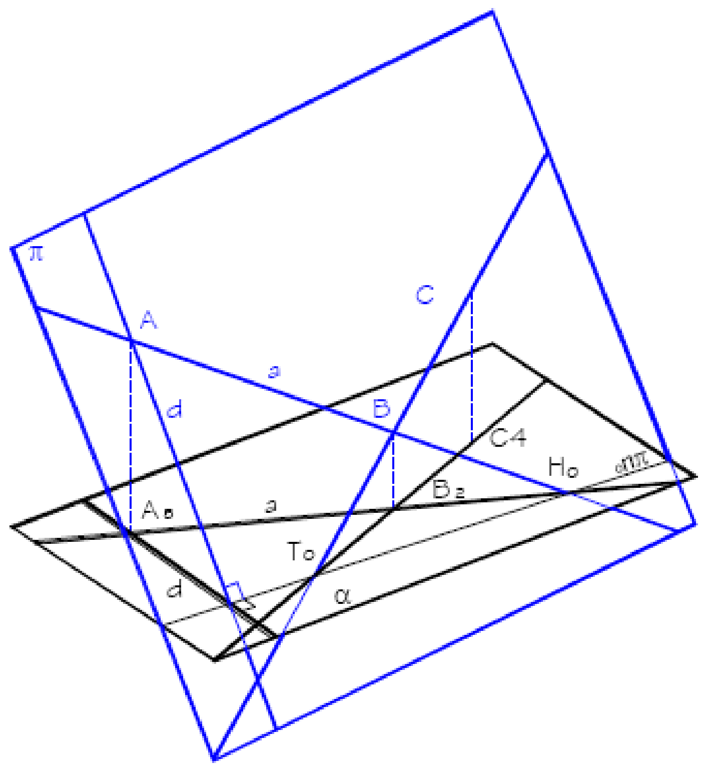
Une-se o ponto da divisão que corresponde ao ponto da recta pelo qual não foi conduzida a recta inicial.

Pelos restantes pontos da divisão conduzem-se paralelas à última recta desenhada.

Esta resolução fez-se pela aplicação de um Teorema de Thalles.

Projecções cotadas

. Representação do plano; recta de maior declive; declive do plano; graduação do plano



(visto em Perspectiva)

Um plano fica definido por três dos seus pontos.

A operação de graduação de um plano passa pela graduação de duas rectas do plano, e consiste na determinação das rectas de nível com cota redonda. A recta de nível com cota 0 é o TRAÇO HORIZONTAL do plano.

As rectas de MAIOR DECLIVE de um plano tem direcção ortogonal à das rectas de nível, pelo que as suas projecções horizontais são perpendiculares às projecções horizontais das rectas de nível. O declive de uma recta de maior declive de um plano é o declive do plano. A recta de maior declive é representada por duas rectas paralelas entre si e a traço contínuo, correspondendo à projecção horizontal da recta a que tiver maior espessura, servindo a outra de notação.

Projecções cotadas (rectas e planos)

A TAXONOMIA DAS RECTAS E PLANOS baseia-se na posição relativa que estes assumem relativamente ao plano de projecção ou referência (horizontal).

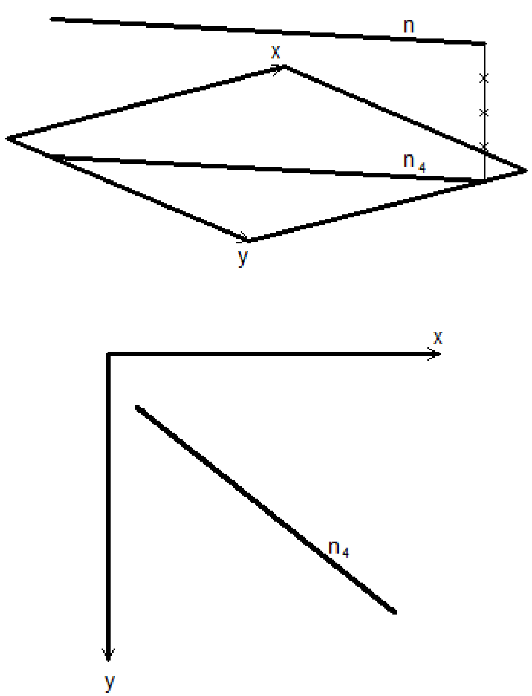
TAXONOMIA DAS RECTAS:
- Recta de nível.
- Recta vertical ➔ projectante (relativo ao PHP).
- Recta oblíqua.

TAXONOMIA DOS PLANOS:
- Plano de nível
- Plano vertical ➔ projectante (relativo ao PHP).
- Plano oblíquo.

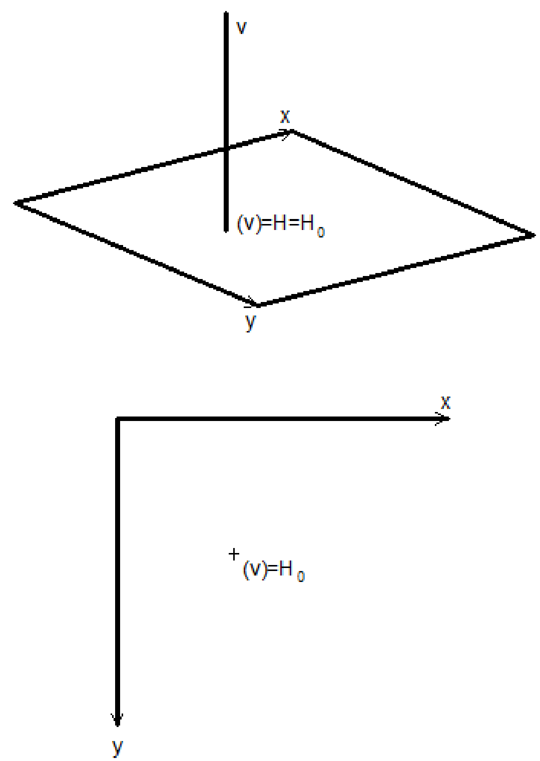
Note-se que o facto de haver apenas um plano de projecção reduz a taxonomia das rectas e planos.

Projecções cotadas (tipos de rectas)

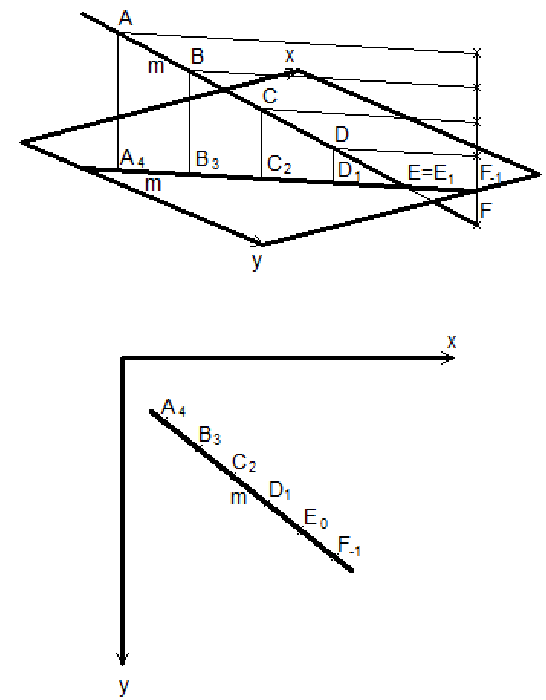
RECTA DE NÍVEL



RECTA DE VERTICAL



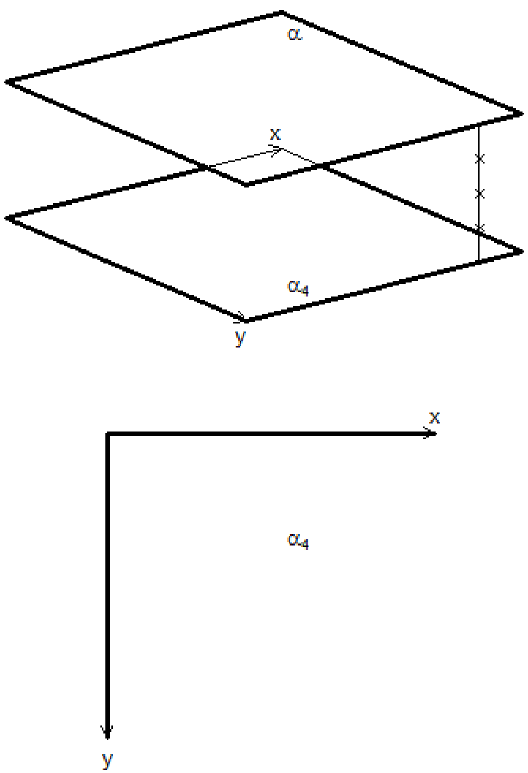
RECTA DE OBLÍQUA



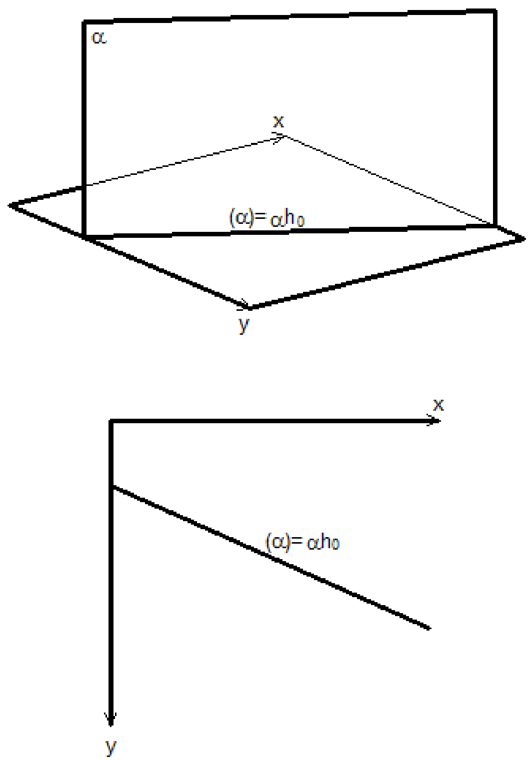
Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Projecções cotadas (tipos de planos)

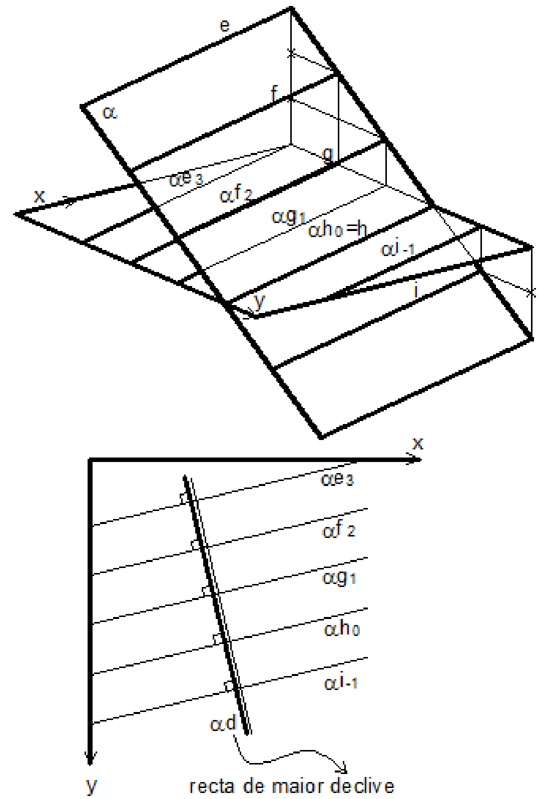
PLANO DE NÍVEL



PLANO VERTICAL



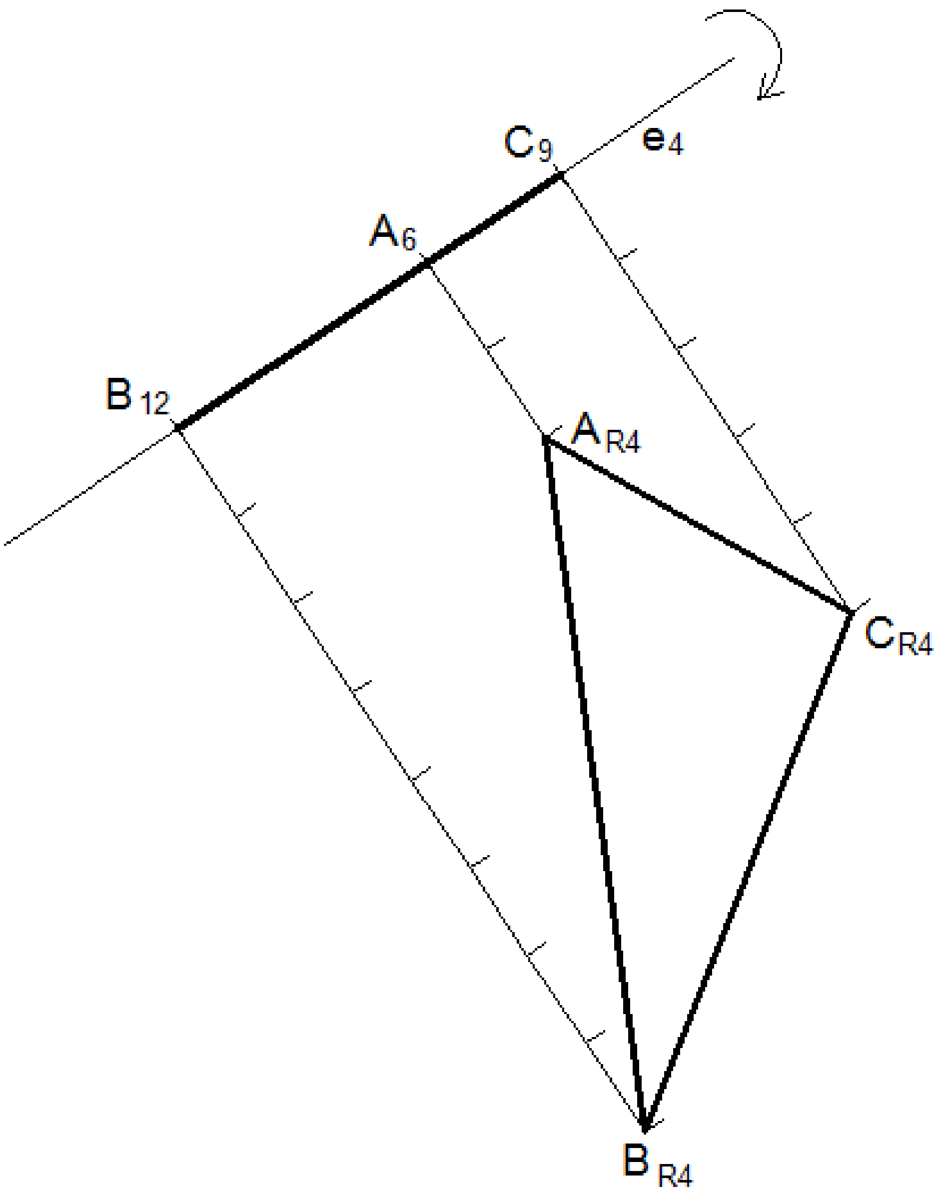
PLANO OBLÍQUO

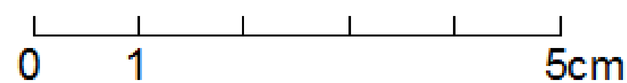


Nota:
De acordo com a convenção actualmente em prática, deve considerar-se, nas figuras, o sentido contrário para o eixo x, de modo a considerar-se um referencial de mão direita).

Rebatimento de planos projectantes (Cotadas)

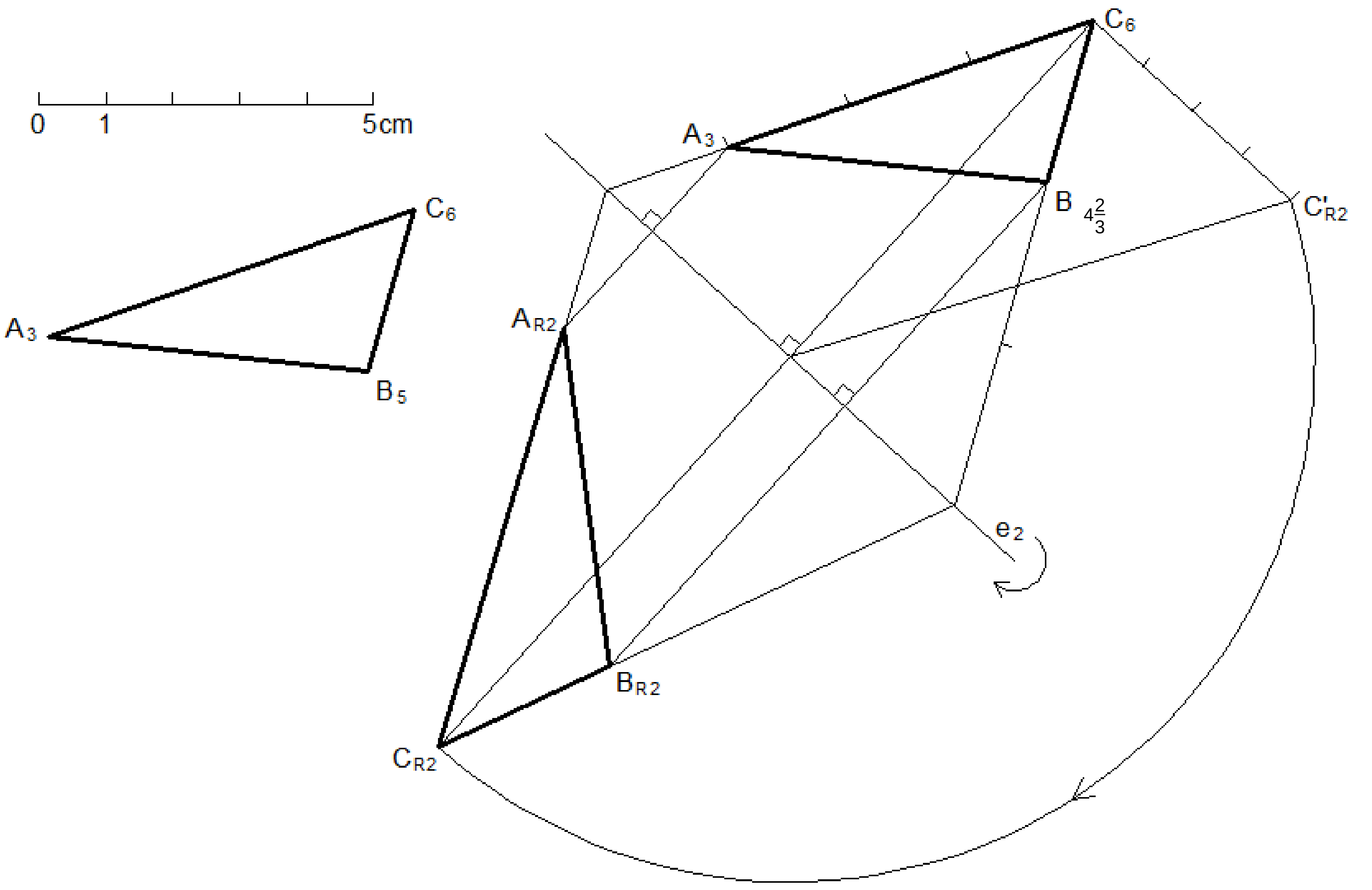
Rebatimento de um plano vertical para um plano de nível à cota 4 (charneira horizontal).





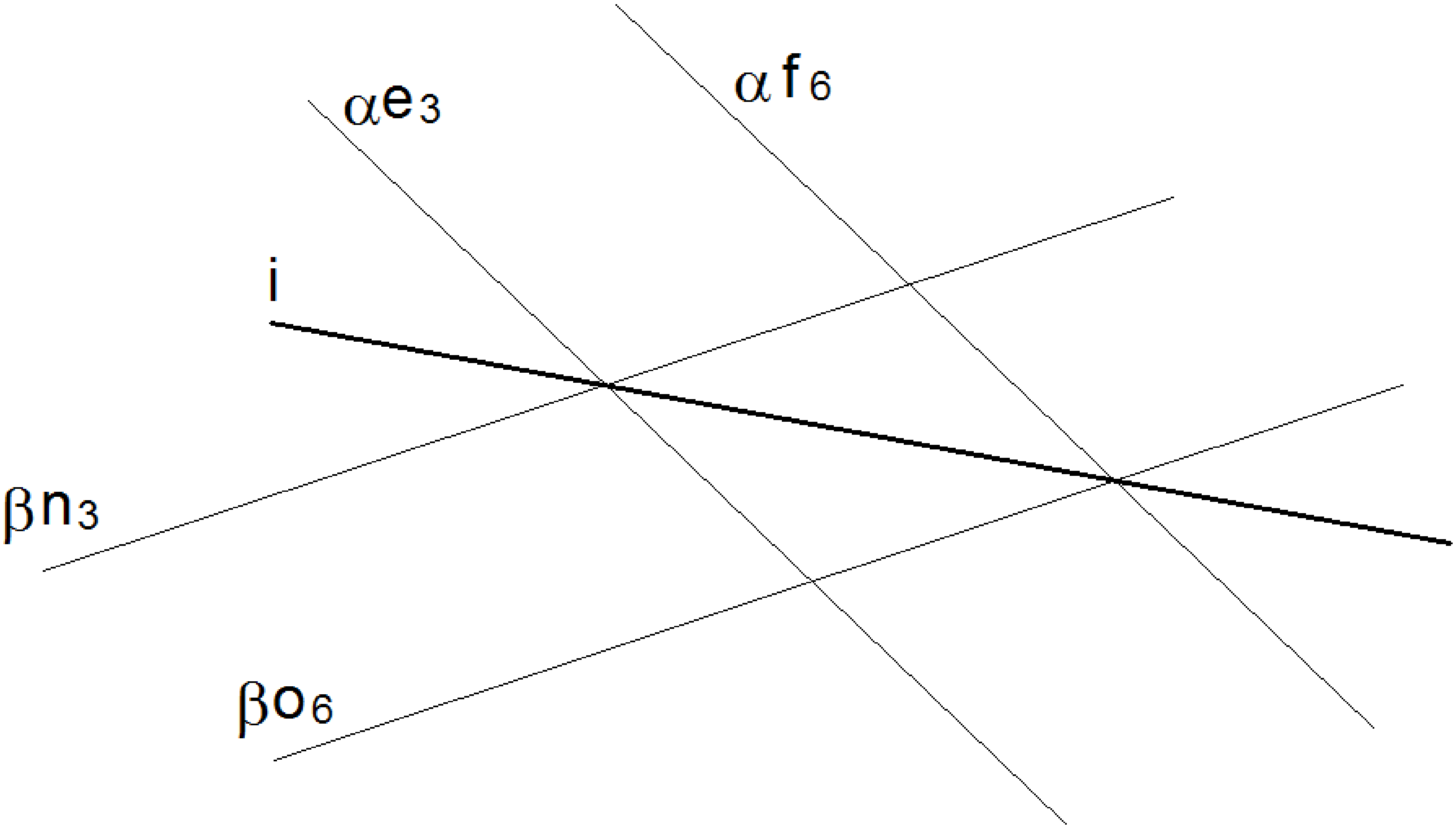
Rebatimento de planos oblíquos (Cotadas)

Rebatimento de um plano vertical para um plano de nível à cota 2 (**método do triângulo do rebatimento**).



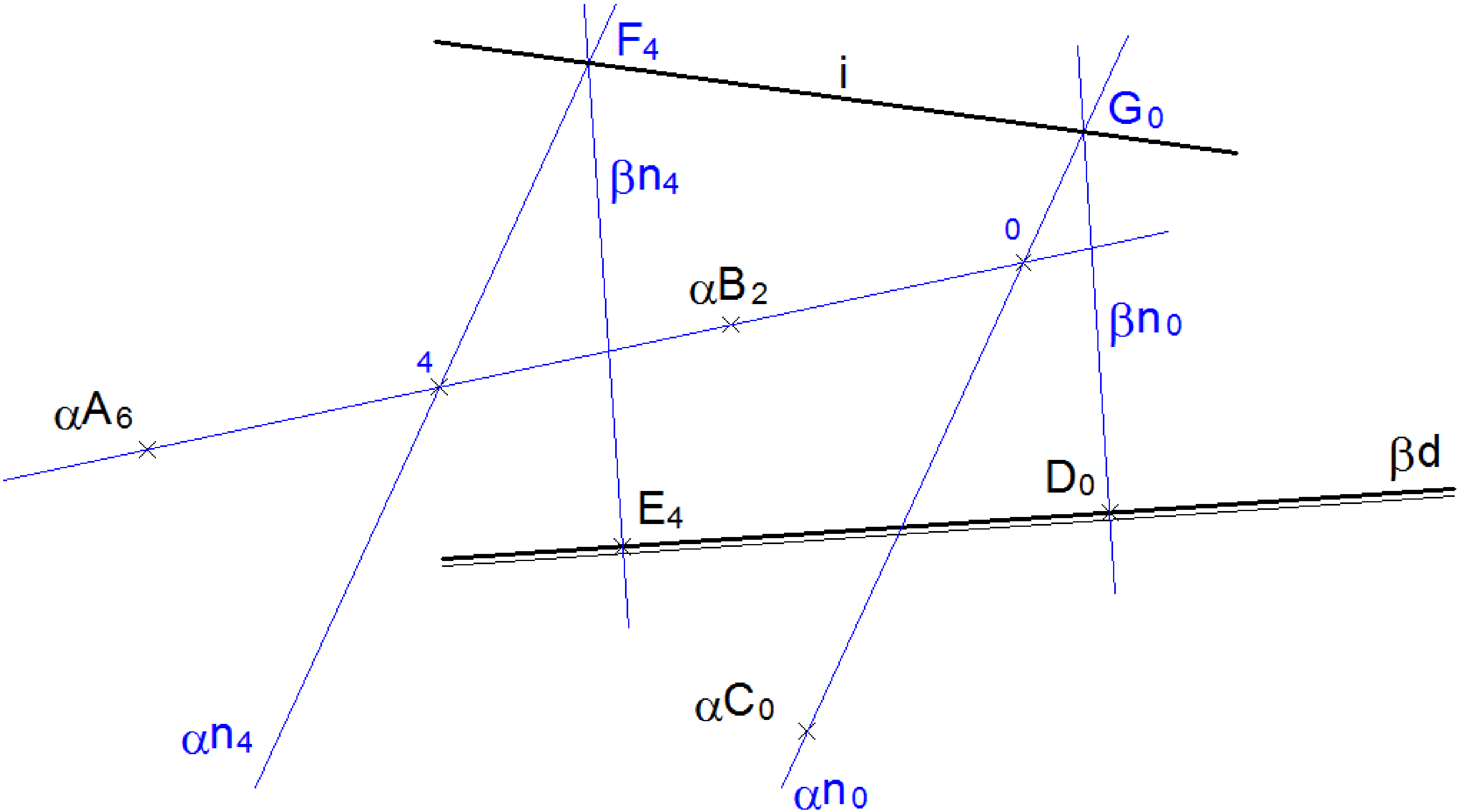
Intersecção entre planos - exemplos (Cotadas)

Determine a recta de intersecção **i** entre os planos **α** e **β** definidos por rectas de nível.



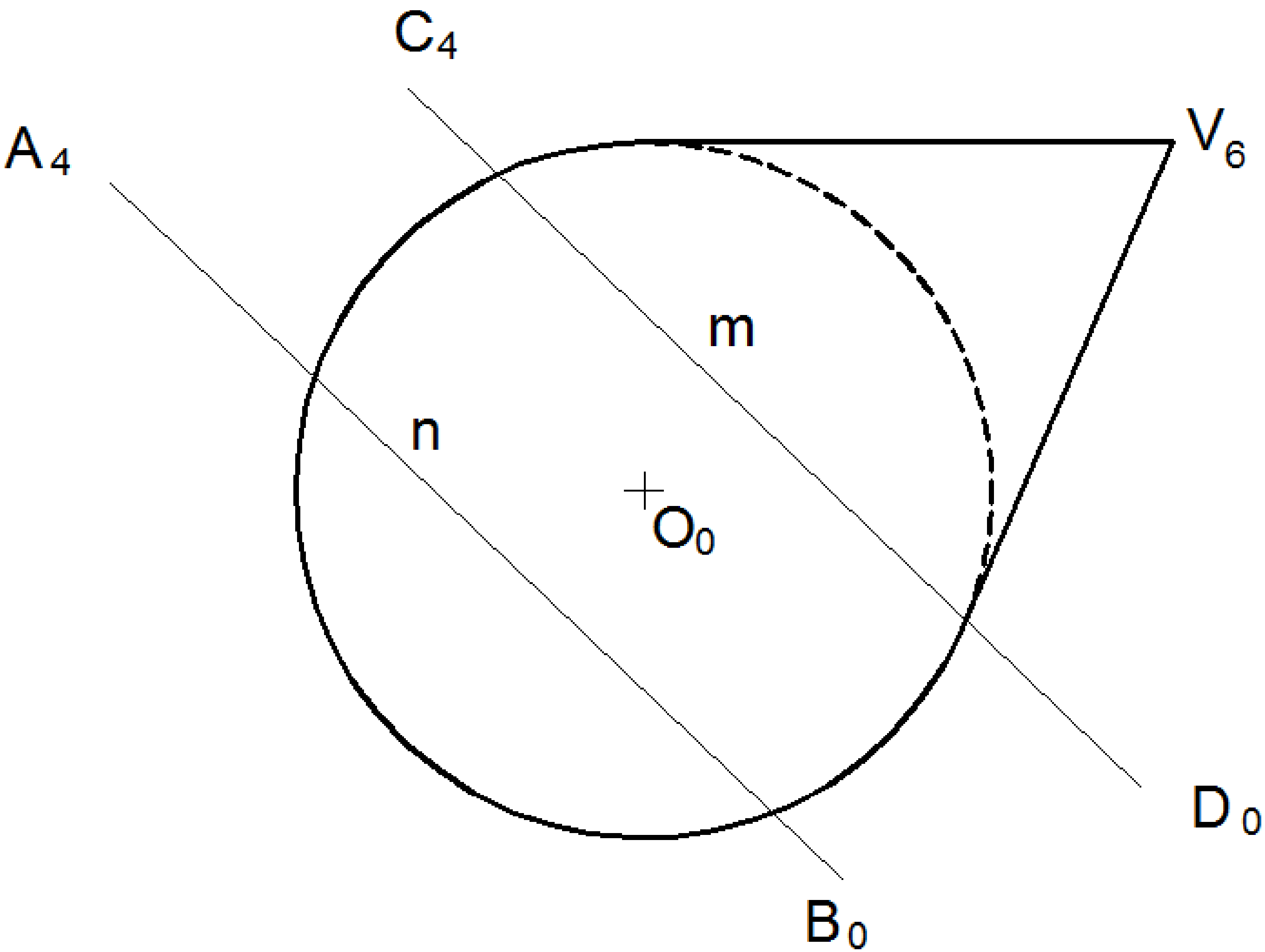
Intersecção entre planos - exemplos (Cotadas)

Determine a recta de intersecção **i** entre os planos **α** e **β**. O plano **α** está definido pelos pontos **A**, **B** e **C**. O plano **β** está definido por uma recta de maior declive **d**.



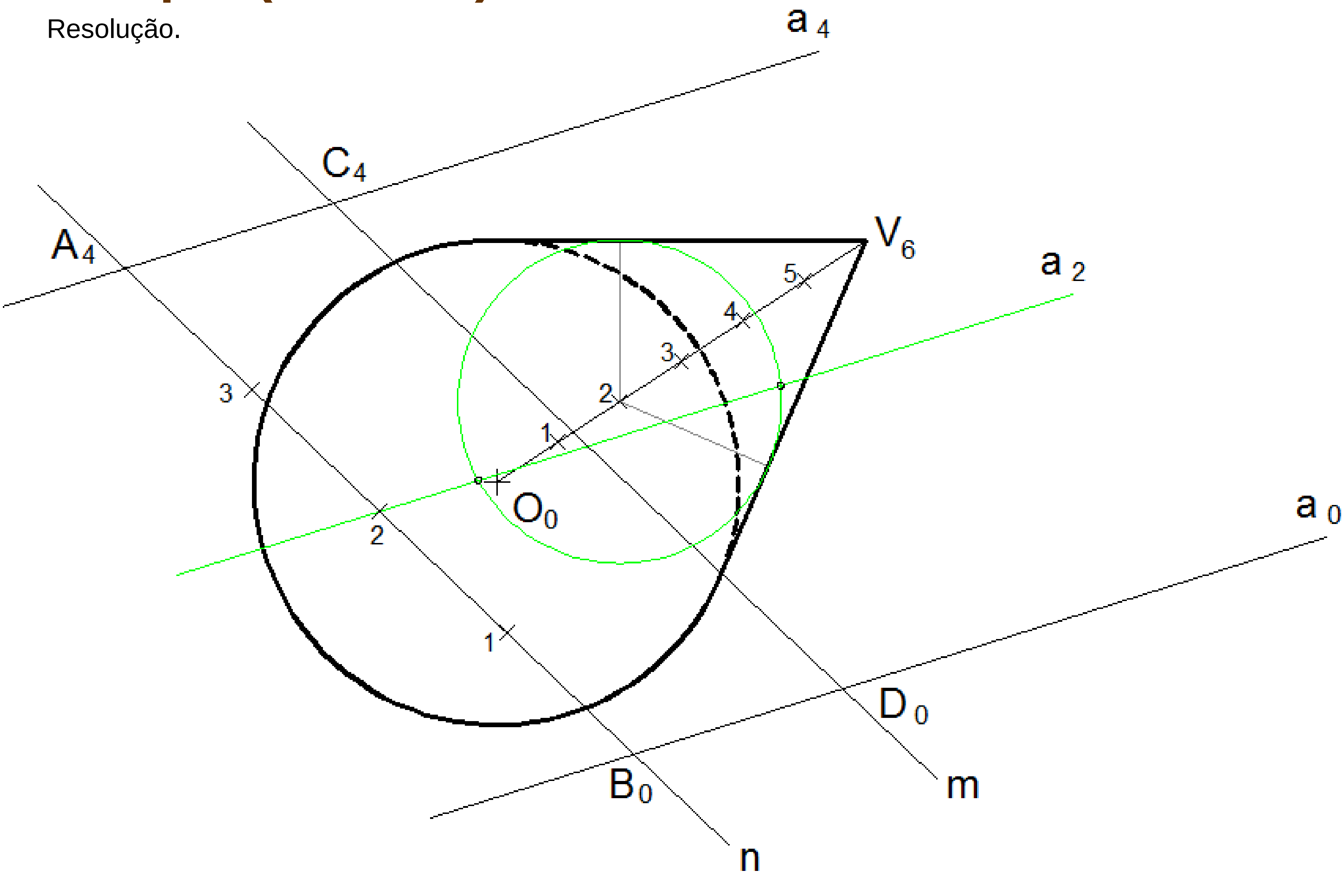
A determinação de uma secção cónica num cone oblíquo (cotadas)

Dados:
O plano secante está definido pelas
Rectas de nível m e n.



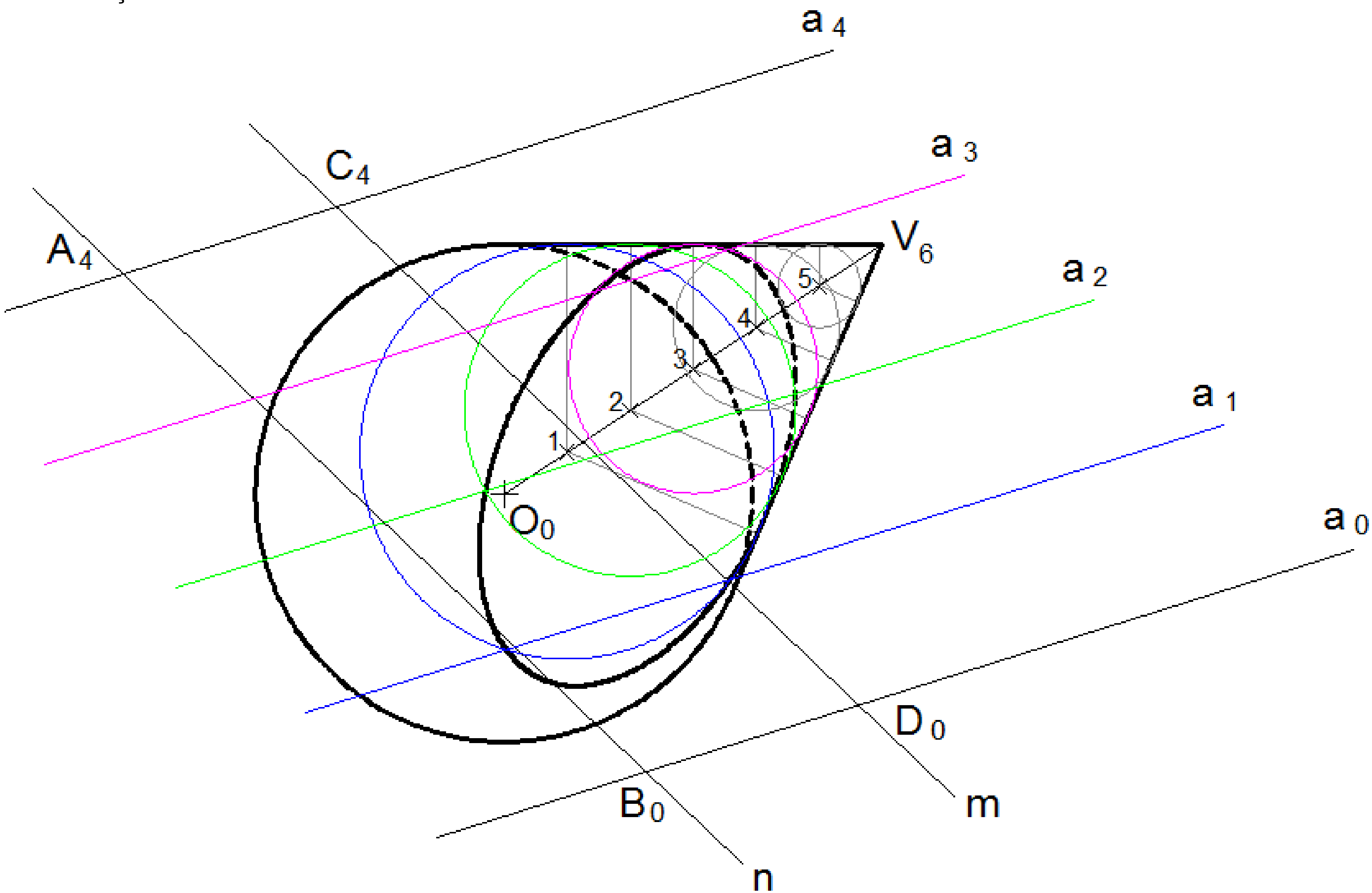
A determinação de uma secção cónica num cone oblíquo (cotadas)

Resolução.



A determinação de uma secção cónica num cone oblíquo (cotadas)

Resolução.



3.3. Axonometria

Teorema de Pohlke-Schwarz

Em 1853 Pohlke formula, sem apresentar nenhuma prova, aquele que viria a ser conhecido como o teorema fundamental da axonometria. Diz que *“um quadrângulo plano O’X’Y’Z’ pode sempre tomar-se por projecção paralela de três segmentos OX, OY e OZ iguais, com um ponto O comum, e dois a dois perpendiculares”*.
Mais tarde, esta conjectura foi demonstrada pelo matemático Schwarz. Posteriormente o teorema foi generalizado a quaisquer três segmentos de qualquer comprimento e formando entre si quaisquer ângulos.

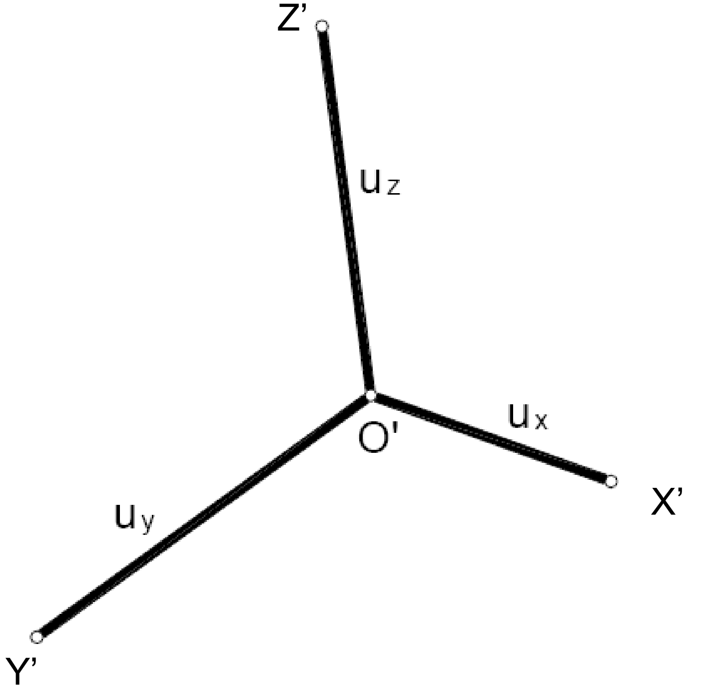


Fig. Teorema de Pohlhe Schwarz.

Aspetos históricos – história da arte

Representações axonométricas na representação da arquitectura no Modernismo.

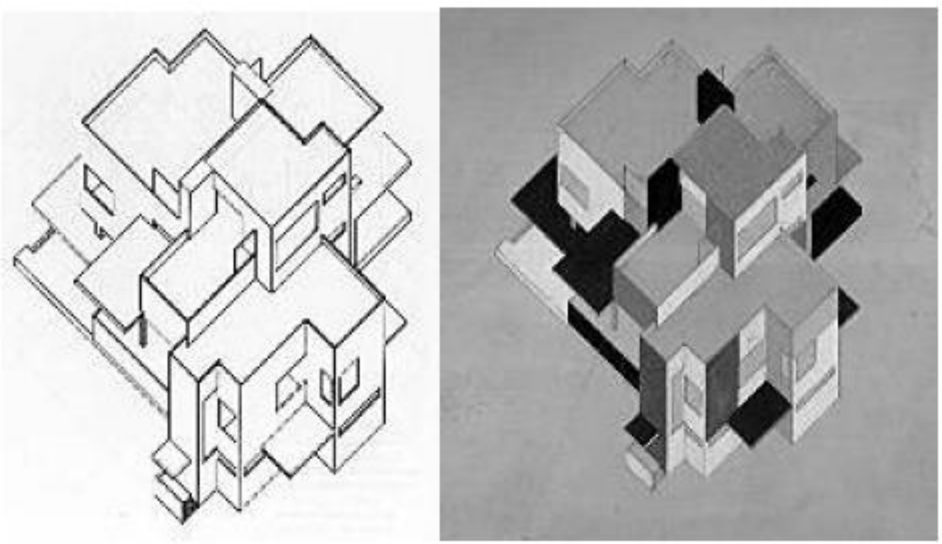
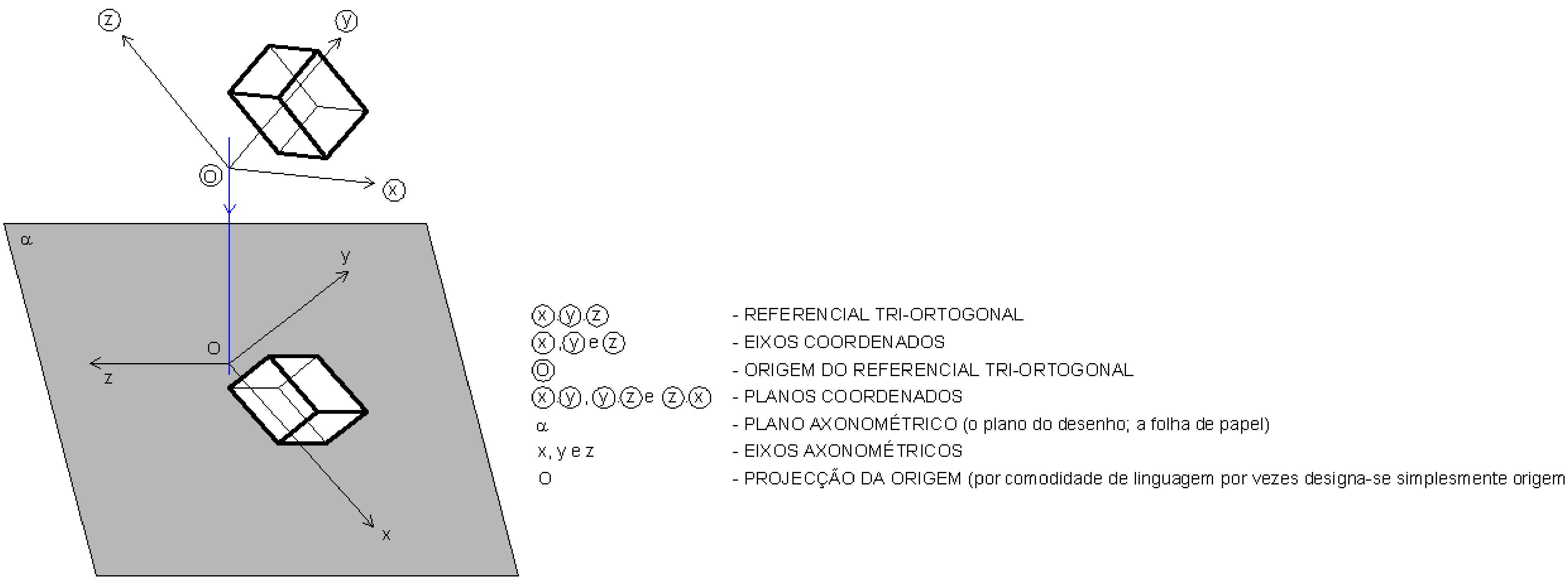


Fig. – Desenhos de Theo van Doesburg e Cor van Eesteren (1897-1988) para uma casa particular (1923)

Fig. – Desenho do projecto de Alberto Sartoris para a *Villa du Dr. Roman Brum à Lausanne* (1934).

Noções gerais e princípios operativos

Na representação axonométrica, as figuras geométricas são associadas a um REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL e projectadas, solidariamente com este, num plano, o PLANO AXONOMÉTRICO, através de uma projecção ortogonal (AXONOMETRIA ORTOGONAL) ou oblíqua (AXONOMETRIA CLINOGONAL).



Nota: Alguns autores designam os planos coordenados por planos axonométricos, os eixos coordenados por eixos axonométricos, designando o plano de projecção simplesmente como plano de projecção. A nossa notação está de acordo com a notação adoptada nos programas do ensino secundário e vai ao encontro da notação utilizada pela maioria dos autores.

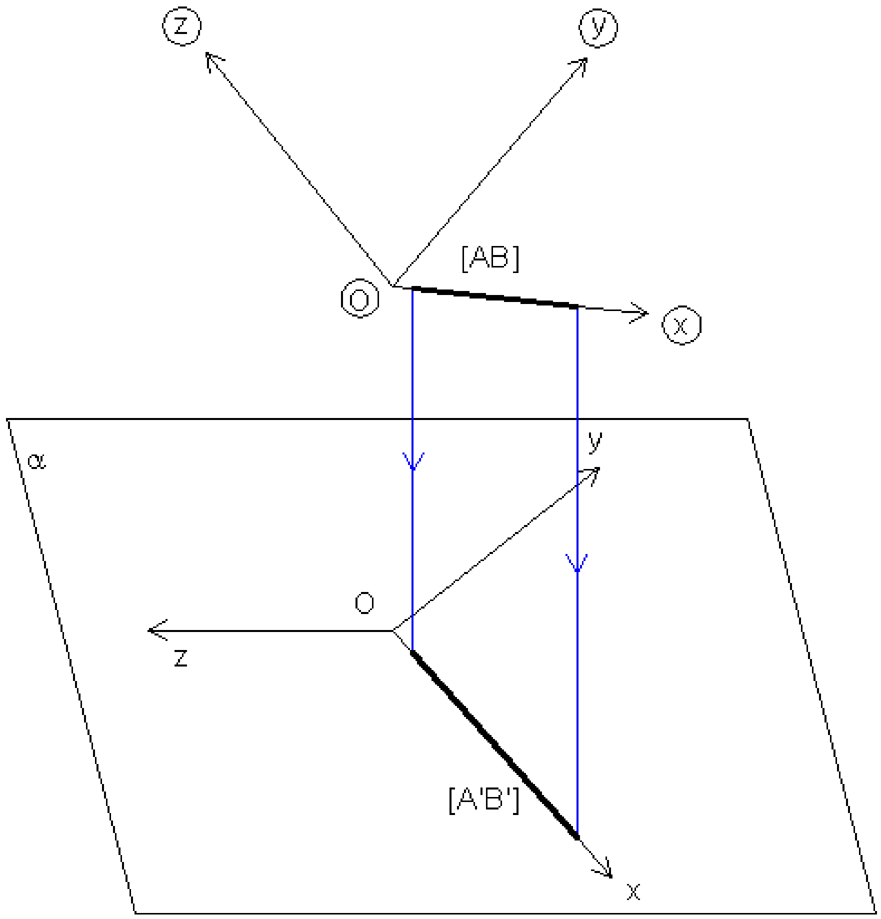
Escalas e coeficientes de redução

Numa representação axonométrica podem estar relacionados, separadamente ou em conjunto, três conceitos distintos: i) COEFICIENTE DE REDUÇÃO, ii) ESCALA DO DESENHO, e iii) ESCALA AXONOMÉTRICA.

O conceito de COEFICIENTE DE REDUÇÃO é específico da representação axonométrica e é função i) da direcção do eixo coordenado em relação ao plano axonométrico, e ii) da direcção de projecção. Não esqueçamos que os eixos axonométricos são projecções dos eixos coordenados e que, por isso, as medidas paralelas a um eixo coordenado aparecem projectadas paralelas ao eixo axonométrico correspondente. À razão entre uma medida paralela a um eixo axonométrico, digamos [A'B'], e a sua homóloga paralela ao eixo coordenado correspondente, digamos [AB], dá-se a designação de COEFICIENTE DE REDUÇÃO. No caso da figura seguinte trata-se do coeficiente de redução no eixo axonométrico x e nota-se por C_x. De modo idêntico notam-se C_y e C_z para os coeficientes de redução correspondentes aos eixos axonométricos y e z, respectivamente. Na verdade, se não impusermos determinadas condições, nada impede que o coeficiente corresponda de facto a uma ampliação e não a uma redução. Mas na prática não é costume utilizar coeficientes de ampliação pois distorceriam muito os desenhos. Por outro lado, na axonometria ortogonal não é possível ter "coeficientes de ampliação" e na axonometria clinogonal também se opta em geral por disposições que implicam coeficientes sempre menores ou iguais a 1.

A noção geral do conceito de ESCALA define-se como sendo a razão entre uma medida numa representação e a sua homóloga real. As escalas podem ser expressas graficamente ou numericamente através de um quociente. Um exemplo de escala numérica é 1/100, escala bastante usada em arquitectura. Quando se toma a axonometria no seu conjunto como um desenho, faz sentido falar de ESCALA DO DESENHO no sentido geral que se dá ao termo escala. Esta diz respeito a um factor global de redução ou ampliação a aplicar ao espaço de um objecto a ser representado, e por conseguinte à sua representação, aqui entendida como desenho.

Escalas e coeficientes de redução



Assim, podemos estender o conceito de ESCALA ao conceito de ESCALA AXONOMÉTRICA. Esta corresponde à composição da escala do desenho com cada um dos coeficientes de redução. Assim, numa representação axonométrica há, em princípio, 3 escalas axonométricas distintas. Uma forma de impor as escalas axonométricas num desenho seria por exemplo a seguinte:

E_x=1/100, E_y=1/100, E_z=1/200.

No entanto, esta forma de operar não é muito comum. Em geral privilegia-se a referência a uma escala geral e a coeficientes de redução específicos para cada eixo.

Escalas e coeficientes de redução

É importante perceber o que une e distingue os conceitos de escala axonométrica e de coeficiente de redução. Vamos procurar fazê-lo através de um exemplo.

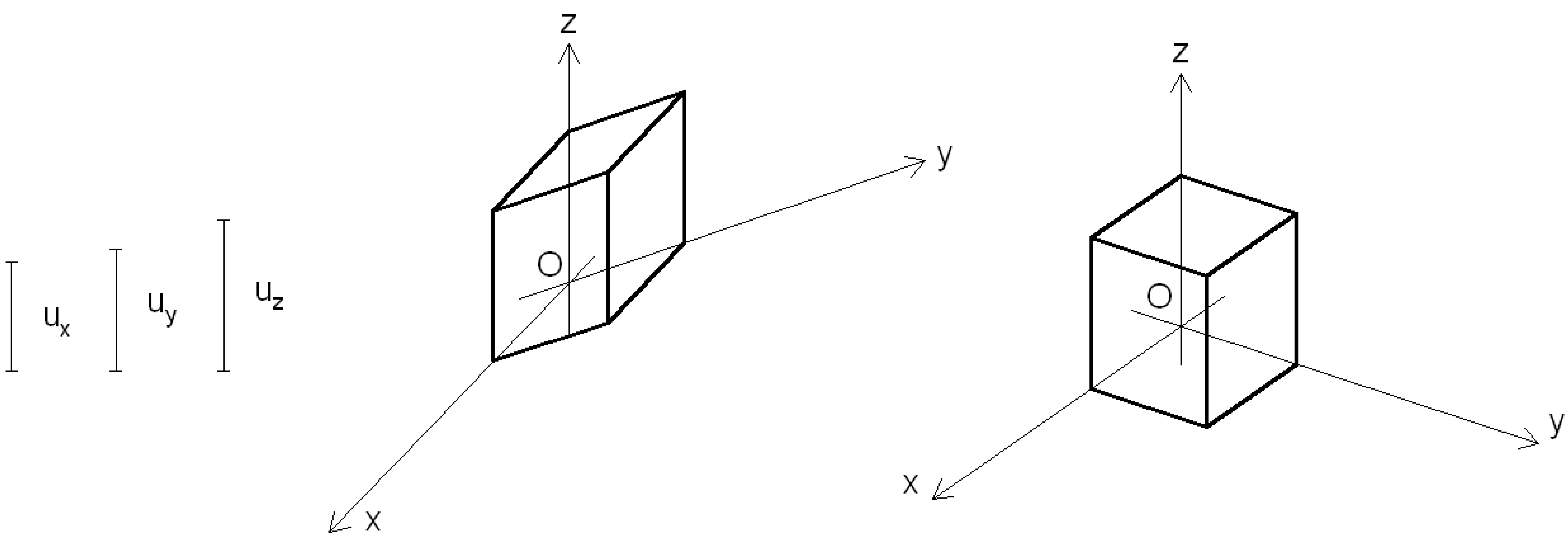
Num desenho axonométrico à escala 1/100, por exemplo, as medidas reais são afectadas sequencialmente, e separadamente, pela escala do desenho e de seguida pelo coeficiente de redução, ou vice-versa. Suponhamos que pretendemos representar uma medida de 8m paralela ao eixo coordenado z, sabendo que o coeficiente de redução a aplicar às medidas no eixo coordenado z é de 0.9, por exemplo. Neste caso a medida 8m afectada pela escala do desenho, 1/100, resulta em 8cm. De seguida esta medida afectada do coeficiente de redução 0.9 resulta em 7.2cm. Esta é a medida a representar ao longo do eixo axonométrico z.

Por outro lado a escala axonométrica de um eixo é uma expressão que sintetiza, não distinguindo, o coeficiente de redução e a escala do desenho. Assim, ao definir escalas para os eixos axonométricos, em geral escalas gráficas, não são explícitos os valores dos coeficientes de redução nem a escala da axonometria. Porém, as relações de proporção entre as escalas axonométricas e as relações de proporção entre os coeficientes de redução são as mesmas para um dado desenho.

Axonometria oblíqua (clinogonal)

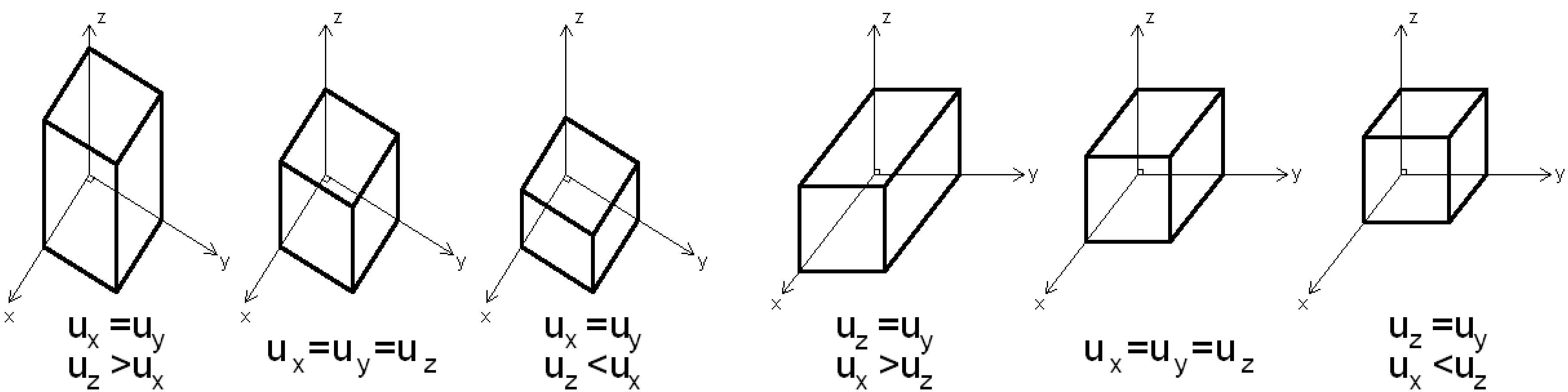
No CASO GERAL da axonometria oblíqua podemos escolher arbitrariamente as direcções dos eixos axonométricos e as escalas axonométricas em cada eixo. Esta possibilidade é uma consequência directa do teorema de Pohlke/Schwarz. Este é o caso em que decompor aqueles valores em escala do desenho e coeficientes de redução é tarefa árdua (mas que pode ser resolvida graficamente através de uma afinidade)!

Nos exemplos abaixo foram arbitradas diferentes direcções de eixos axonométricos e foram definidas escalas distintas para cada um dos eixos axonométricos x, y e z dadas pelos segmentos u_x, u_y e u_z, respectivamente, representativos de um comprimento unitário (tomado como padrão das medidas a utilizar). Em cada uma das axonometrias está representado um cubo com uma unidade de lado.
Do ponto de vista estritamente geométrico ambas as representações estão correctas. No entanto a representação da direita é mais verosímil como representação de um cubo. Por isso, ao considerar o caso geral da axonometria oblíqua, é conveniente dispor os eixos e definir as escalas de modo a que as representações resultem visualmente convincentes.



Axonometria oblíqua (clinogonal)

Para além do caso geral da axonometria oblíqua consideram-se, em geral, dois casos particulares: i) o caso em que o plano coordenado x.y é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA MILITAR ou PLANOMÉTRICA) e o caso em que o plano coordenado x.z (ou y.z) é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA CAVALEIRA). A consequência desta disposição espacial é de que os eixos axonométricos x e y, no caso da axonometria militar, e os eixos x e z (ou y e z), no caso da axonometria cavaleira, são perpendiculares entre si, e os COEFICIENTES DE REDUÇÃO (e ESCALAS AXONOMÉTRICAS) nestes eixos são iguais entre si. Os coeficientes de redução nestes eixos são iguais à unidade.
No caso da axonometria militar a direcção e escala do eixo axonométrico z podem ser livremente arbitradas, porém a representação só resulta visualmente convincente se a escala no eixo axonométrico z for igual ou inferior às dos outros dois eixos, isto é, se o coeficiente de redução for igual ou inferior a 1. Raciocínio análogo pode ser aplicado ao caso da axonometria cavaleira. Nos exemplos abaixo estão representados cubos em axonometria militar (à esquerda) e cavaleira (à direita). Quais são mais convincentes como representações de cubos? Julgamos que a resposta é óbvia.

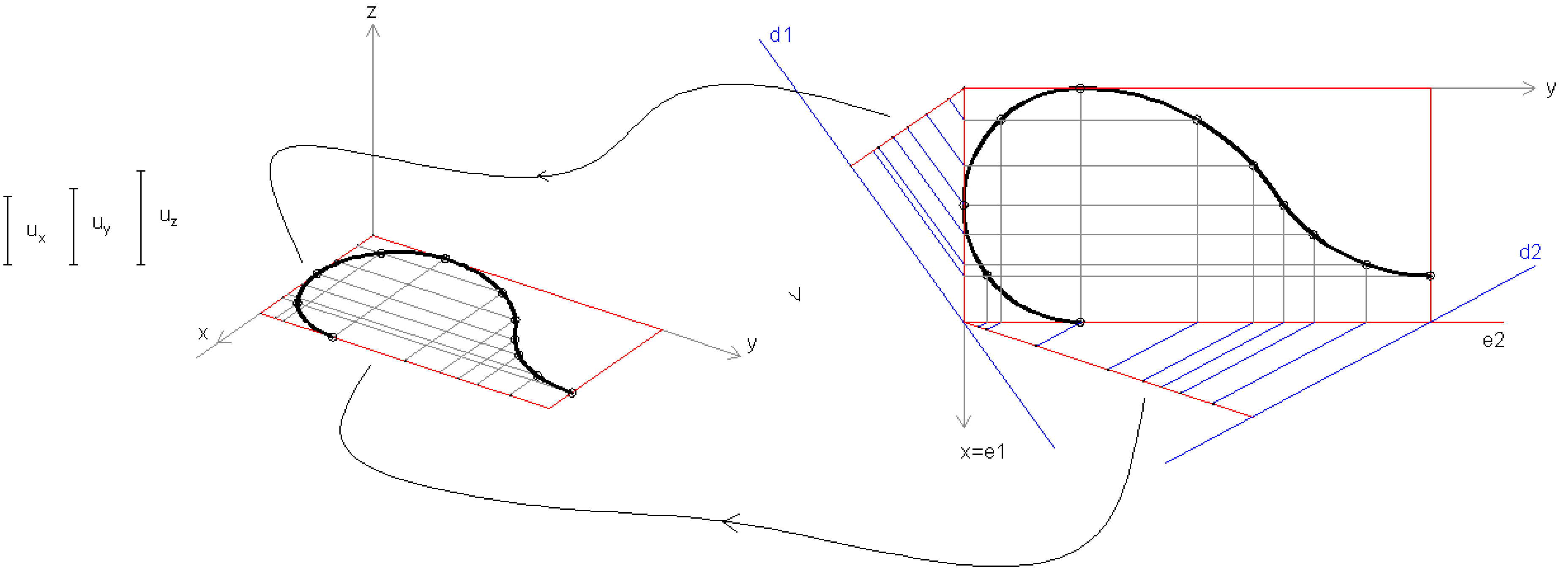


Axonometria Militar

Axonometria Cavaleira

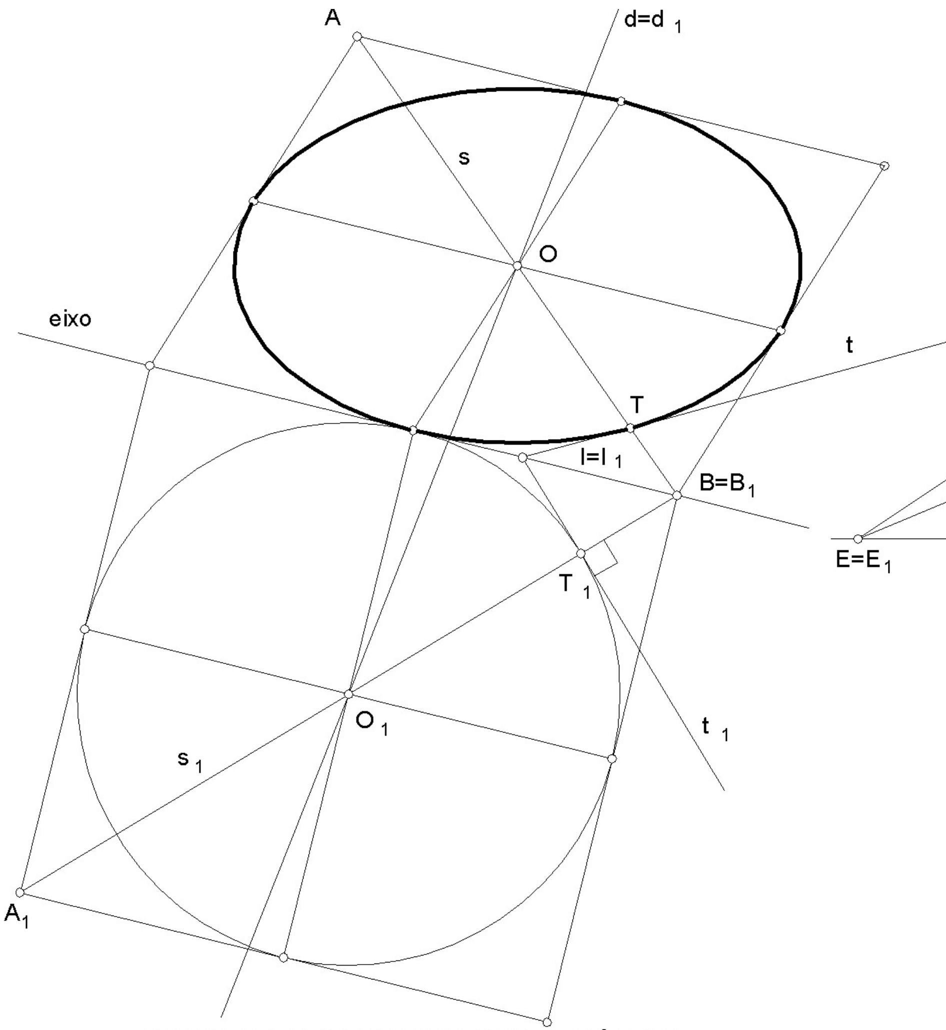
O método da afinidade

Associado ou não ao método anterior, pode utilizar-se o MÉTODO DA AFINIDADE. Este método consiste: i) na definição de um eixo para a transformação afim, e ii) na definição de uma direcção de afinidade que relacione o desenho a obter com um desenho homólogo conhecido. A figura seguinte ilustra a aplicação do método na representação de uma curva livre. Note-se que por comodidade de desenho pode proceder-se à transformação como um traçado auxiliar não sobreposto ao da axonometria, como ilustra a figura. Note-se ainda que foram utilizadas duas afinidades, uma de direcção d1 e eixo e1, e outra de direcção d2 e eixo e2. Com efeito, a afinidade é aplicada a pontos discretos que depois devem ser unidos “à mão levantada”.

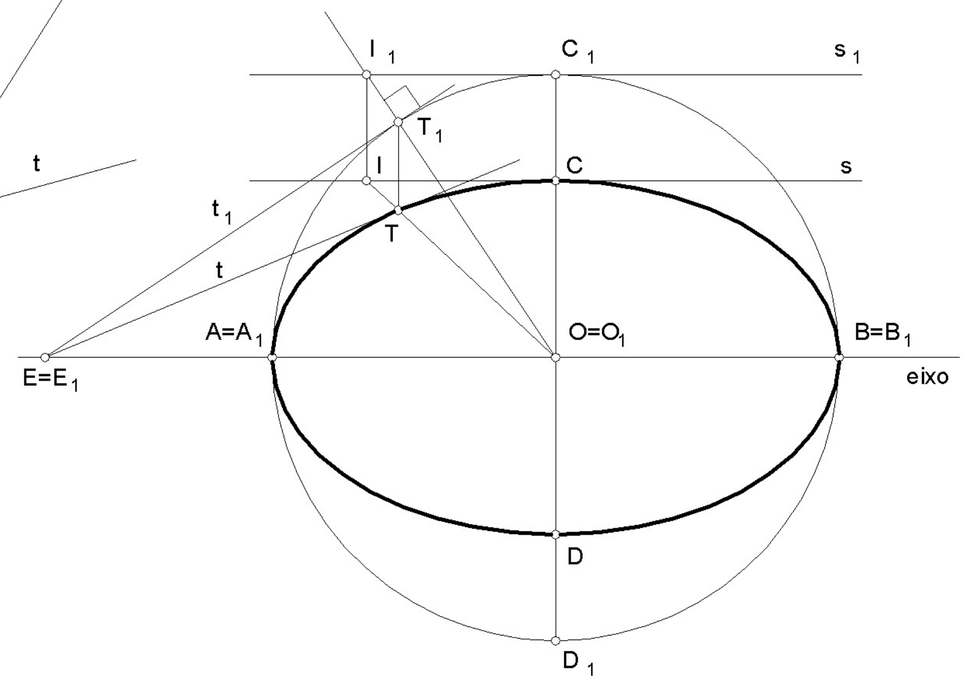


Representação da circunferência (afinidade)

No desenho seguinte é ilustrada a afinidade entre circunferência e elipse. No primeiro caso a elipse está definida por diâmetros conjugados e o eixo da afinidade contém um lado do paralelogramo circunscrito. No segundo caso a elipse está definida pelos seus eixos principais e o eixo da afinidade contém o eixo maior da elipse. Em ambos os casos a circunferência afim corresponde, ponto a ponto, à elipse.



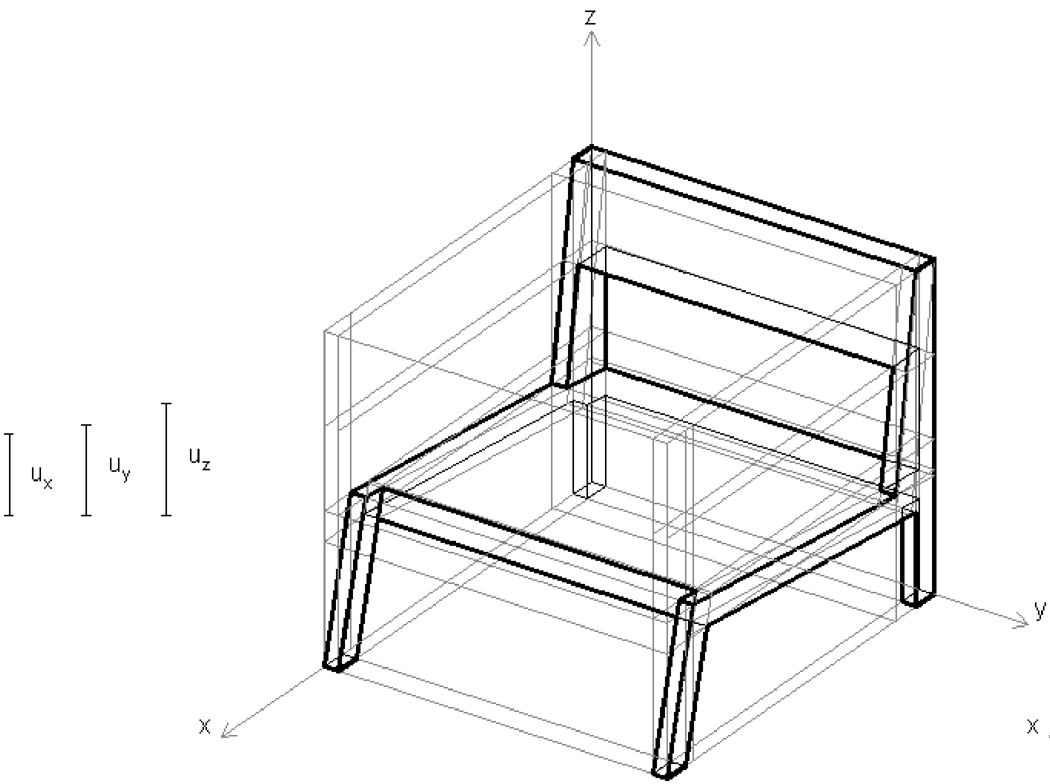
AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA

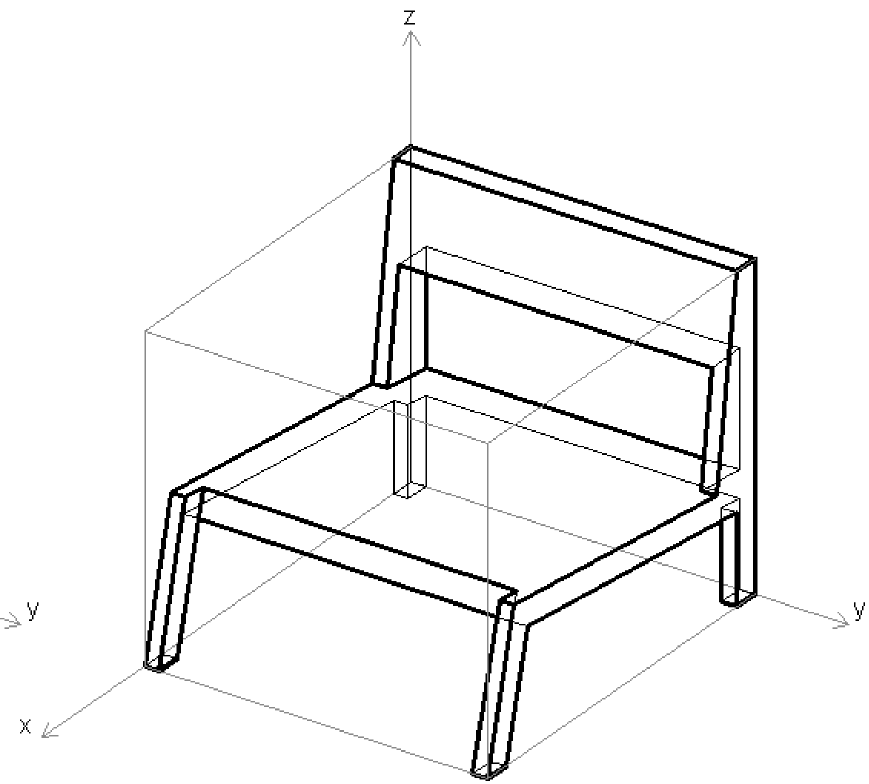


AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA

O método do paralelepípedo envolvente

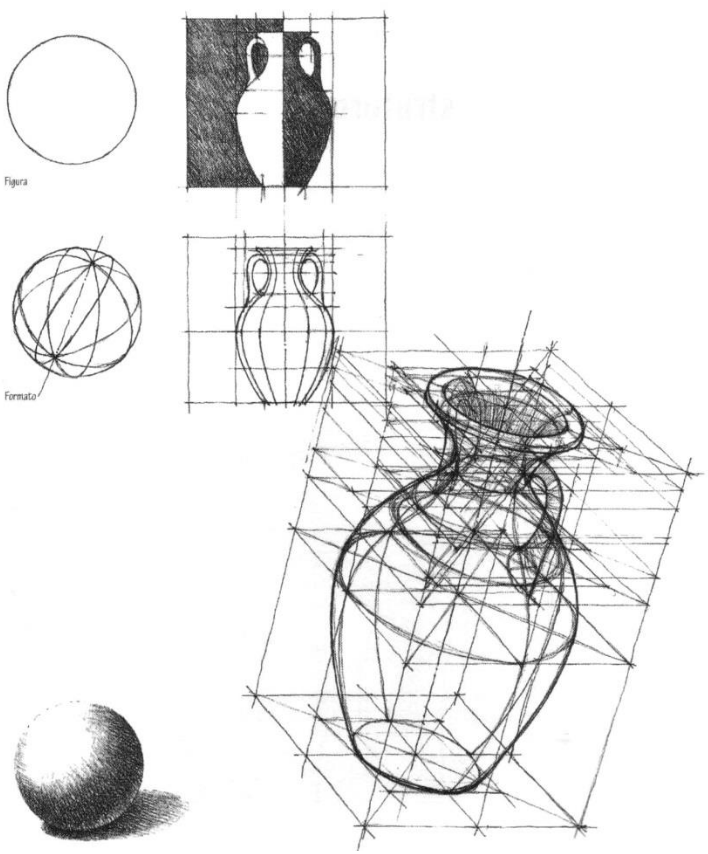
Para representar um objecto mais ou menos complexo em axonometria, pode considerar-se o paralelepípedo que o circunscreve e, em função da decomposição deste, chegar àquele. Este método designa-se por MÉTODO DO PARALELEPÍPEDO ENVOLVENTE. Na figura seguinte dá-se um exemplo.

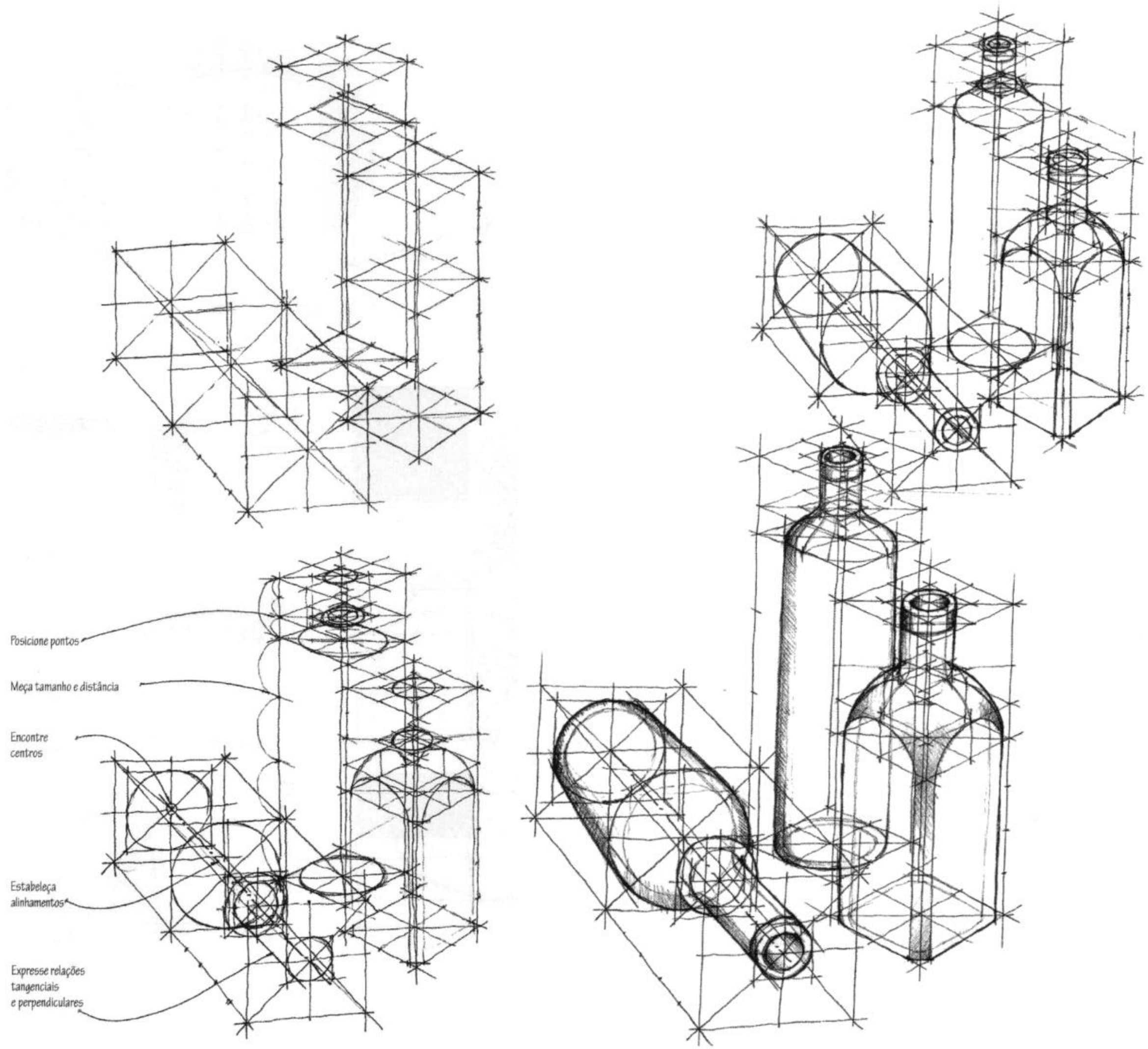




O método do paralelepípedo envolvente

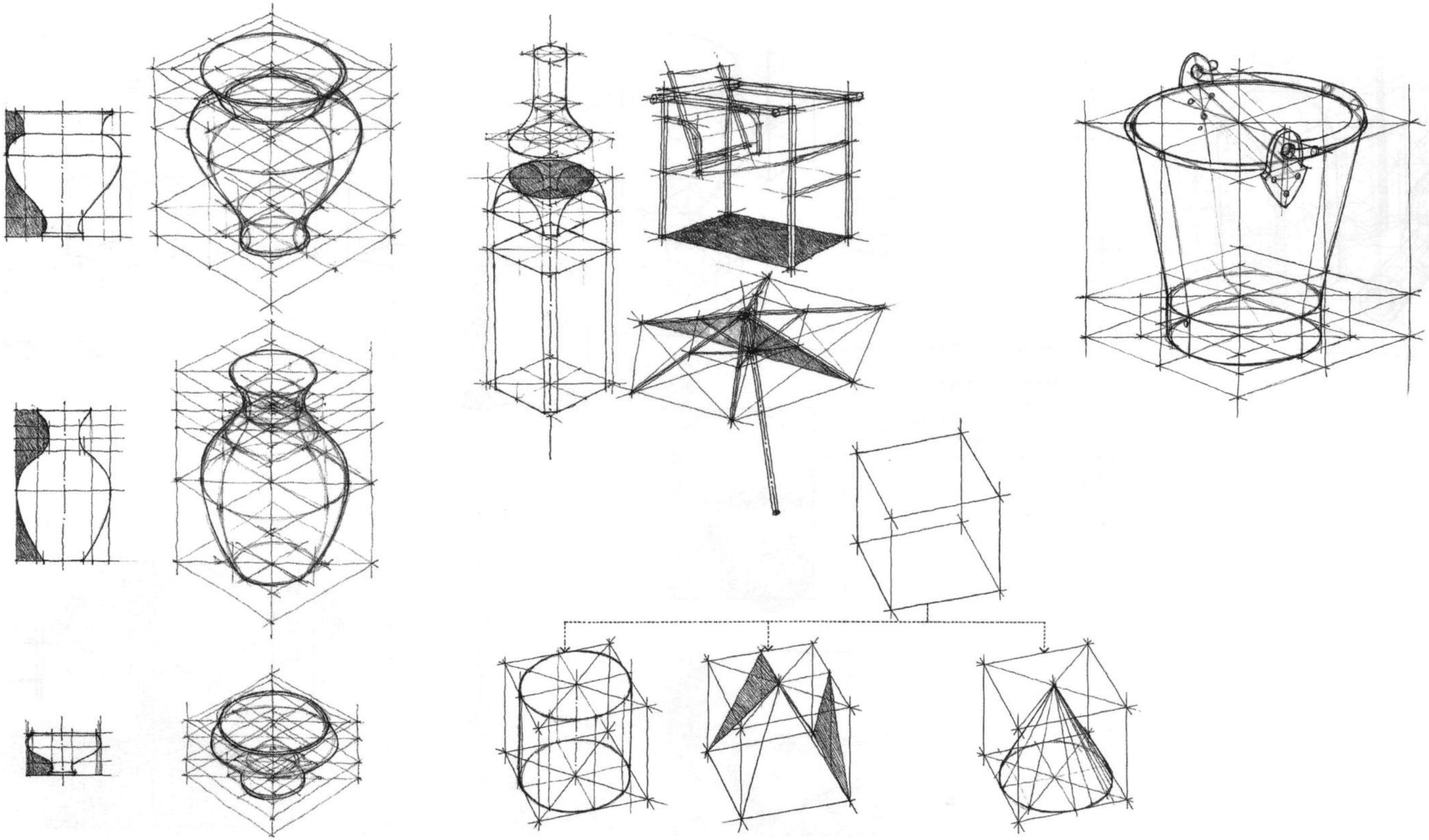
Nos desenhos que se seguem, ilustra-se a aplicação do método do paralelepípedo envolvente. Ainda que em desenhos produzidos à mão levantada, coloca-se em evidência a utilidade do método como modo de estruturar uma representação axonométrica.





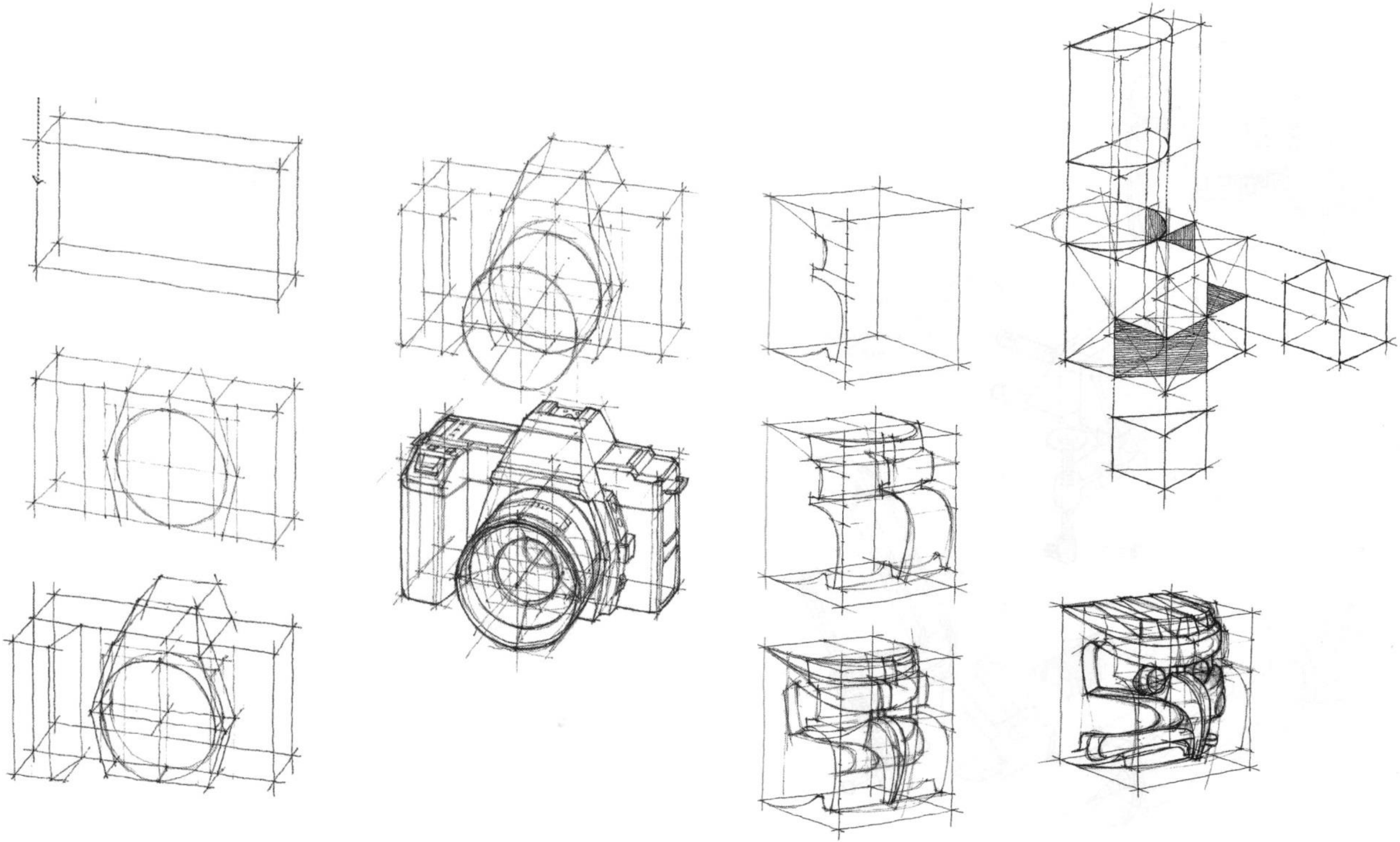
In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

O método do paralelepípedo envolvente



In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

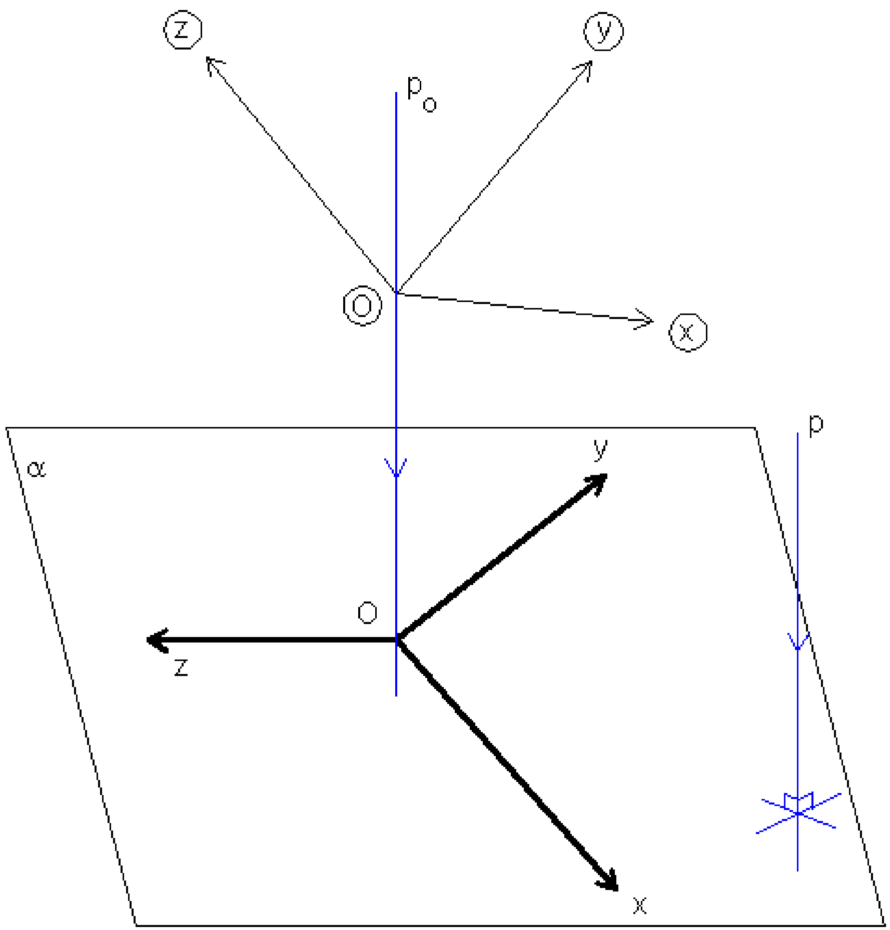
Adição e subtração

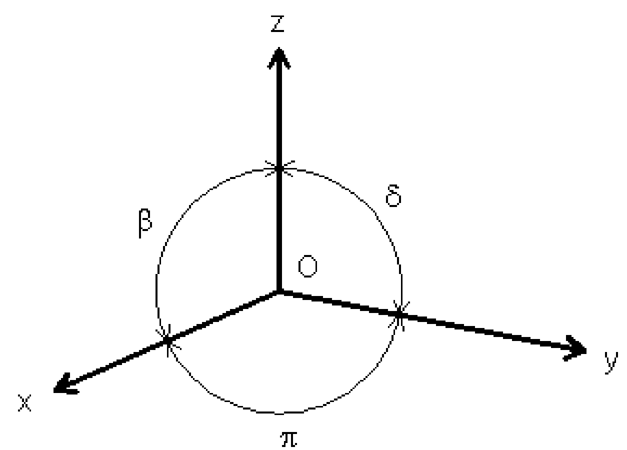


In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

Axonometria ortogonal – noções e subsistemas

No caso geral da representação axonométrica ortogonal, os eixos coordenados são oblíquos ao plano axonométrico com inclinações distintas. Daqui resulta que a cada eixo axonométrico corresponde um coeficiente de redução diferente, sendo todos inferiores a 1 (o que acontece sempre nas axonometrias ortogonais), e todos os ÂNGULOS AXONOMÉTRICOS (ângulos que fazem no desenho cada par de semi-eixos axonométricos positivos) são em geral diferentes. Quando assim é, o subsistema axonométrico designa-se por TRIMETRIA ou ANISOMETRIA, como se ilustra na figura.





$$\beta \neq \delta \neq \pi$$

$$C_x \neq C_y \neq C_z$$

Trimetria

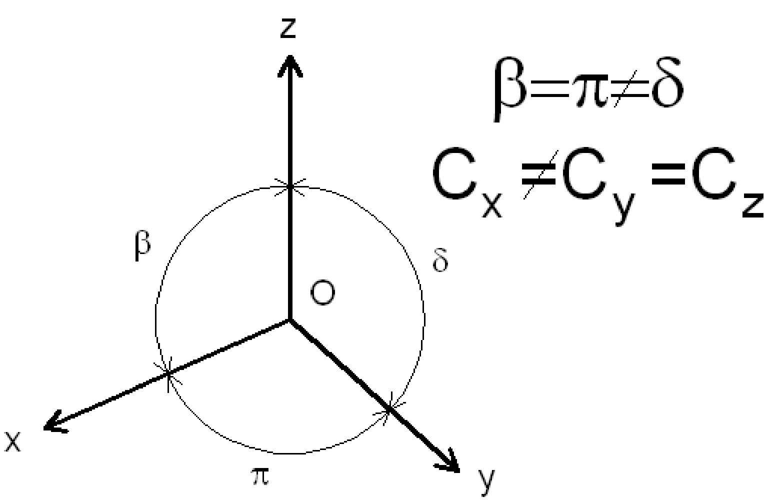
Axonometria ortogonal – noções e subsistemas

Dois outros casos podem ser considerados:

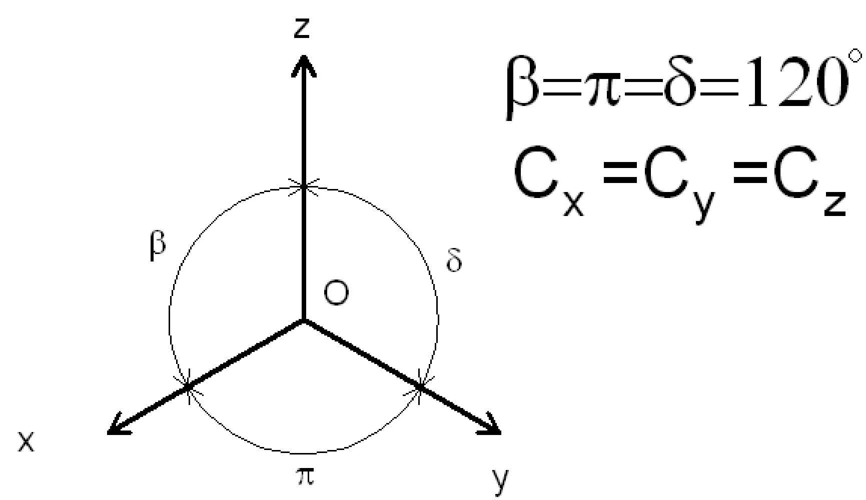
a) O caso da DIMETRIA, em que dois eixos coordenados apresentam igual inclinação em relação ao plano axonométrico, com a consequência de haver dois coeficientes de redução e dois ângulos axonométricos iguais;

b) O caso da ISOMETRIA ou MONOMETRIA, em que os três eixos coordenados apresentam igual inclinação em relação ao plano axonométrico com a natural consequência da igualdade dos três coeficientes de redução e dos três ângulos axonométricos.

Na figura seguinte ilustram-se estes dois casos.



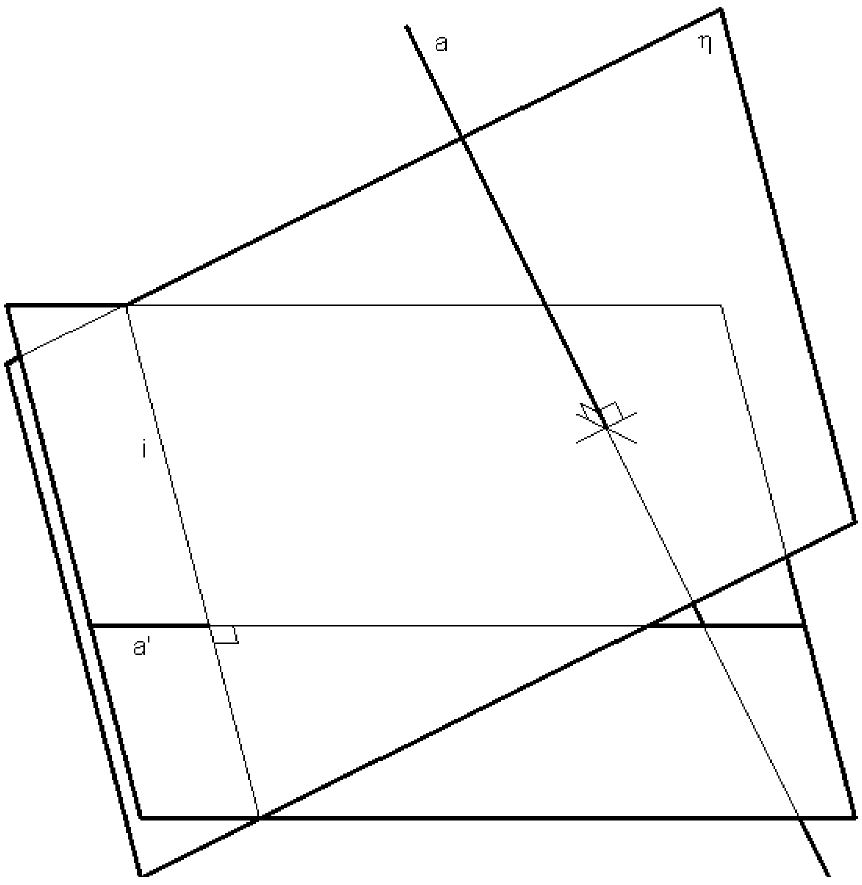
Dimetria

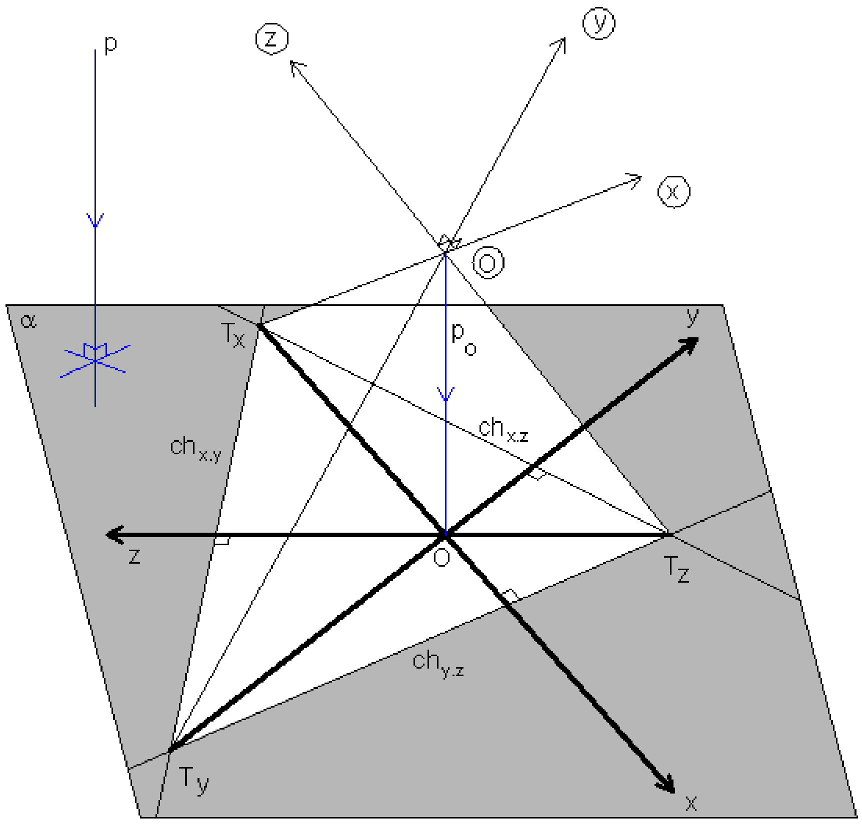


Isometria

Triângulo fundamental

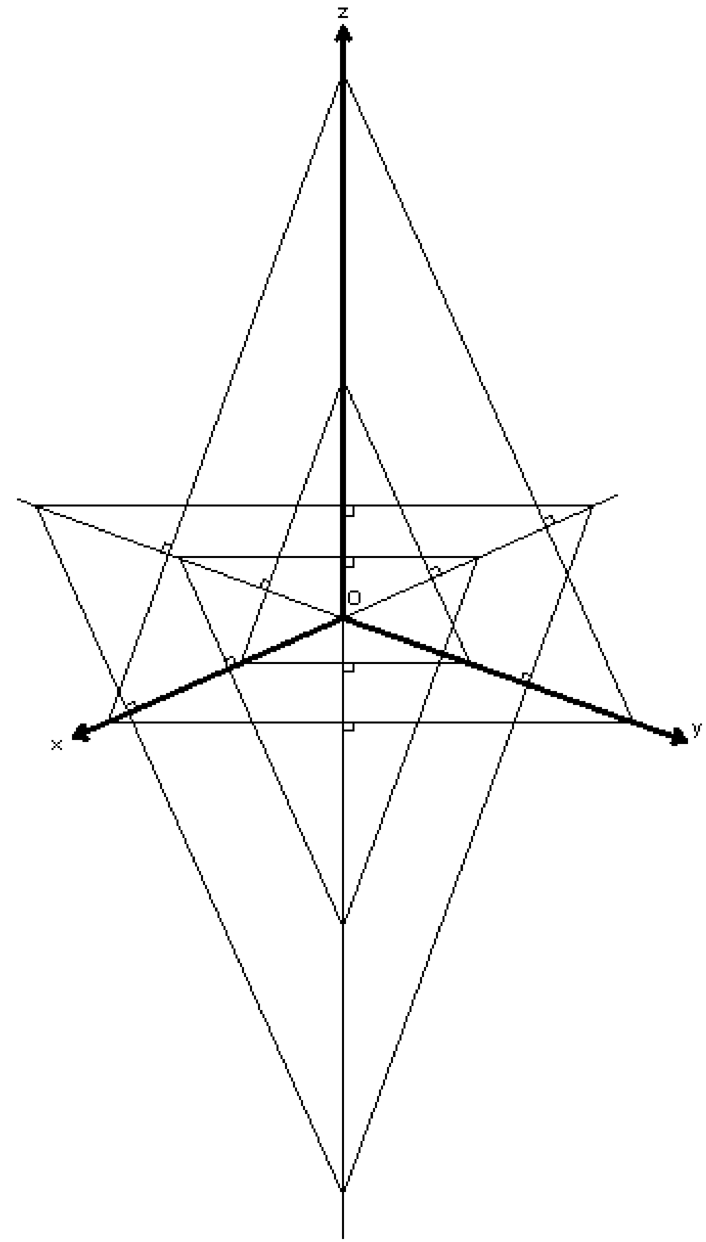
Cada um dos eixos coordenados, intersecta o plano axonométrico num ponto. O conjunto dos três pontos (na figura são os pontos T_x, T_y e T_z) define um triângulo. Esse triângulo designa-se TRIÂNGULO FUNDAMENTAL ou TRIÂNGULO PRINCIPAL da axonometria. Cada lado do triângulo está contido na recta de intersecção de um plano coordenado com o plano axonométrico e é perpendicular à projecção do outro eixo coordenado. Este facto relaciona-se com um teorema da geometria no espaço segundo o qual “quando uma recta *a* é perpendicular a um plano η, a sua projecção ortogonal num plano ω, digamos *a’*, é perpendicular à recta *i* comum aos planos η e ω”. Na figura à esquerda ilustramos o teorema, e à direita a sua consequência na relação dos lados do triângulo fundamental com os eixos axonométricos. O triângulo fundamental é sempre ACUTÂNGULO.





Triângulo fundamental

Desta relação resulta que a projecção da origem do referencial no plano axonométrico é sempre o ORTOCENTRO do triângulo fundamental.
Qualquer plano paralelo ao plano axonométrico intersecta os eixos coordenados em pontos que definem um triângulo semelhante ao triângulo fundamental, como se ilustra na figura. Assumindo a direcção e sentido do eixo coordenado z conforme a figura, se o plano se encontrar “abaixo” da origem, o triângulo encontra-se “virado para baixo no desenho” e se o plano se encontrar “acima” da origem, o triângulo encontra-se “virado para cima no desenho”. Se o plano passar pela origem, o triângulo é nulo.
Qualquer um destes triângulos tem as mesmas propriedades que o triângulo fundamental e pode ser usado como tal, podendo assumir-se a designação de FAMÍLIA DE TRIÂNGULOS FUNDAMENTAIS (nossa designação).
Com efeito, em geral, na representação axonométrica o plano axonométrico permanece indeterminado, sendo apenas conhecida a sua orientação. Essa orientação reduz-se à “orientação da folha de desenho”. Isto significa que para resolver os problemas da representação axonométrica ortogonal pode utilizar-se indistintamente qualquer um destes triângulos e tomá-lo por triângulo fundamental. Ao fazê-lo fixamos uma posição para o plano axonométrico.



Axonometrias gráficas

Nas axonometria ortogonais as escalas axonométricas e os coeficientes de redução não podem ser livremente arbitrados. Com efeito, como veremos, os coeficientes de redução ficam implicitamente determinados ao arbitrar uma qualquer disposição de eixos axonométricos válida (o triângulo fundamental deverá ser sempre ACUTÂNGULO) e são directamente dependentes dessa disposição.
Note-se que ao fixar uma tal disposição de eixos axonométricos, fica automaticamente definida a família de triângulos fundamentais, e com isso ficam fixas as direcções dos eixos coordenados, ou seja, as inclinações dos eixos coordenados em relação ao plano axonométrico, das quais os coeficientes de redução são função.
Para efectuar uma representação axonométrica ortogonal não é necessário conhecer o valor numérico do coeficiente de redução. A representação pode ser feita por processos exclusivamente gráficos (AXONOMETRIAS GRÁFICAS). Estes processos implicam o rebatimento dos planos coordenados para o plano axonométrico (aqui considerado como o plano da folha de desenho). Através deste processo de rebatimento é possível relacionar medidas em "verdadeira grandeza" com as suas projecções "axonométricas". Em geral as medidas que se relacionam deste modo são as COORDENADAS CARTESIANAS dos vértices das figuras a representar (MÉTODO DAS COORDENADAS RECTANGULARES).

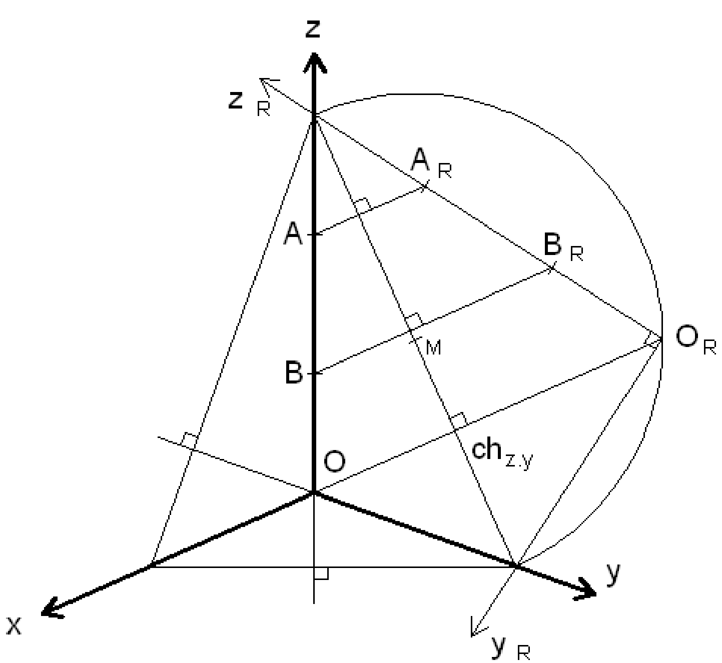
Embora se possa rebater qualquer plano, com qualquer orientação, para o plano axonométrico, nós apenas trataremos o caso do rebatimento dos planos coordenados.

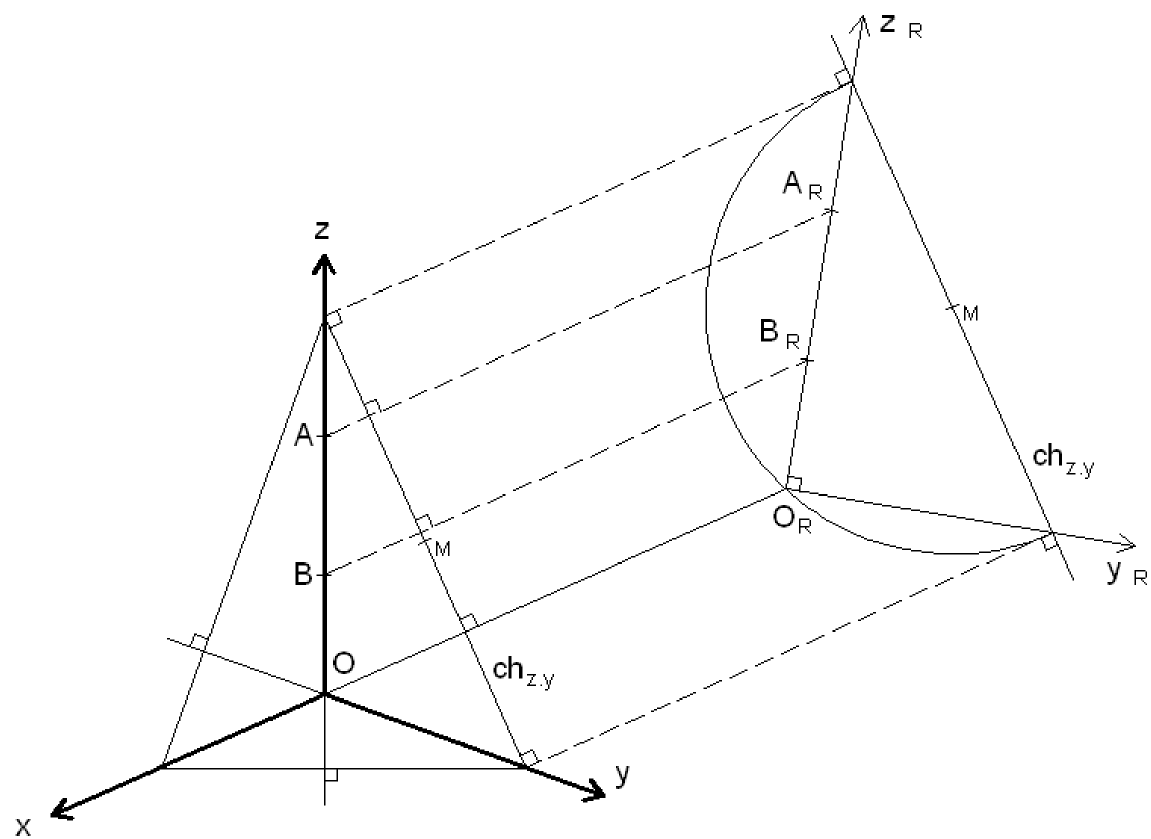
Na figura do slide seguinte ilustramos o processo do rebatimento de um plano coordenado. Para os outros o procedimento é idêntico. Note-se que há sempre dois sentidos possíveis para o rebatimento.

Note-se ainda que o processo do rebatimento, graficamente ,não é mais que uma afinidade em que o eixo da transformação é a charneira do rebatimento.

Rebatimento dos planos coordenados

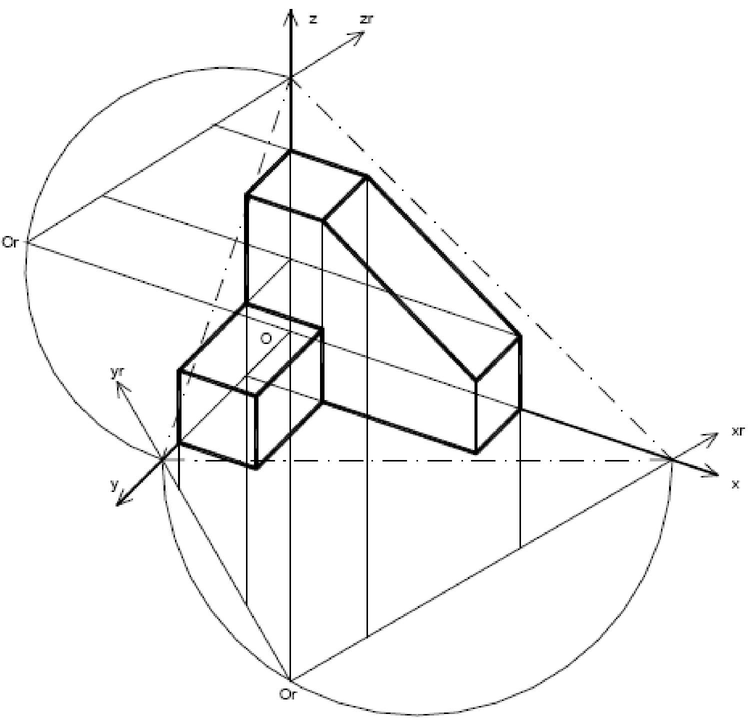
Nesta figura ilustra-se o rebatimento do plano coordenado y.z. O procedimento para qualquer outro plano coordenado é idêntico.
Em geral, por motivo de maior facilidade de visualização, considera-se a origem do referencial “abaixo” do plano axonométrico, o que implica um triângulo fundamental “virado para cima”. Como referimos, o rebatimento pode ter dois sentidos. No caso da direita considerámos uma translação do rebatimento. Este procedimento utiliza-se para evitar sobreposições entre figuras rebatidas e as respectivas representações axonométricas.

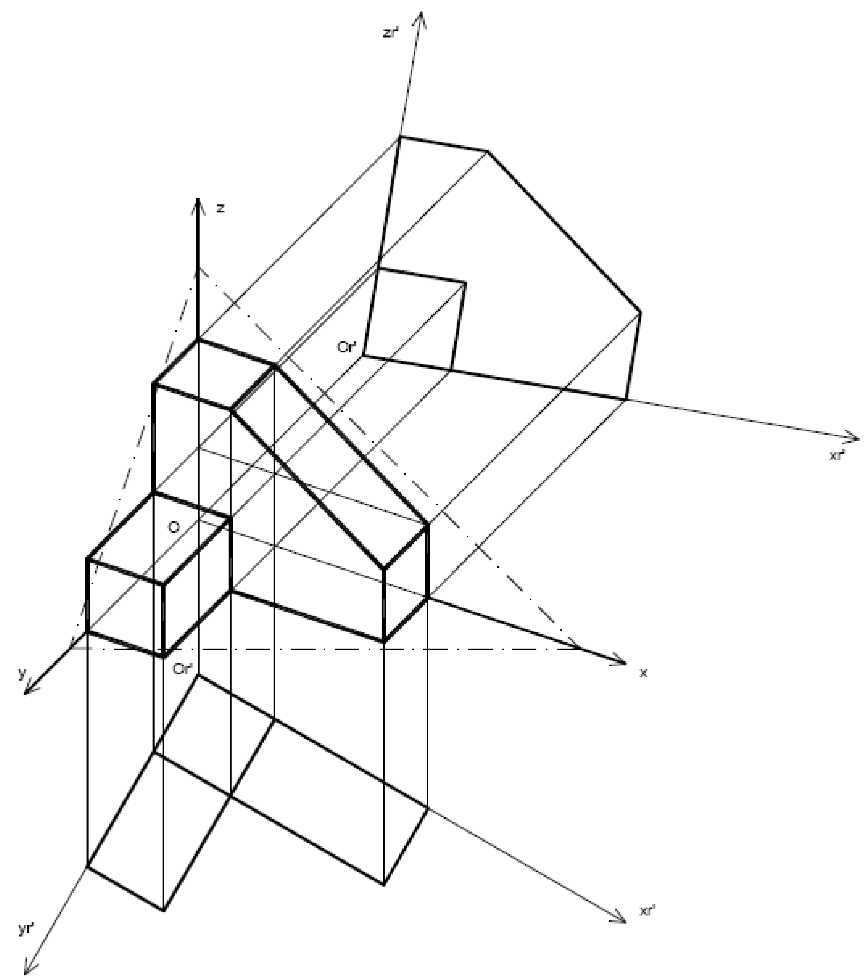




Método dos cortes

Nesta figura ilustra-se a representação de um objecto a partir das operações de rebatimento notadas no slide anterior. No exemplo da direita estão omissos alguns traçados (ver figura do slide anterior). A disposição de vistas e axonometria da figura direita corresponde ao método de representação conhecido como o MÉTODO DOS CORTES.





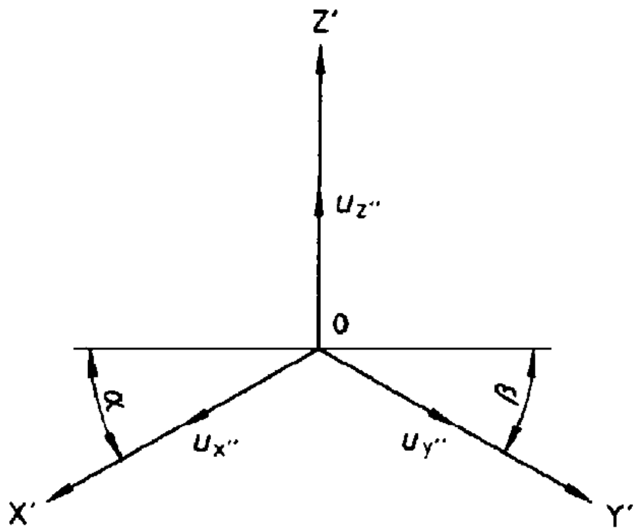
Axonometria normalizada (ISSO 5456-3)

A norma ISO 5456-3 define alguns princípios para a representação axonométrica, recomendando alguns subsistemas com configurações particulares.

Recomenda-se que numa representação axonométrica deve evitar-se o desenho de contornos e arestas invisíveis. Porém nós consideramos que esta recomendação apenas deve aplicar-se a um desenho final, tendo sempre o cuidado de preservar o original com todos os traçados que permitem a vista sintética. <u>Para todos os efeitos nós representaremos sempre as linhas invisíveis através de traços contínuos leves, no caso de figuras complexas, e de linhas a traço interrompido, no caso de figuras simples.</u>

Os subsistemas recomendados pela norma são: a isometria, a dimetria, a axonometria cavaleira, a axonometria de gabinete e axonometria planométrica.

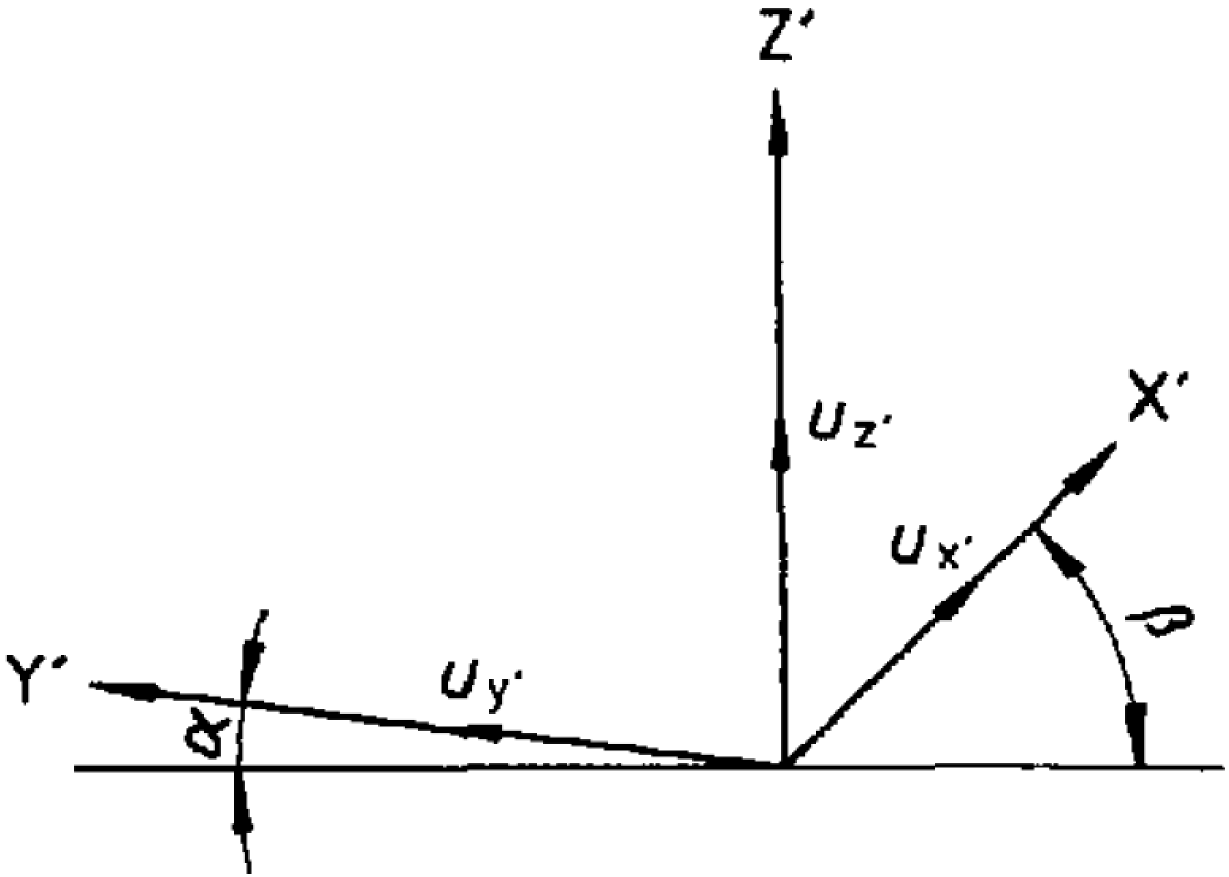
Na axonometria isométrica é considerada uma ampliação global do desenho por um factor de aproximadamente 1.225 para que, em termos práticos, se possa adoptar um coeficiente de redução igual à unidade em todos os eixos, o que facilita a representação.



$\alpha = \beta = 30°$

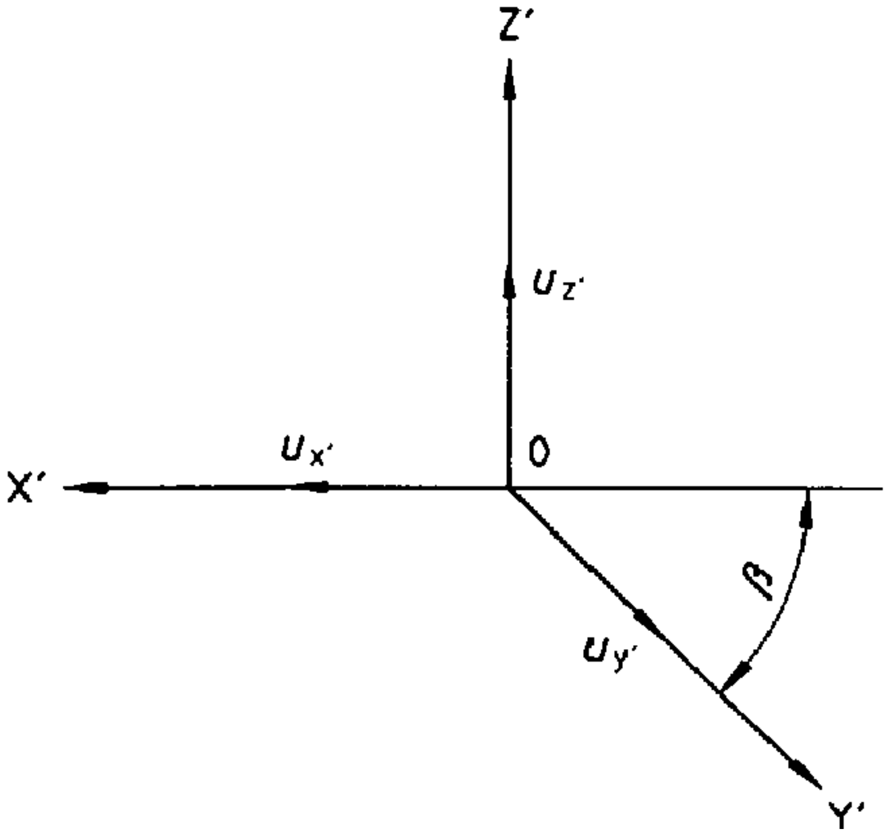
Axonometria normalizada (ISSO 5456-3)

Na axonometria dimétrica são considerados os ÂNGULOS DE FUGA (ângulos α e β na figura) de 7º e 42º sendo considerada a proporção 0.5/1/1 entre os coeficientes de redução em x, y, e z, respectivamente. Na prática estes valores são utilizados como escalas axonométricas o que significa que também se está a considerar uma ampliação global do desenho. Note-se que na norma os eixos são representados por uma letra maiúscula seguida de ‘.



Axonometria normalizada (ISSO 5456-3)

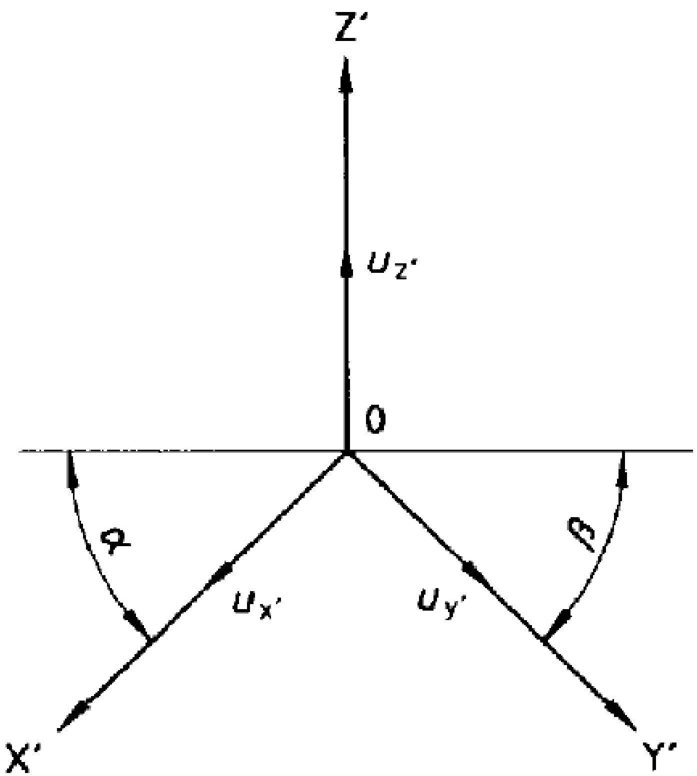
Na axonometria cavaleira é considerado o ÂNGULO DE FUGA (β na figura) de 45º sendo considerados todos os coeficientes de redução (e escalas axonométricas) iguais à unidade. Neste caso não faz sentido falar em ampliação global do desenho. Apenas significa que a inclinação das projectantes em relação ao plano axonométrico é de 45º (note-se que este ângulo nada tem a ver com o ângulo de fuga).



A axonometria de gabinete é em quase tudo igual à anterior. Na verdade é um tipo de axonometria cavaleira em que o coeficiente de redução em y (de acordo com a figura) é de 0.5.

Axonometria normalizada (ISSO 5456-3)

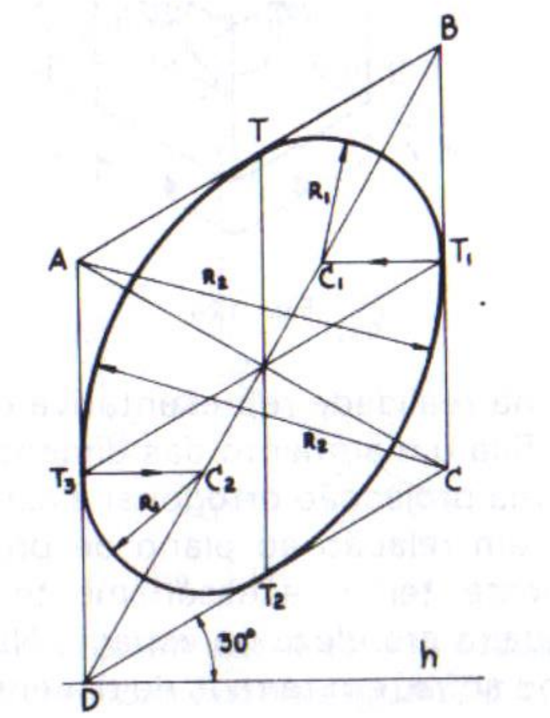
Na axonometria planométrica (axonometria militar) é dito que devem evitar-se ângulos de fuga de 0º, 90º e 180º, de modo a que todas as vistas possam ser representadas. O eixo z é considerado vertical e são recomendados vários pares de ângulos de fuga para os eixos axonométricos x e y (15º / 75º; 30º/60º; 45º / 45º; 60º / 30º; 75º / 15º). Relativamente ao coeficientes de redução (e escalas axonométricas) é recomendada a relação 1:1:1 ou 1:1:2/3 para os eixos axonométricos x, y e z, respectivamente. Naturalmente, se for conveniente podem ser utilizados outras combinações.



$$\alpha = 0° \text{ to } 180°$$
$$\beta = 90° - \alpha$$

Axonometria normalizada (ISSO 5456-3)

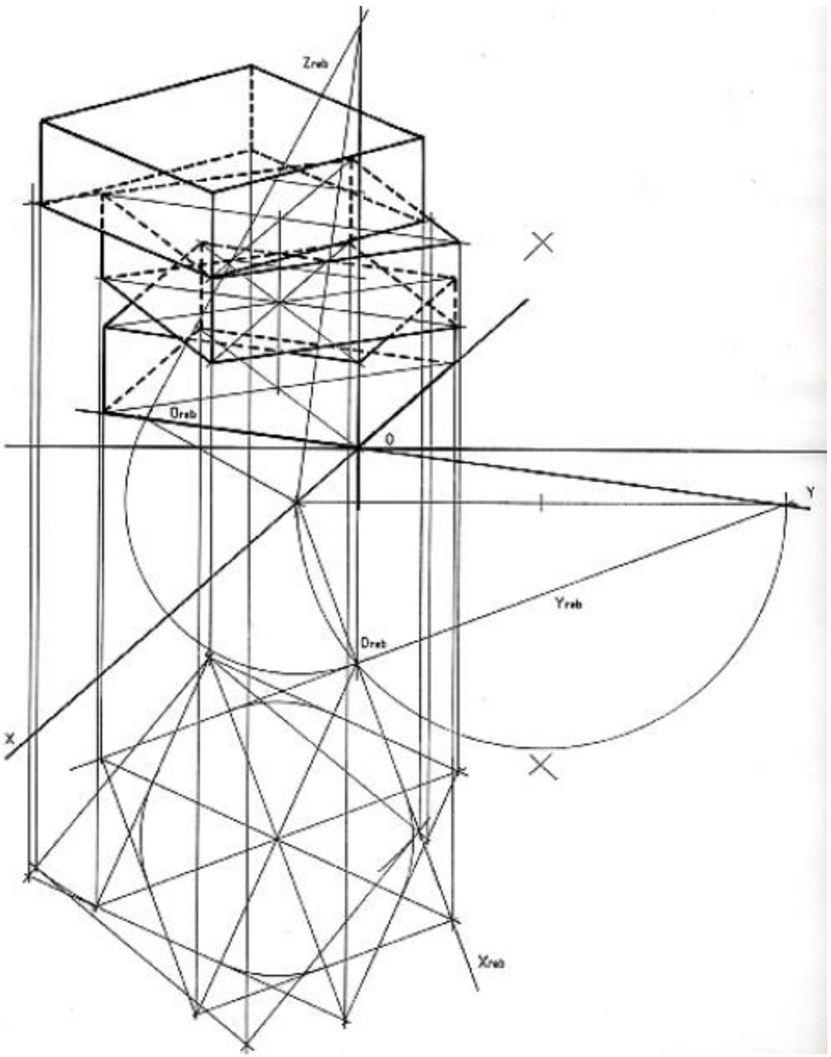
Uma vez que são declarados coeficientes de redução (que em boa verdade correspondem a escalas axonométricas) para este tipo de axonometrias, os traçados dispensam a operação de rebatimento.
Para alguns destes subsistemas existem ainda traçados auxiliares que permitem representar projecções de circunferências contidas em planos paralelos aos planos coordenados. Estes traçados consistem em aproximações ao desenho das elipses através de ovais (ver TPU 55 ou Desenho Técnico).
Por estas razões este tipo de axonometrias costuma receber a designação de AXONMETRIAS MÉTRICAS (em que a redução das medidas pode ser efectuada numericamente sobre as medidas da figura a representar) por oposição a AXONOMETRIAS GRÁFICAS (em que as reduções de medidas são efectuadas por processos exclusivamente gráficos).
Também se pode designar este tipo de axonometrias por AXONOMETRIAS CONVENCIONAIS.

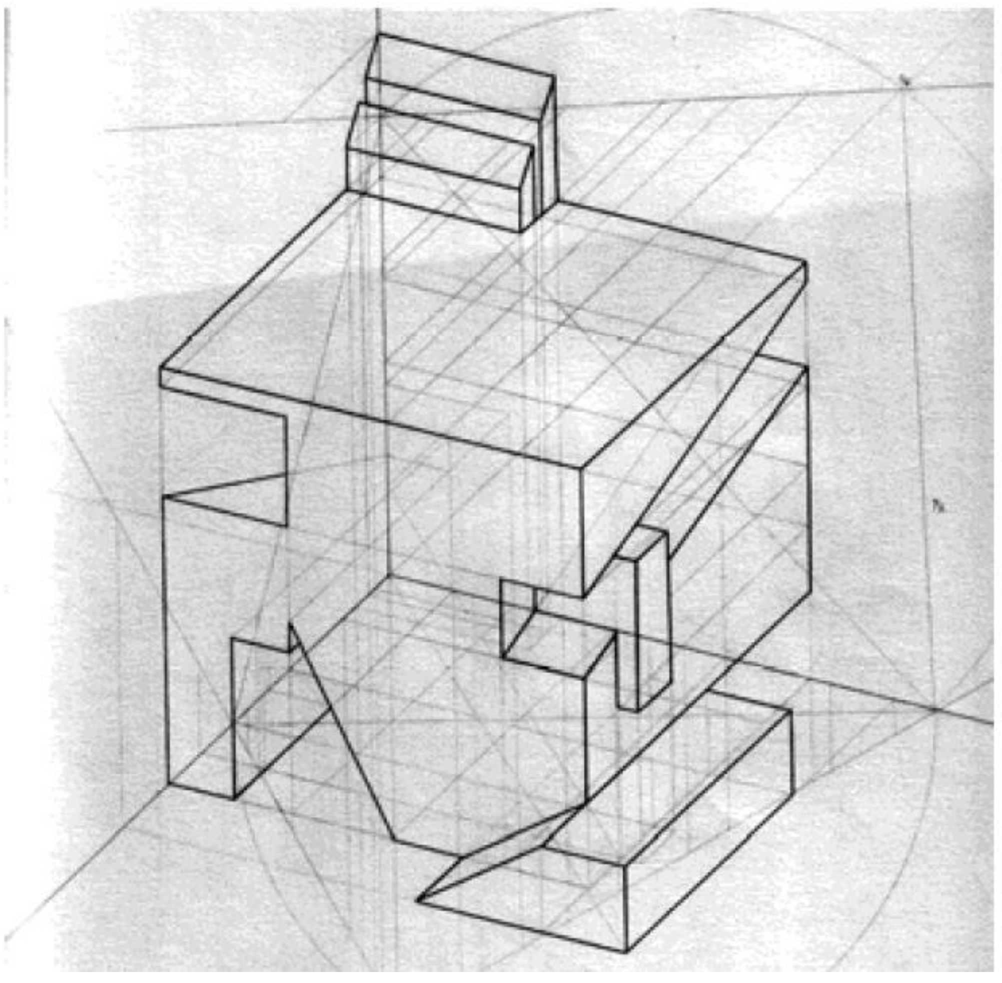


Exemplo de oval para representar, por aproximação, uma elipse em isometria correspondente a uma circunferência contida num plano paralelo a um plano coordenado (retirado do TPU 55).

Trabalhos de alunos

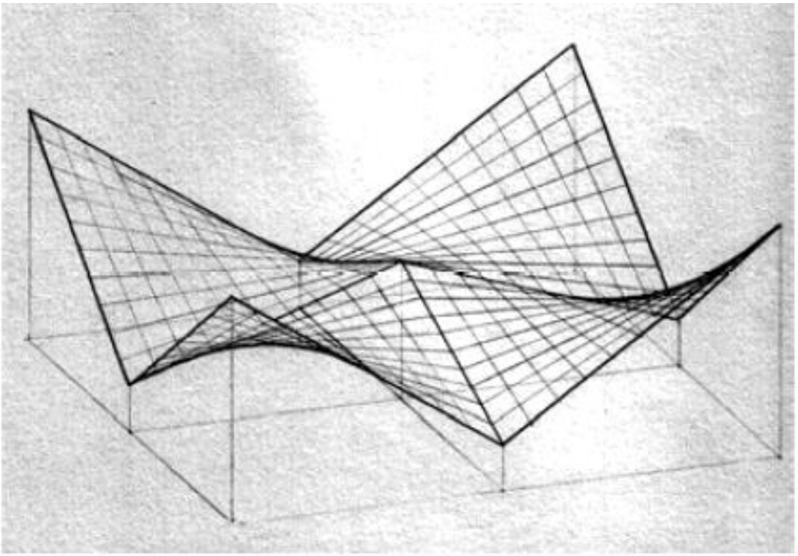
No exemplo da esquerda está representada uma “pilha” de prismas com rotações relativas entre eles.
No exemplo da direita está representado um sólido a partir de subtracções e adições a um cubo base.





Trabalhos de alunos

Exemplos de trabalhos de alunos.



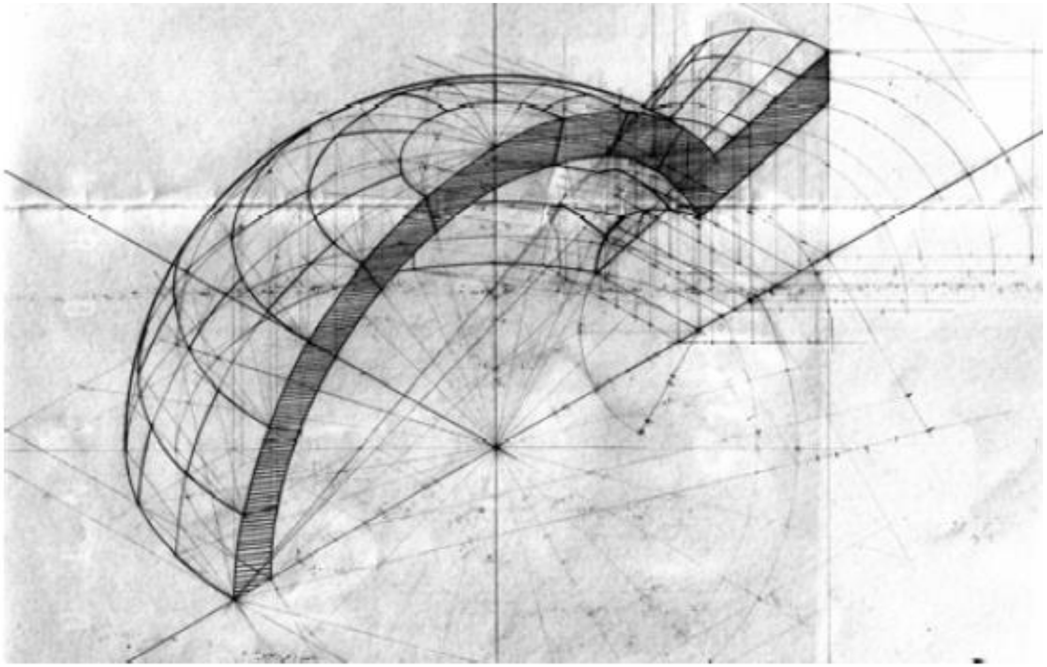
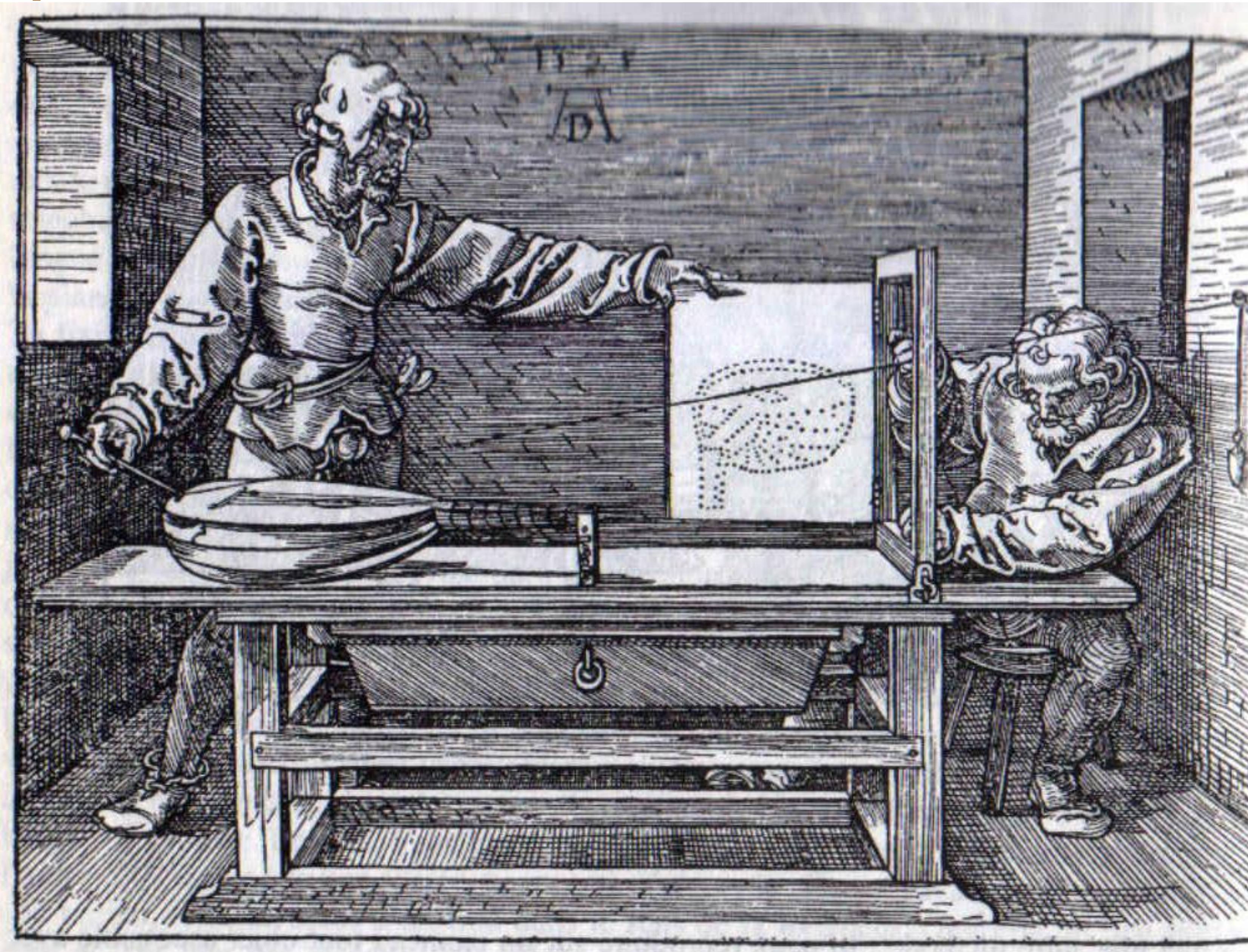


Fig. – Exemplos de trabalhos de alunos.

3.4. Perspectiva

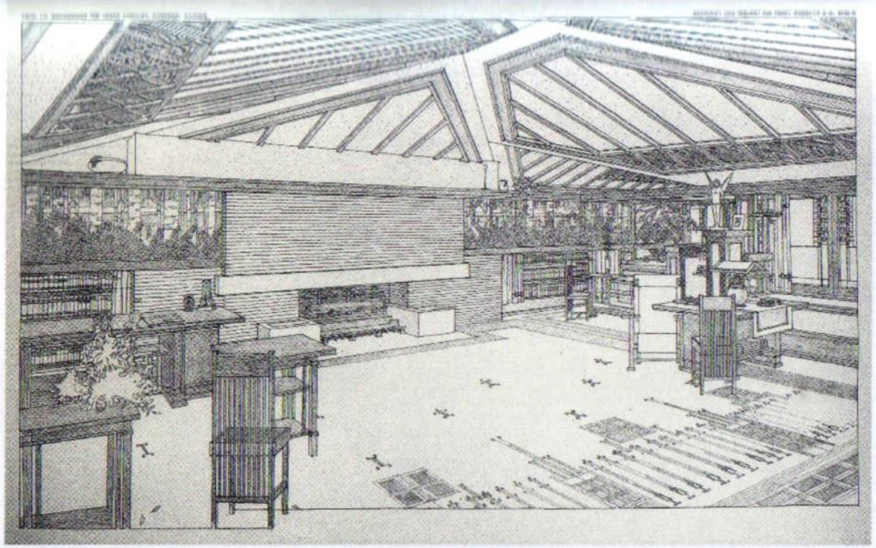
Aspetos históricos



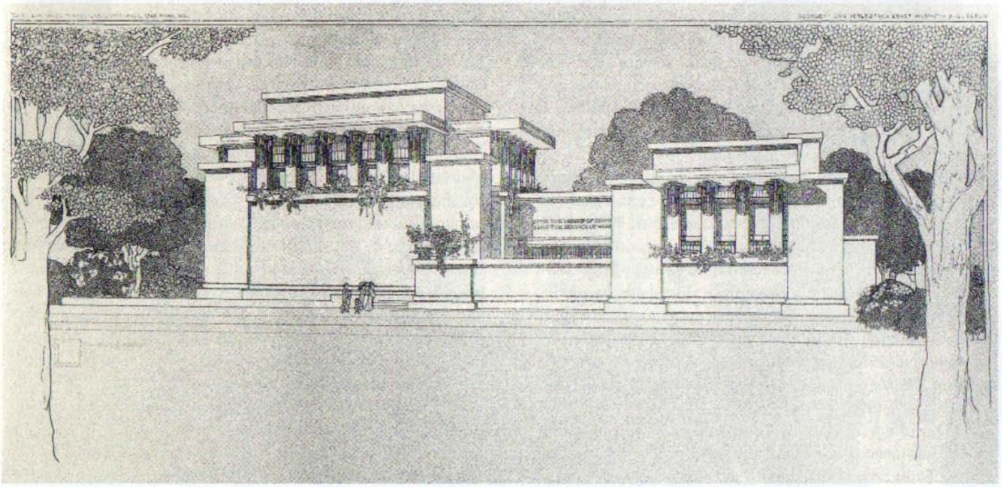
In
DURER A : Underweysung der messung . 1525

Aspetos históricos

A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Frank Lloid Wright “*Ausgefuhrte Bauten und Entwurfe von Frank Lloyd Wright*”, *1910*



10 | Casa Coonley de Riverside, Illinois (1906–1908)
O tecto da vasta sala de estar da Casa Coonley segue a inclinação do telhado. O próprio Wright indicou a disposição dos móveis.
Ch. LVI b. Desenho a caneta



11 | Unity Temple em Oak Park, Illinois (1905–1908)
O templo é composto por uma sala de oração e por uma casa paroquial, dois cubos em betão armado de linguagem formal pesada e monumental, dispostos face a face.

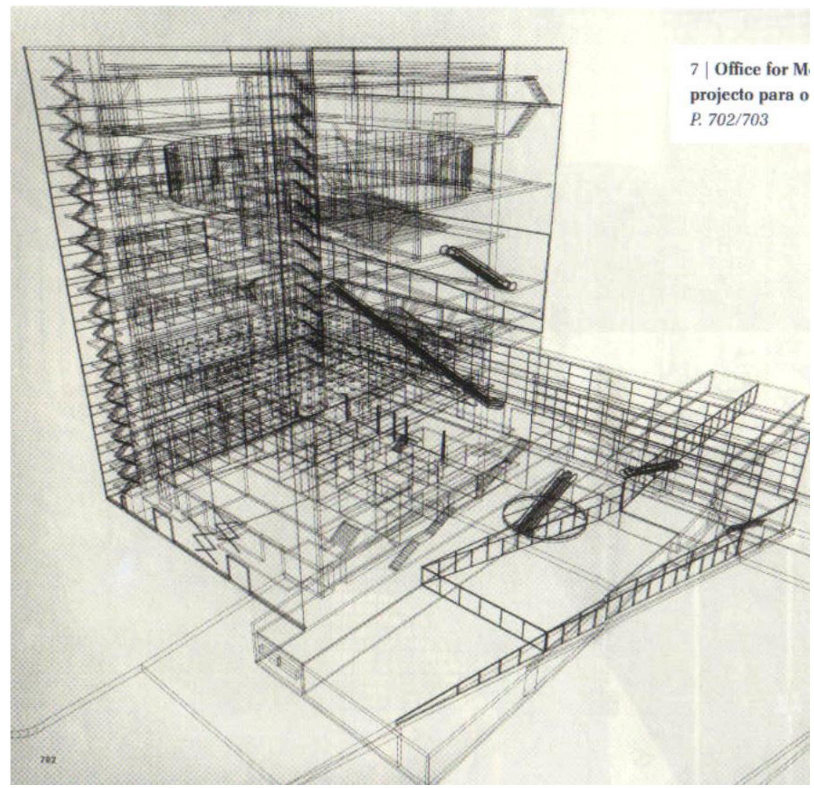
In
(vários autores). Teoria da Arquitectura – do Renascimento aos nossos dias. Taschen. ISBN 3-8228-2693-6

Aspetos históricos

Os sec. XIX e XX e a fotografia como perspectiva: Paul Schmitthenner “*Das deutsche Wohnhaus*“, 1932

A perspectiva na visualização informática tornou-se uma tendência crescente no século XX.

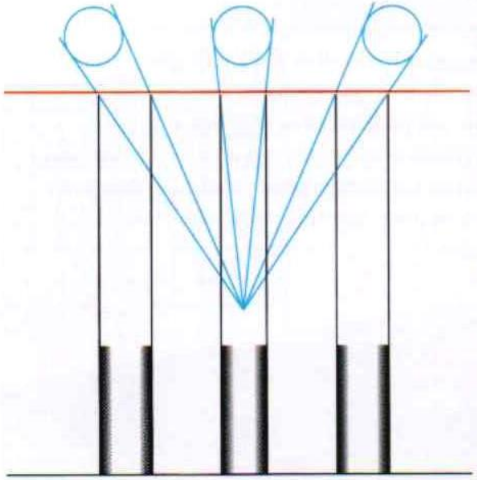
4 | **Cidade-jardim de Staaken**
Schmitthenner realizou em 1914–1917 para os operários das fábricas de armamento de Spandau, perto de Berlim, a cidade-jardim de Staaken baseada no modelo das pequenas cidades holandesas ou do norte da Alemanha.
Ilustração adicional que não aparece no tratado



7 | **Office for Metropolitan Architecture / Rem Koolhaas, projecto para o Centro de Arte de Karlsruhe**
P. 702/703

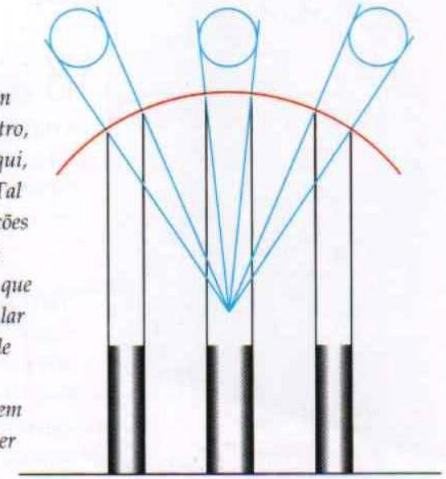
In
(vários autores). Teoria da Arquitectura – do Renascimento aos nossos dias. Taschen. ISBN 3-8228-2693-6

Quadro plano VS Quadro curvo



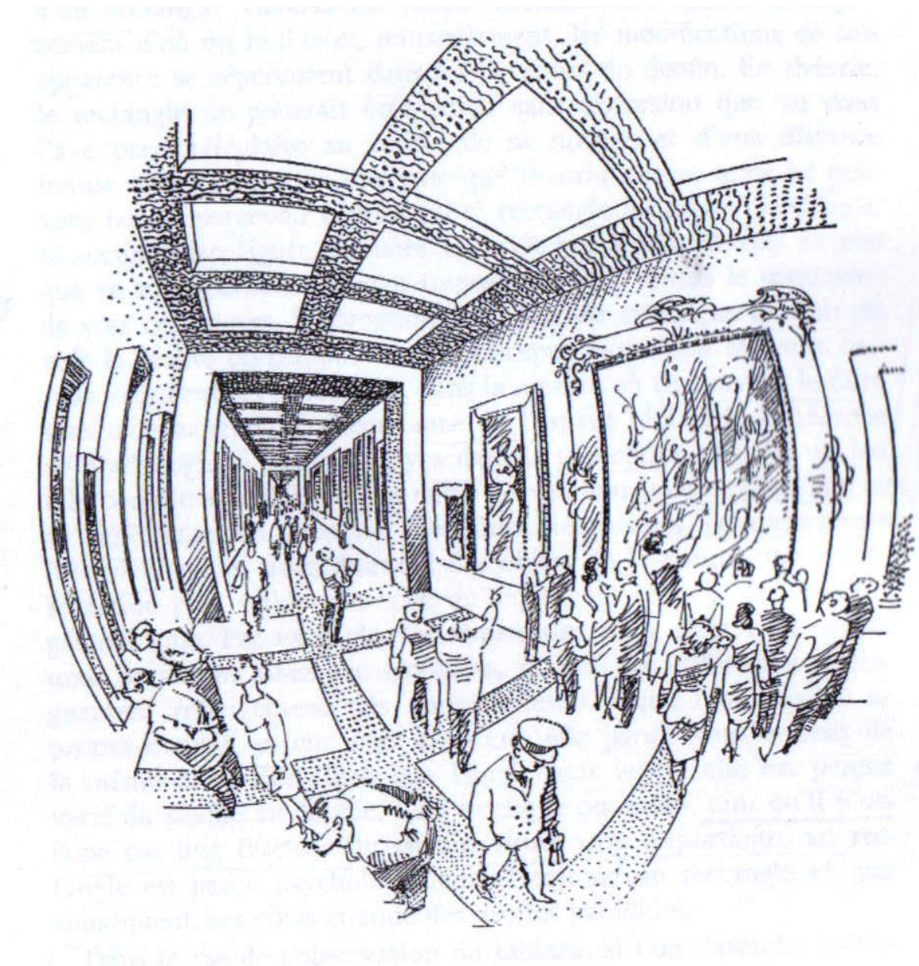
Plano de quadro direito
Leonardo desenhou três colunas cilíndricas, com o mesmo diâmetro, paralelas ao plano de quadro (aqui, a vermelho) e demonstrou que, segundo a perspectiva linear, as duas colunas dos extremos pareciam mais largas do que a do centro. Ora, como o observador estava mais longe das duas colunas, não seria assim que as veria.

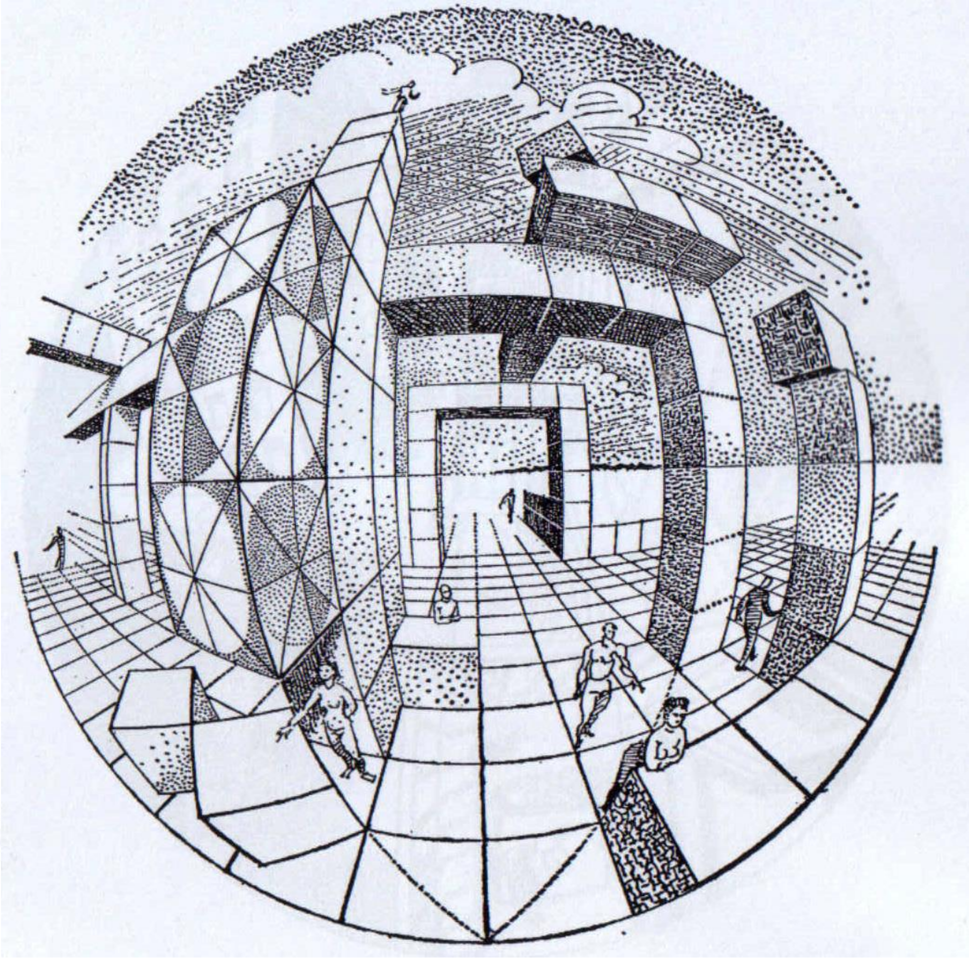
Plano de quadro curvo
A fim de garantir que as duas colunas dos extremos parecessem ter o mesmo diâmetro da do centro, ou menos, o plano de quadro (aqui, a vermelho) teria de ser curvo. Tal facto vem confirmar as observações de Leonardo a partir de ângulos amplos, em que ele demonstrou que uma parede comprida, rectangular e horizontal, paralela ao plano de quadro, teria de ser desenhada a convergir para os lados, quer em direcção a uma linha central quer como linha curva.



In
SMITH R. Introdução à perspectiva. 1996. Editorial presença. ISBN 972-23-2025-4

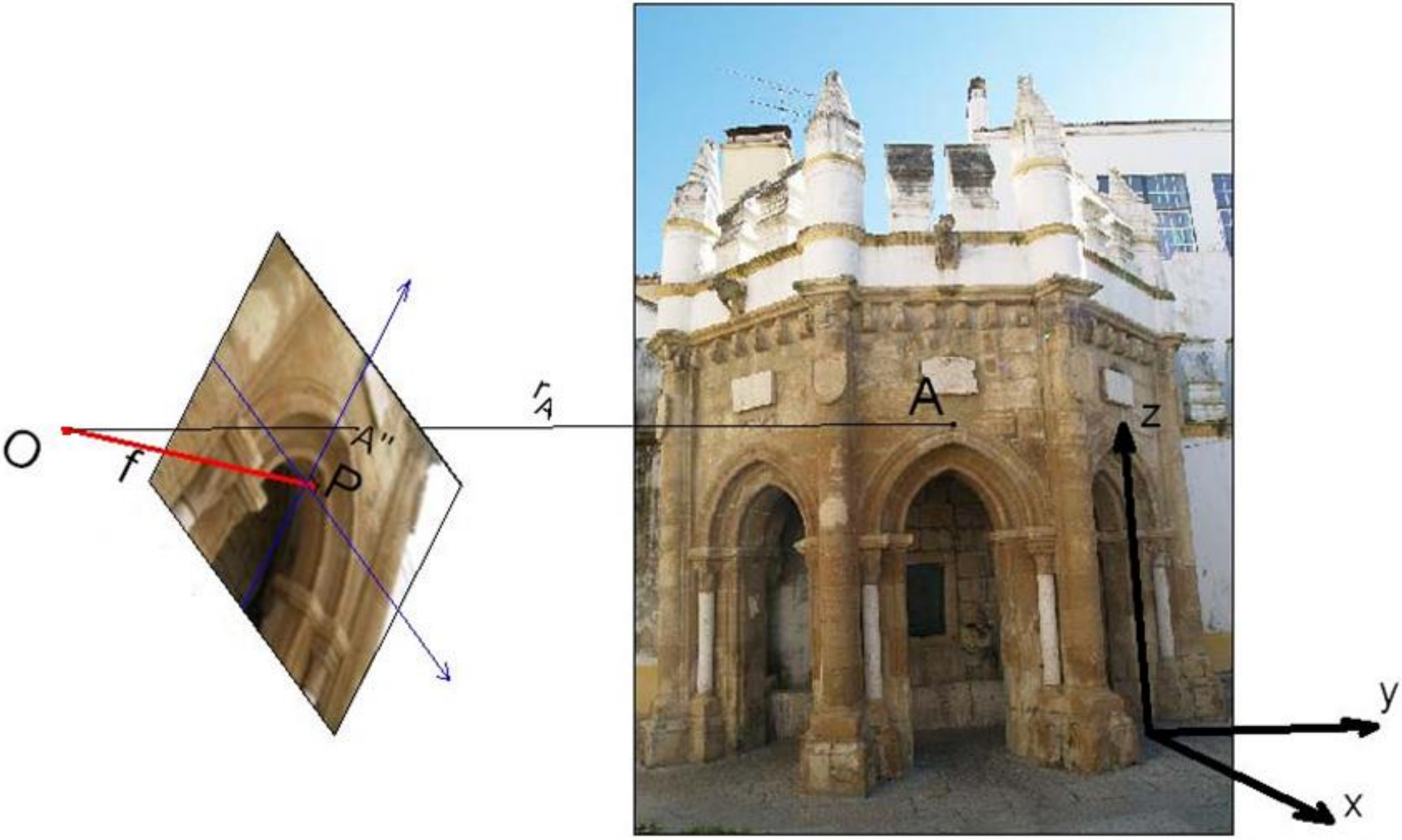
Quadros curvos



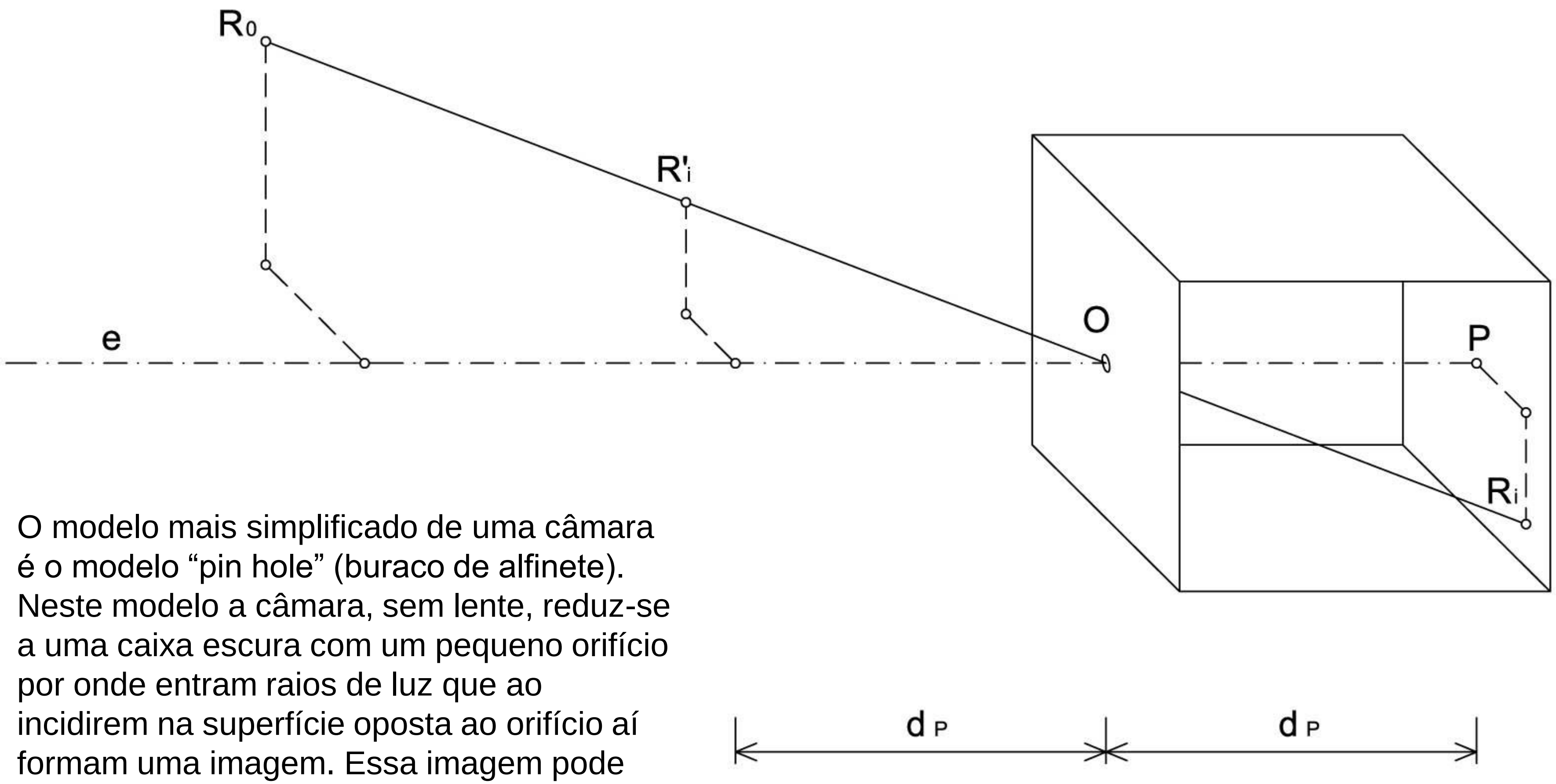


In
FLOCON A., BARRE A.: La perspective curviligne. 1968. Flamarion.

A fotografia como perspetiva



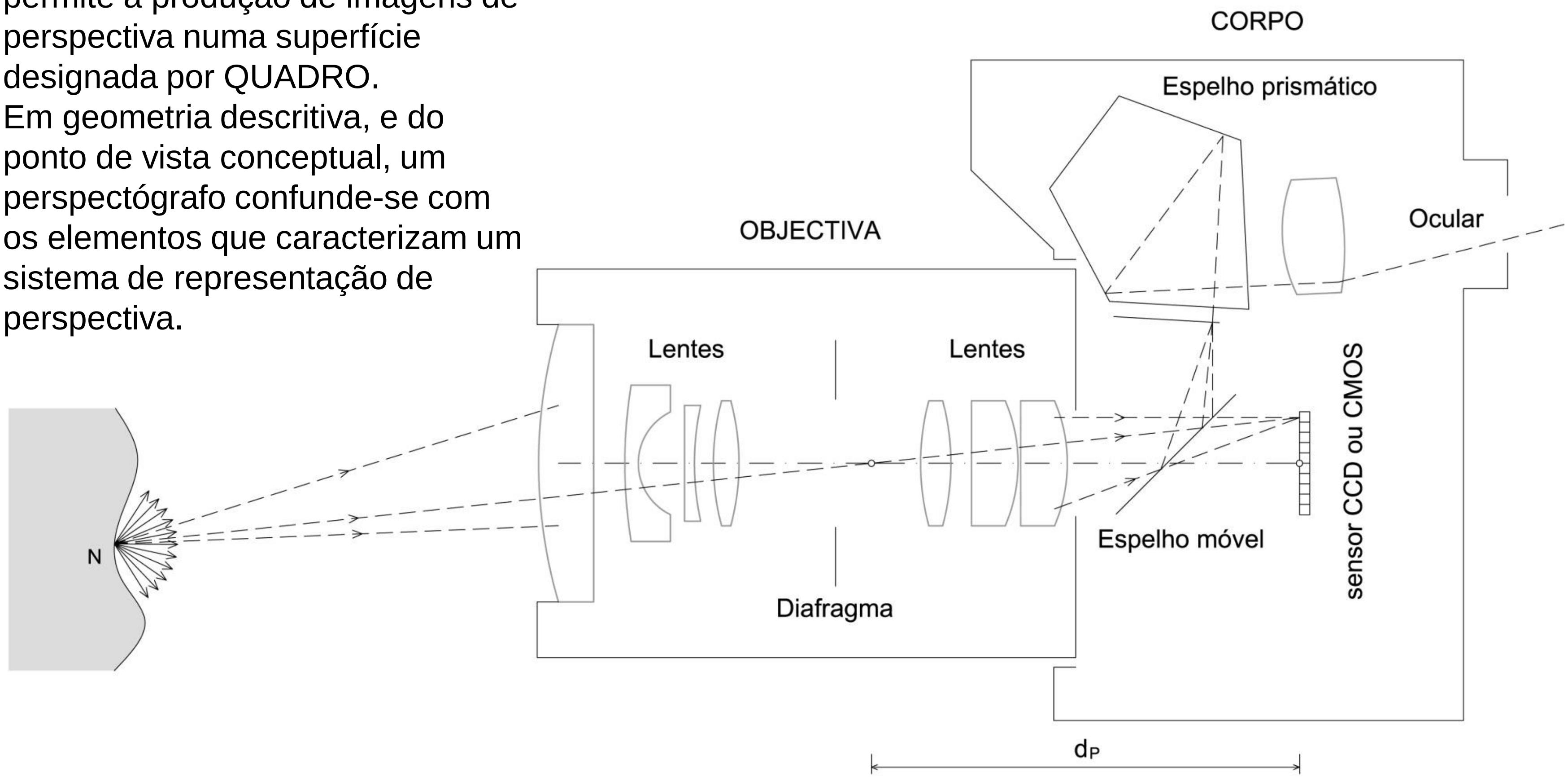
O modelo da câmara escura (pin-hole)



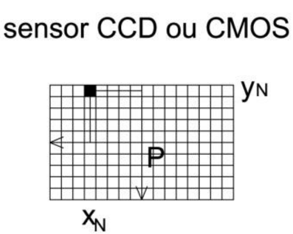
O modelo mais simplificado de uma câmara é o modelo “pin hole” (buraco de alfinete). Neste modelo a câmara, sem lente, reduz-se a uma caixa escura com um pequeno orifício por onde entram raios de luz que ao incidirem na superfície oposta ao orifício aí formam uma imagem. Essa imagem pode ser capturada se na superfície for colocado um material sensível à luz.

A câmara fotográfica como perspectógrafo

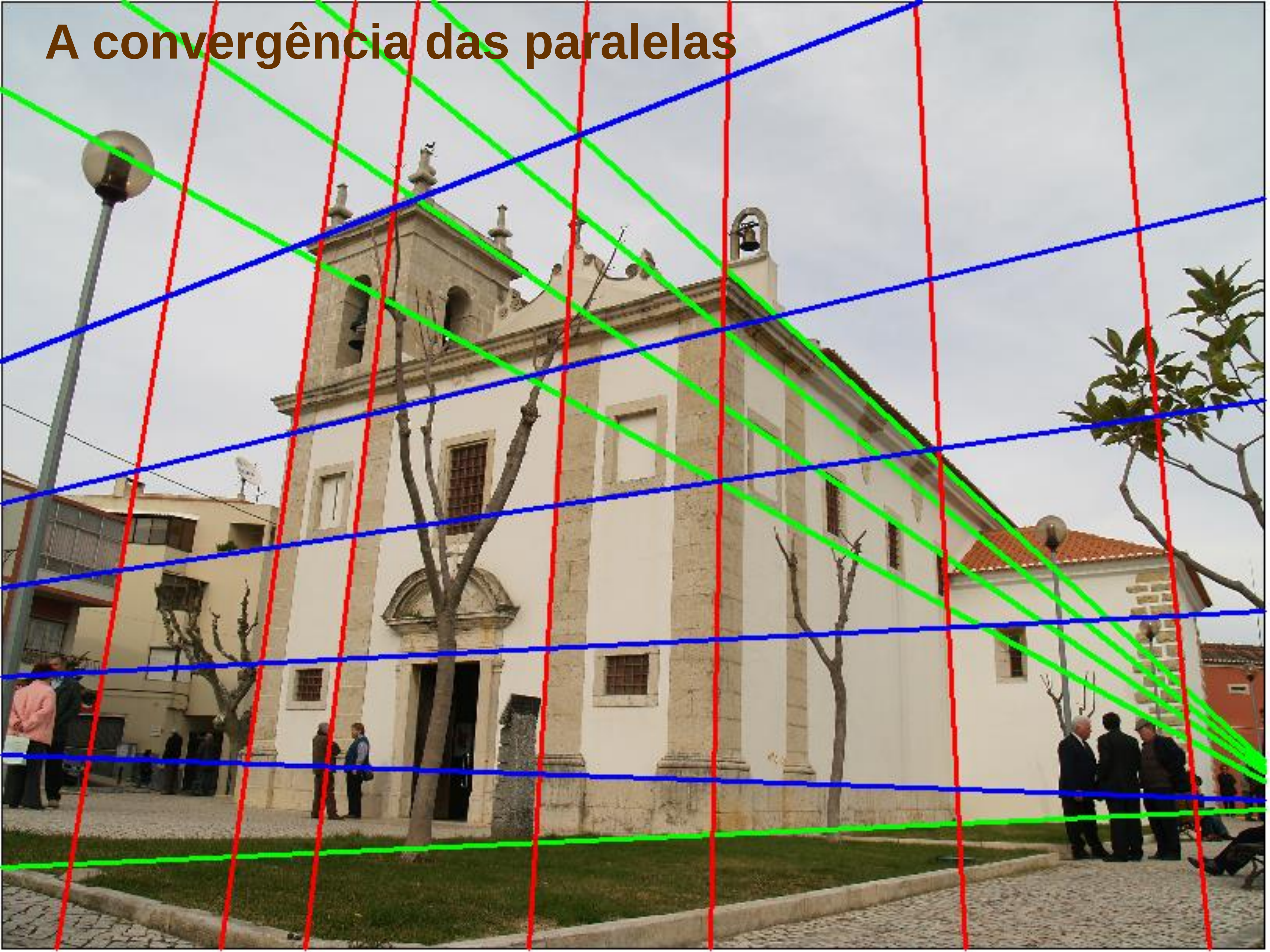
Um PERSPÉCTOGRAFO é uma "máquina" física ou conceptual que permite a produção de imagens de perspectiva numa superfície designada por QUADRO.
Em geometria descritiva, e do ponto de vista conceptual, um perspectógrafo confunde-se com os elementos que caracterizam um sistema de representação de perspectiva.



Numa câmara fotográfica digital o quadro é a superfície do sensor, do tipo CCD ou CMOS. As rectas projectantes sintetizam os feixes luminosos que são reflectidos pelos objectos e focados através do sistema de lentes da câmara.



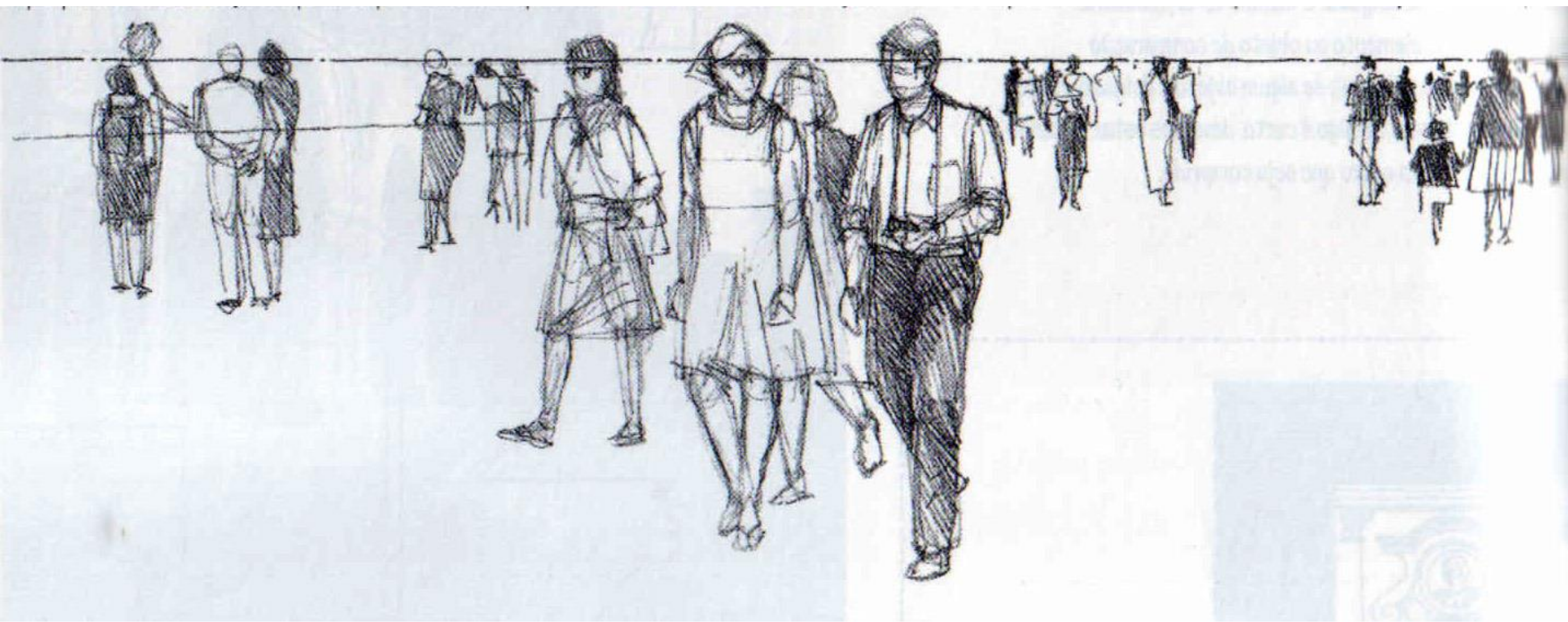
A convergência das paralelas



A diminuição das dimensões com a distância

A perspetiva à mão levantada

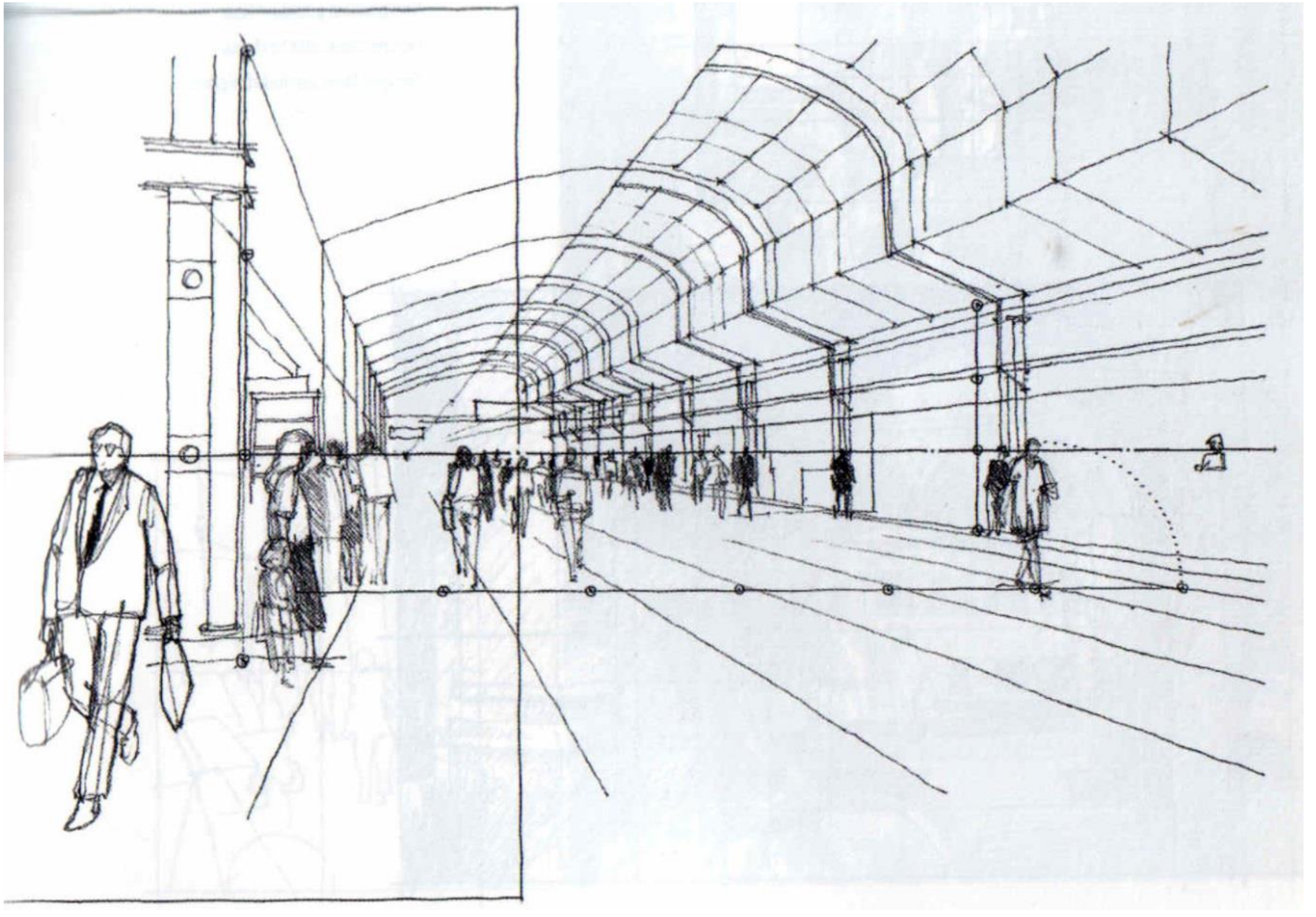
Se o observador de uma cena se encontrar a uma altura normal, digamos a altura de uma pessoa, as cabeças das pessoas situam-se todas numa linha única. Como todas as pessoas têm aproximadamente a mesma altura, a maior ou menor dimensão de uma figura é um indicador de ESCALA e PROFUNDIDADE ou de distância entre o observador e a figura visada.



In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

A perspetiva à mão levantada

Neste desenho o observador encontra-se a uma altura normal. A cabeça da criança representada à esquerda na cena aparece obviamente abaixo da linha que passa pelas representações das cabeças dos adultos. Outro indicador de profundidade é a diminuição de distâncias que intuímos, pela representação, serem espacialmente iguais. Acresce a estas características a convergência de linhas num ponto, que sabemos serem paralelas entre si no espaço tridimensional objecto.

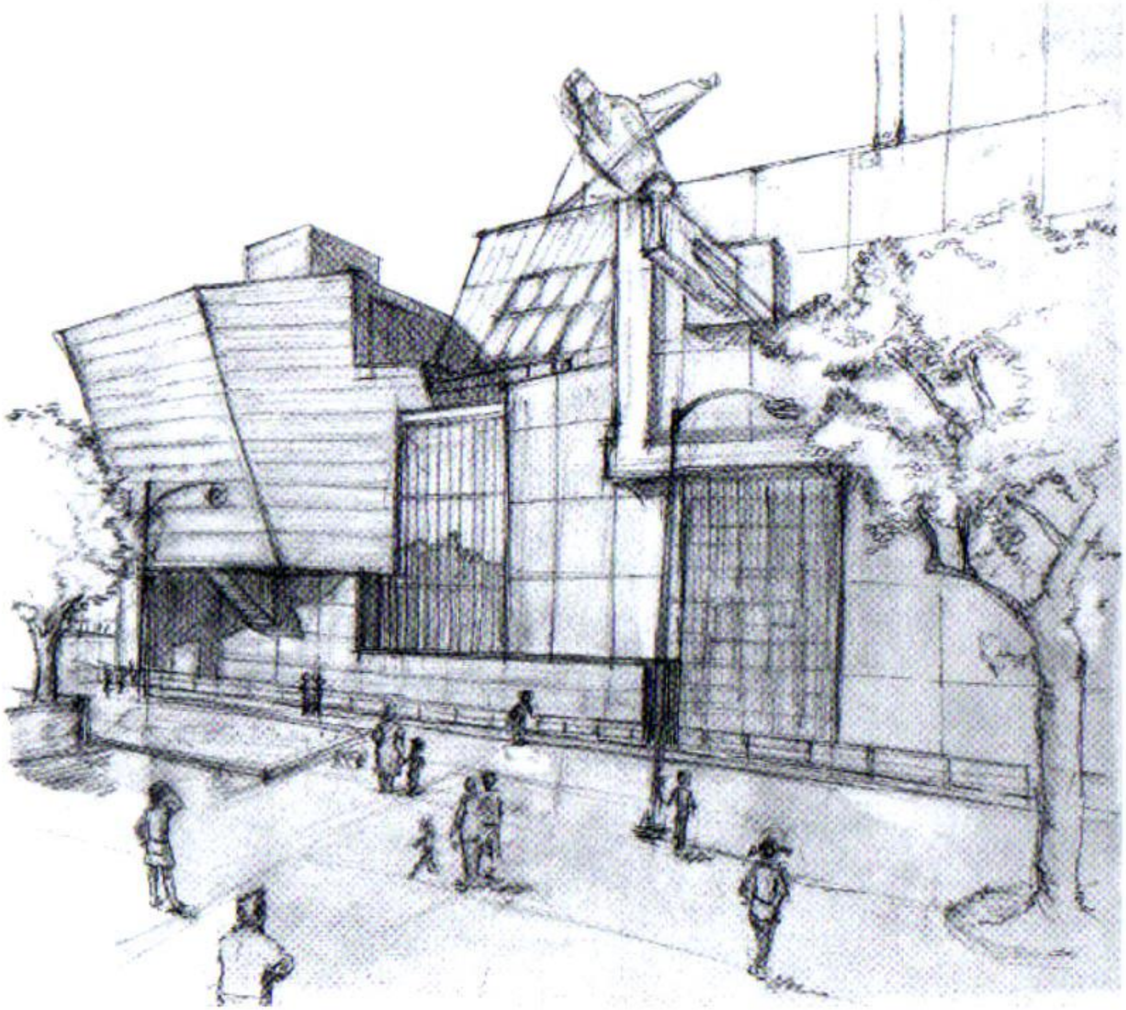


In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

A perspetiva à mão levantada

Neste desenho o observador encontra-se a uma altura superior ao normal, provavelmente está situado num piso acima do piso da rua e em frente ao edifício representado. Por essa razão as cabeças das pessoas já não se encontram sobre uma linha única. Em todo o caso a dimensão relativa entre as figuras continua a ser um indicador da distância entre observador e objecto.

Apontamento a lápis, por Carlos Conesa, a partir do projecto do Museu Aeroespacial da Califórnia (Los Angeles, E. U. A.), de Frank Gehry. A figura humana constitui sempre uma referência de escala na arquitectura.

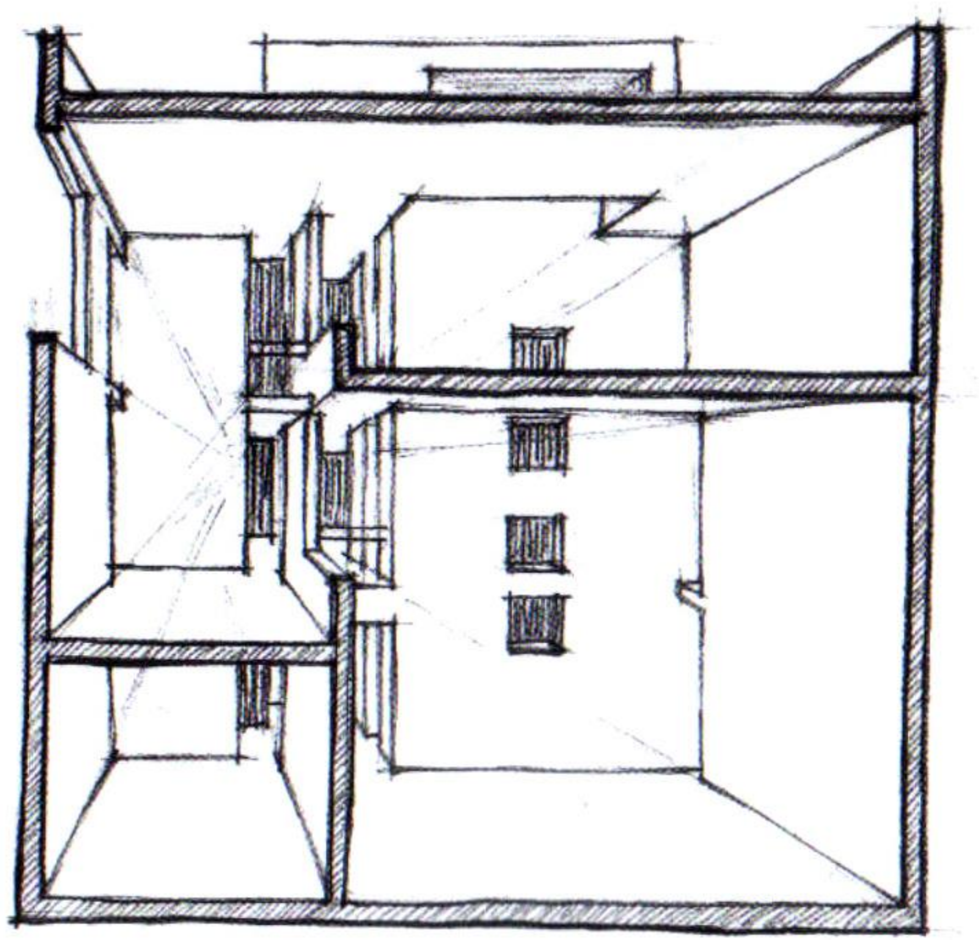


Desenho de Carlos Conesa In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

O corte perspetivado

Este tipo de desenho designa-se por CORTE PERSPECTIVADO. Partindo de um corte e arbitrando o ponto de convergência, no desenho, das linhas ortogonais ao plano do corte, procede-se ao desenho dos restantes elementos em profundidade. Neste tipo de desenho os planos paralelos ao plano do corte mantêm as proporções embora diminuam de tamanho com a distância. O controlo da PROFUNDIDADE pode ser feito de forma intuitiva ou através de traçados elementares.

Esquisso a lápis com base num corte perspectivado do projecto da casa Turégano (Pozuelo de Alarcón, Espanha), da autoria de Alberto Campo Baeza. Utilizaram-se diversas linhas contínuas de enquadramento, definição e trama.

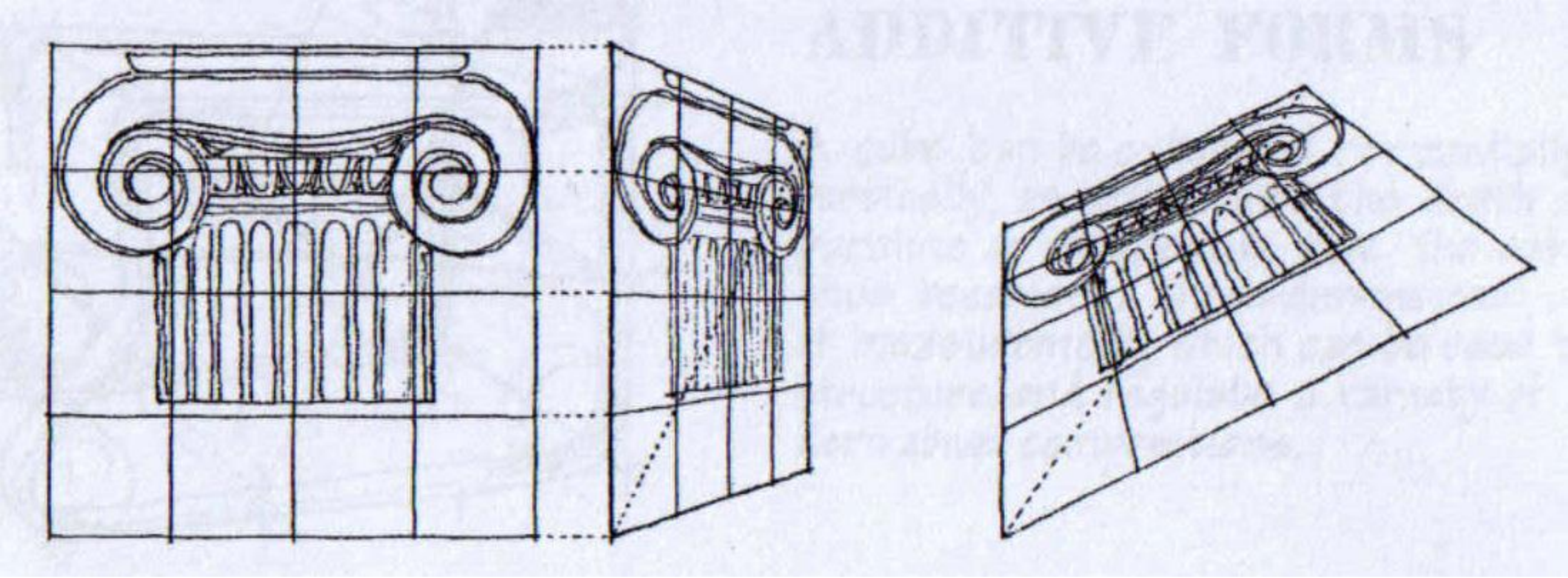


Desenho de Carlos Conesa In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

A homologia como operação fundamental

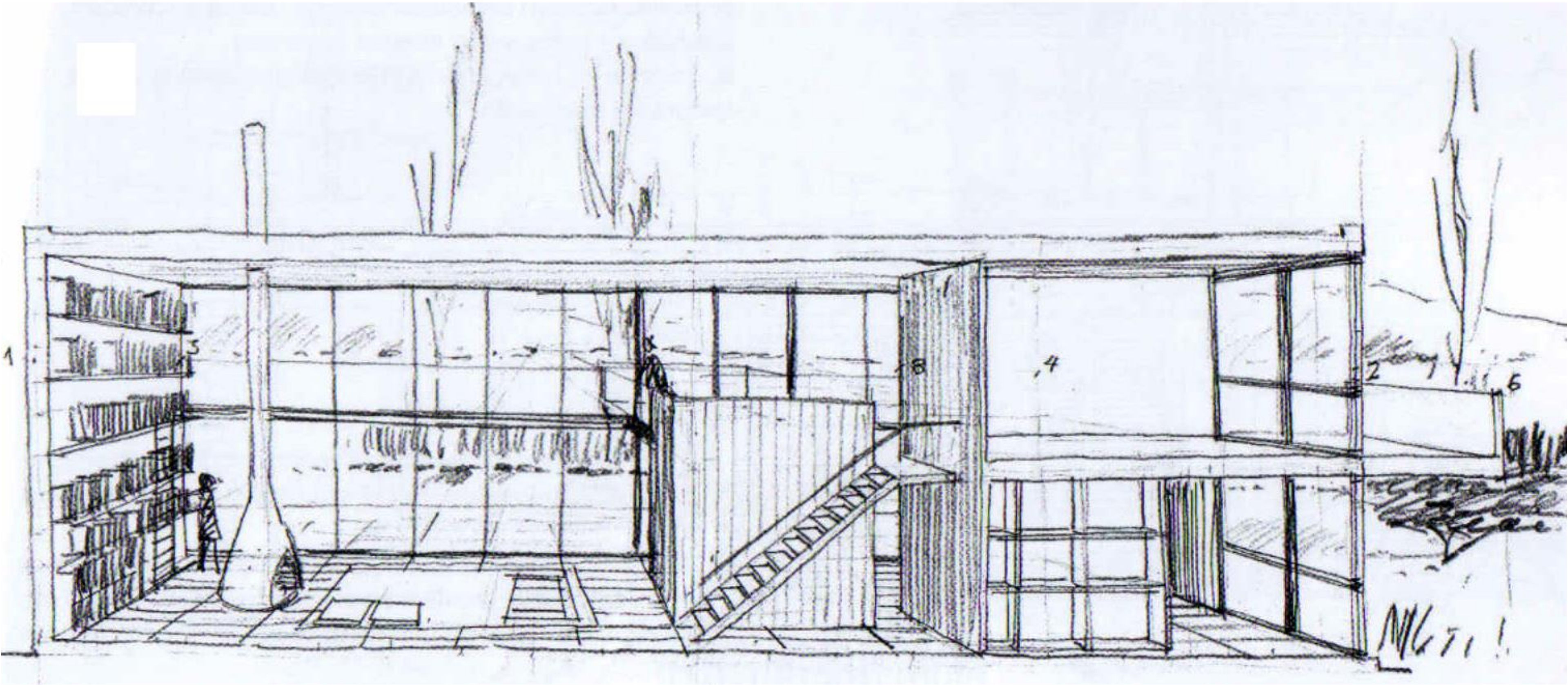
Com efeito, o controlo da profundidade pode ser efectuado através da deformação perspéctica de uma grelha quadrada como se sugere na figura seguinte. Com efeito, este procedimento designa-se por HOMOLOGIA.



In
CHING F: Drawing – a creative process. 1990. Van Nostrand Reinhold. ISBN 0-442-31818-9

Perspetiva de 1 ponto de fuga

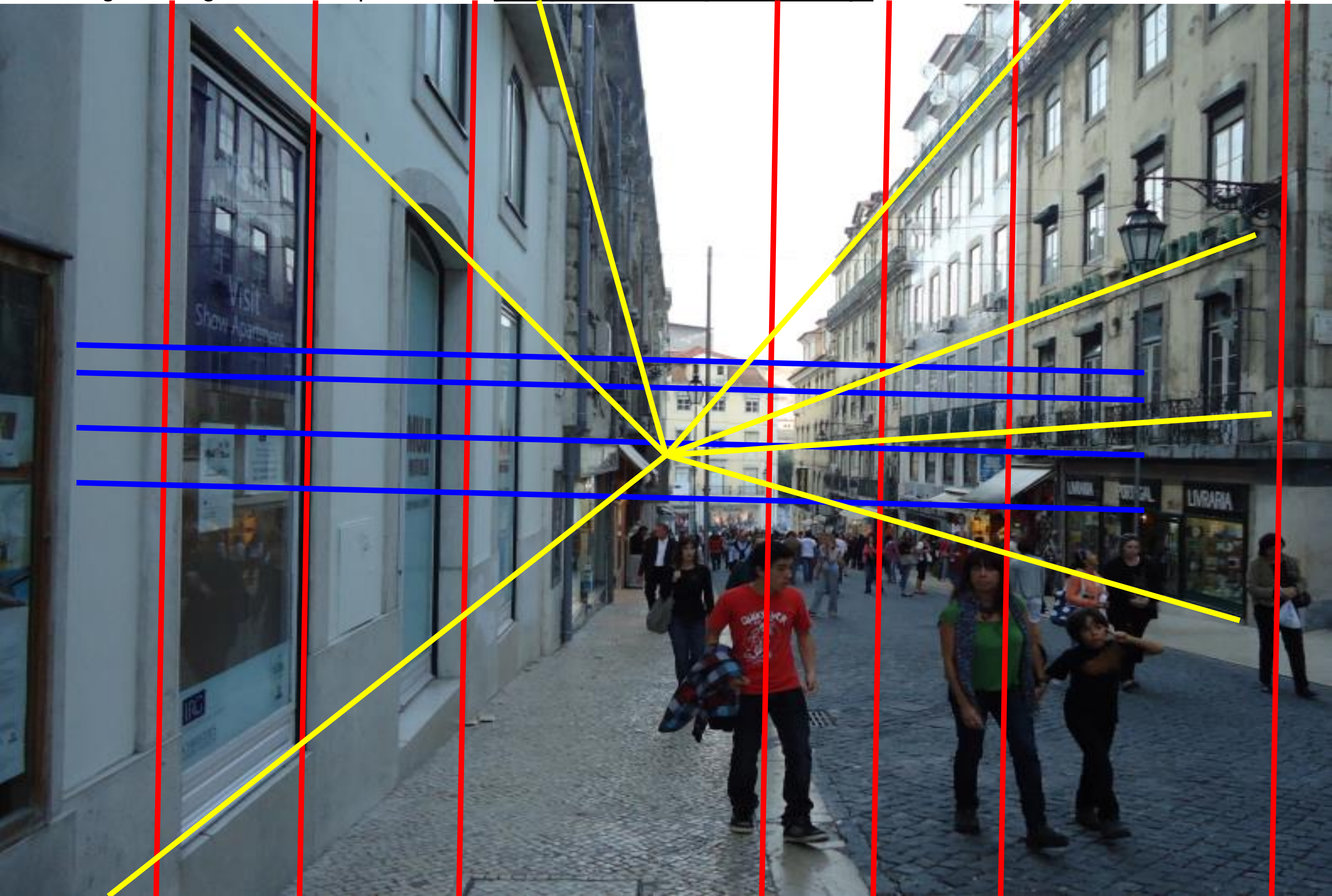
Este tipo de perspectiva, por vezes designada por **perspectiva de 1 ponto de fuga**, corresponde a uma situação em que o observador adopta como DIRECÇÃO PRINCIPAL DO OLHAR uma das três direcções estruturantes de uma cena tri-ortogonal. Isto é, o observador olha de frente para uma orientação de planos o que implica que no desenho apenas uma das três direcções apresenta CONVERGÊNCIA no desenho.



In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

Perspetiva de 1 ponto de fuga

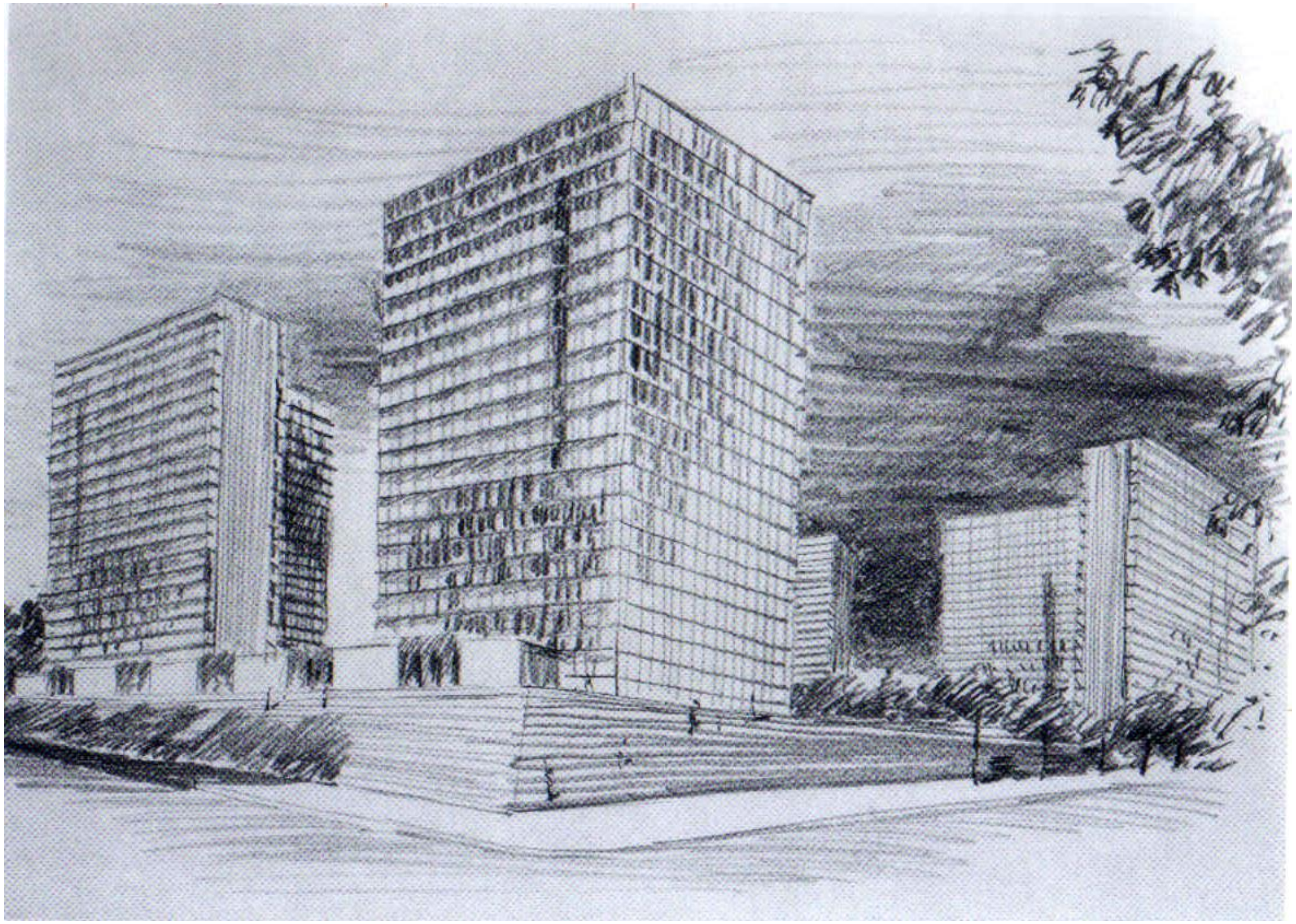
Imagem fotográfica correspondente a **perspectiva de 1 ponto de fuga**.



Perspetiva de 2 pontos de fuga

Já neste tipo de desenho duas direcções apresentam convergência aparecendo as rectas verticais paralelas entre si. As proporções são mantidas na direcção vertical.

Este tipo de perspectiva, por vezes designada por **perspectiva de 2 pontos de fuga**, corresponde a uma situação em que o observador adopta como direcção principal do olhar uma direcção ortogonal a uma das direcções estruturantes de uma cena tri-ortogonal, sem ser paralela a nenhuma das outras duas. Neste caso a direcção principal do olhar do observador é horizontal sem ser paralela às direcções horizontais estruturantes do objecto.

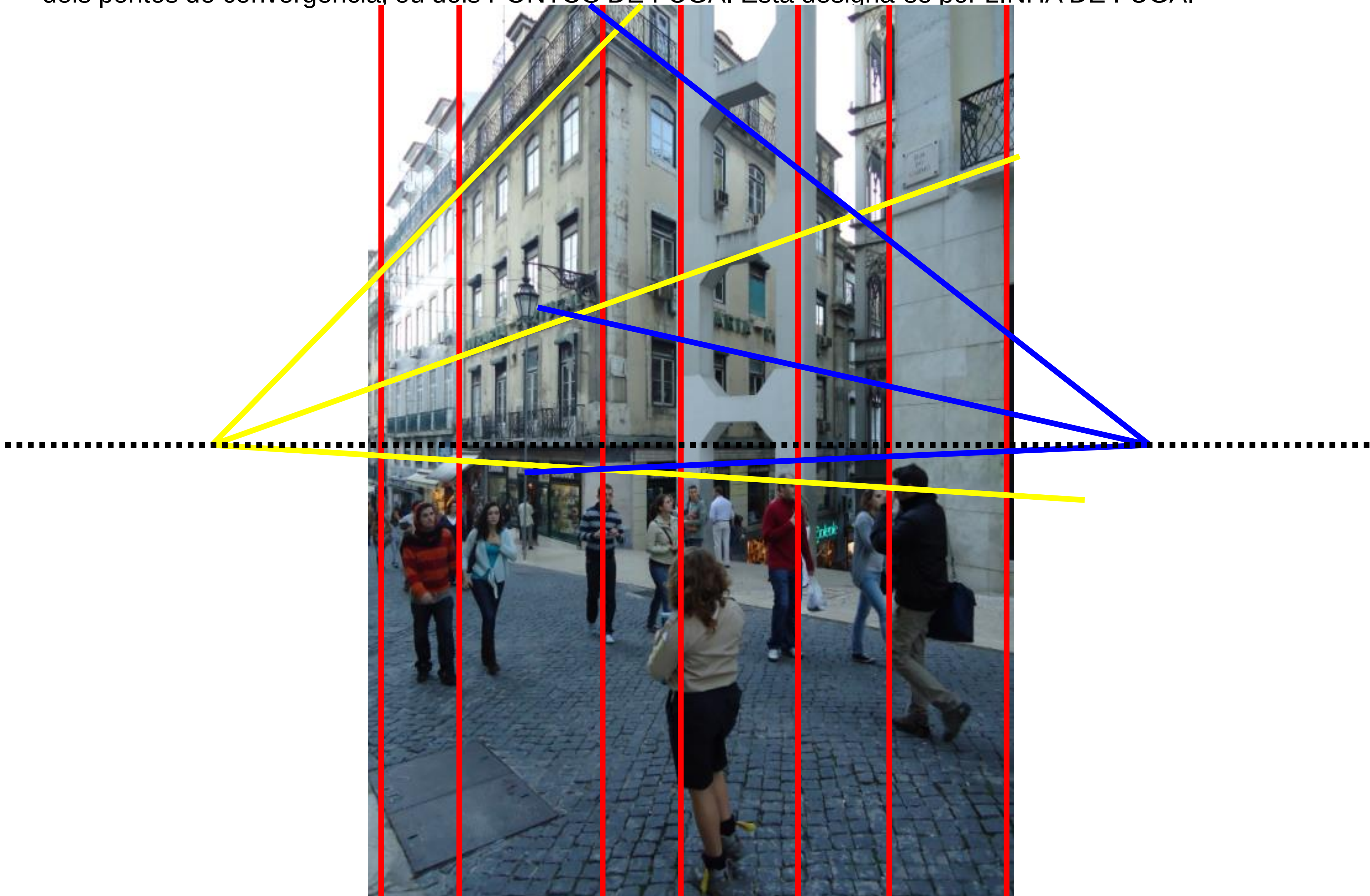


In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

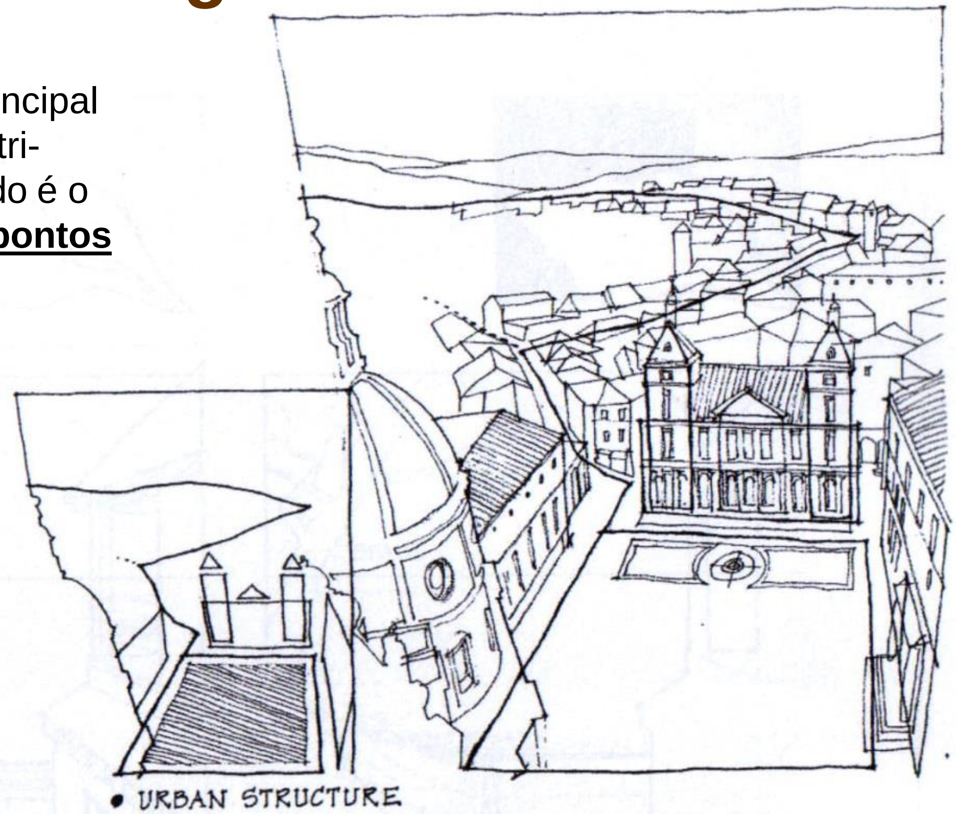
Perspetiva de 2 pontos de fuga

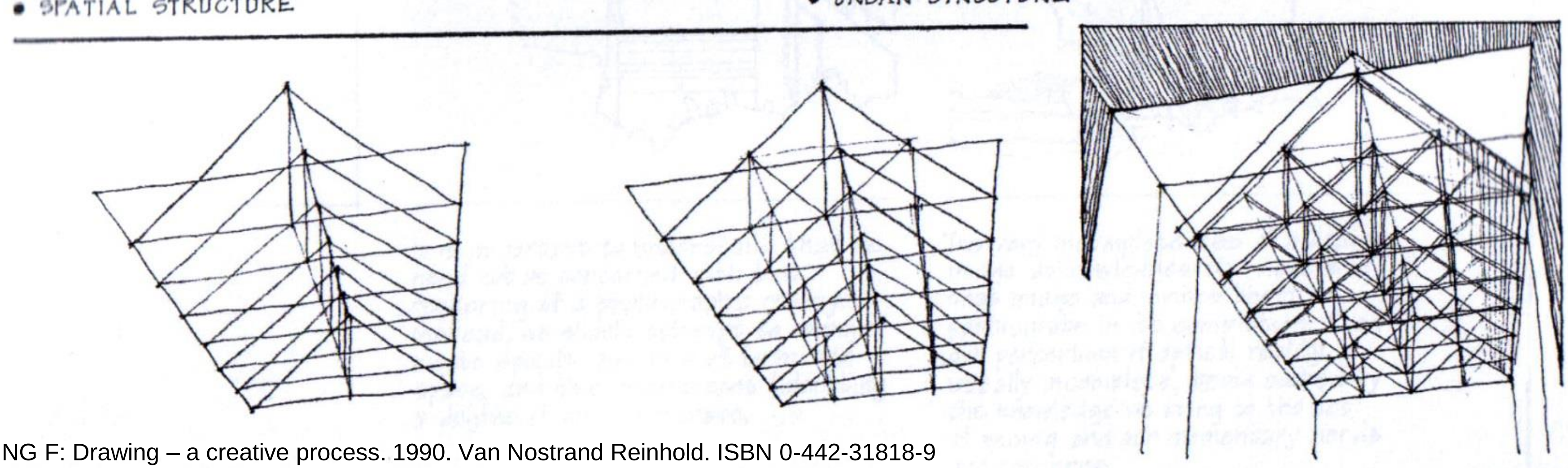
Imagem fotográfica correspondente a **<u>perspectiva de 2 pontos de fuga</u>**. A linha pontilhada fica definida por dois pontos de convergência, ou dois PONTOS DE FUGA. Esta designa-se por LINHA DE FUGA.



Perspetiva de 3 pontos de fuga

Quando o observador assume como direcção principal do olhar uma direcção obliqua às três direcções tri-ortogonais estruturantes de uma cena, o resultado é o que se costuma designar por **perspectiva de 3 pontos de fuga**.

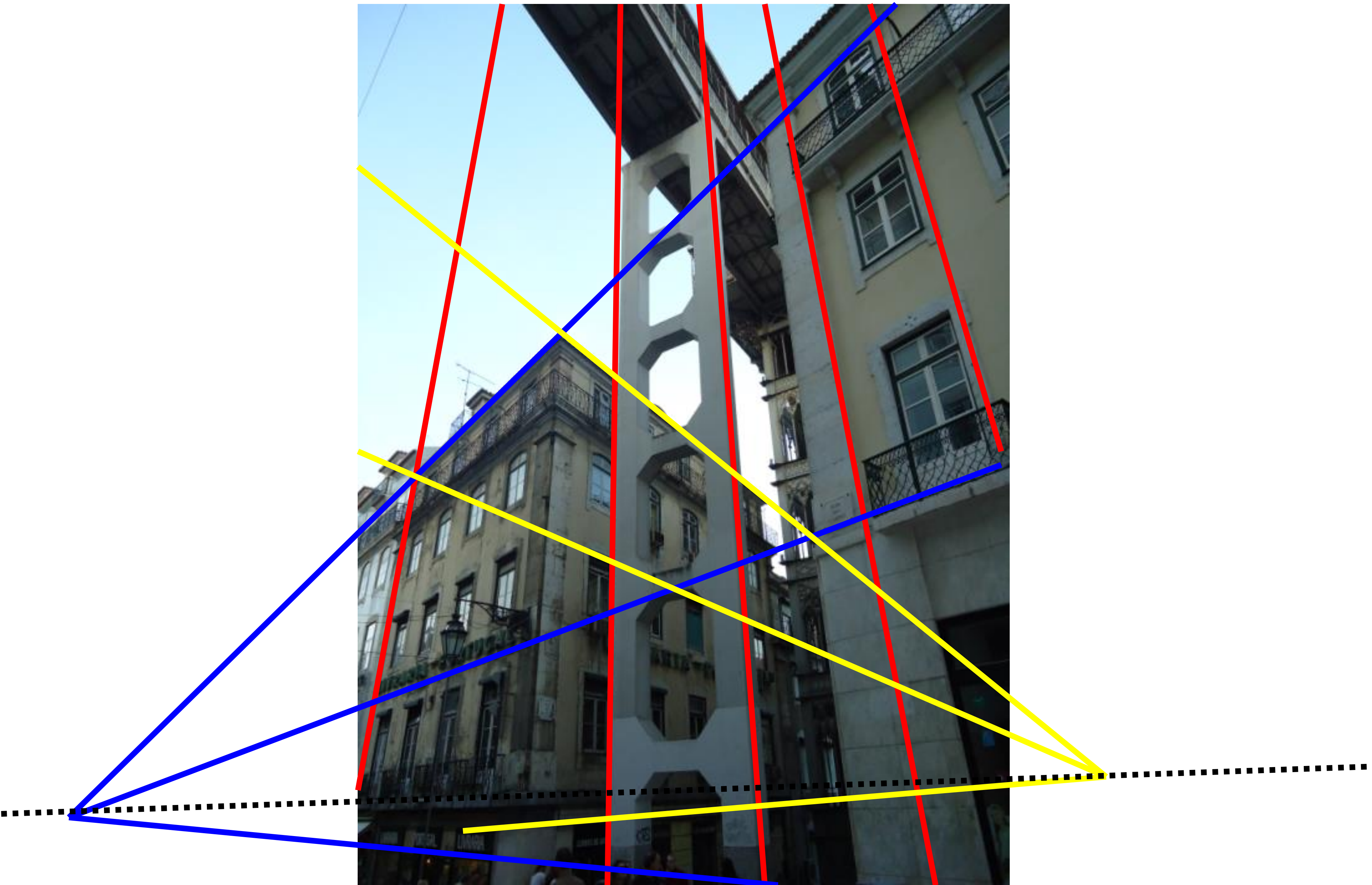




In
CHING F: Drawing – a creative process. 1990. Van Nostrand Reinhold. ISBN 0-442-31818-9

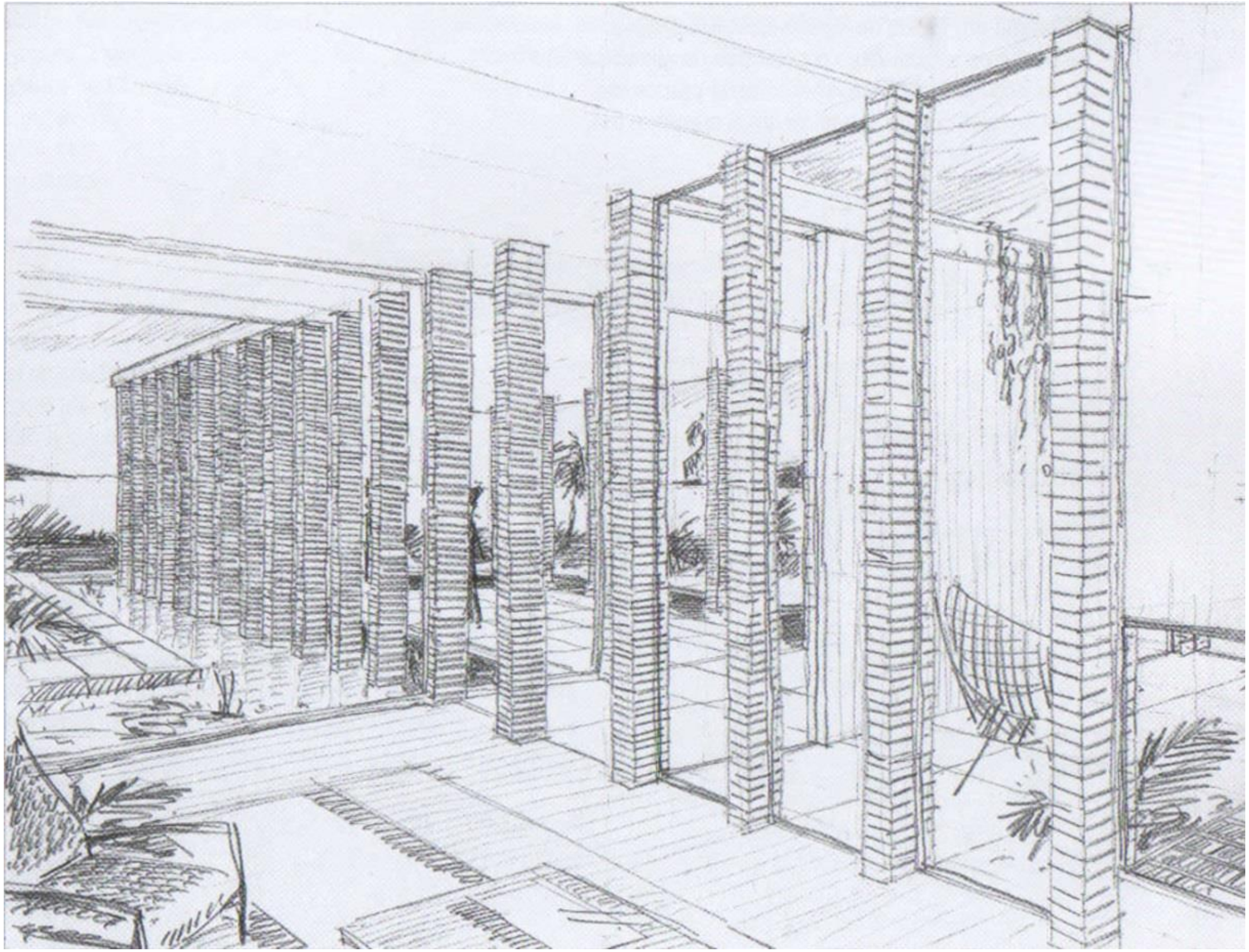
Perspetiva de 3 pontos de fuga

Imagem fotográfica correspondente a **perspectiva de 3 pontos de fuga**. A linha pontilhada fica definida por dois pontos de convergência, ou dois pontos de fuga. Esta designa-se por linha de fuga.



Sombras e reflexos

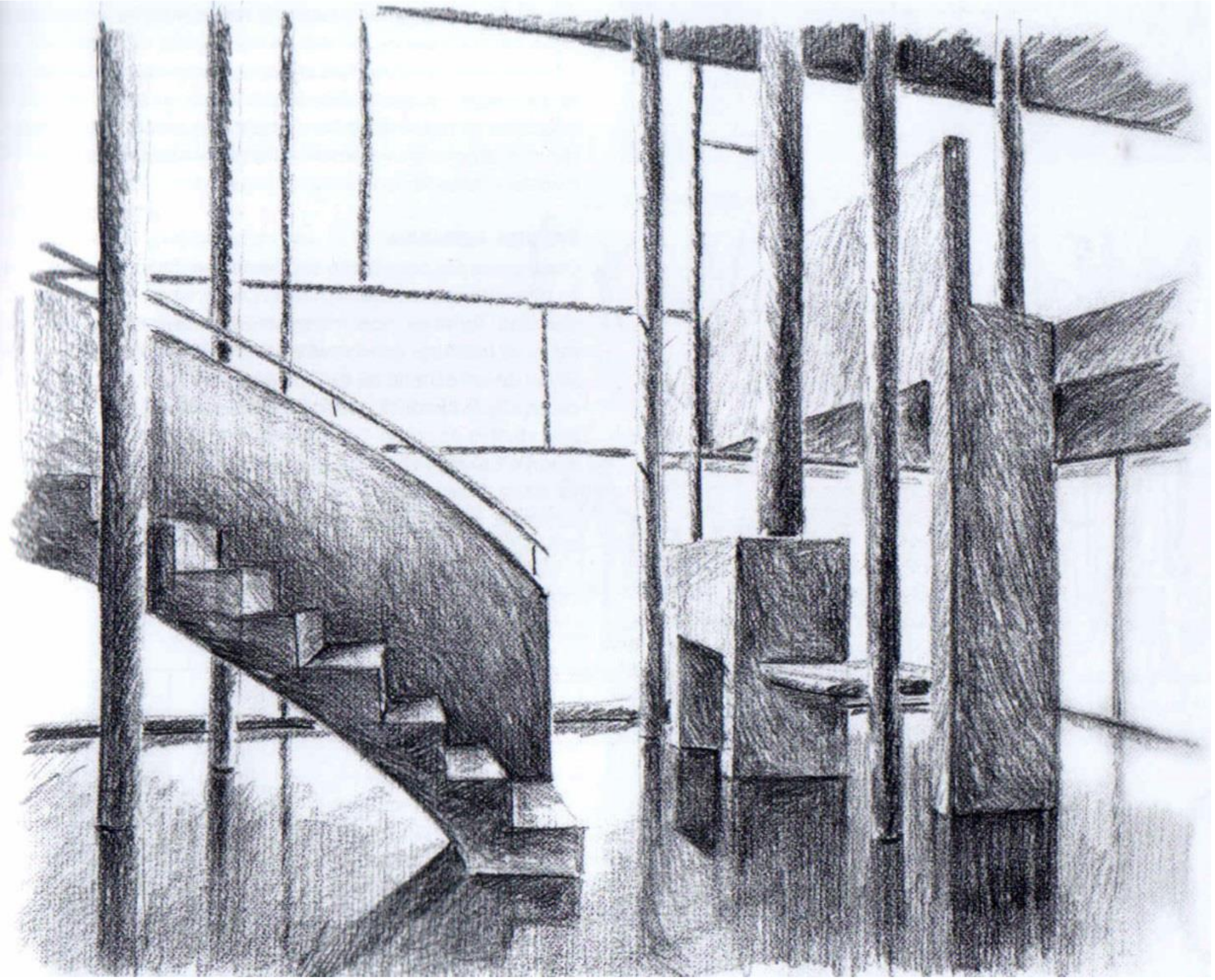
Uma das formas de enriquecer o desenho de perspectiva é através da inclusão de texturas ou através da inclusão dos efeitos de SOMBRA e REFLEXOS. Os reflexos surgem quando se desenham superfícies com características especulares. Exemplos deste tipo de superfície são os espelhos de água, as superfícies envidraçadas, ou as superfícies polidas.



In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

Sombras e reflexos

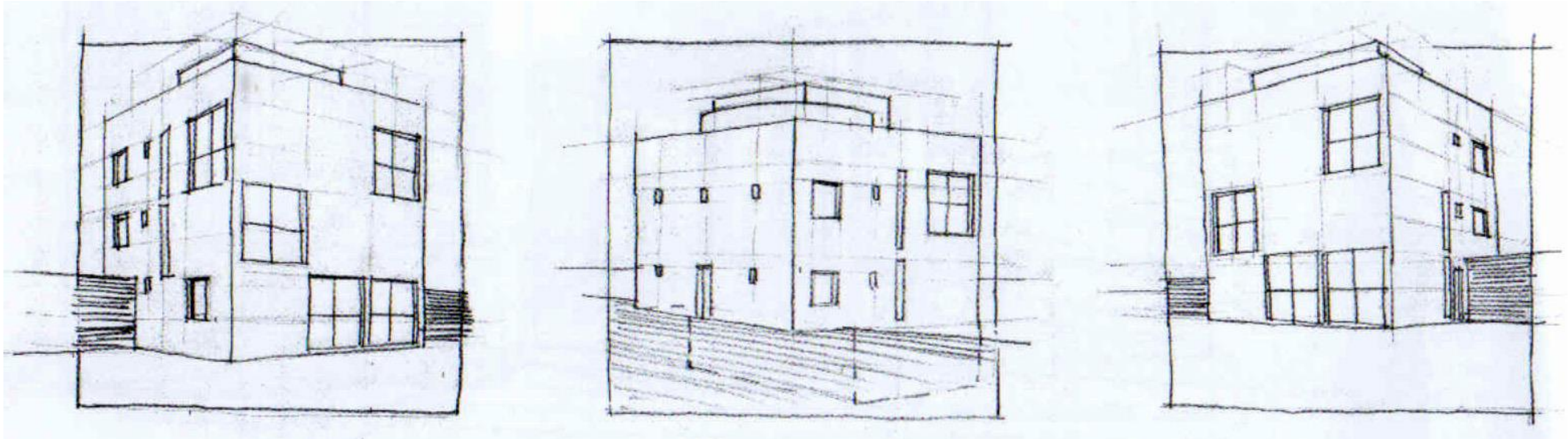
A inclusão de sombras e reflexos pode incluir alguma MODELAÇÃO LUMINOSA. Há uma relação de proporcionalidade entre o ângulo de incidência da luz numa superfície e o seu nível de claro-escuro (TEORIA DOS ISOFOTOS). Há ainda efeitos de reflexões múltiplas da luz na proximidade de objectos bem como os efeitos de reflexão atmosférica da luz.



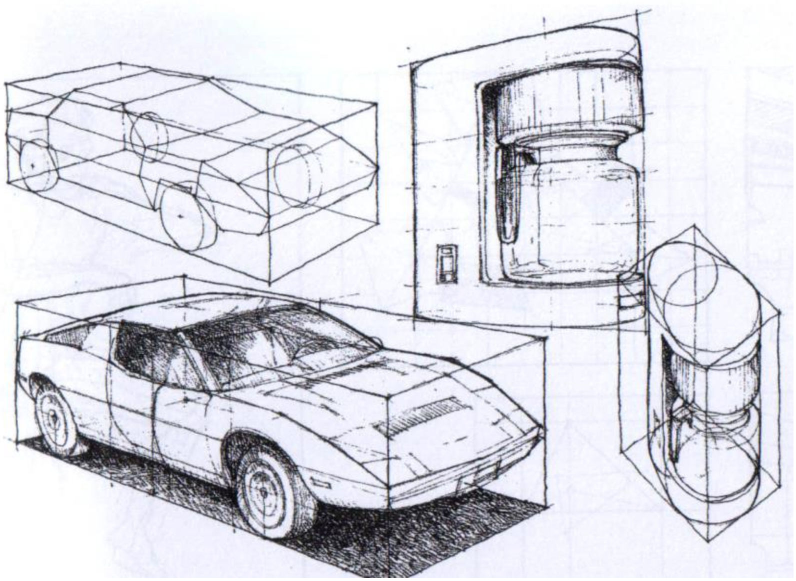
In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

O método do paralelepípedo envolvente

Tal como na axonometria, o MÉTODO DO PARALELEPÍPEDO ENVOLVENTE, também é uma estratégia eficiente para estruturar a representação de objectos em perspectiva.



In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4



In
CHING F: Drawing – a creative process. 1990. Van Nostrand Reinhold. ISBN 0-442-31818-9

Ponto de fuga e linha de fuga – noção empírica

Empiricamente, um **PONTO DE FUGA** é um ponto no desenho (ou numa fotografia) para o qual convergem as representações de uma família de rectas que, no espaço, são paralelas entre si (que partilham uma DIRECÇÃO).

Empiricamente, uma **LINHA DE FUGA** é uma recta no desenho (ou numa fotografia) que contém os pontos de fuga de uma família de direcções de rectas contidas numa ORIENTAÇÃO de planos.

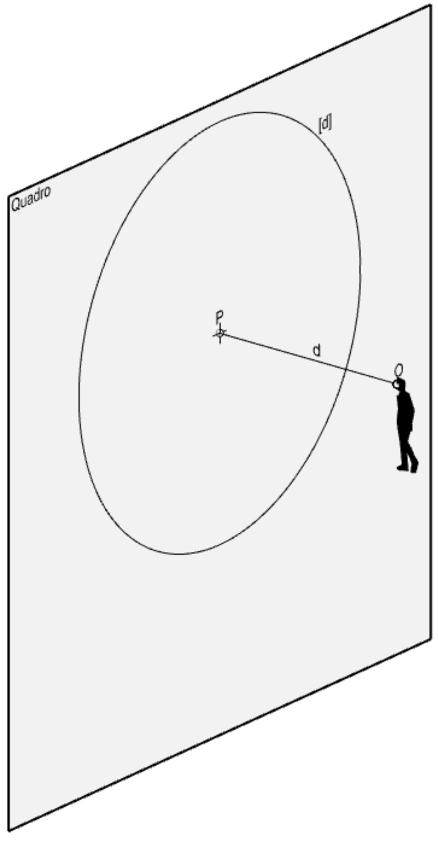
Ponto de fuga e linha de fuga – noção empírica

Empiricamente, um **PONTO DE FUGA** é um ponto no desenho (ou numa fotografia) para o qual convergem as representações de uma família de rectas que, no espaço, são paralelas entre si (que partilham uma DIRECÇÃO).

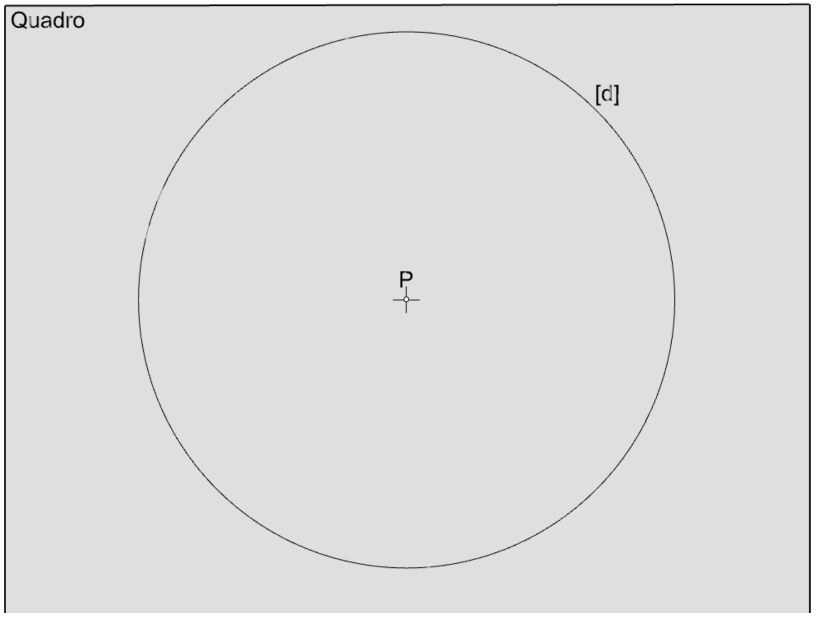
Empiricamente, uma **LINHA DE FUGA** é uma recta no desenho (ou numa fotografia) que contém os pontos de fuga de uma família de direcções de rectas contidas numa ORIENTAÇÃO de planos.

Definição do perspetógrafo mínimo

Na sua versão mais elementar o perspectógrafo é constituído por um plano de projecção, designado QUADRO, e por um centro de projecções O, designado OBSERVADOR, colocado a uma distância finita do do quadro designada por DISTÂNCIA PRINCIPAL d. À projecção ortogonal do ponto O no quadro dá-se a designação de PONTO PRINCIPAL e nota-se por P. Para notar a distância principal no quadro considera-se uma circunferência [d] designada por CIRCUNFERÊNCIA DE DISTÂNCIA cujo raio é igual à distância principal. Ao sentido OP dá-se a designação de “DIRECÇÃO” PRINCIPAL DO OLHAR. Esta direcção é sempre ortogonal ao quadro.



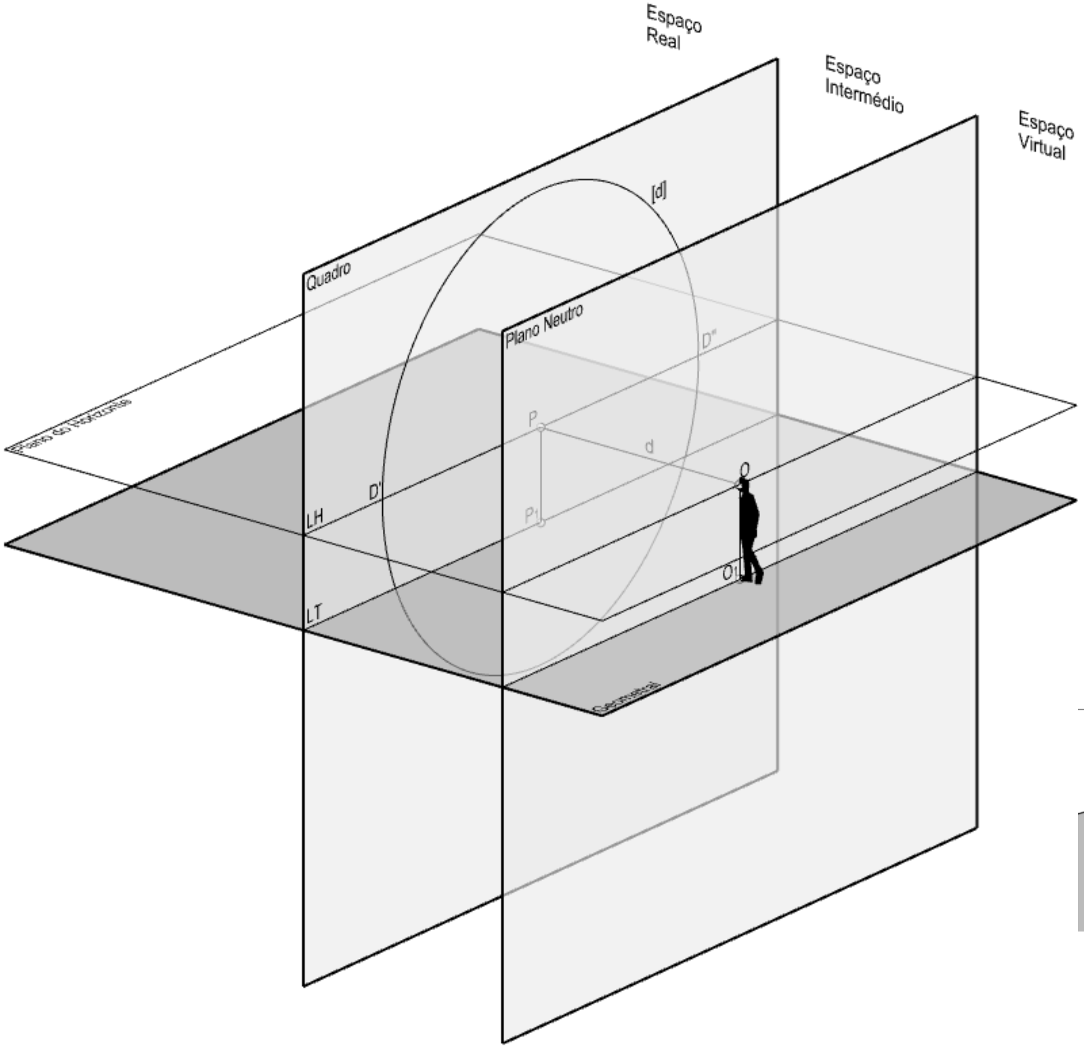
VISTA EXTERIOR DO QUADRO



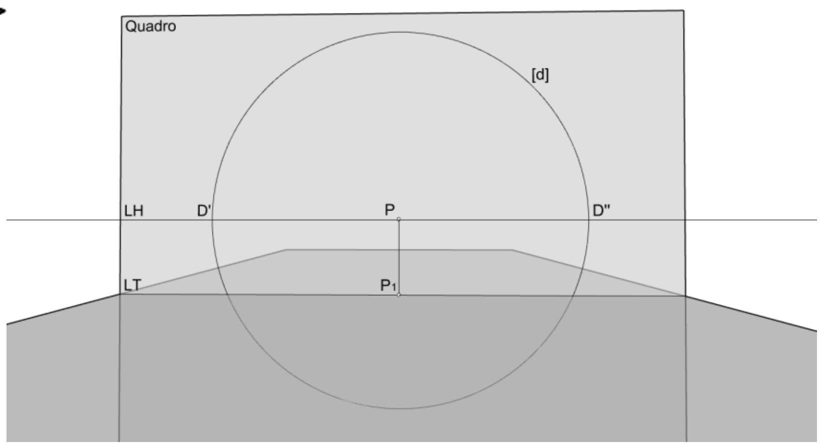
VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O

Definição do perspetógrafo completo

A esta estrutura podem acrescer o plano horizontal de referência (GEOMETRAL) e o PLANO DO HORIZONTE (plano horizontal passante pelo Observador). A distância entre estes dois planos é reflectida pela distância entre a linha de terra (LT) e a linha do horizonte (LH) e designa-se por altura do Observador – h. O plano frontal passante pelo observador designa-se PLANO NEUTRO.



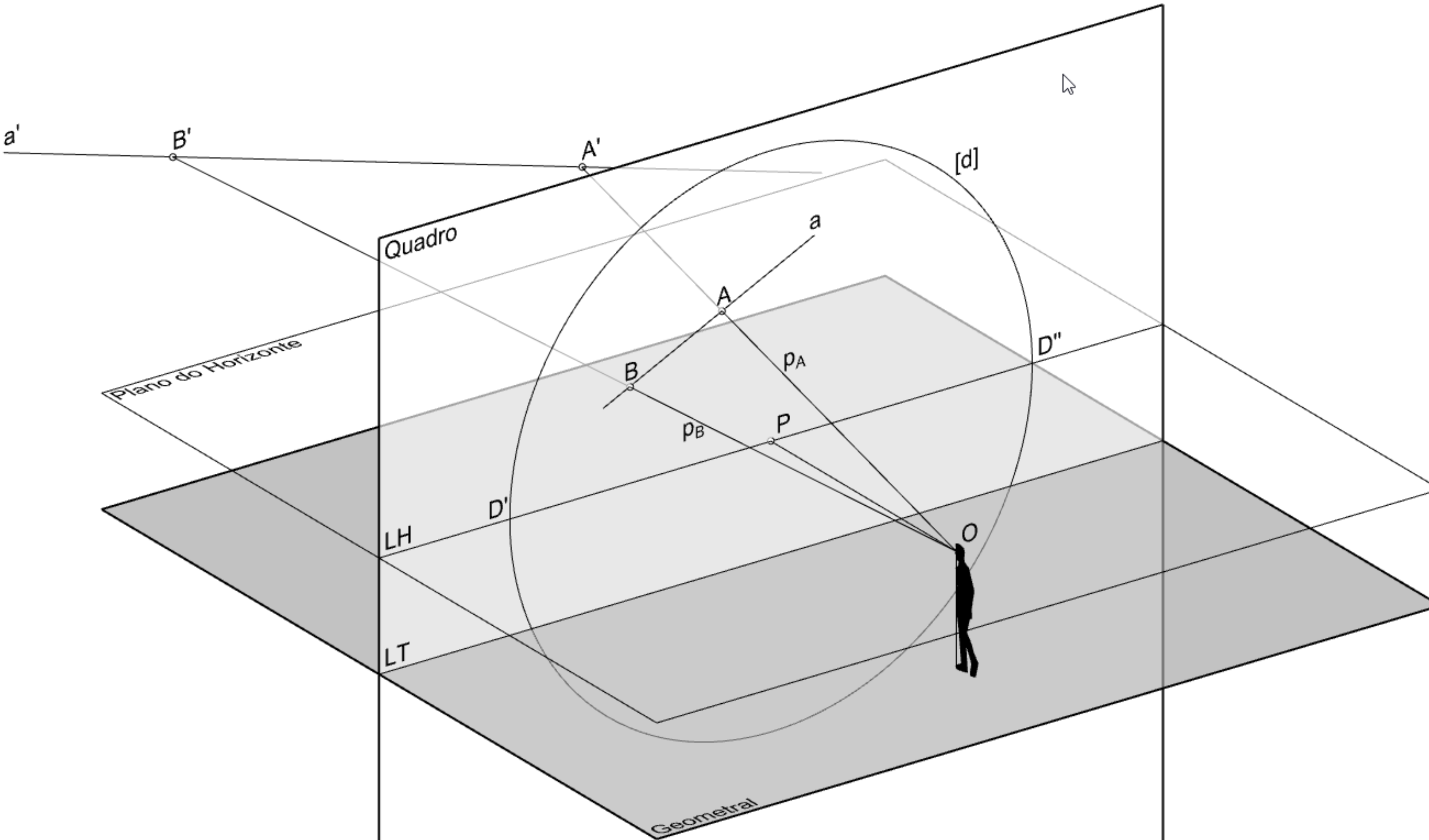
VISTA EXTERIOR DO QUADRO



VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O

Reta projetante e Plano projetante

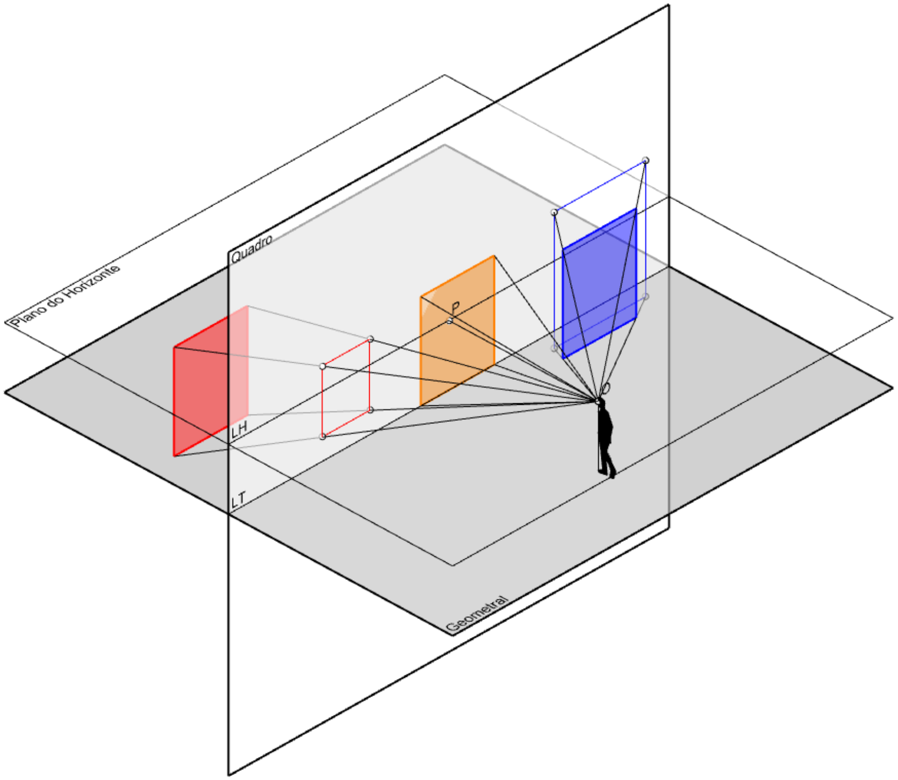
As rectas $\mathbf{p_A}$ e $\mathbf{p_B}$ são as rectas projectantes dos pontos **A’** e **B’**, respectivamente.
O plano $\mathbf{p_A.p_B}$ é o plano projectante do segmento **[A’B’]**.
A projecção central **a** da recta **a’** designa-se perspectiva da recta **a’**.



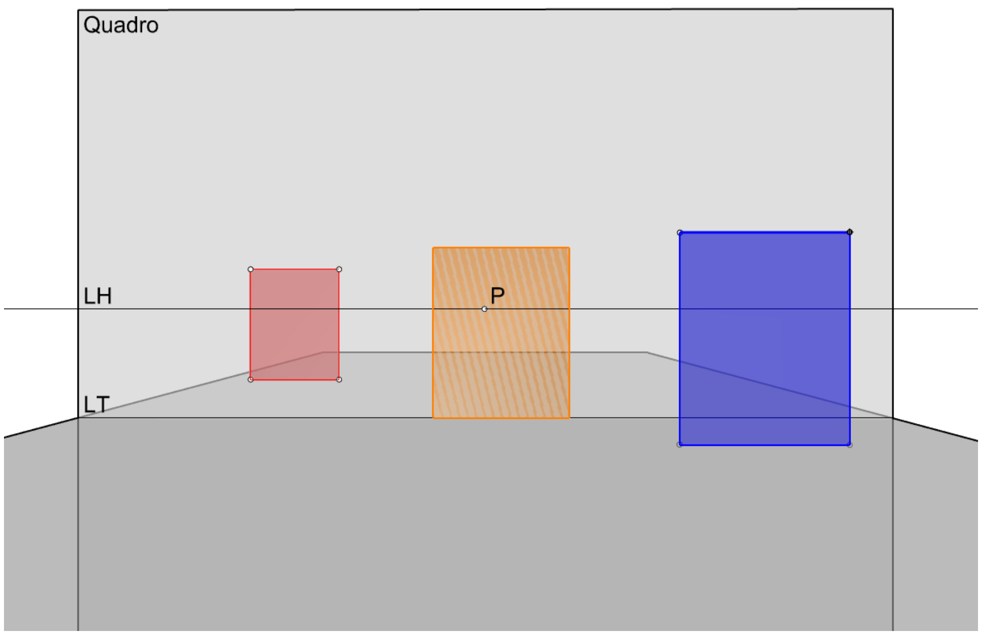
O quadro como o lugar das verdadeiras grandezas

O rectângulo vermelho encontra-se para lá do quadro (no espaço real) e por isso a sua perspectiva aparece inferior à sua verdadeira grandeza. O rectângulo azul encontra-se para cá do quadro, no espaço intermédio, por isso a sua perspectiva aparece ampliada em relação à sua verdadeira grandeza. O rectângulo laranja está contido no quadro, por isso a sua perspectiva encontra-se em verdadeira grandeza.

Neste exemplo, todos os rectângulos são frontais e têm um lado contido no Geometral.

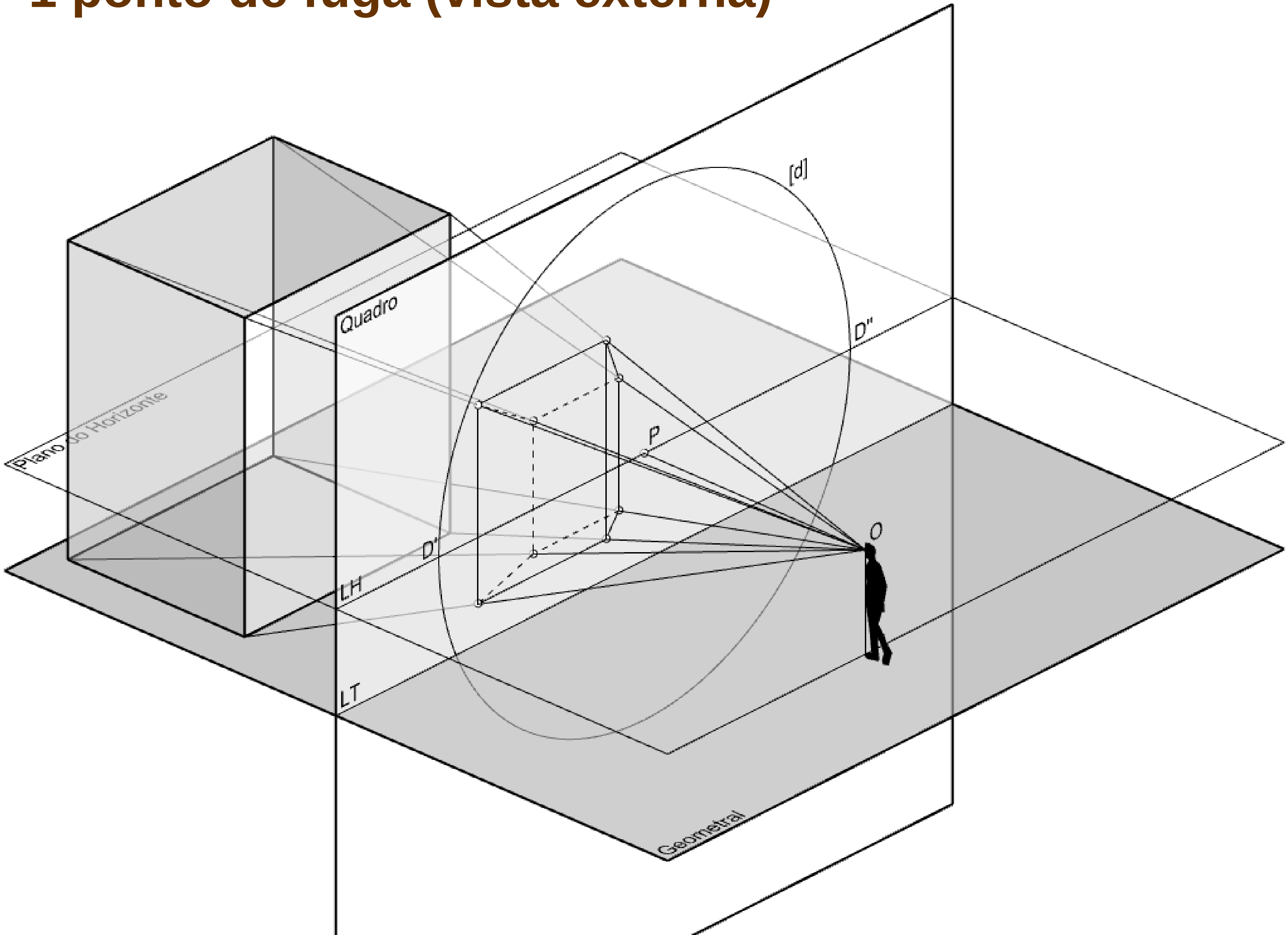


VISTA EXTERIOR DO QUADRO



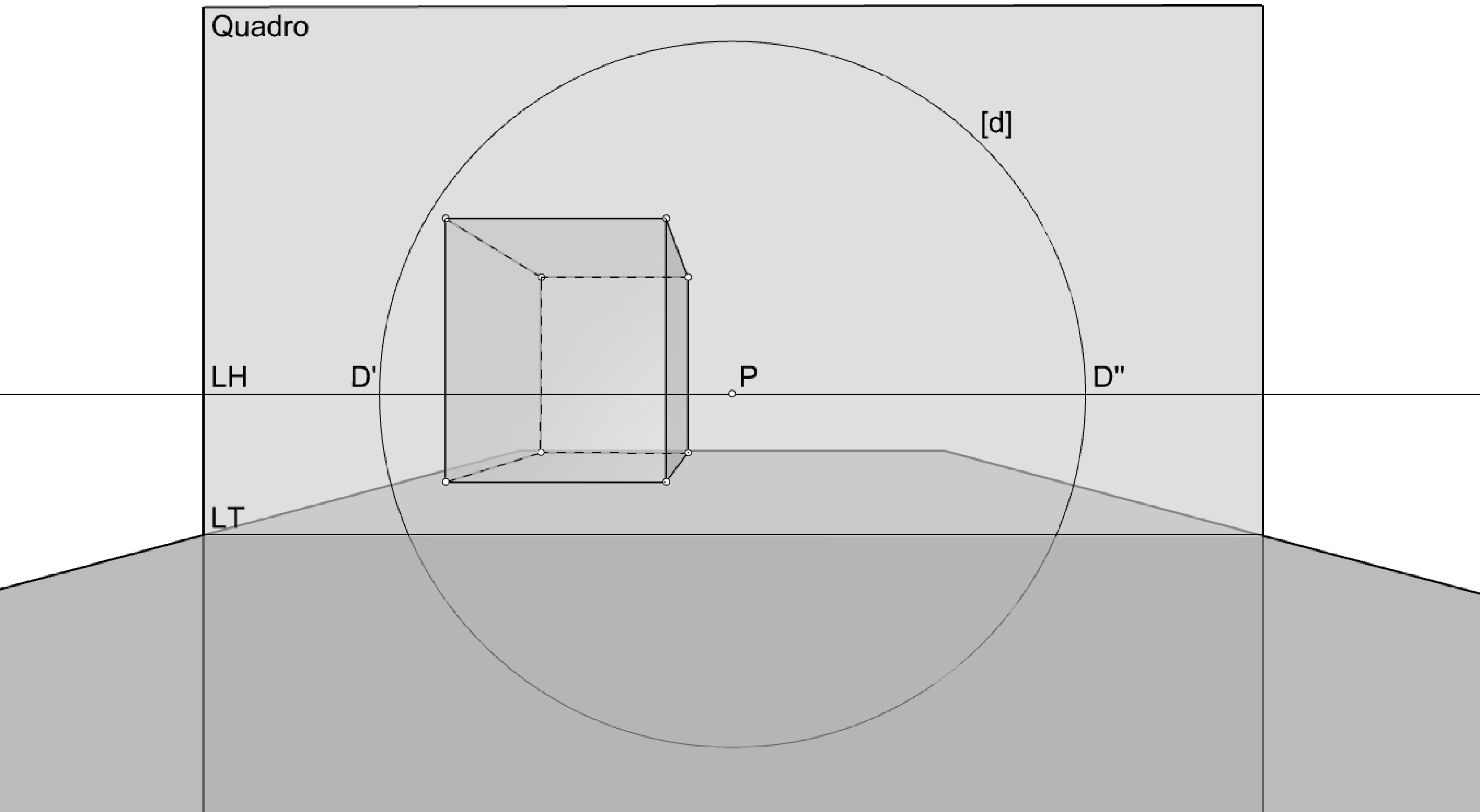
VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O

1 ponto de fuga (vista externa)

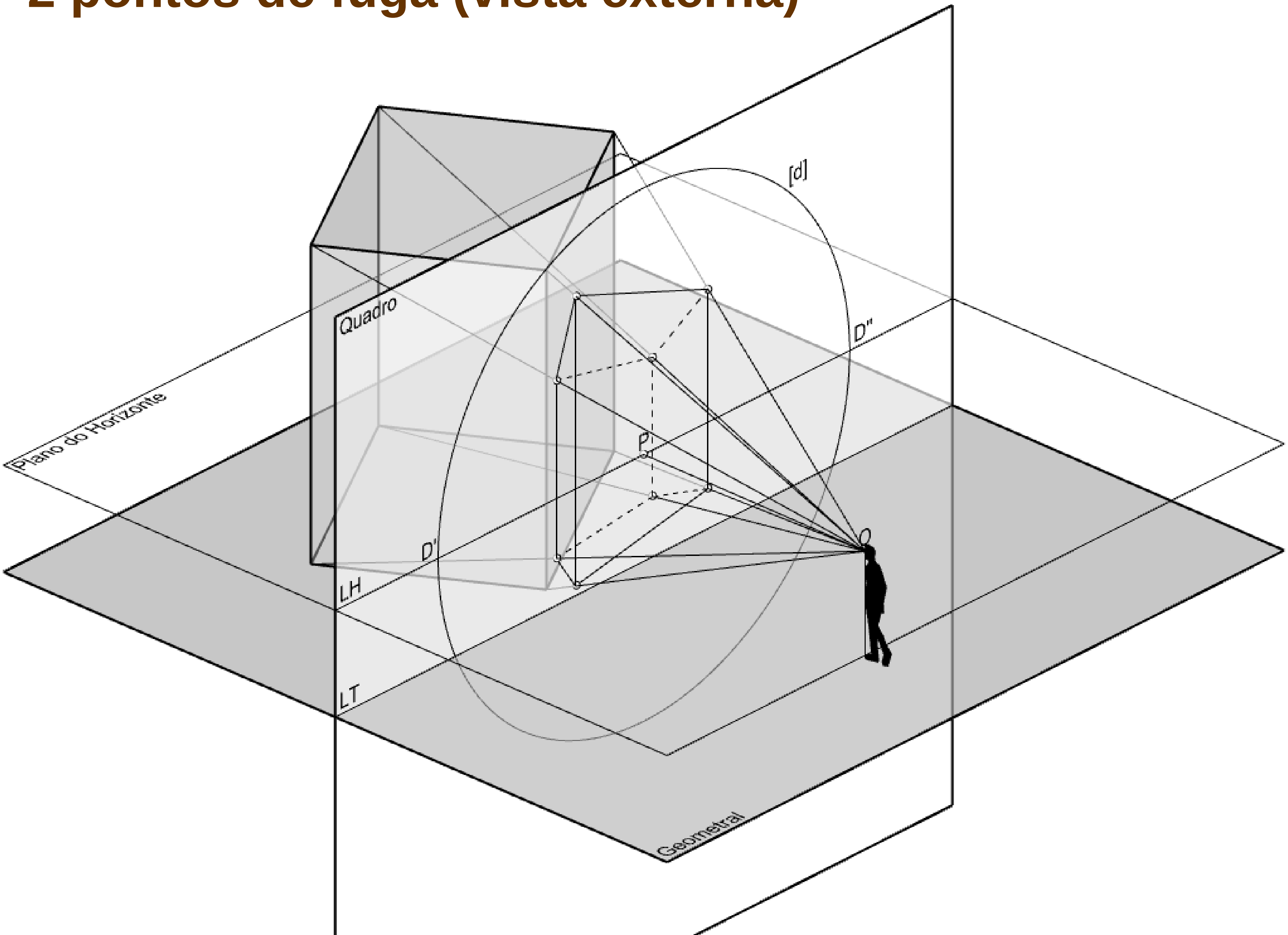


1 ponto de fuga (ponto de vista do observador)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com duas faces paralelas ao quadro, apenas as arestas ortogonais ao quadro apresentam convergência.

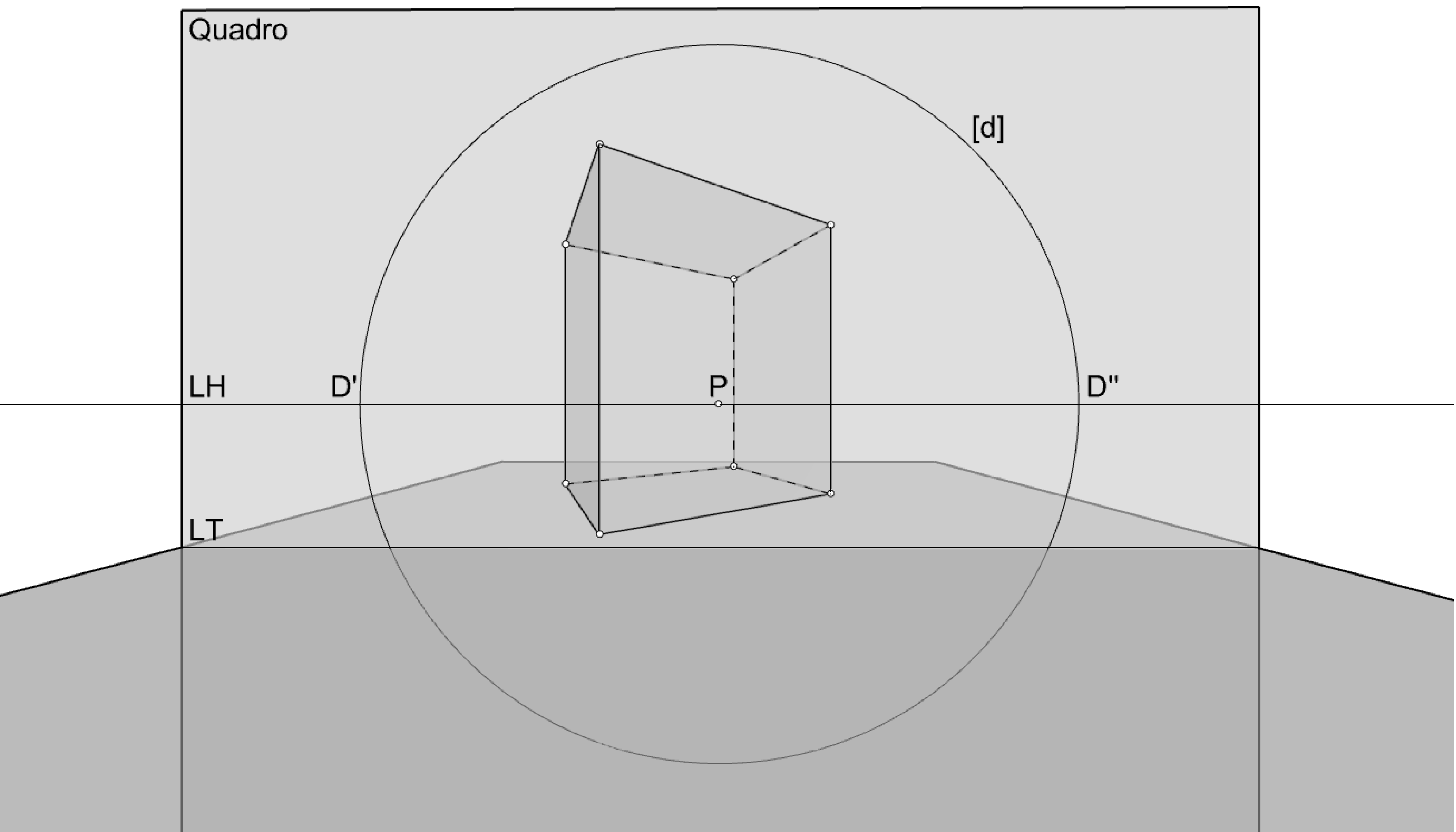


2 pontos de fuga (vista externa)

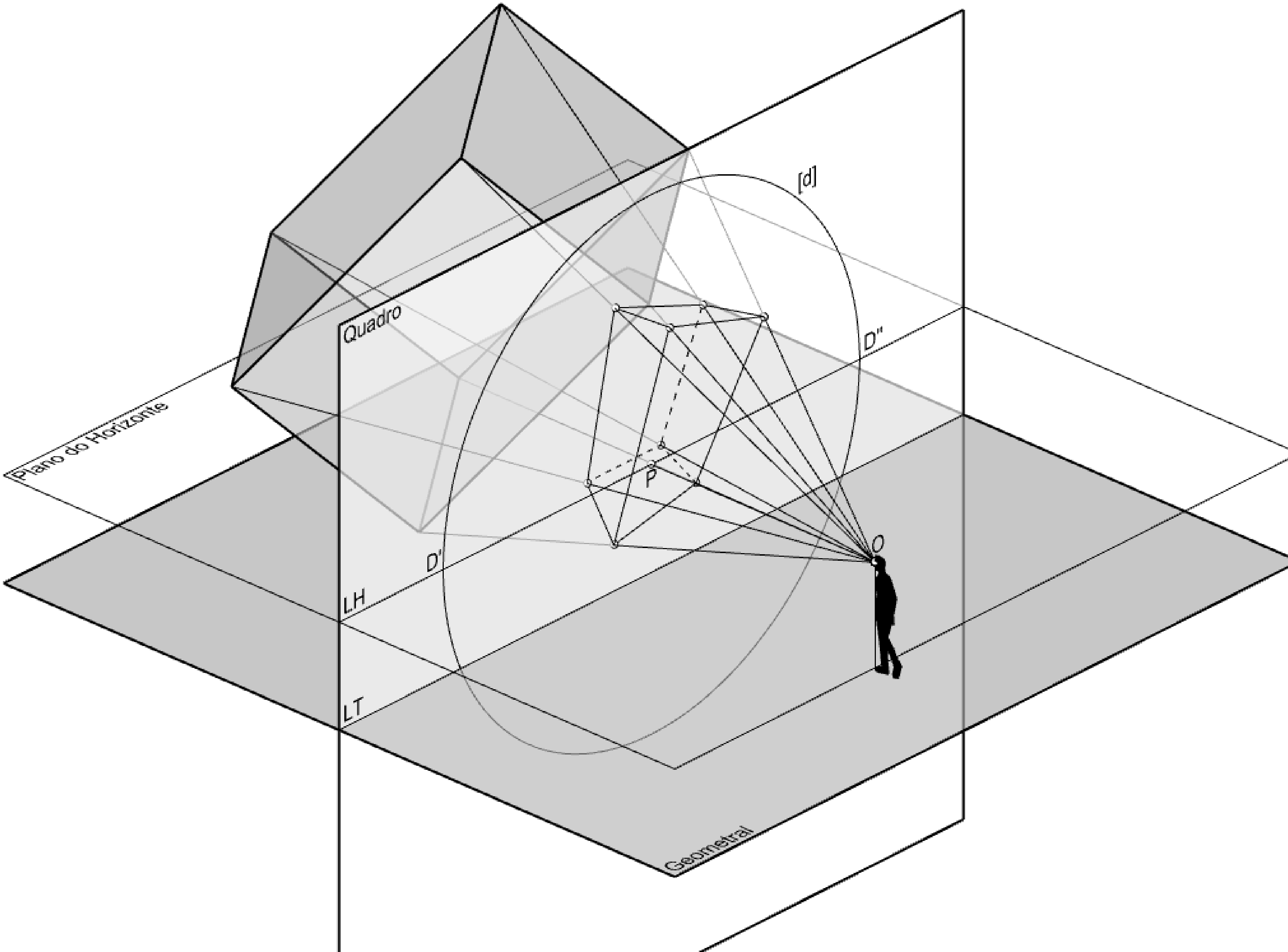


2 pontos de fuga (ponto de vista do observador)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com duas faces ortogonais ao quadro (as que são horizontais), apenas as arestas de nível apresentam convergência.

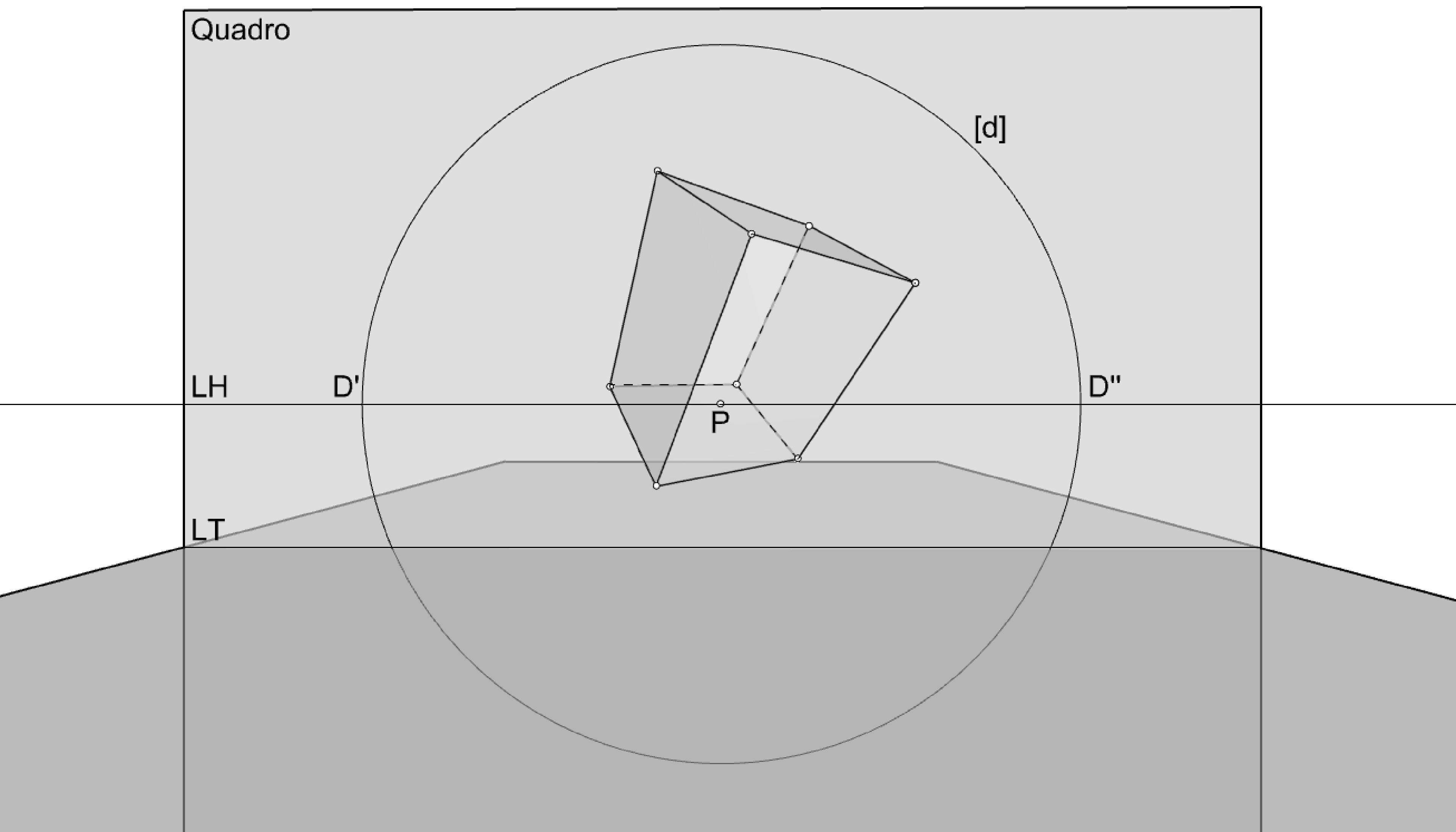


3 pontos de fuga (vista externa)



3 pontos de fuga (ponto de vista do observador)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com todas as faces e arestas oblíquas ao quadro, todas as arestas apresentam convergência.

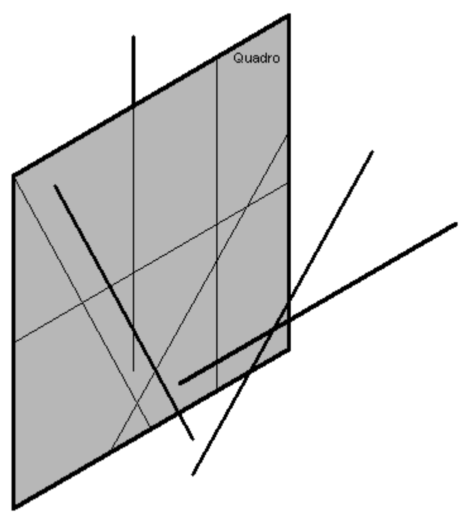


As direções das retas

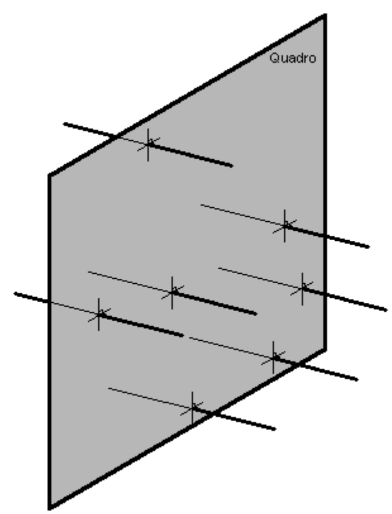
Se apenas tivermos definido o quadro, por relação a este plano podemos considerar três DIRECÇÕES DE RECTAS:

- As rectas paralelas ao quadro.
- As rectas ortogonais ao quadro.
- As rectas oblíquas ao quadro.

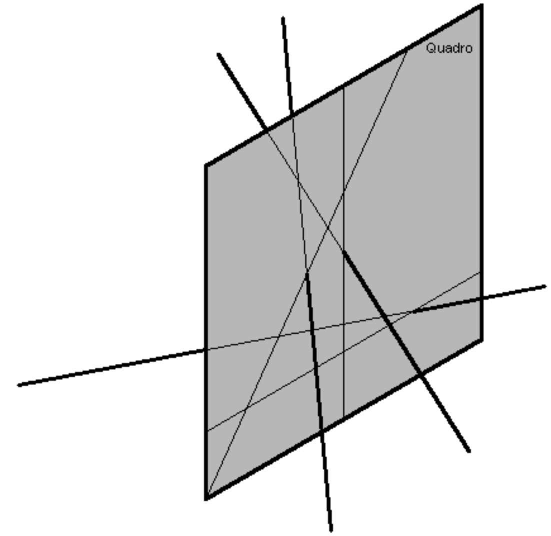
Vamos considerar que todas as rectas têm um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito.
Uma direcção de rectas partilha o mesmo ponto impróprio.



RECTAS PARALELAS AO QUADRO



RECTAS ORTOGONAIS AO QUADRO



RECTAS OBLÍQUAS AO QUADRO

Se considerarmos o perspectógrafo completo, então as direcções das rectas decompõem-se em:

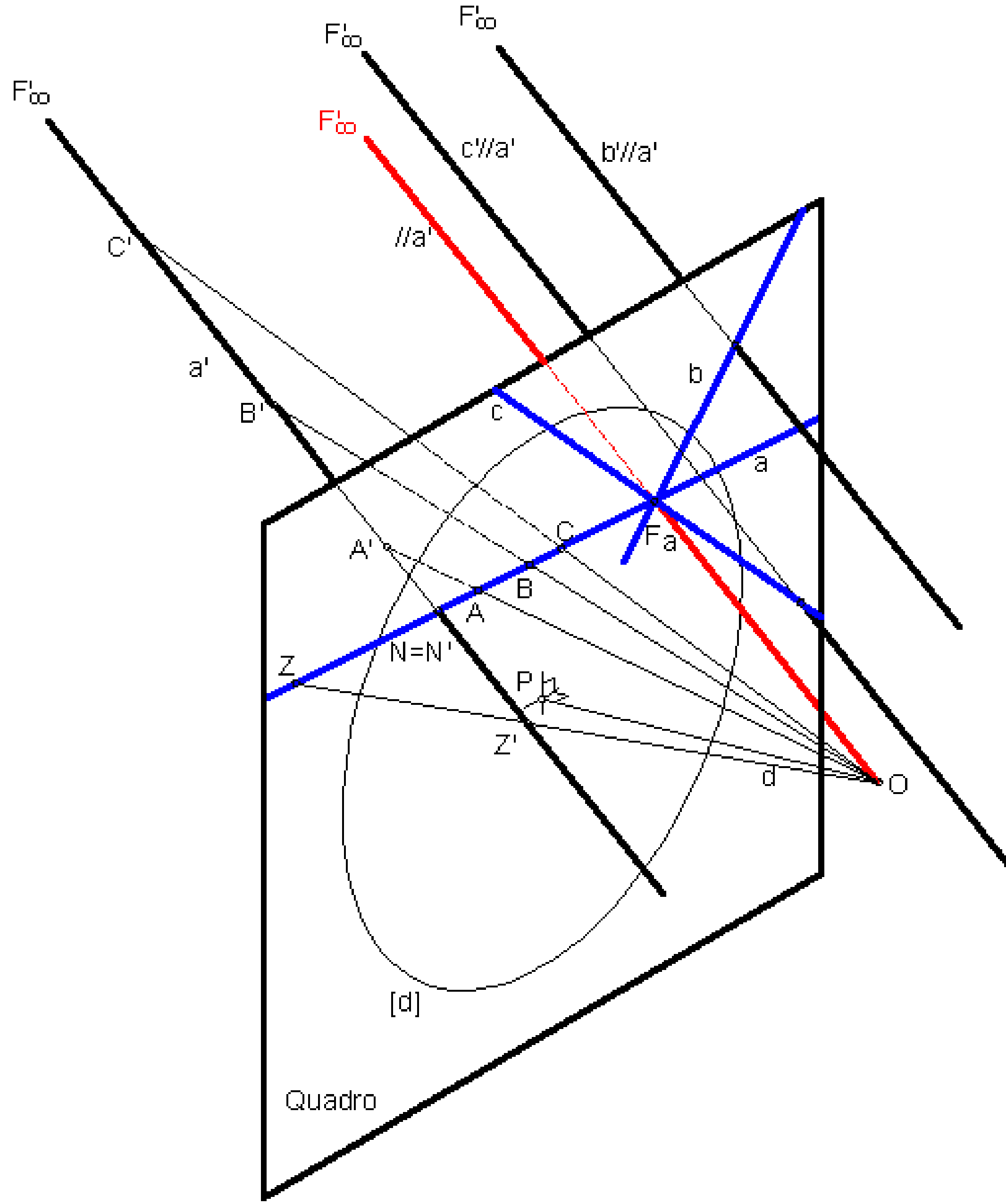
- As rectas paralelas ao quadro (verticais, frontais e fronto-horizontais).
- As rectas ortogonais ao quadro (topo).
- As rectas oblíquas ao quadro (perfil, nível e oblíquas).

Definição geométrica de ponto de fuga

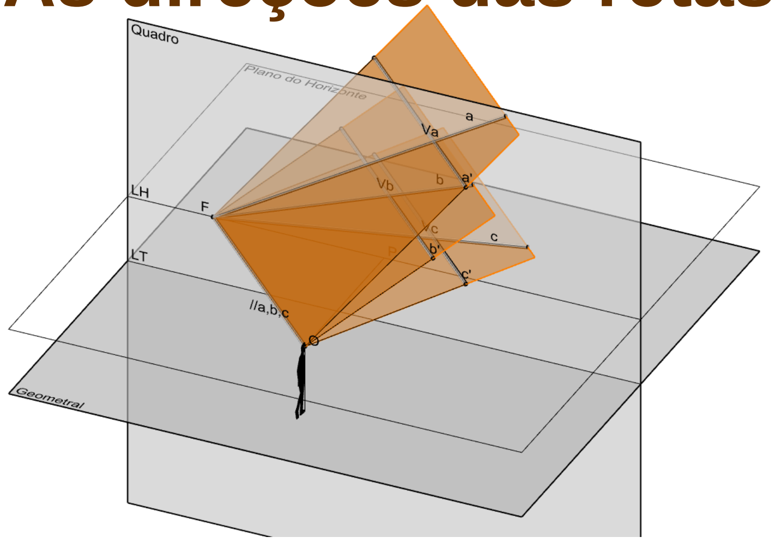
As rectas passantes pelo observador designam-se RECTAS PROJECTANTES.
A perspectiva de uma recta projectante reduz-se a um ponto.

Um PONTO DE FUGA de uma direcção **a** dada de rectas é a projecção cónica do ponto impróprio **F∞** dessa direcção. Dito de outro modo,
é o traço da recta projectante ***//a’***, com a direcção dada, no quadro.

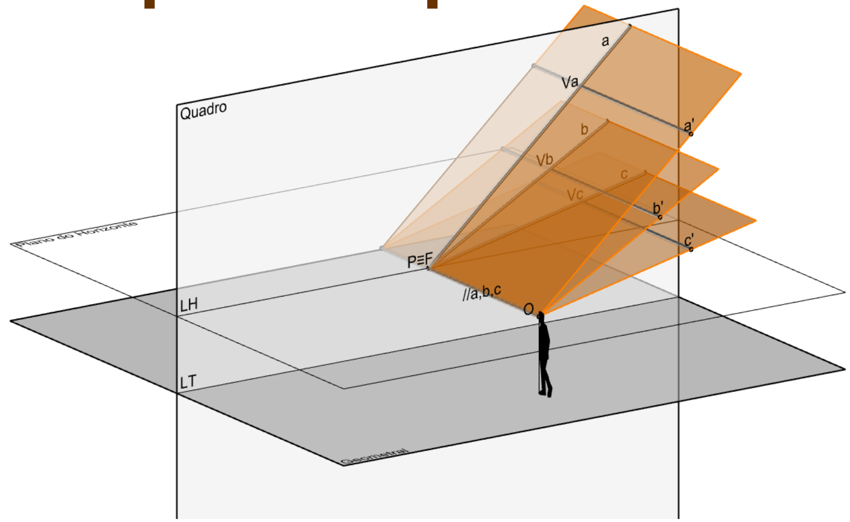
Note que os planos projectantes de uma família de rectas paralelas entre si têm em comum a recta projectante com aquela direcção, por cujo traço no quadro (PONTO DE FUGA) passam os traços dos seus planos projectantes (perspectivas das rectas).



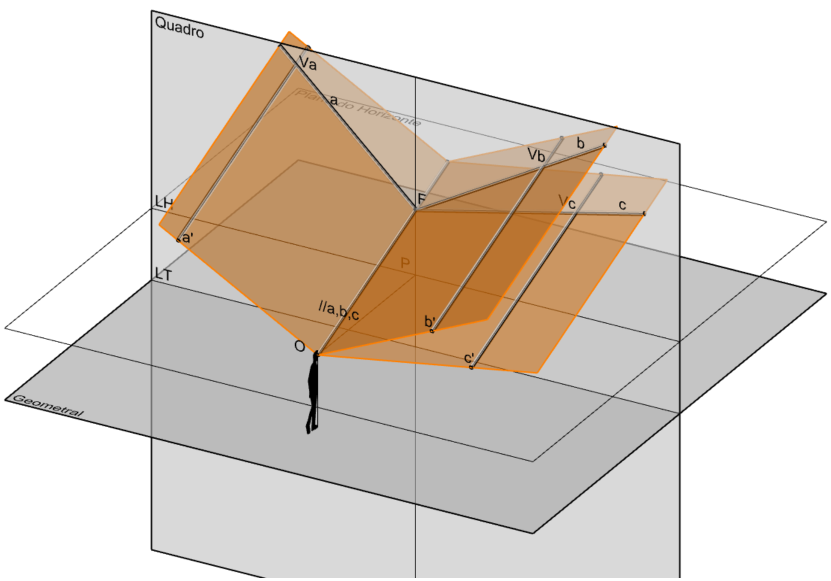
As direções das retas e respetivos pontos de fuga



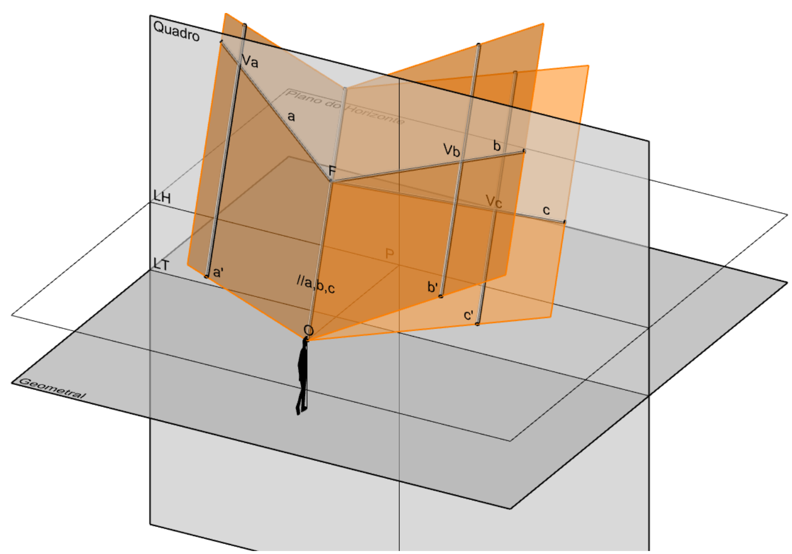
Rectas de Nível
(Pontos de fuga na LH)



Rectas de Topo
(Ponto de fuga em P)

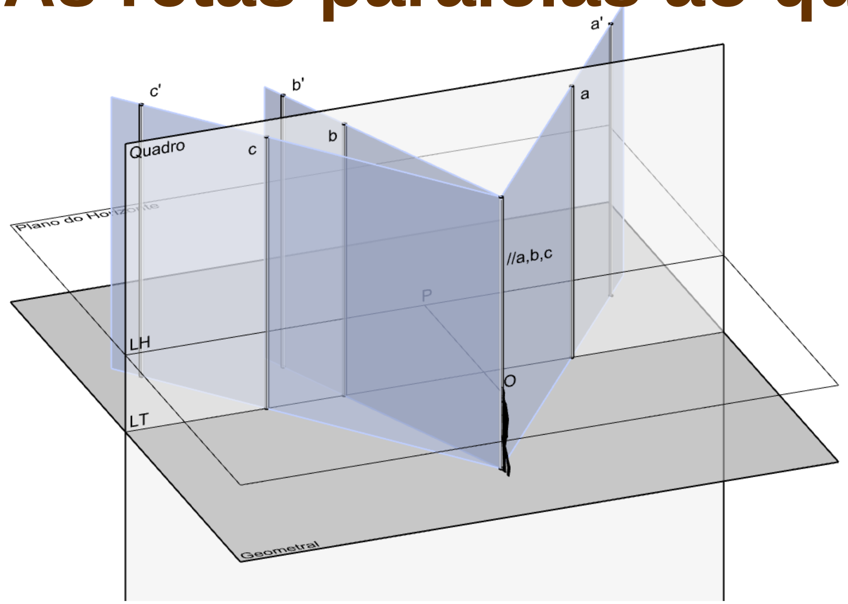


Rectas de Perfil
(Pontos de fuga na vertical passante por P)

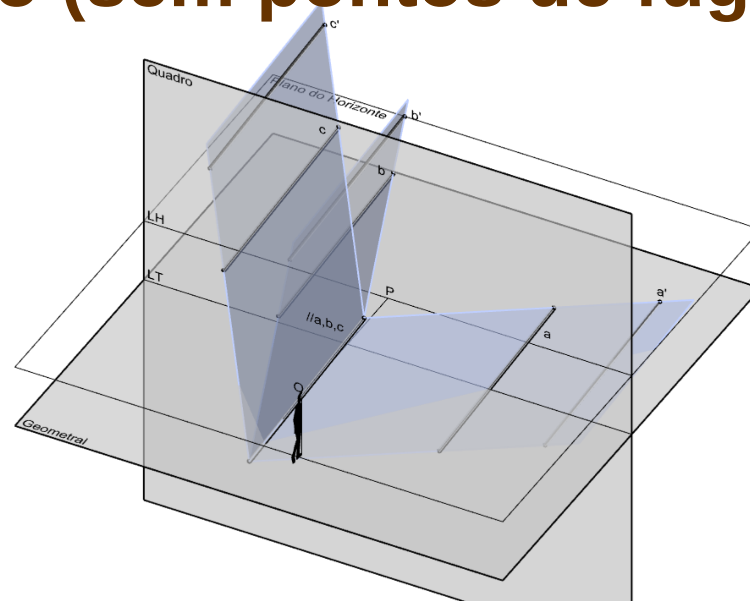


Rectas oblíquas
(Pontos de fuga exteriores à vertical passante por P e à LH)

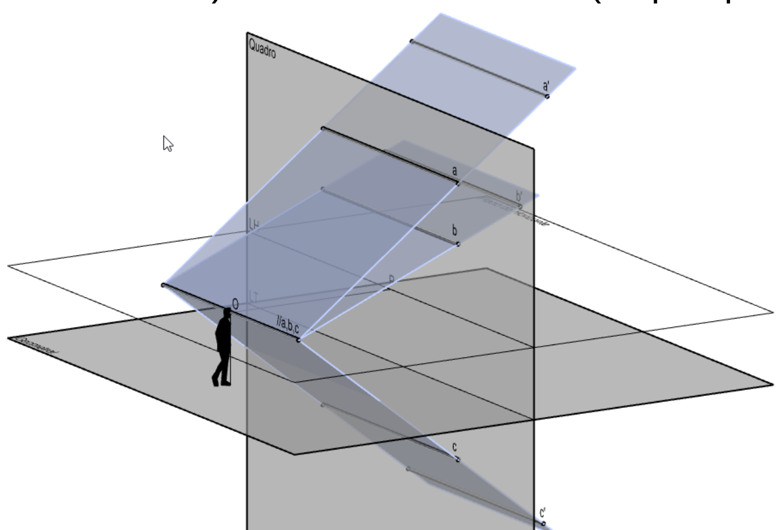
As retas paralelas ao quadro (sem pontos de fuga)



Rectas Verticais
(as perspectivas são verticais)



Rectas fontais
(as perspectivas têm a mesma direcção)



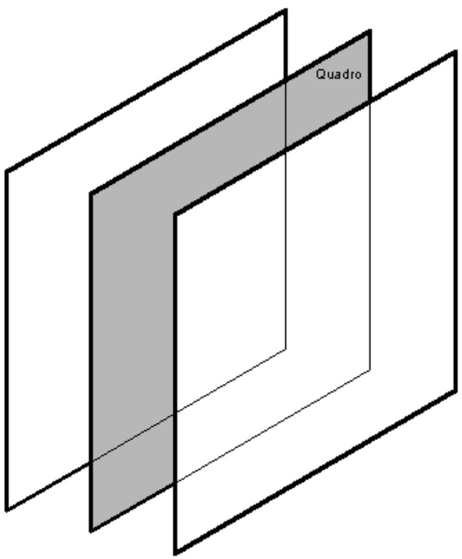
Rectas fronto-horizontais
(as perspectivas são fronto-horizontais)

As orientações dos planos

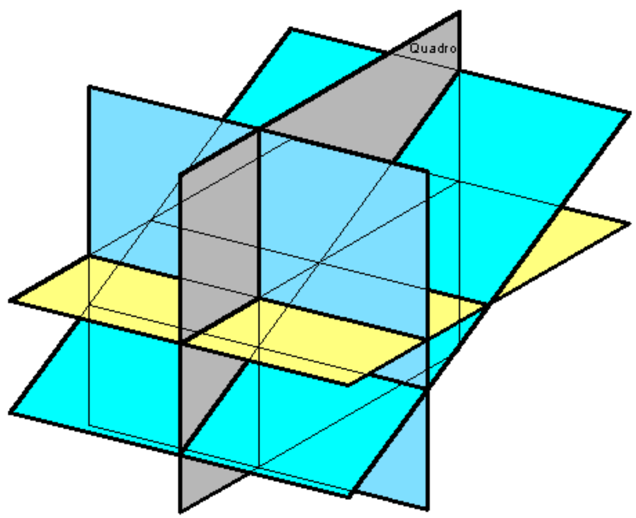
Se apenas tivermos definido o quadro, por relação a este plano podemos considerar três ORIENTAÇÕES DE PLANOS:

- Os planos paralelos ao quadro.
- Os planos ortogonais ao quadro.
- Os planos oblíquos ao quadro.

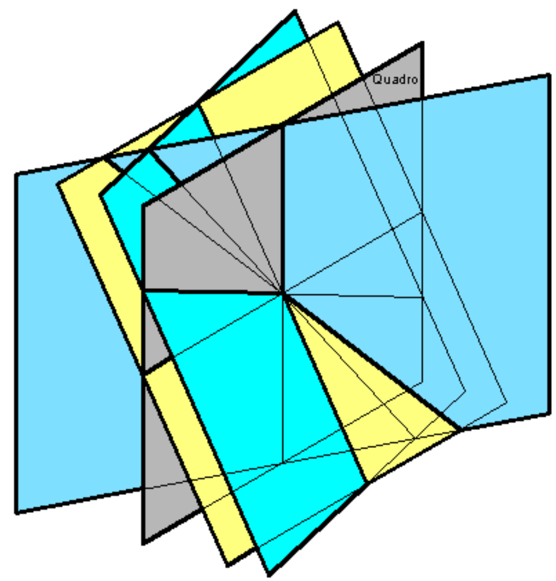
Vamos considerar que todos os planos têm uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito. Uma orientação de planos partilha a mesma recta imprópria.



PLANOS PARALELOS AO QUADRO



PLANOS ORTOGONAIS AO QUADRO



PLANOS OBLÍQUOS AO QUADRO

Se considerarmos o perspectógrafo completo, então as orientações de planos decompõem-se em:

- Os planos paralelos ao quadro (frontais).
- Os planos ortogonais ao quadro (perfil, topo e nível).
- Os planos oblíquos ao quadro (rampa, verticais e oblíquos).

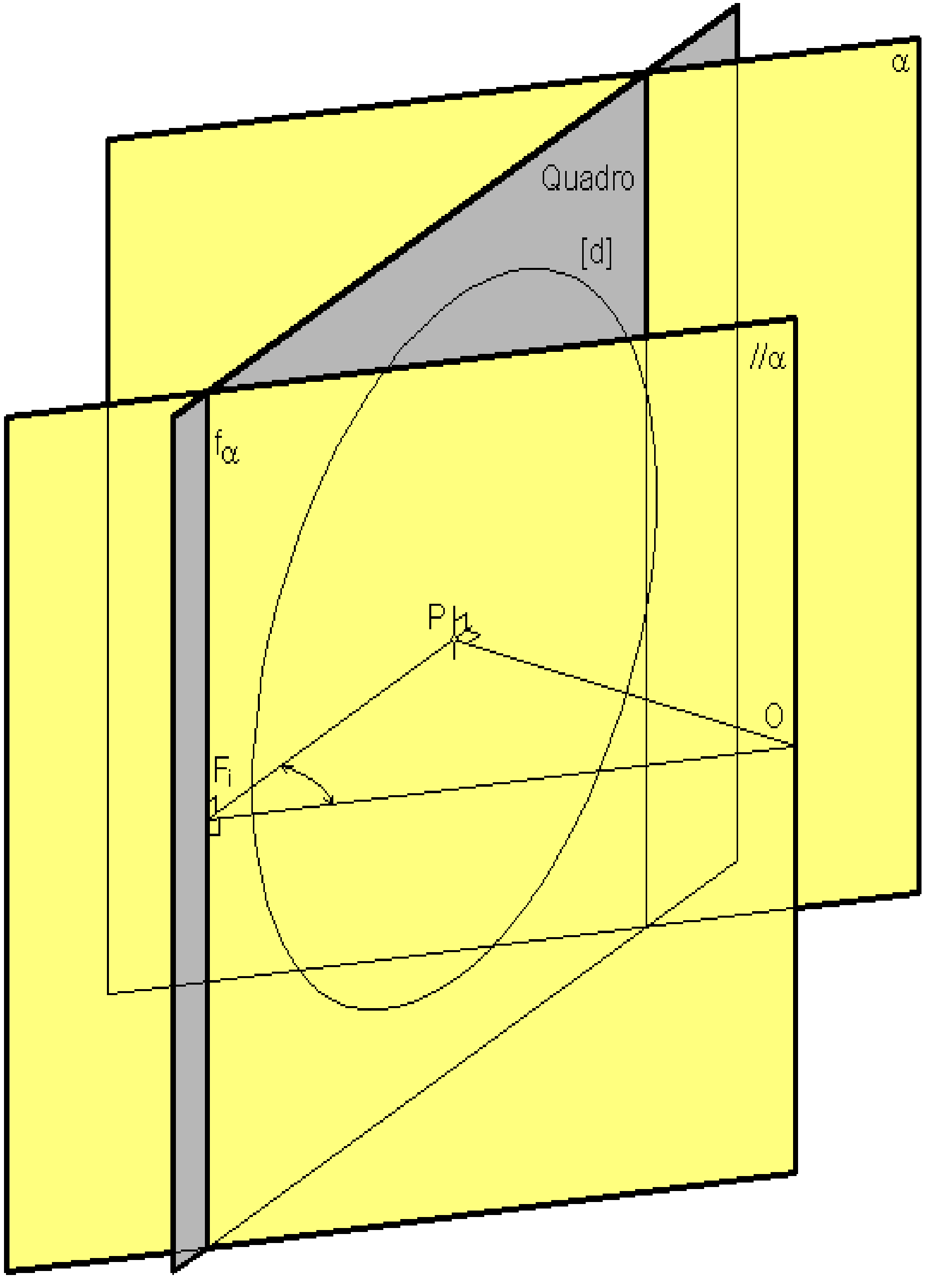
Definição geométrica de linha de fuga

Os planos passantes pelo observador designam-se PLANOS PROJECTANTES.

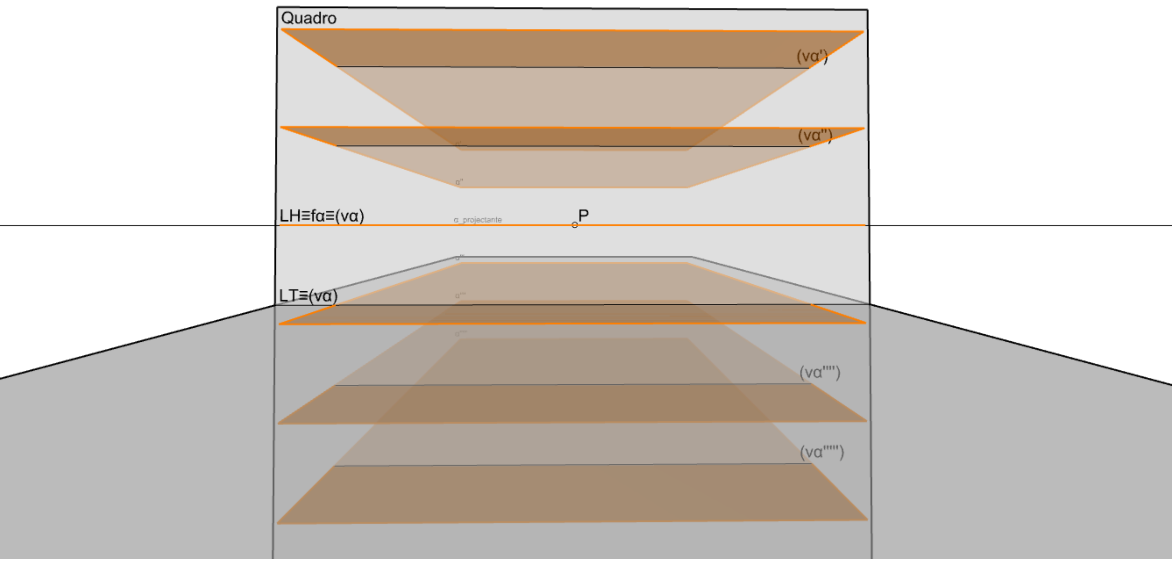
A perspectiva de um plano projectante reduz-se a uma recta.

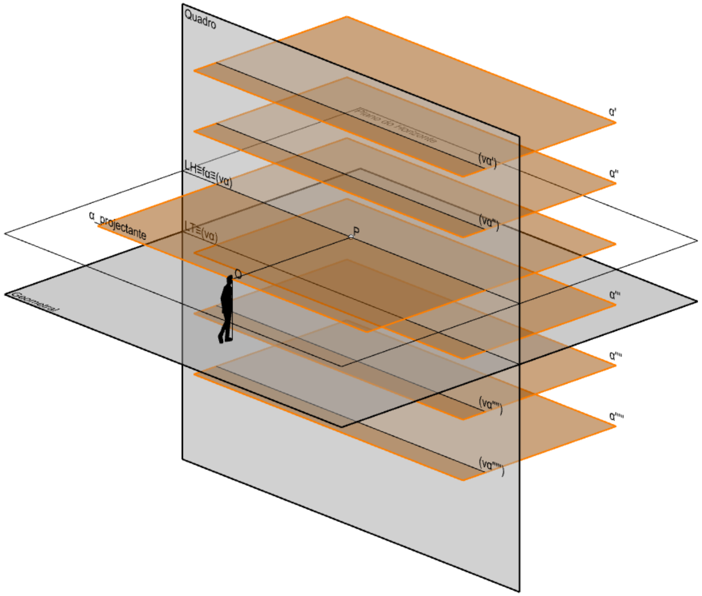
Uma LINHA DE FUGA de uma orientação de planos é a projecção cónica da recta imprópria dessa orientação.

Conhecida a orientação, a linha de fuga é o traço no quadro do plano projectante com a orientação conhecida.

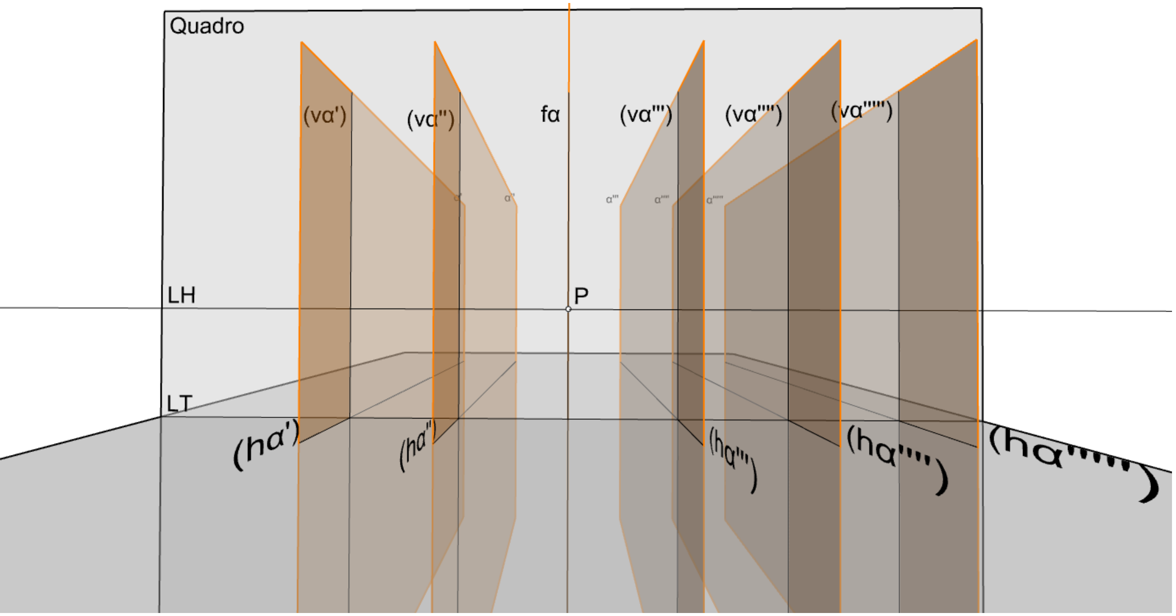


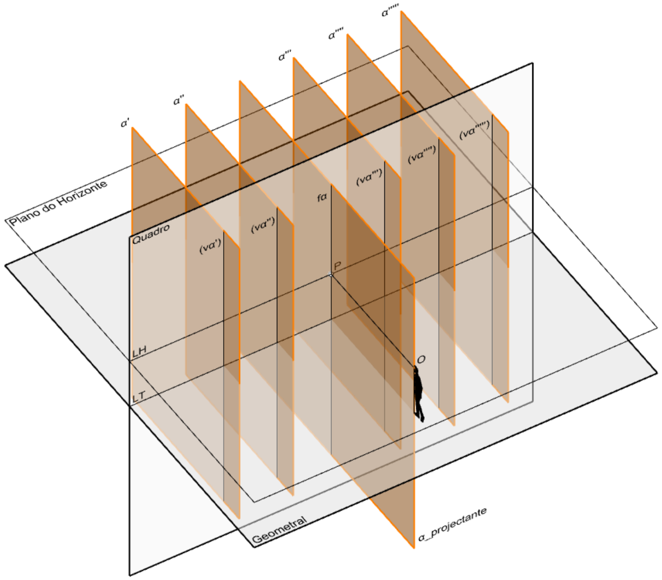
As orientações dos planos e linhas de fuga





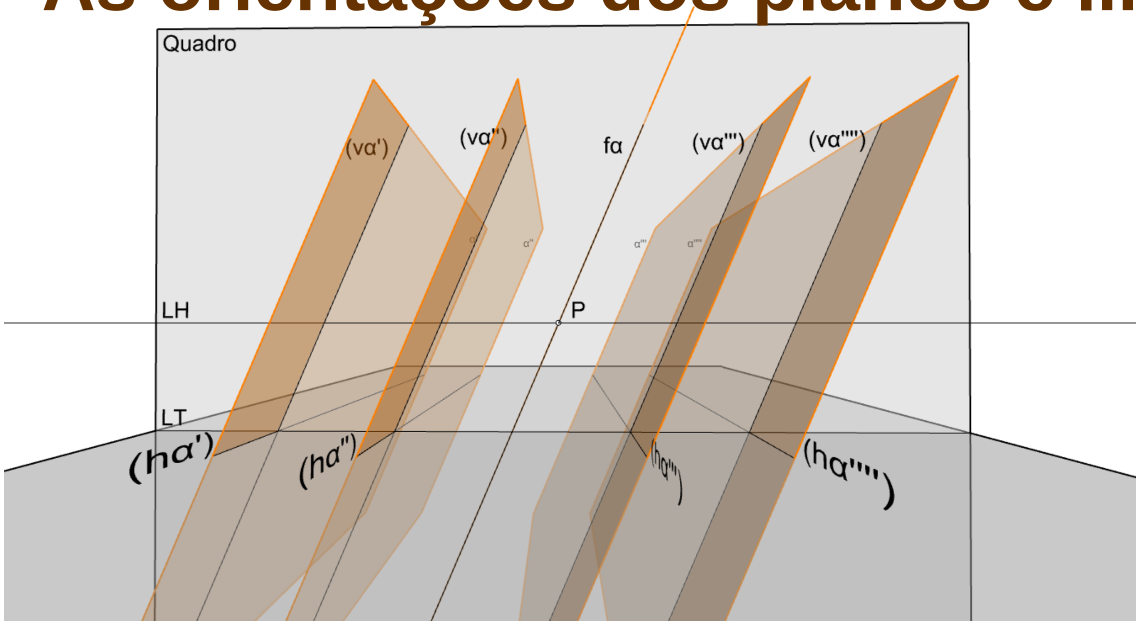
Planos de nível (a linha de fuga coincide com a linha do horizonte)

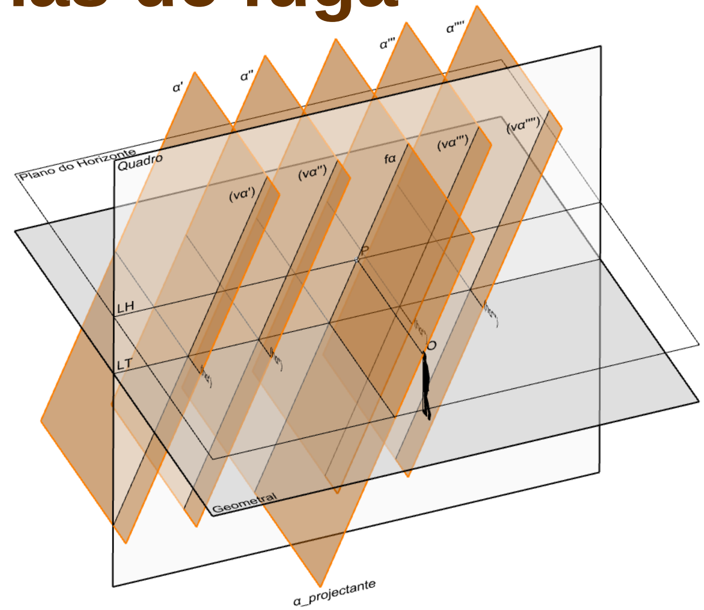




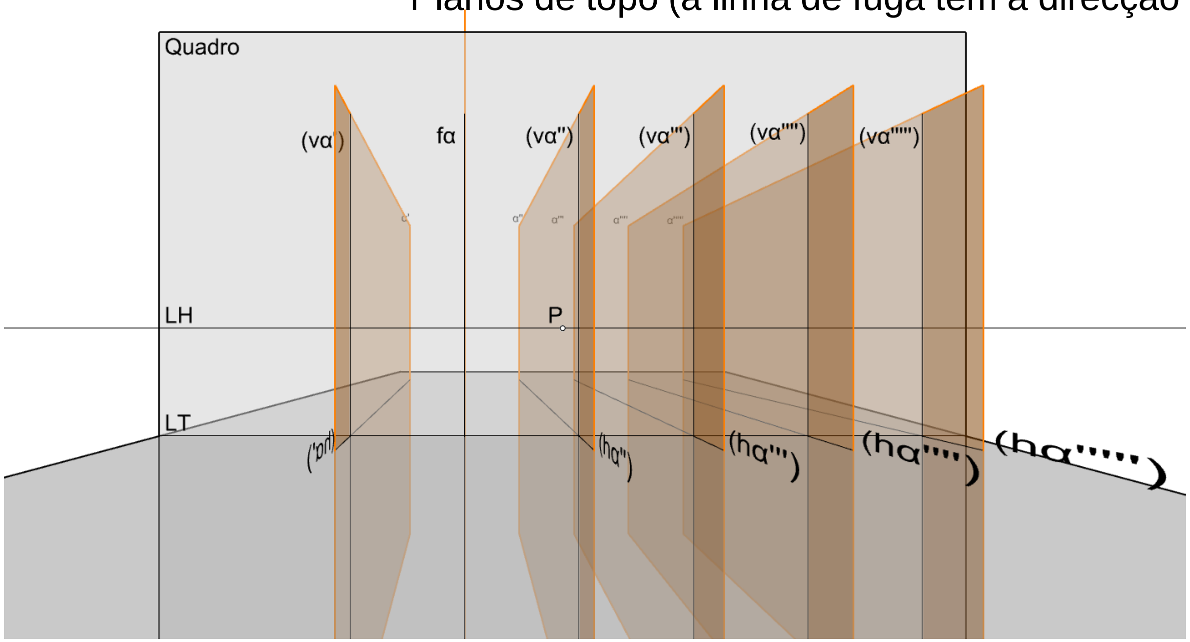
Planos de perfil (a linha de fuga coincide com a vertical passante pelo ponto P)

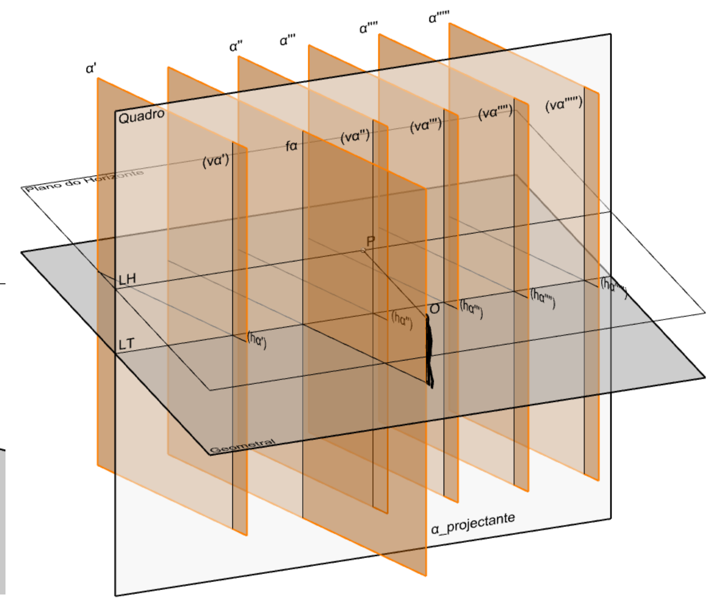
As orientações dos planos e linhas de fuga





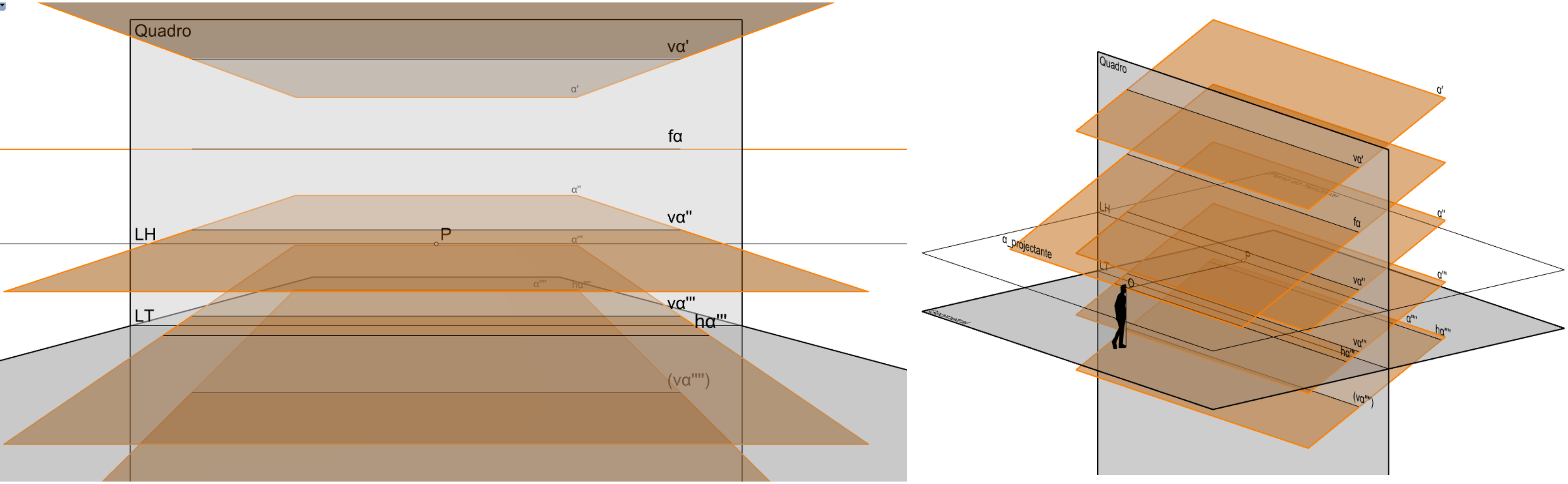
Planos de topo (a linha de fuga têm a direcção frontal do plano)



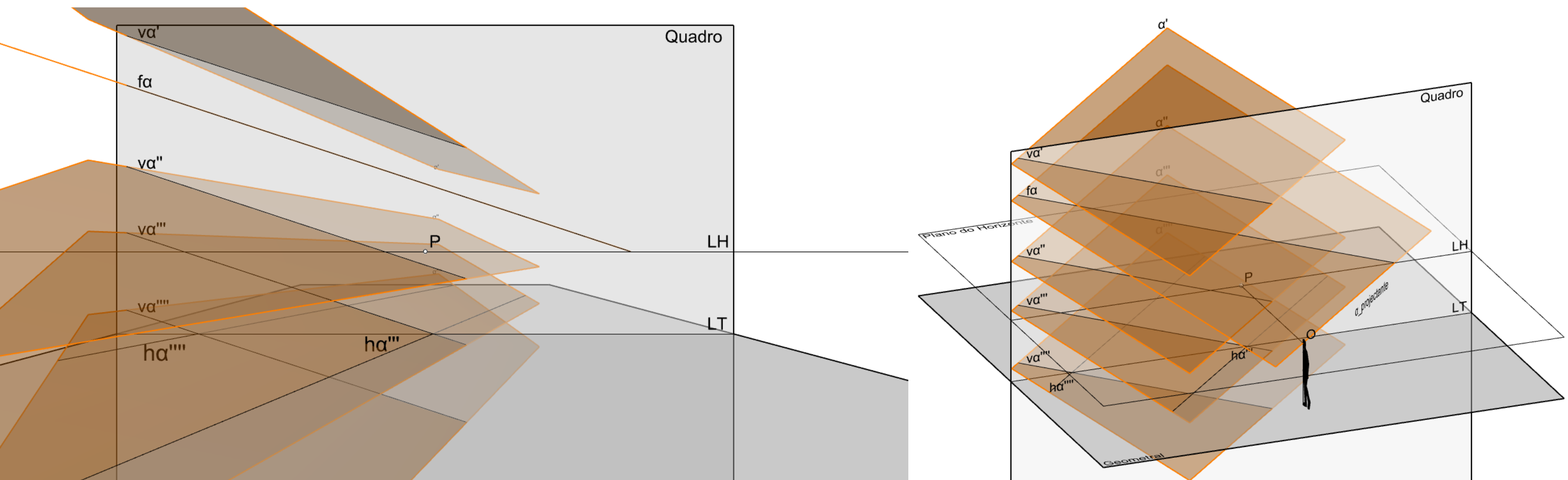


Planos verticais (a linha de fuga é vertical à direita ou esquerda da vertical passante por P)

As orientações dos planos e linhas de fuga

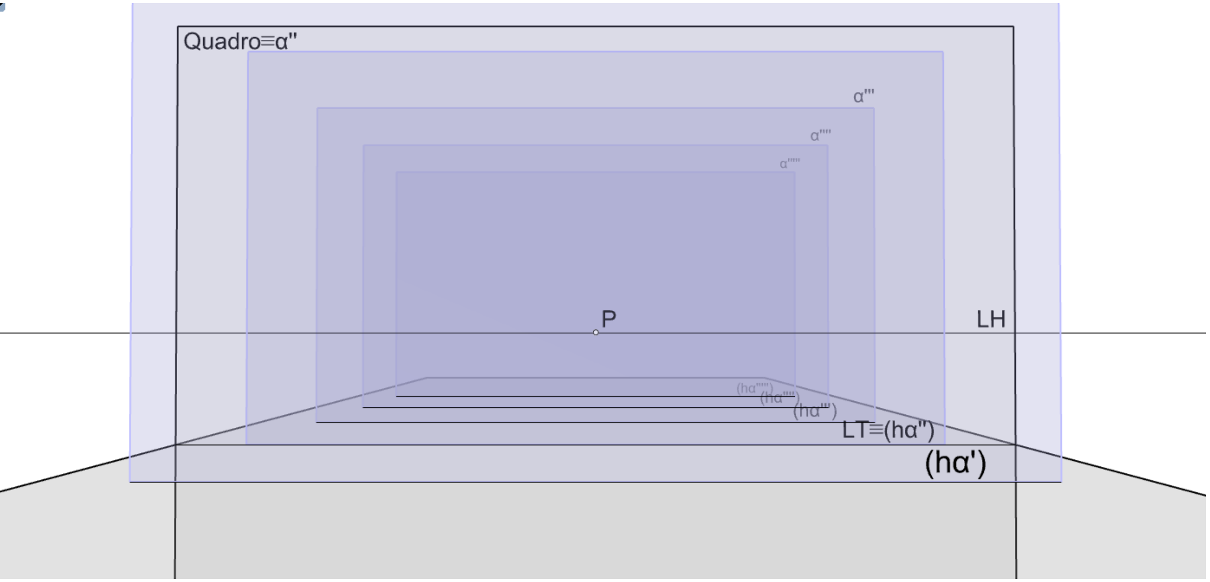


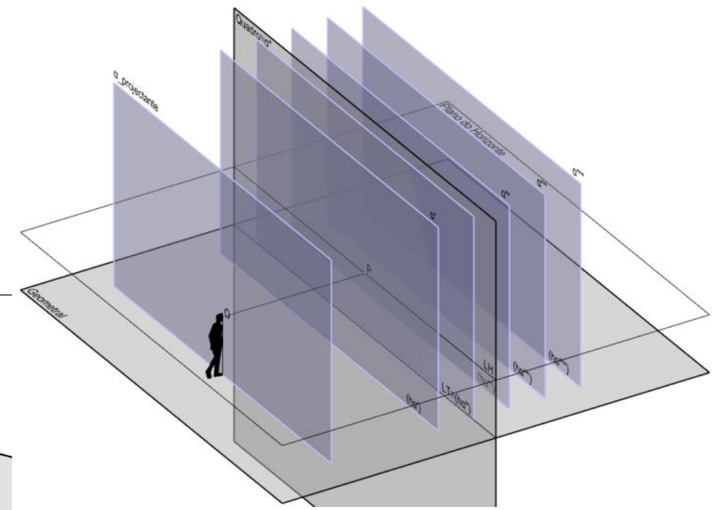
Planos de rampa (a linha de fuga é fronto-horizontal acima ou abaixo da LH)



Planos oblíquos (a linha de fuga é frontal não passante por passante por P)

Planos paralelos ao quadro (sem linha de fuga)





Planos frontais (não têm linha de fuga)

Sendo a linha de fuga, de uma dada orientação de planos, obtida pelo traço frontal do plano projectante com essa dada orientação, é fácil concluir que o traço frontal de qualquer plano, com a orientação dada, será paralelo àquela linha de fuga.

Deve resultar evidente que os pontos de fuga de direcções contidas numa orientação de planos estão contidos na linha de fuga relativa a essa orientação.

Os planos frontais não têm linha de fuga pela razão óbvia que o plano frontal projectante (o plano neutro) não intersecta o quadro (é paralelo ao quadro).

As direções e as orientações

Pontos de fuga situados acima da Linha do Horizonte dizem-se de direcções ASCENDENTES.
Pontos de fuga situados abaixo da Linha do Horizonte dizem-se de direcções DESCENDENTES.

Pontos de fuga situados à direita do ponto P correspondem a direcções COM ABERTURA PARA A DIREITA relativamente ao quadro.
Pontos de fuga situados à esquerda do ponto P correspondem a direcções COM ABERTURA PARA A ESQUERDA relativamente ao quadro.

Fica o plano do quadro dividido em 4 quadrantes definidos pela Linha do Horizonte e pela vertical passante pelo ponto P. Cada quadrante corresponde a uma combinação possível entre ASCENDENTE ou DESCENDENTE e COM ABERTURA PARA A DIREITA ou COM ABERTURA PARA A ESQUERDA.

Deste modo as direcções das rectas podem ser inequivocamente definidas.

As orientações assumem a caracterização da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO (direcção ortogonal à direcção frontal do plano). Por exemplo, se a direcção de maior inclinação for ascendente com abertura para a direita, também o é a orientação.

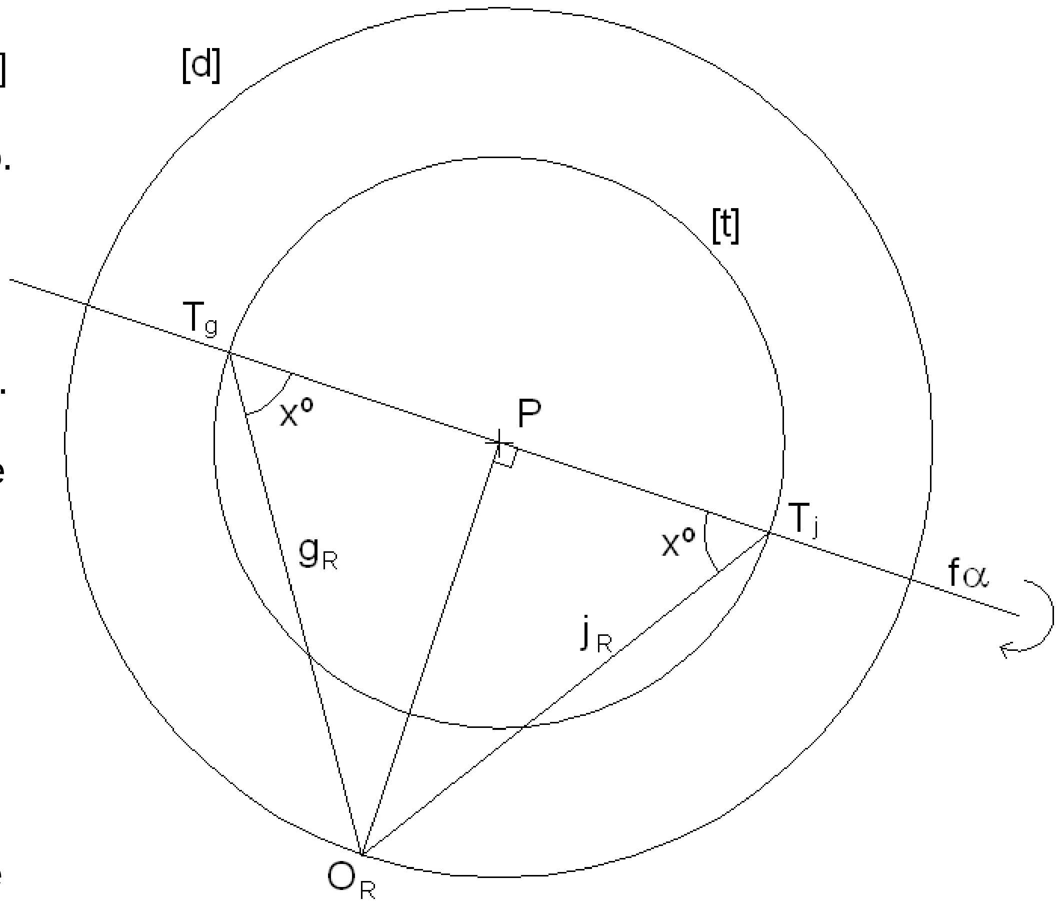
O lugar geométrico dos pontos de fuga

O lugar geométrico dos pontos de fuga das direcções de rectas a 45º com o quadro é a circunferência de distância inteira [d].

O lugar geométrico dos pontos de fuga das direcções de rectas a xº com o quadro é o traço [t] (no quadro), de uma superfície cónica de revolução cujas geratrizes fazem xº com o quadro. Para determinar esse traço (de forma circunferencial) é necessário rebater um plano (α) projectante, qualquer, ortogonal ao quadro. Esse plano intersecta a referida superfície cónica segundo duas geratrizes, g e j, a xº com o quadro. O traço da superfície cónica tem centro em P e diâmetro definido pelos traços das geratrizes, T_g e T_j. Estes são pontos de fuga de direcções a xº com o quadro contidas na orientação α.

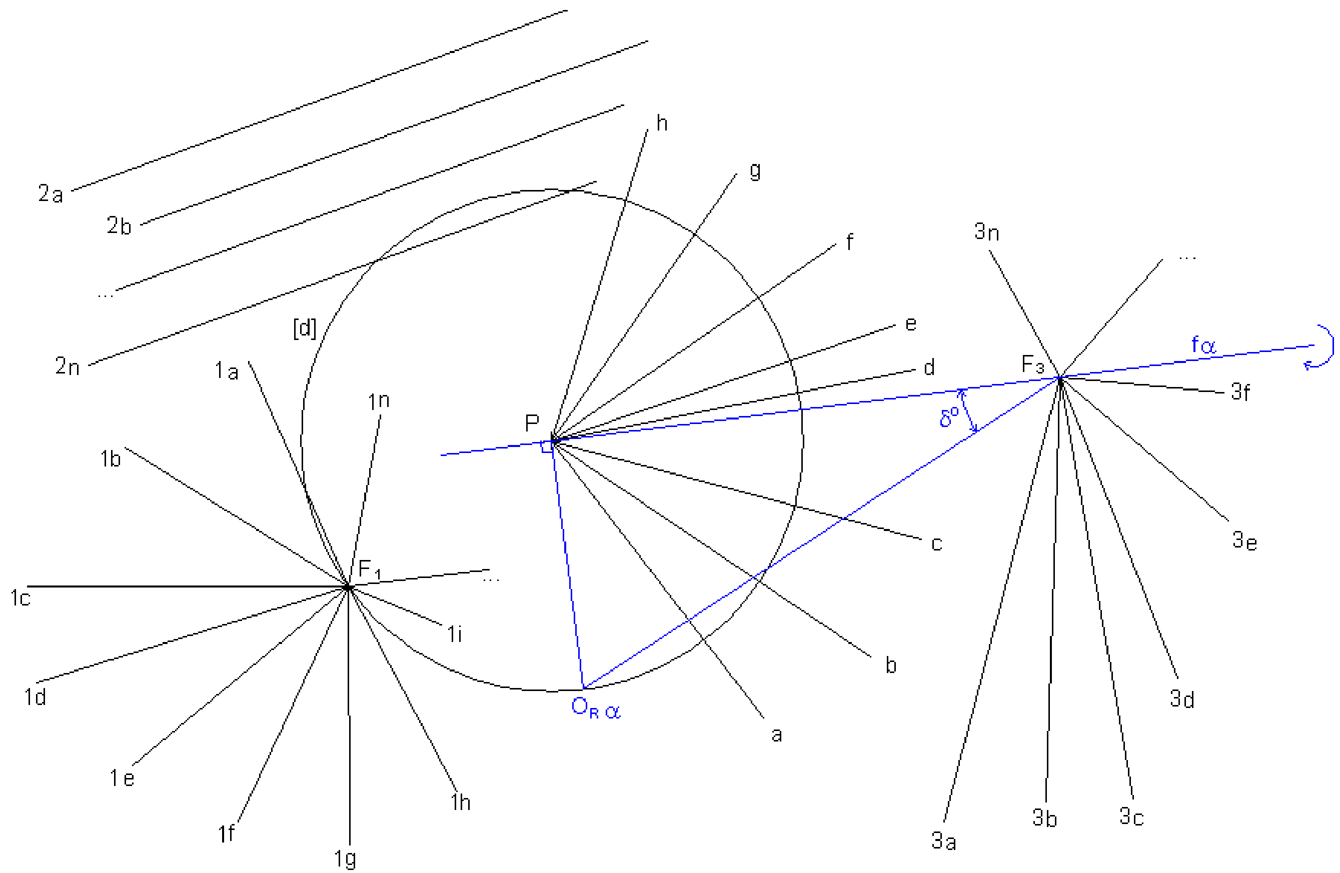
O ponto principal P é o ponto de fuga das rectas ortogonais ao quadro.

Rectas paralelas ao quadro não têm ponto de fuga próprio, isto é, têm ponto de fuga impróprio. Por essa razão as perspectivas de uma família de rectas paralelas entre si e ao quadro é uma feixe de rectas paralelas entre si (no quadro). E as perspectivas destas rectas mantêm a proporção.



O lugar geométrico dos pontos de fuga

O feixe de rectas 1a, 1b, …, 1n convergentes em F_1 é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas entre si e a 45º com o quadro.
O feixe de rectas a, b, …, n convergentes em P é a perspectiva de um feixe de rectas perpendiculares ao quadro.
O feixe de rectas 2a, 2b, …, 2n é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas ao quadro.
O feixe de rectas 3a, 3b, …, 3n convergentes em F_3 é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas entre si e a δº com o quadro. Note que a inclinação das rectas com o quadro é determinada através do rebatimento do plano projectante α, ortogonal ao quadro, passante pela projectante a δº com o quadro de traço frontal em F_3. A charneira deste rebatimento é a recta fα.



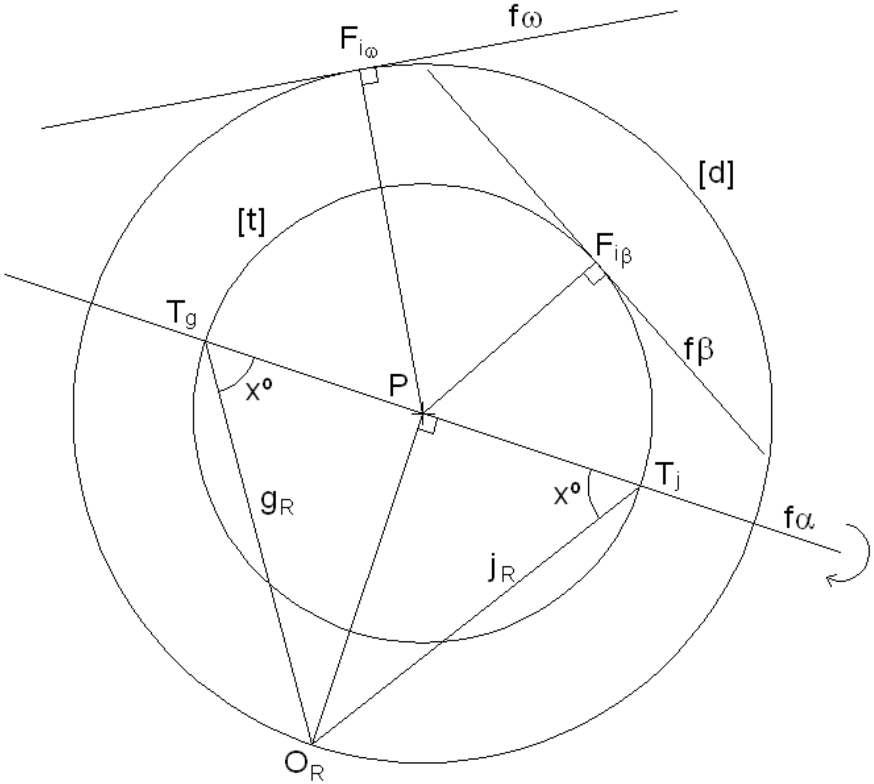
O lugar geométrico das linhas de fuga

O lugar geométrico das linhas de fuga das orientações de planos a 45º com o quadro é dado pelas rectas tangentes à circunferência de distância inteira [d].
Na figura, fω é uma linha de fuga de uma orientação a 45º com o quadro. O ponto de tangência, Fiω, é o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação ω.

O lugar geométrico das linhas de fuga das orientações de planos a xº com o quadro é dado pelas rectas tangentes ao traço [t] (no quadro) de uma superfície cónica de revolução cujas geratrizes fazem xº com o quadro. Na figura, fβ é uma linha de fuga de uma orientação a xº com o quadro. O ponto de tangencia, Fiβ, é o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação β.

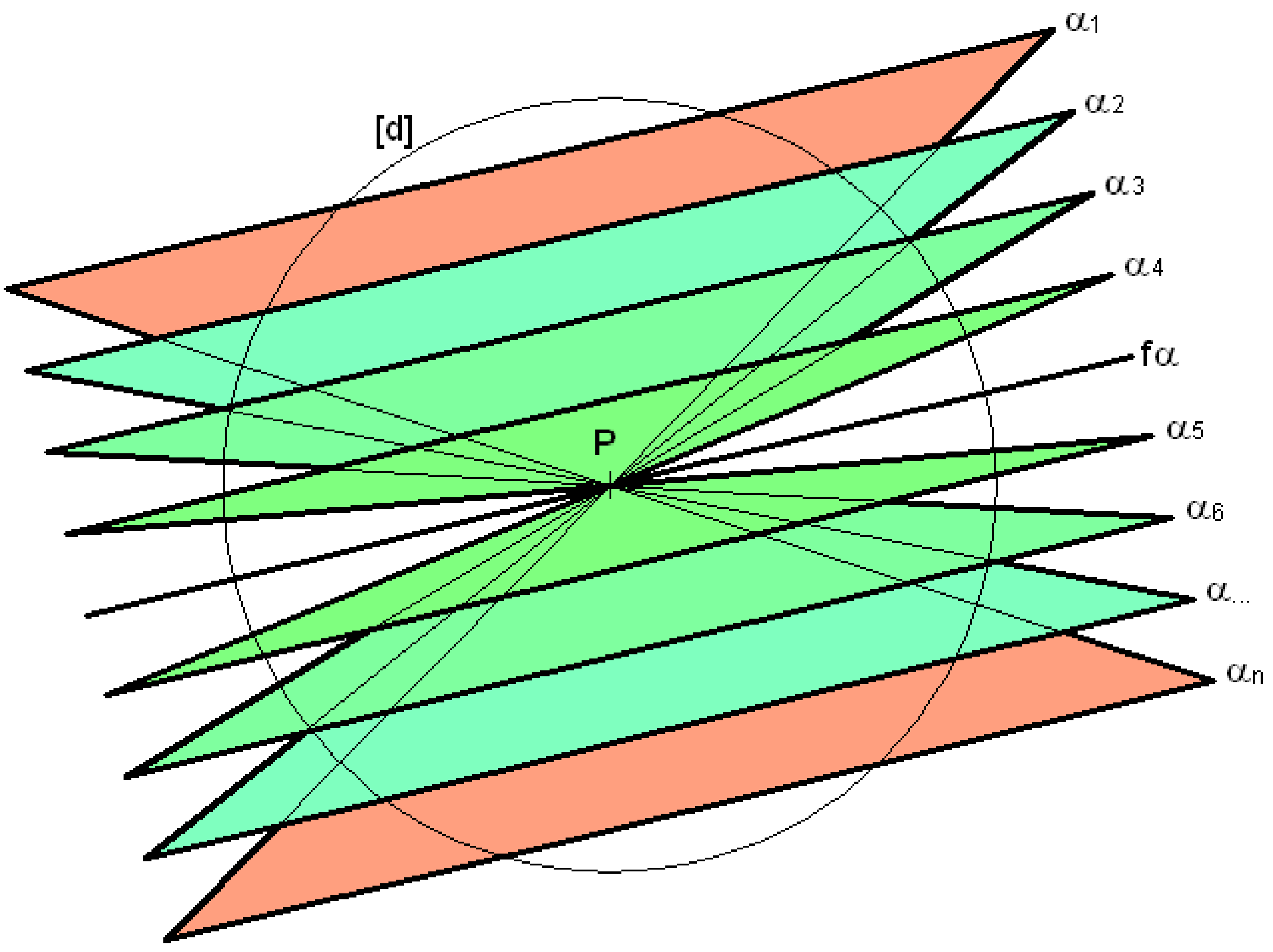
As linhas de fuga dos planos ortogonais ao quadro passam todas pelo ponto principal P. Na figura, fα é uma linha de fuga de uma orientação ortogonal ao quadro. O ponto P coincide com o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação α.

Os planos paralelos ao quadro não têm linha de fuga própria, isto é, têm linha de fuga imprópria. Por essa razão, FIGURAS CONTIDAS EM PLANOS PARALELOS AO QUADRO MANTÊM AS PROPORÇÕES NA PERSPECTIVA. Se colocadas no quadro mantêm a VERDADEIRA GRANDEZA.



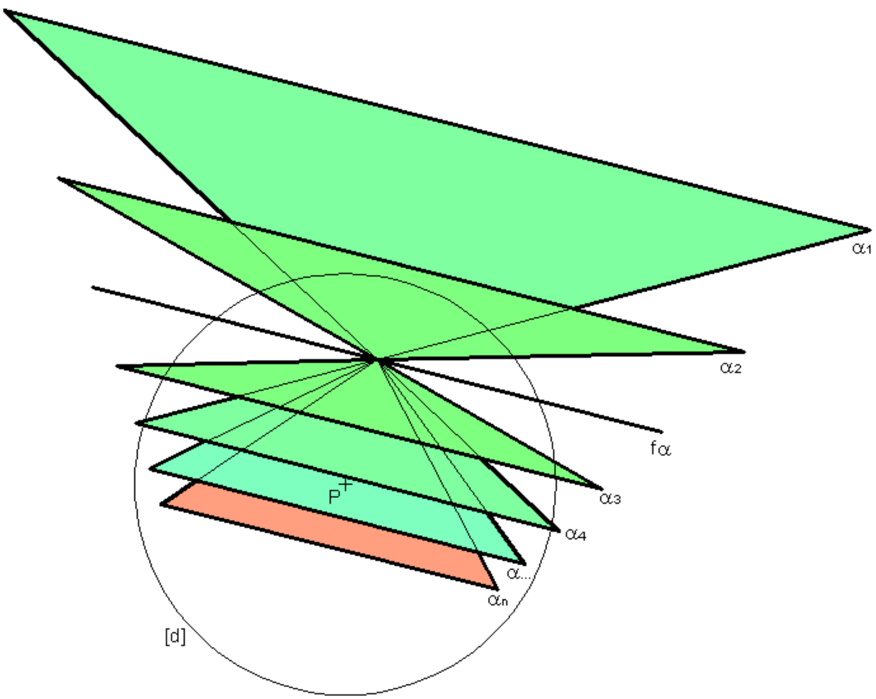
O lugar geométrico das linhas de fuga

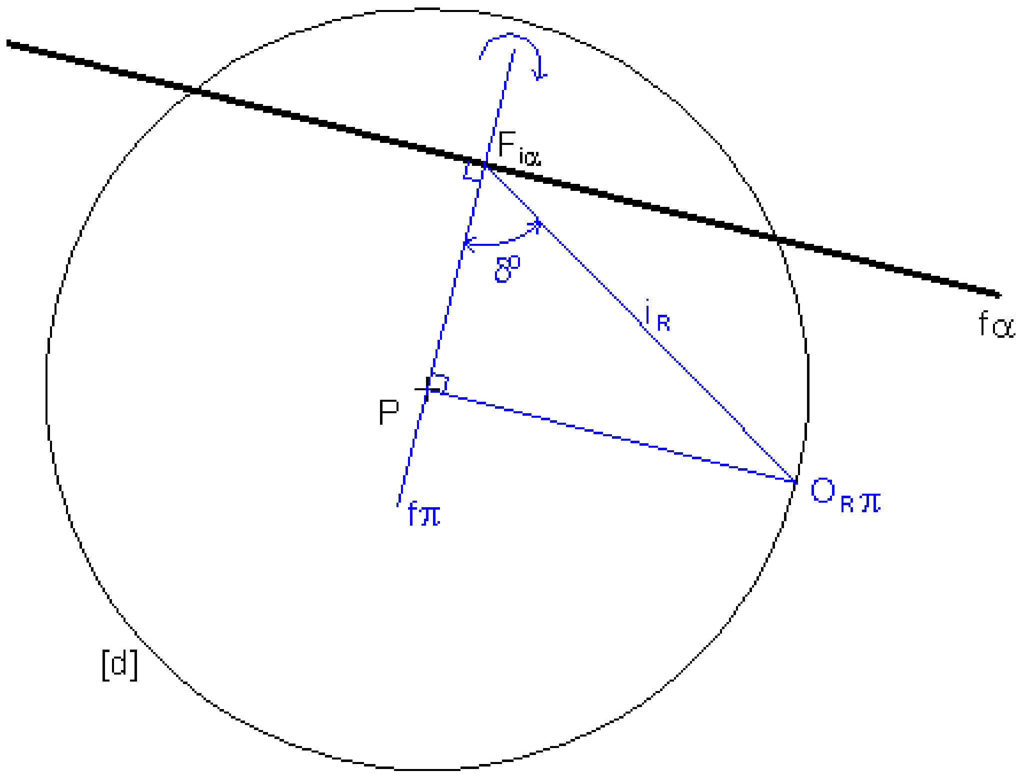
Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos ortogonais ao quadro (cada plano é delimitado por um segmento frontal e duas semi-rectas de perpendiculares ao quadro). O plano projectante é aquele cuja perspectiva se reduz a uma recta, a recta fα.



O lugar geométrico das linhas de fuga

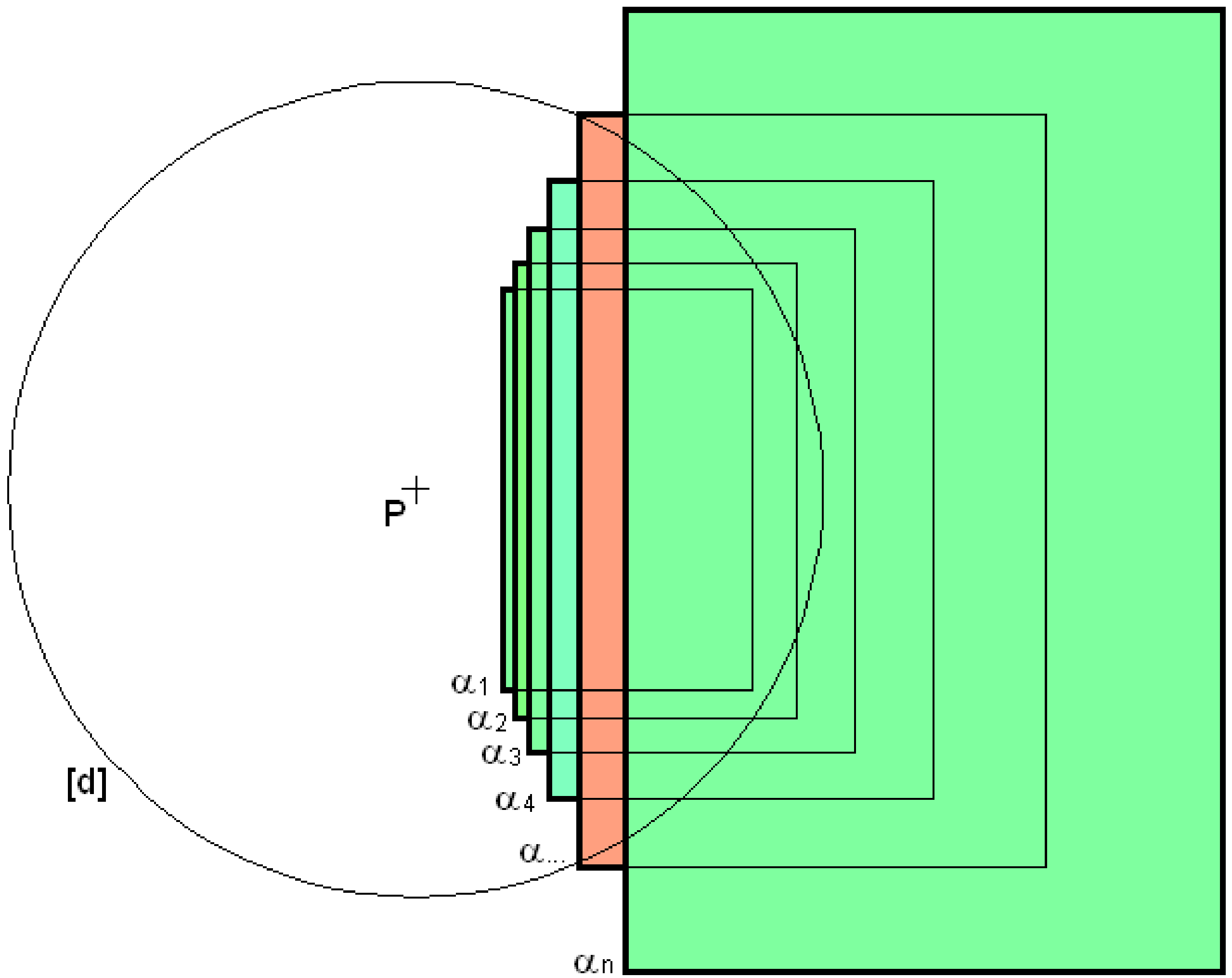
Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos oblíquos ao quadro (cada plano é delimitado por um segmento frontal e duas semi-rectas de maior inclinação). O plano projectante é aquele cuja perspectiva se reduz a uma recta, a recta fα. A inclinação destes planos com o quadro ,δº, pode ser determinada através do rebatimento do plano projectante, π, ortogonal ao quadro passante pela projectante de maior inclinação, i, da orientação α, de ponto de fuga Fiα.



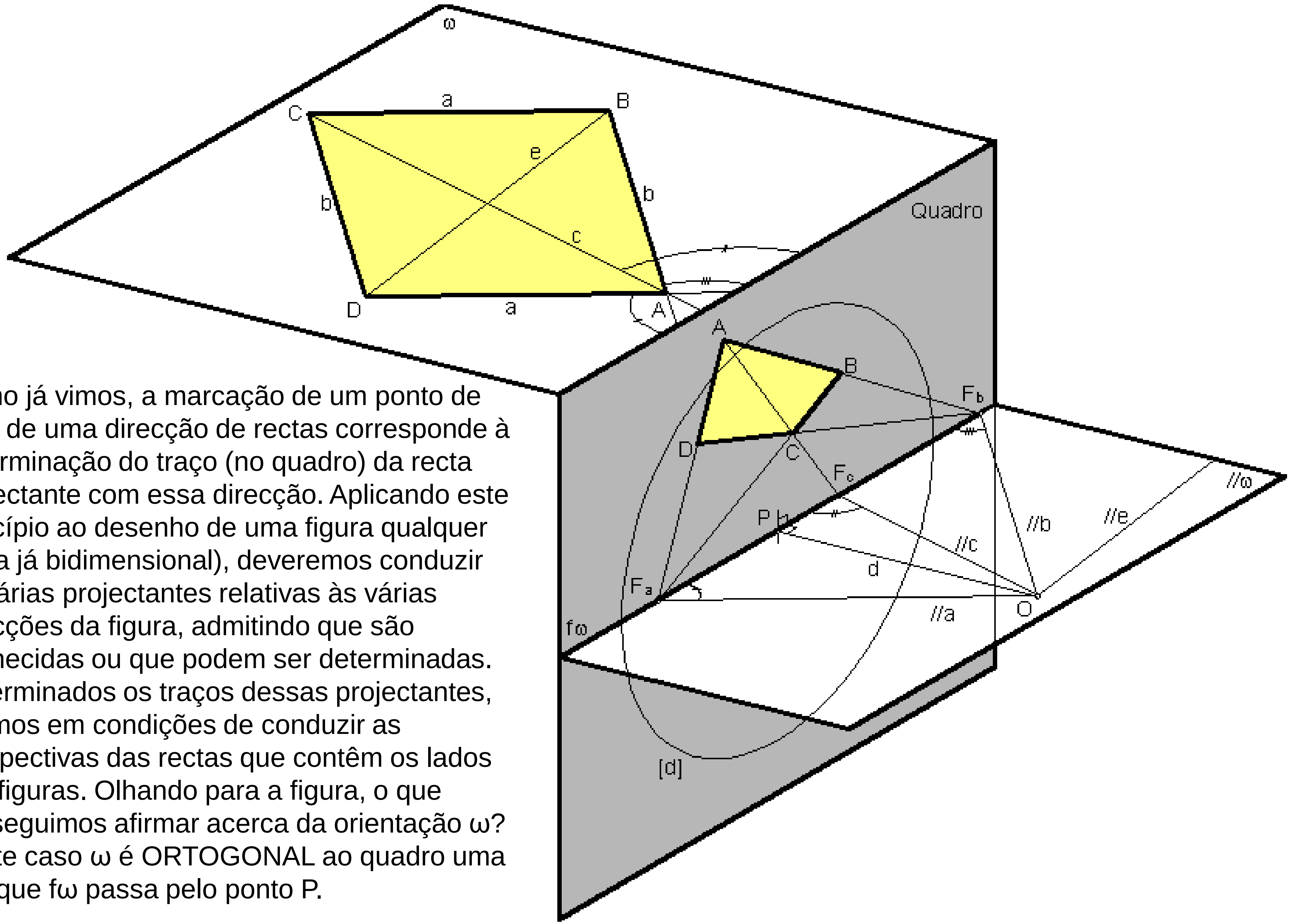


O lugar geométrico das linhas de fuga

Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos (cada plano é delimitado por um rectângulo) paralelos ao quadro. Note que neste caso o plano projectante não tem representação no quadro uma vez que lhe é paralelo. Dito de outro modo, planos paralelos ao quadro não têm linha de fuga.



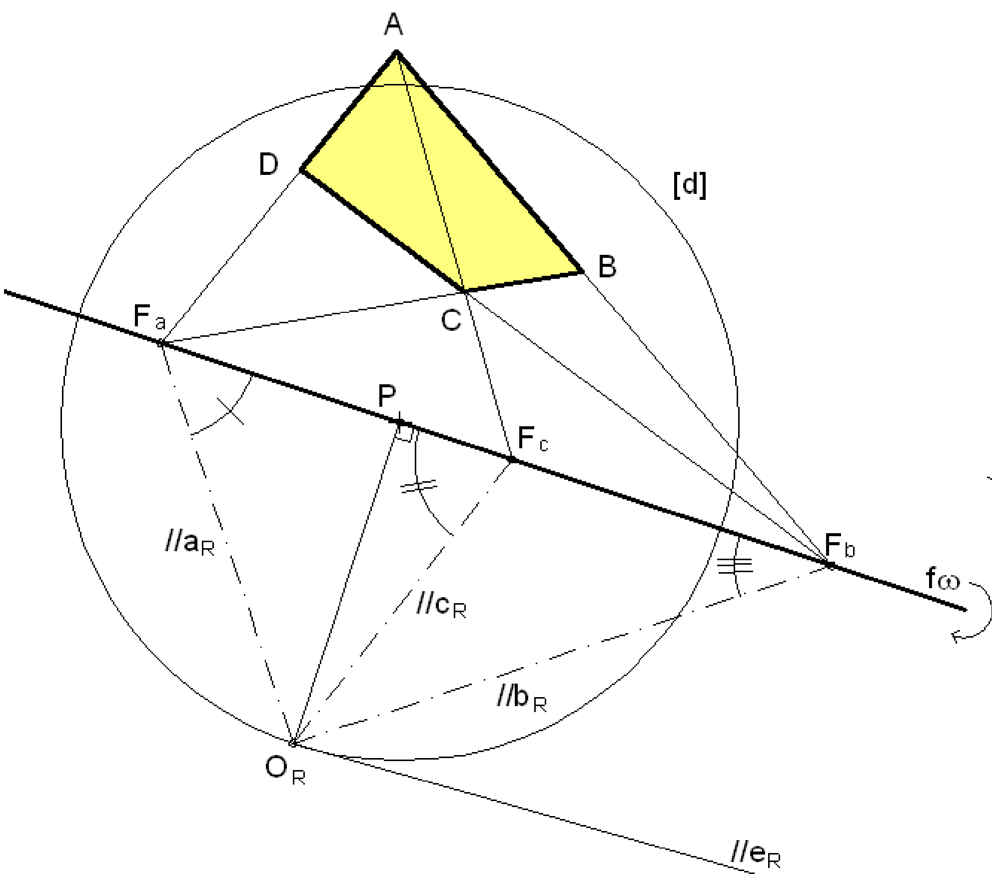
O controlo da direção



Como já vimos, a marcação de um ponto de fuga de uma direcção de rectas corresponde à determinação do traço (no quadro) da recta projectante com essa direcção. Aplicando este princípio ao desenho de uma figura qualquer (para já bidimensional), deveremos conduzir as várias projectantes relativas às várias direcções da figura, admitindo que são conhecidas ou que podem ser determinadas. Determinados os traços dessas projectantes, ficamos em condições de conduzir as perspectivas das rectas que contêm os lados das figuras. Olhando para a figura, o que conseguimos afirmar acerca da orientação ω? Neste caso ω é ORTOGONAL ao quadro uma vez que fω passa pelo ponto P.

O controlo da direção – reb. de plano projetantes

Graficamente esta operação implica o rebatimento do plano projectante //ω em torno da recta fω. Nesta operação, como ω é ortogonal ao quadro, o ponto O fica rebatido na intersecção da circunferência de distância inteira [d] com a perpendicular a fω conduzida pelo ponto P. Note que esta perpendicular contém a projecção ortogonal (no quadro) do arco do rebatimento do ponto O. É por O_R que se conduzem as projectantes (rebatidas) que permitem determinar os pontos de fuga das várias direcções.
A figura auxiliar permite relacionar entre si as direcções e deve ser sempre considerada como estratégia para o entendimento da relação dessas direcções entre si e com o quadro.



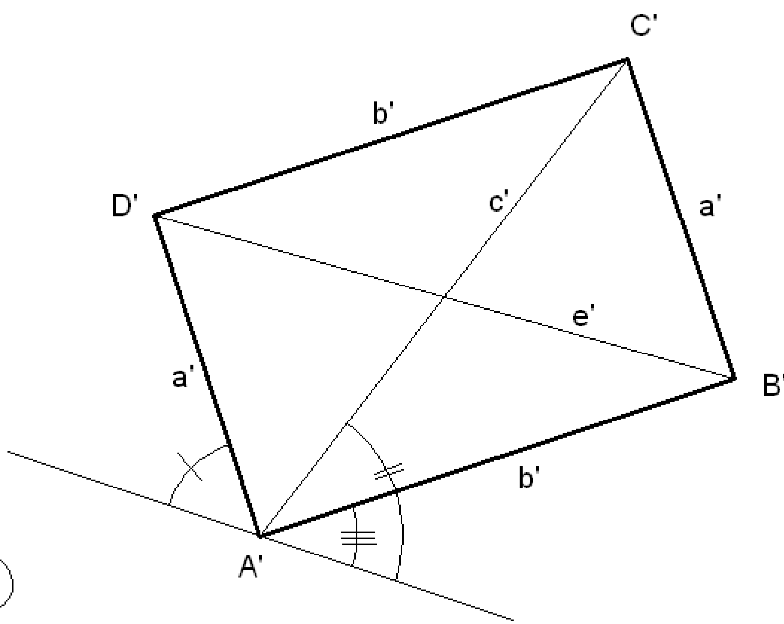
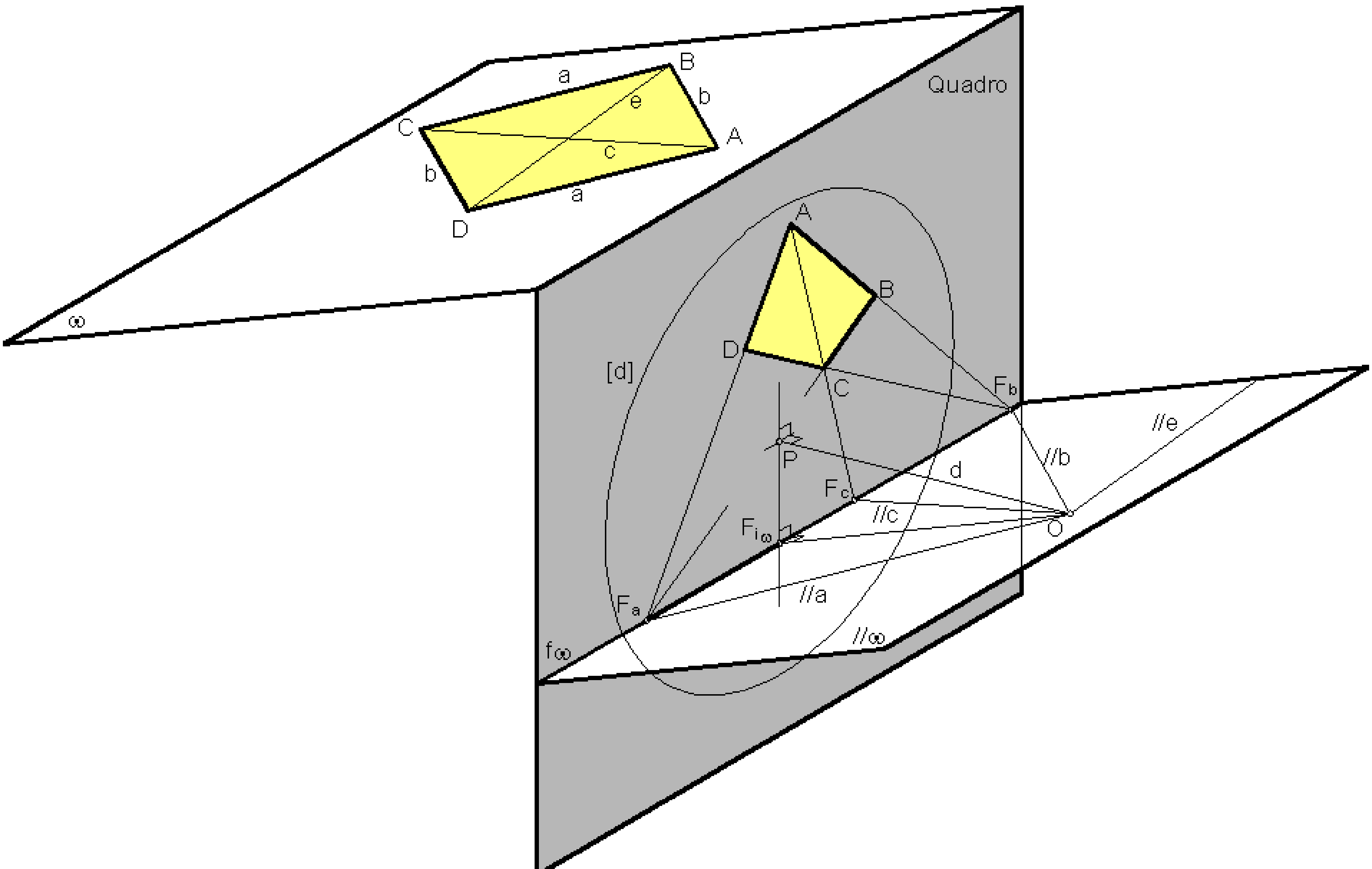


FIGURA AUXILIAR

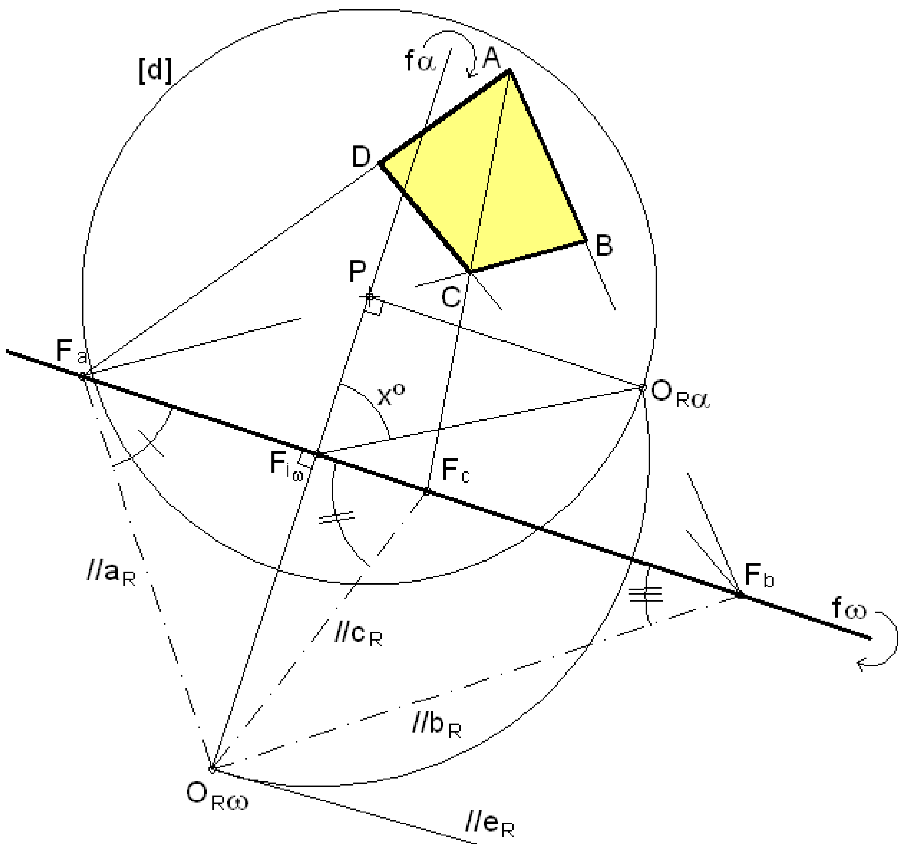
O controlo da direção

O mesmo tipo de lógica é aplicável quando as figuras têm orientação OBLÍQUA ao quadro.



O controlo da direção – reb. de plano projetantes

Graficamente esta operação implica o rebatimento do plano projectante //ω em torno da recta fω. Nesta operação o ponto O descreve um arco de raio [$OF_{i\omega}$] contido num plano α perpendicular à charneira. O traço deste plano no quadro é a recta fα perpendicular a fω e passante pleo ponto P. É sobre esta recta que vamos encontrar o ponto $O_{R\omega}$.
Na prática, precisamos de aplicar o princípio do triângulo do rebatimento através do rebatimento auxiliar do plano projectante α. Este rebatimento permite-nos determinar a verdadeira grandeza do segmento [$OF_{i\omega}$], isto é, a verdadeira grandeza do comprimento do arco do rebatimento do ponto O em torno de fω.



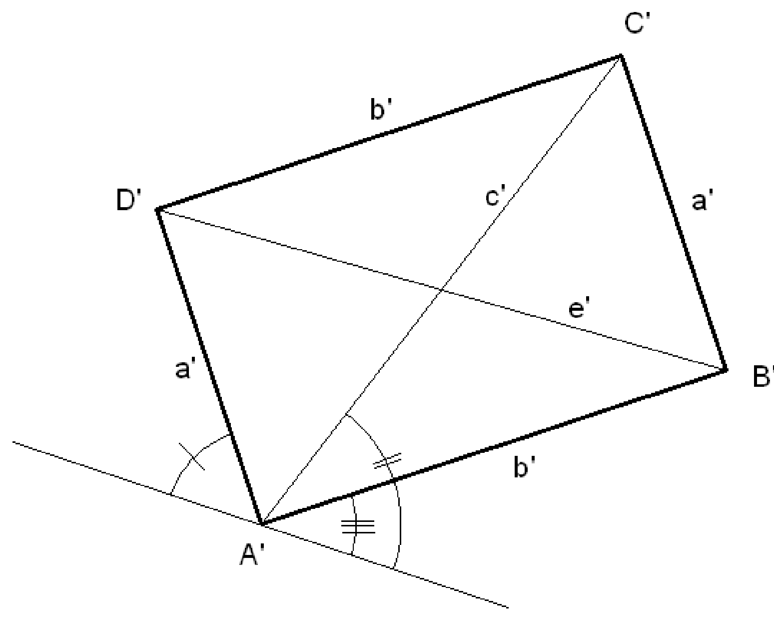


FIGURA AUXILIAR

O controlo da direção – perpendicularidade

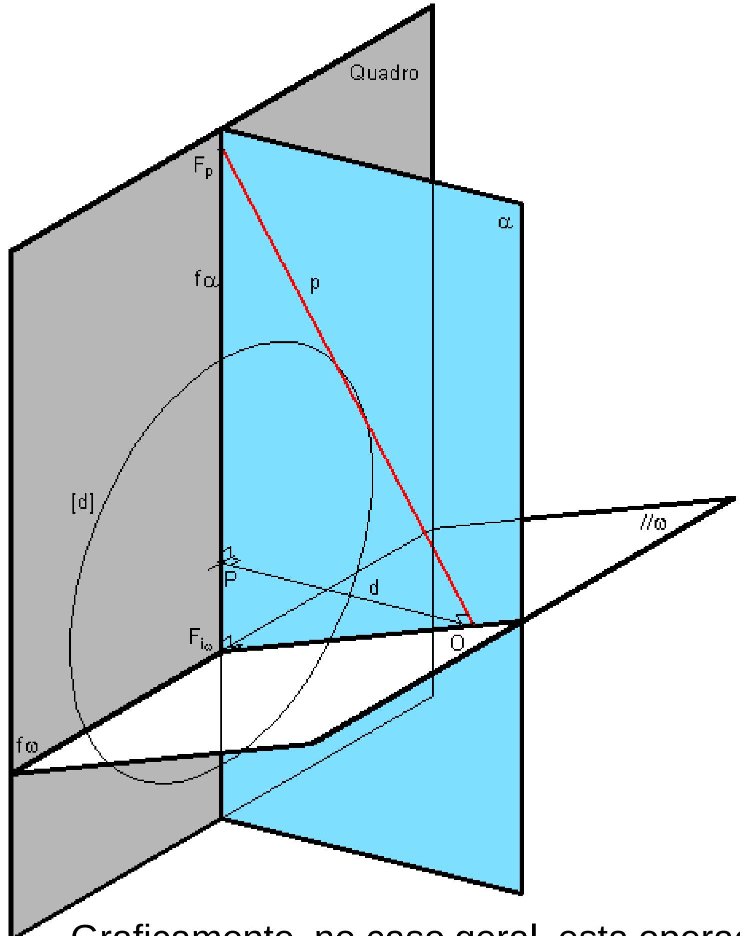
O ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação ω de planos determina-se através do traço (no quadro) da recta projectante perpendicular ao plano projectante com a orientação dada.
Note que o ponto de fuga da direcção ortogonal aos planos paralelos ao quadro é o ponto P.
Note ainda que planos ortogonais ao quadro são ortogonais a direcções paralelas ao quadro, de onde não exista ponto de fuga próprio. Para uma orientação definida por uma linha de fuga, fica automaticamente definida a direcção ortogonal (é ortogonal à linha de fuga).

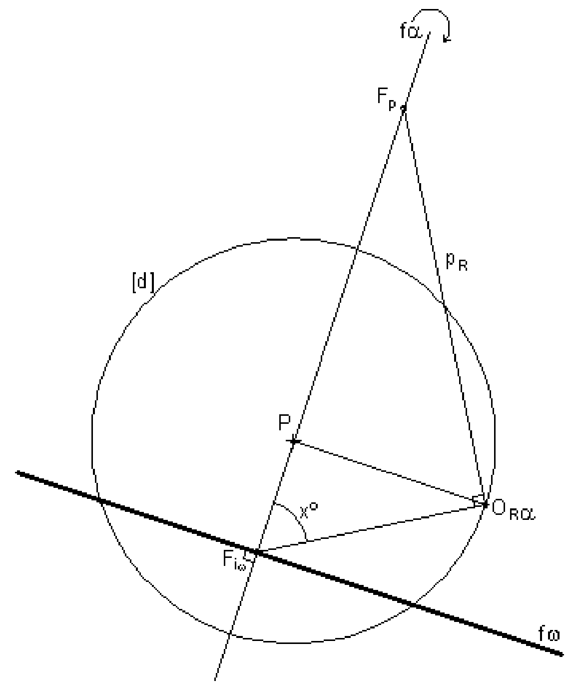
Graficamente, no caso geral, esta operação implica o rebatimento de um plano projectante α em torno do seu traço no quadro, $f_{\alpha.}$. Note-se que este plano contém a recta projectante p perpendicular ao plano projectante //ω. Essa recta projectante p é perpendicular ao segmento [$OF_{i\omega}$].

Sobre a recta f_α determina-se o traço da projectante p, isto é, o ponto de fuga Fp da direcção ortogonal à orientação ω.

O controlo da direção – perpendicularidade

O ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação ω de planos determina-se através do traço (no quadro) da recta projectante perpendicular ao plano projectante com a orientação dada.
Note que o ponto de fuga da direcção ortogonal aos planos paralelos ao quadro é o ponto P.
Note ainda que planos ortogonais ao quadro são ortogonais a direcções paralelas ao quadro, de onde não exista ponto de fuga próprio. Para uma orientação definida por uma linha de fuga, fica automaticamente definida a direcção ortogonal (é ortogonal à linha de fuga).



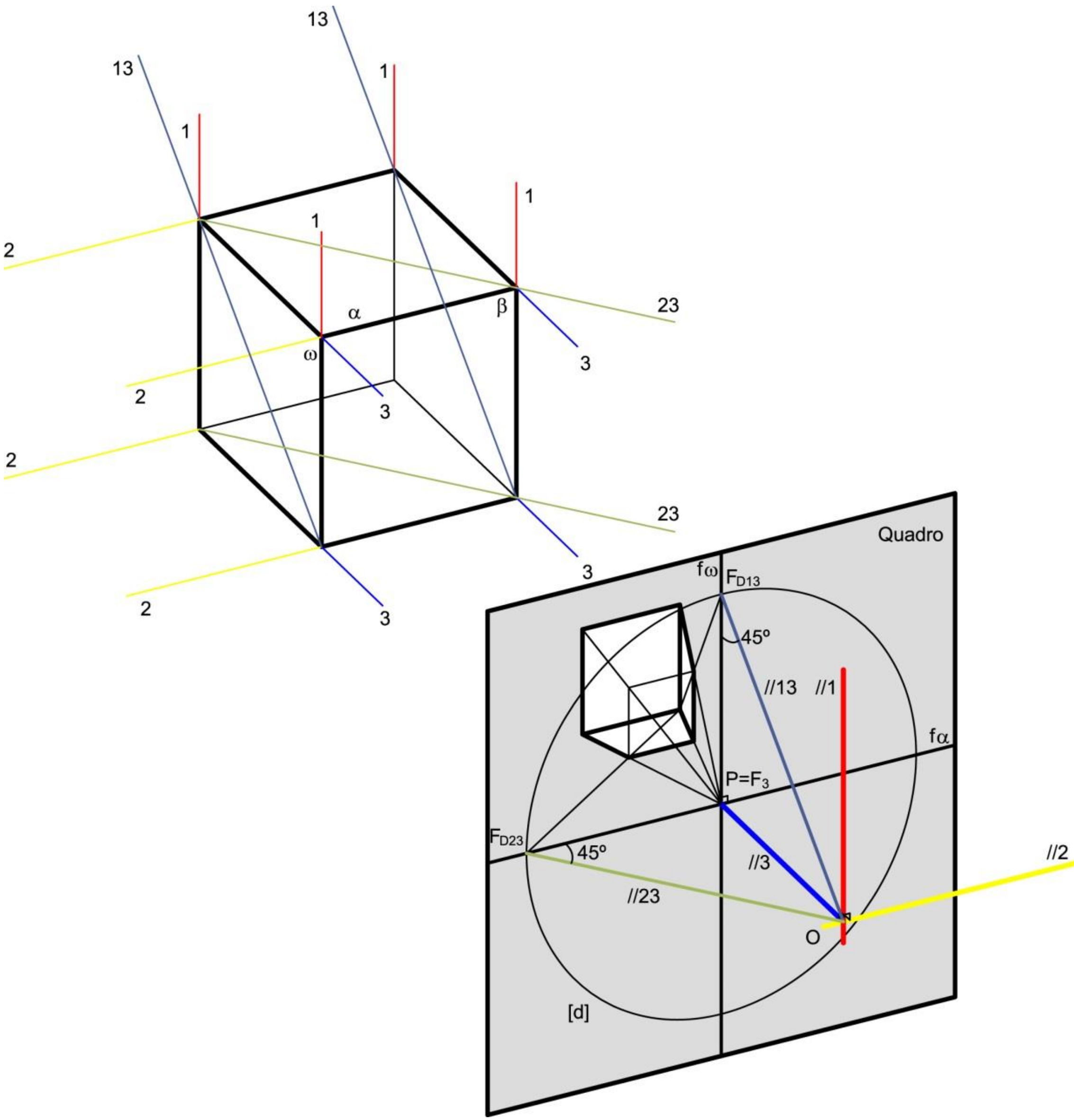


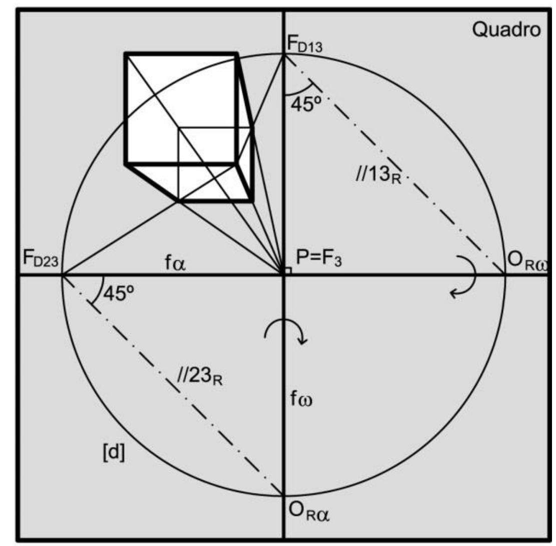
Graficamente, no caso geral, esta operação implica o rebatimento de um plano projectante α em torno do seu traço no quadro, f_{α}. Note-se que este plano contém a recta projectante p perpendicular ao plano projectante //ω. Essa recta projectante p é perpendicular ao segmento [$OF_{i\omega}$].

Sobre a recta f_α determina-se o traço da projectante p, isto é, o ponto de fuga Fp da direcção ortogonal à orientação ω.

A “PERSPECTIVA DE 1 PONTO DE FUGA”.

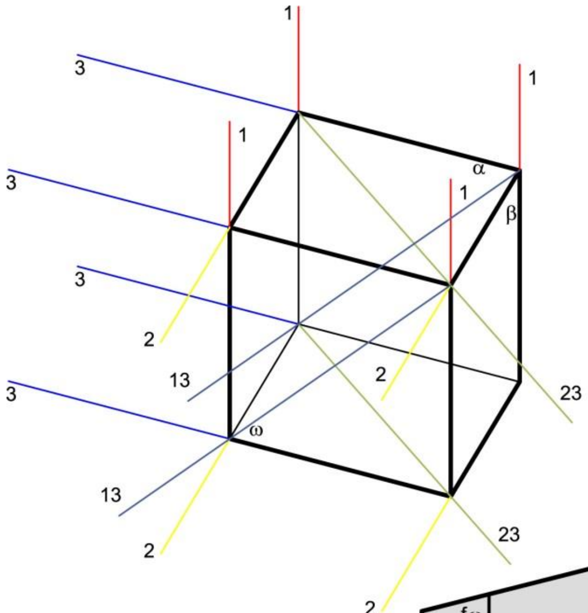
CUBOS: Desenho de matrizes espaciais tri-ortogonais cúbicas

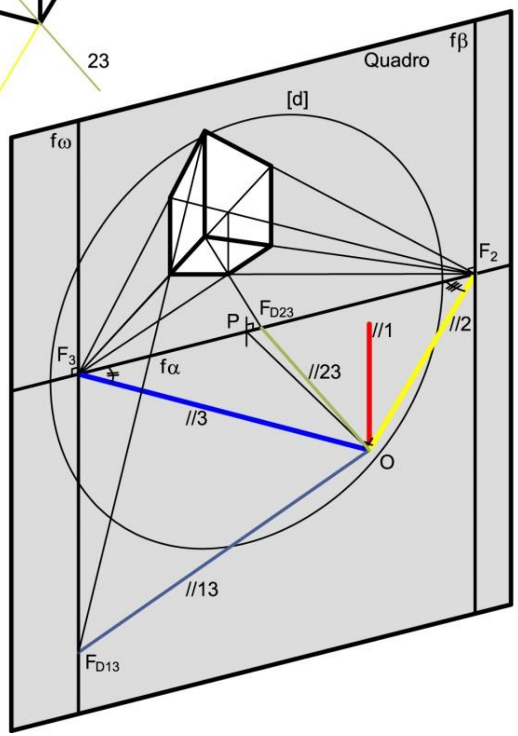


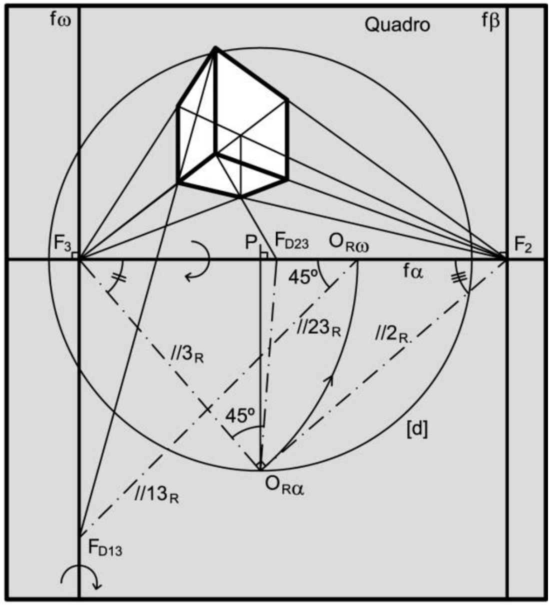


A “PERSPECTIVA DE 2 PONTOS DE FUGA”.

CUBOS: Desenho de matrizes espaciais tri-ortogonais cúbicas

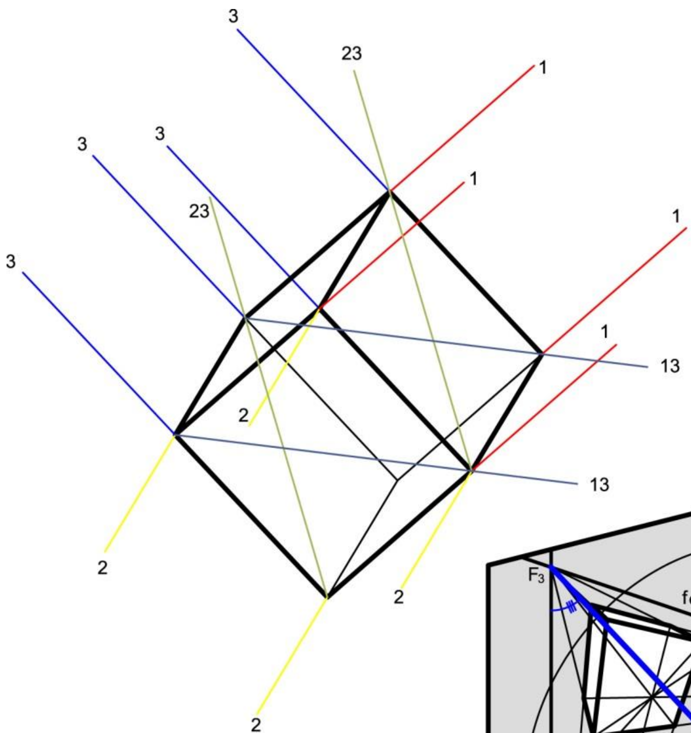


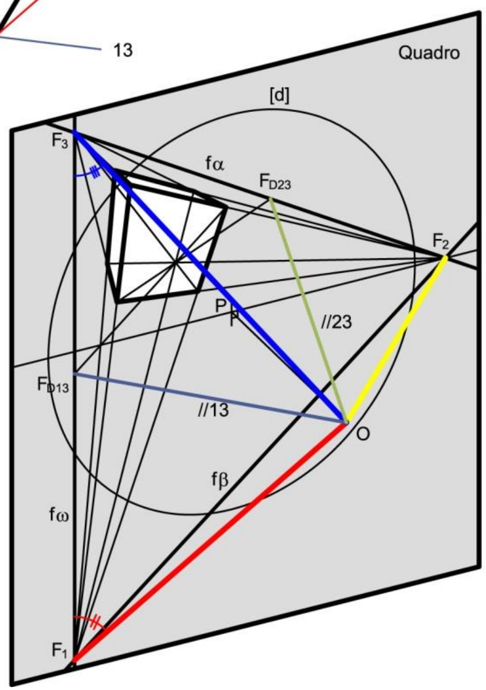


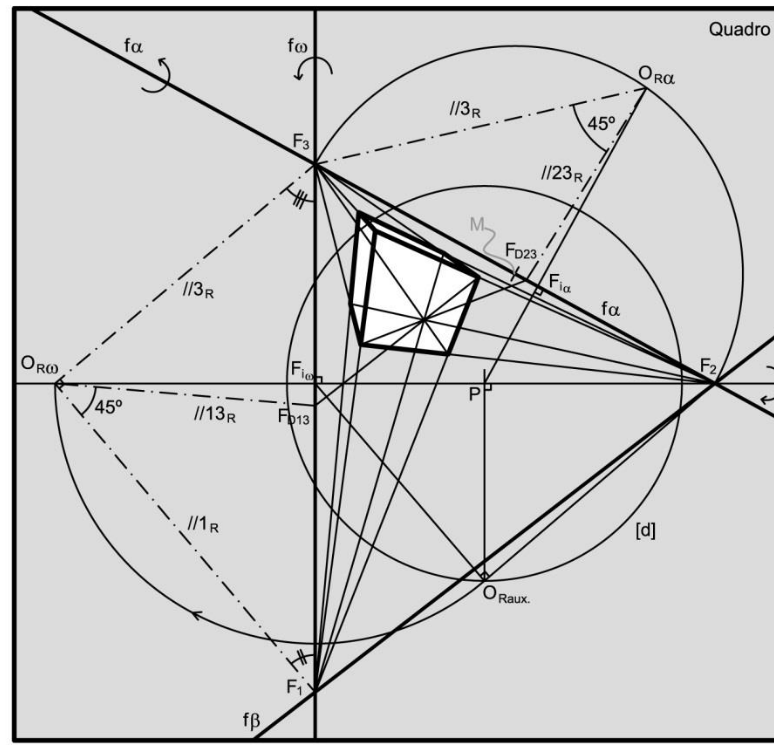


A "PERSPECTIVA DE 3 PONTOS DE FUGA".

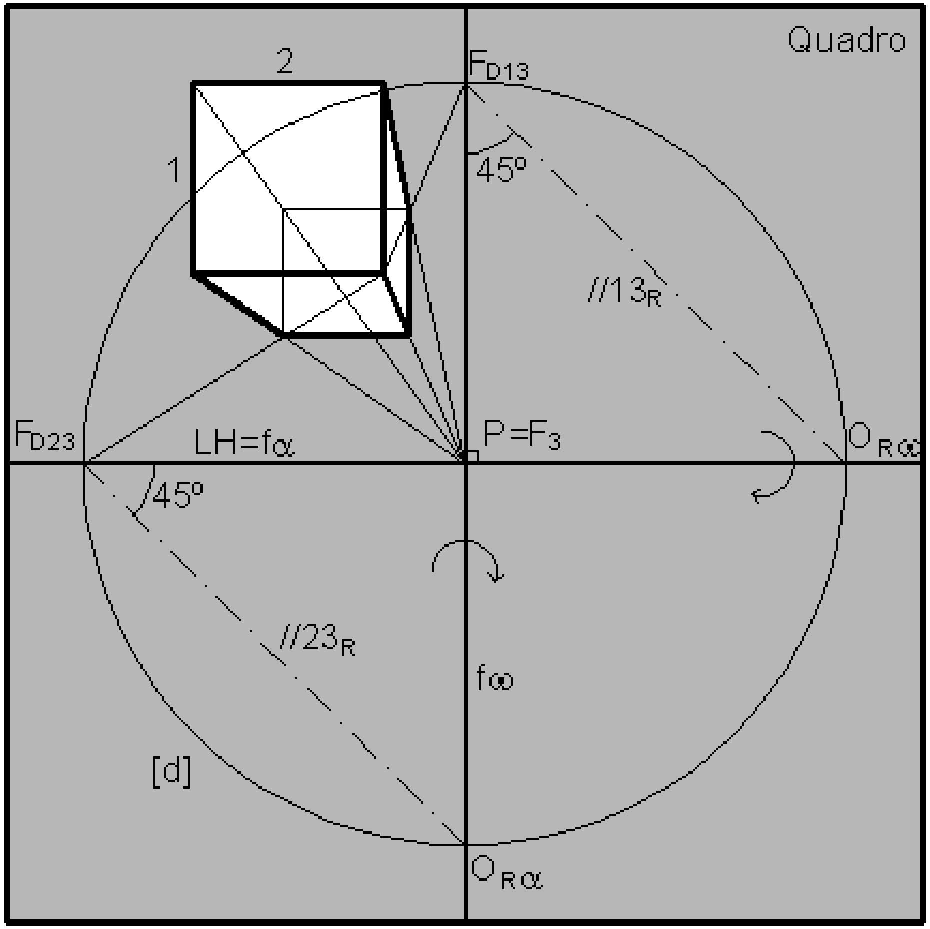
CUBOS: Desenho de matrizes espaciais tri-ortogonais cúbicas





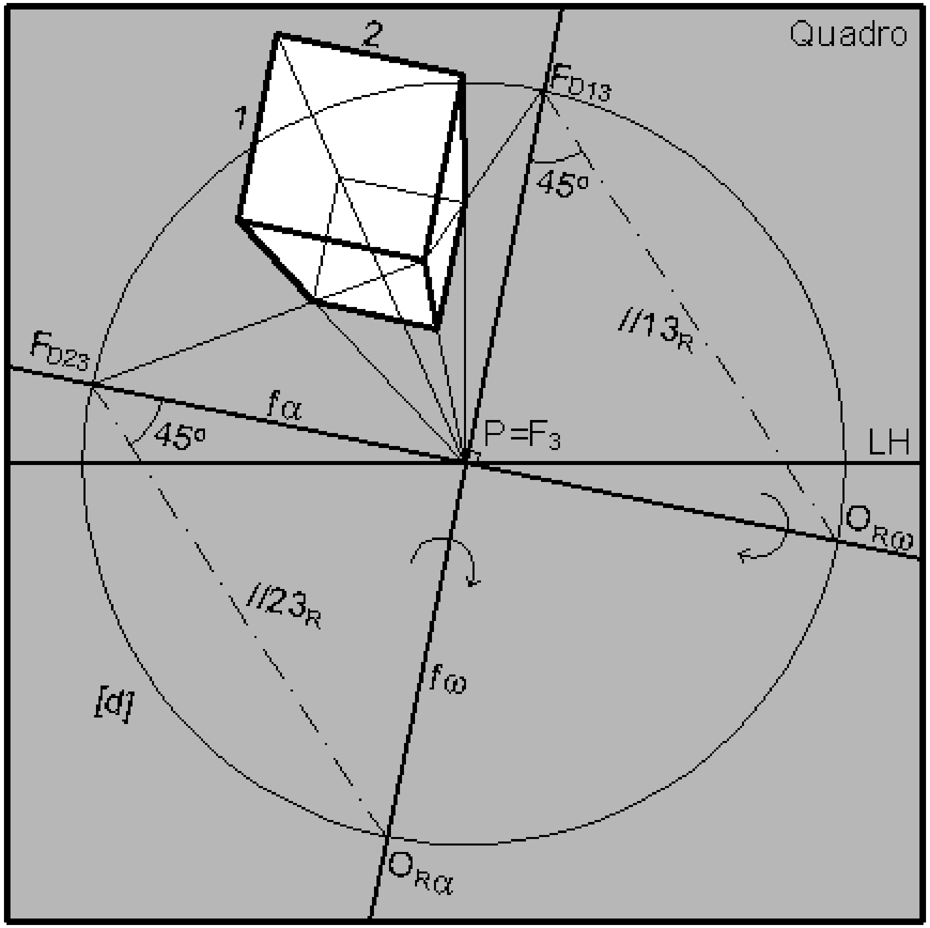


“1 PONTO DE FUGA” – taxonomias



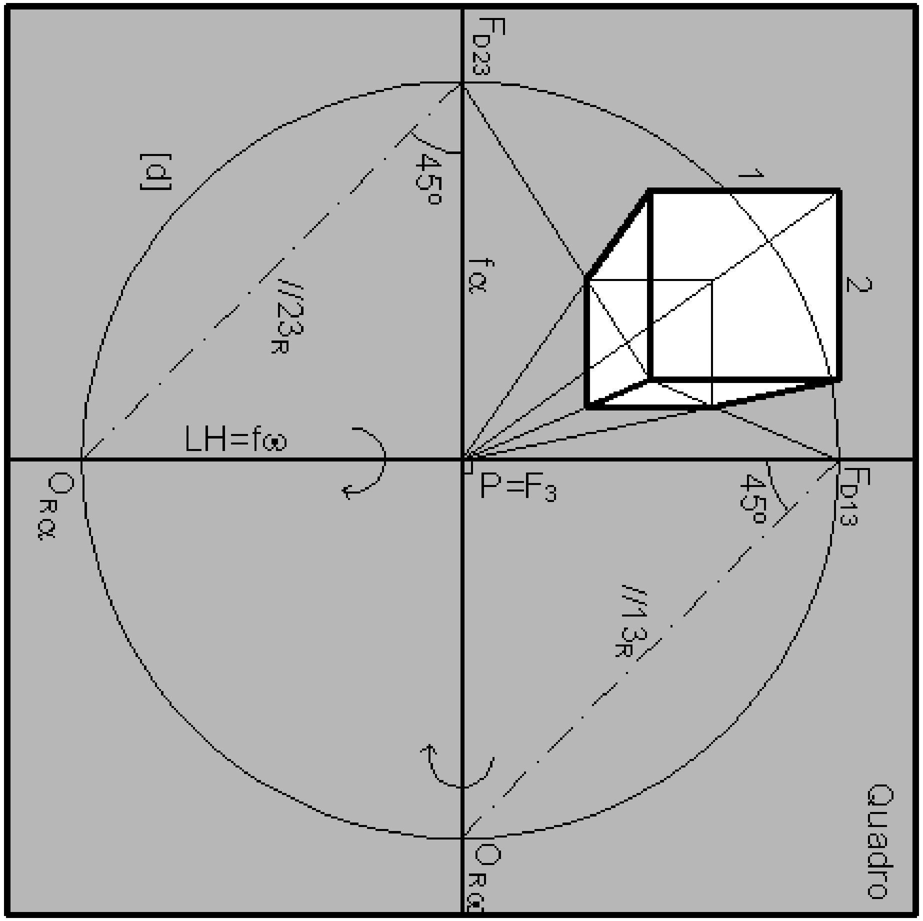
F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A 45º (ABERTURA PARA A ESQUERDA) COM O QUADRO
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A 45º (ASCENDENTE) COM O QUADRO
$P=F_3$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO VERTICAIS
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO FRONTO-HORIZONTAIS
LH=fα	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO HORIZONTAL
fω	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO PERFIL

“1 PONTO DE FUGA” – taxonomias



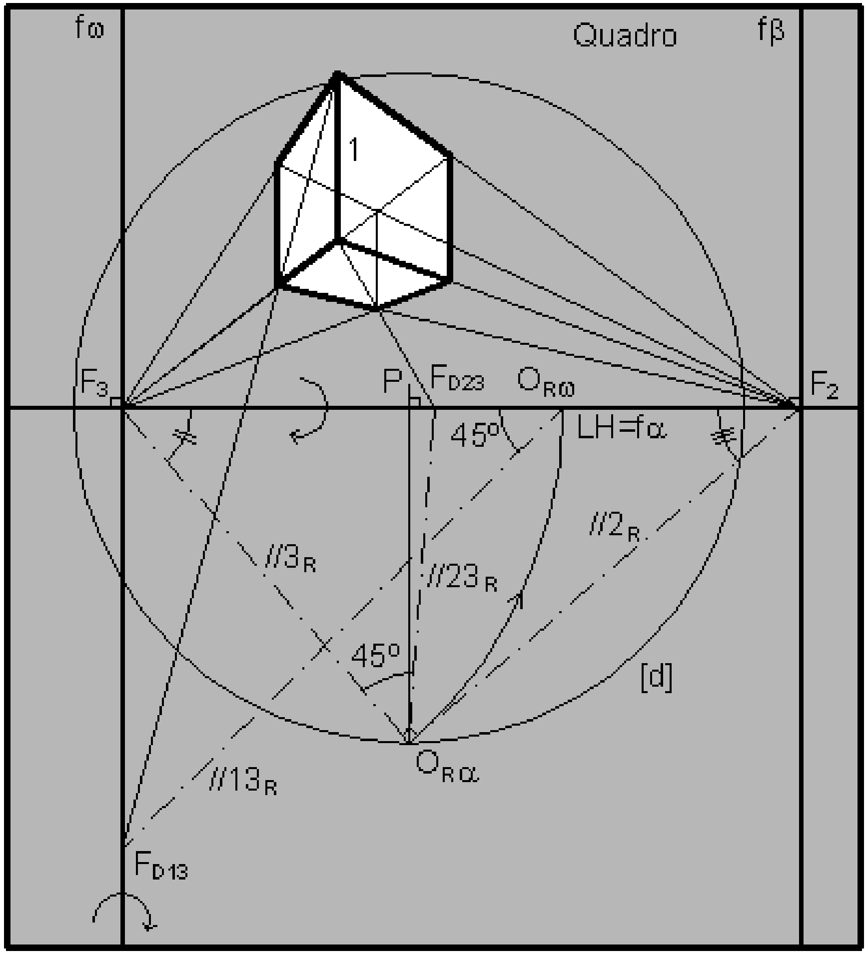
F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$P=F_3$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A DIREITA)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$f\alpha$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA ESQUERDA)
$f\omega$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA A DIREITA)

“1 PONTO DE FUGA” – taxonomias



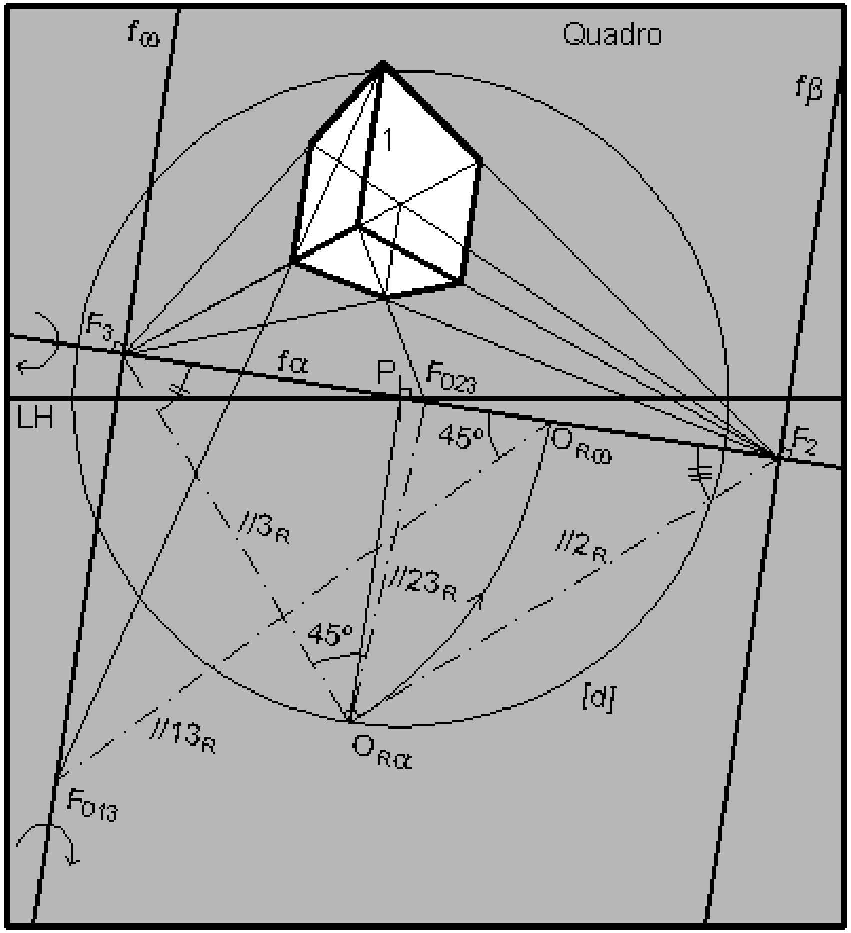
F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A 45º (ASCENDENTE) COM O QUADRO
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A 45º (ABERTURA PARA A DIREITA) COM O QUADRO
$P=F_3$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTO-HORIZONTAIS
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO VERTICAIS
$LH=f\omega$	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO HORIZONTAL
$f\alpha$	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO DE PERFIL

“2 PONTOS DE FUGA” – taxonomias



F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ABERTURA PARA A DIREITA)
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM O PLANO DO HORIZONTE (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_3	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A //º COM O QUADRO (ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_2	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A ///º COM O QUADRO (ABERTURA PARA A DIREITA)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO VERTICAIS
LH=f_α	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO HORIZONTAL
f ω	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO VERTICAL A //º COM O QUADRO (ABERTURA PARA A ESQUERDA)
f β	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO VERTICAL A ///º COM O QUADRO (ABERTURA PARA A DIREITA)

“2 PONTOS DE FUGA” – taxonomias



F_{D23} PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

F_{D13} PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM A ORIENTAÇÃO α (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

F_3 PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A //º COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

F_2 PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLIQUA A ///º COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

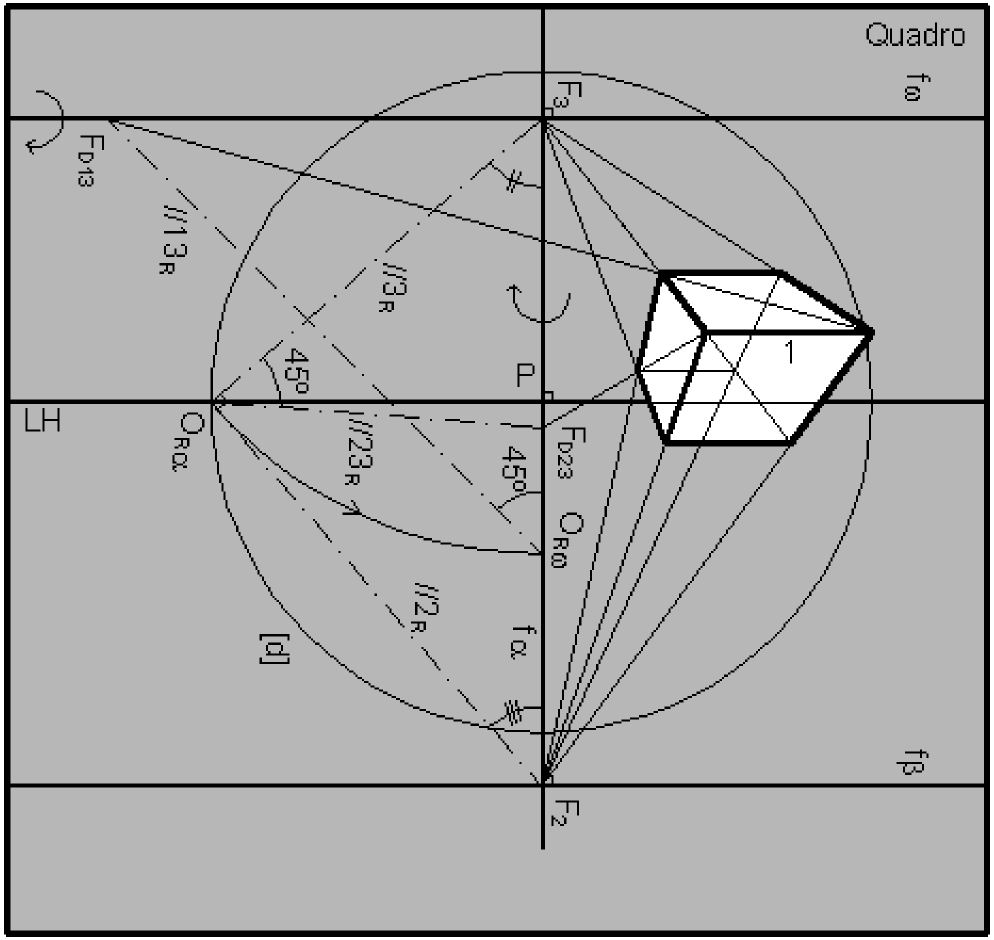
AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A DIREITA)

$f\,\alpha$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

$f\,\omega$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA A //º COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

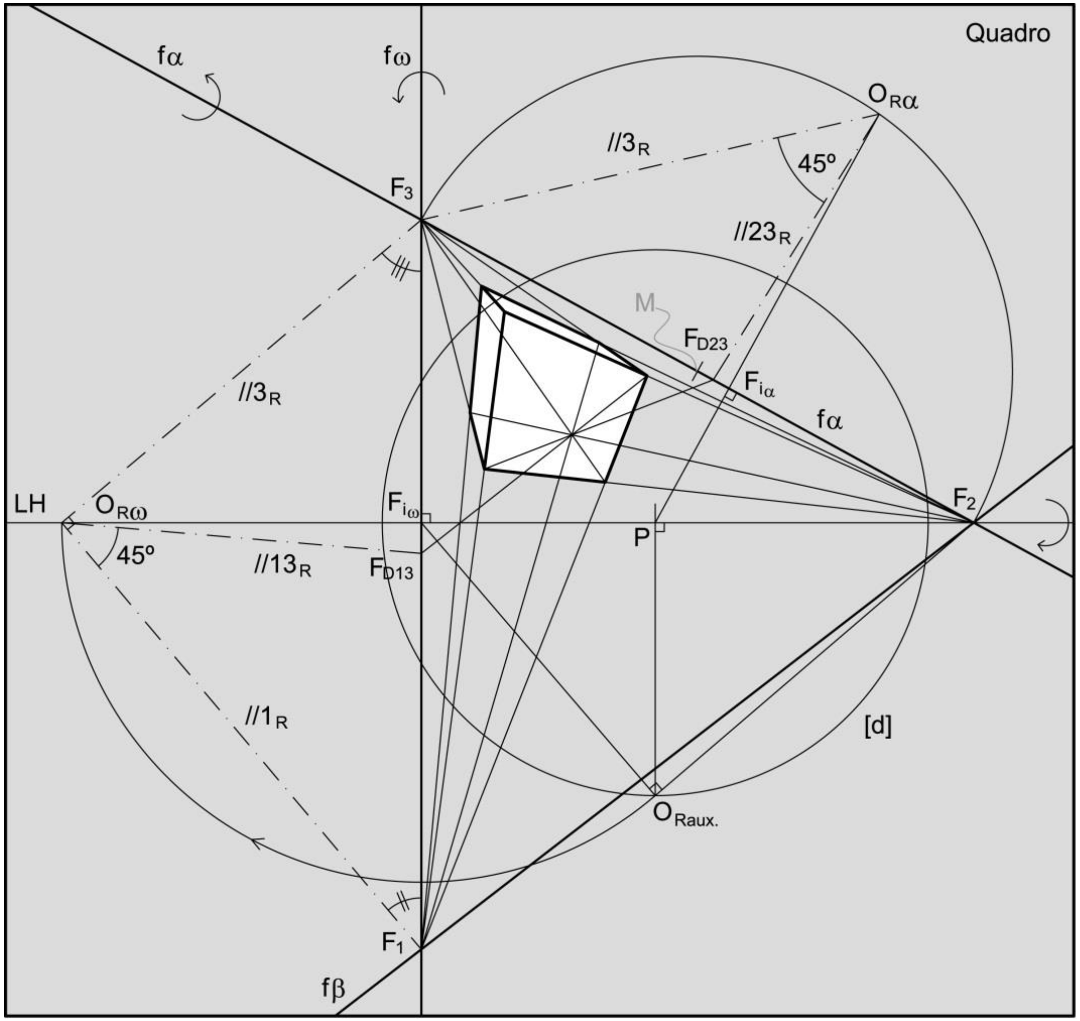
$f\,\beta$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA A ///º COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

"2 PONTOS DE FUGA" – taxonomias



F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (DESCENDENTE)
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM A ORIENTAÇÃO α (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_3	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A //º COM O QUADRO (ASCENDENTE)
F_2	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A ///º COM O QUADRO (DESCENDENTE)
	AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTO-HORIZONTAIS
$f\alpha$	LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO DE PERFIL
$f\omega$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE RAMPA A //º COM O QUADRO (ASCENDENTE)
$f\beta$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE RAMPA A ///º COM O QUADRO (DESCENDENTE)

"3 PONTOS DE FUGA" – taxonomias



F_{D23} PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

F_{D13} PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM A ORIENTAÇÃO α (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

F_3 PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

F_1 PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLIQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

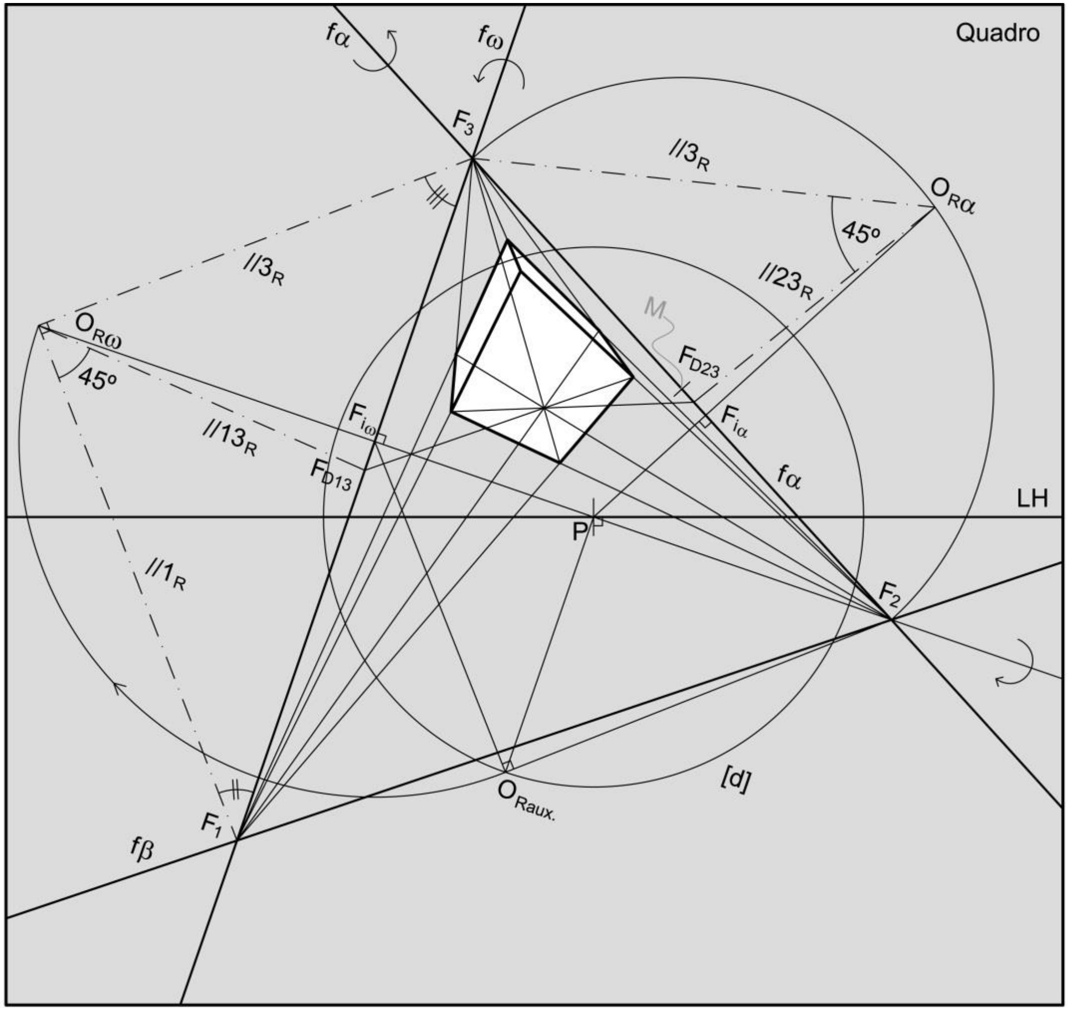
F_2 PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL (COM ABERTURA PARA A DIREITA)

$f\alpha$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

$f\omega$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO VERTICAL (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)

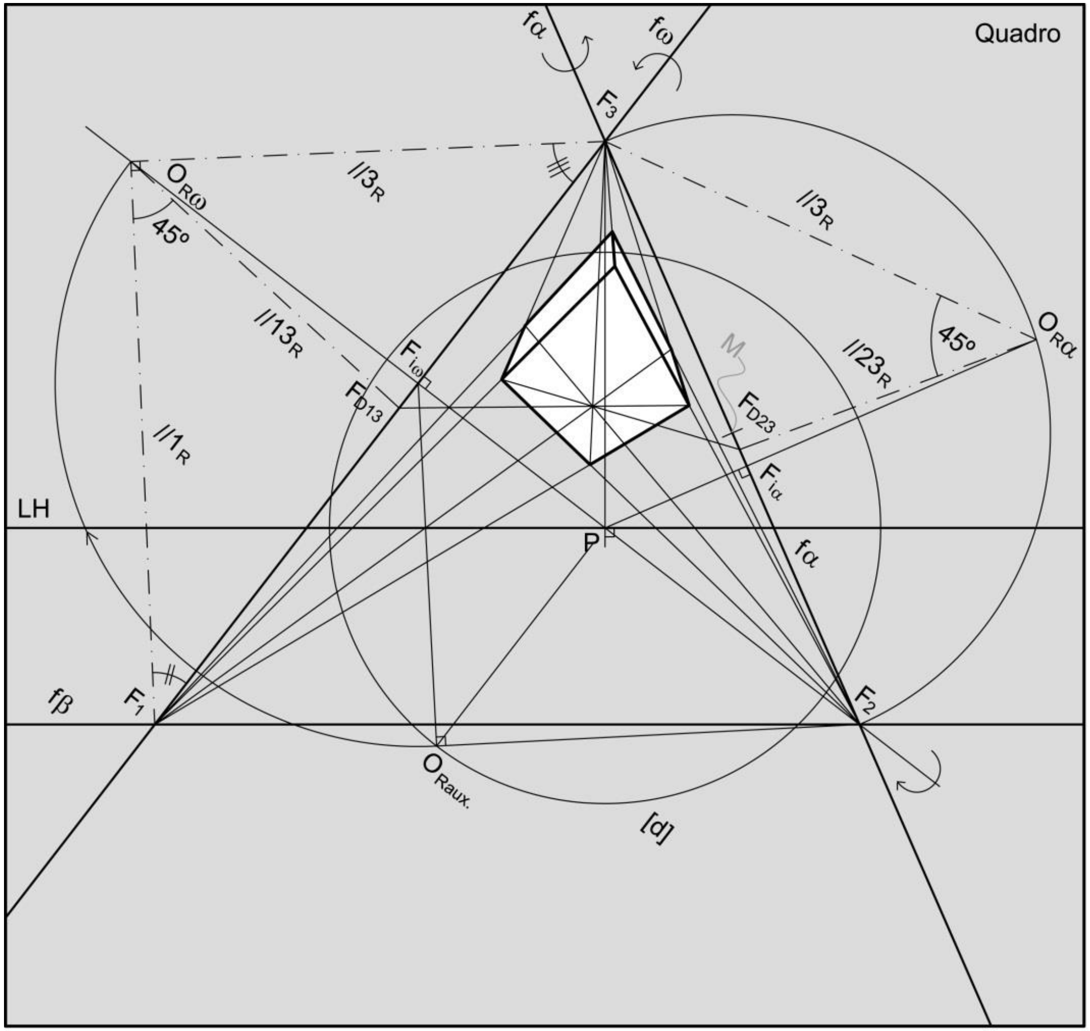
$f\beta$ LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

"3 PONTOS DE FUGA" – taxonomias



F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM A ORIENTAÇÃO α (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_3	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_1	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLIQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_2	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
f α	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
f ω	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
f β	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

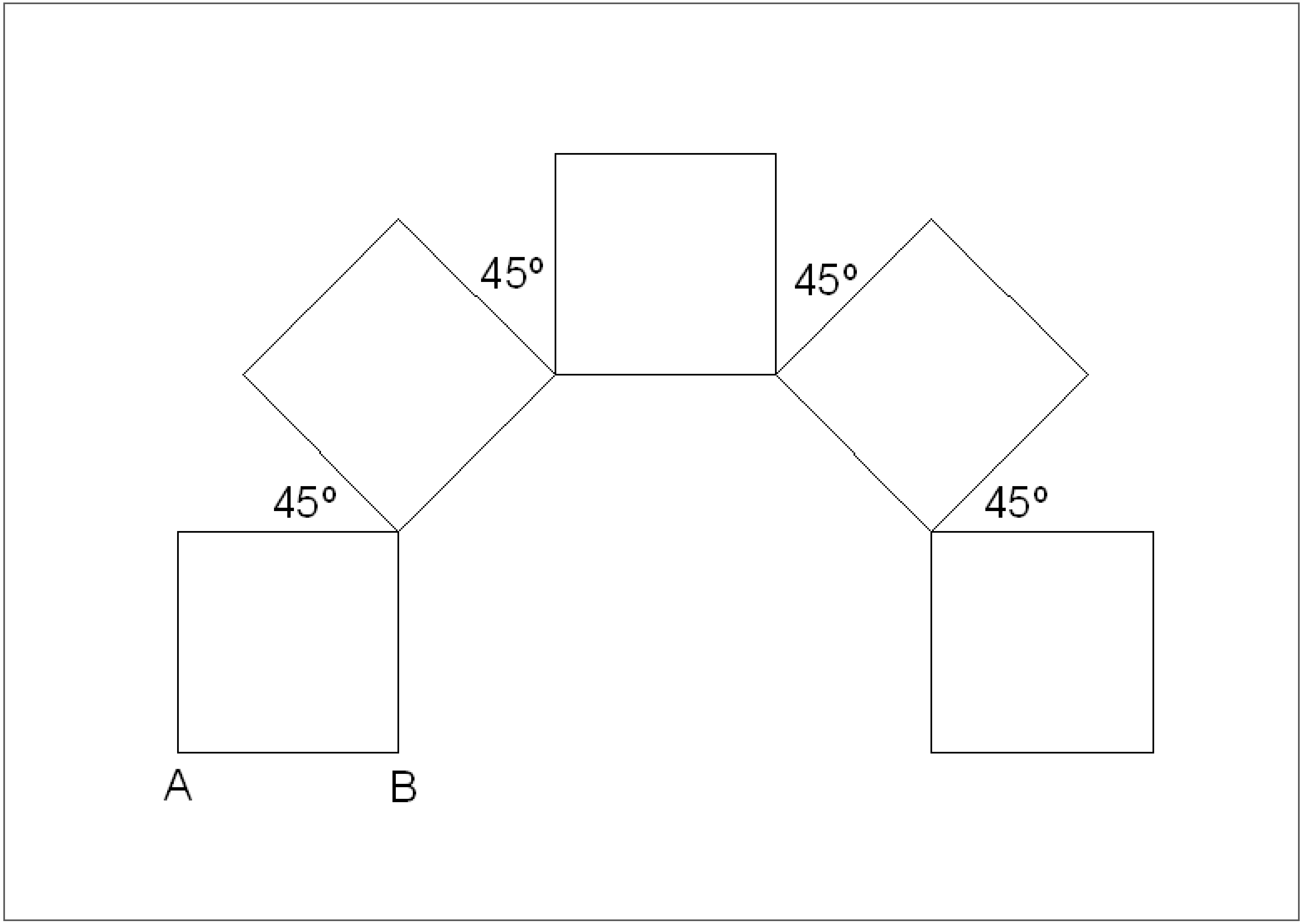
“3 PONTOS DE FUGA” – taxonomias



F_{D23}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45º COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
F_{D13}	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45º COM A ORIENTAÇÃO α (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_3	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL (ASCENDENTE)
F_1	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLIQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
F_2	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$f\,\alpha$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$f\,\omega$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$f\,\beta$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE RAMPA (DESCENDENTE)

Exercícios

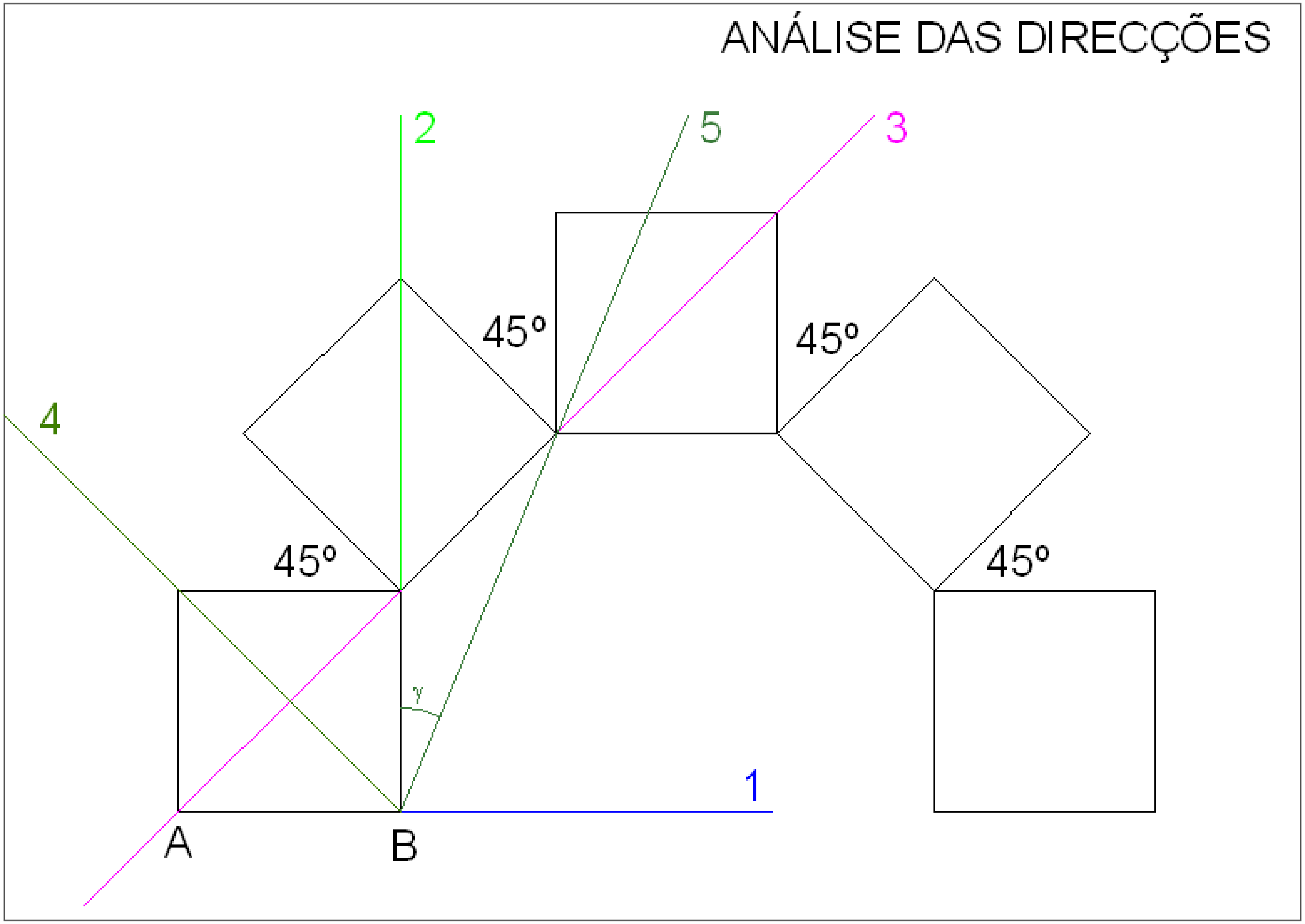
Considere a figura seguinte composta por quadrados rodados a 45º uns relativamente aos outros. Note os pontos de referência A e B.



Exercícios

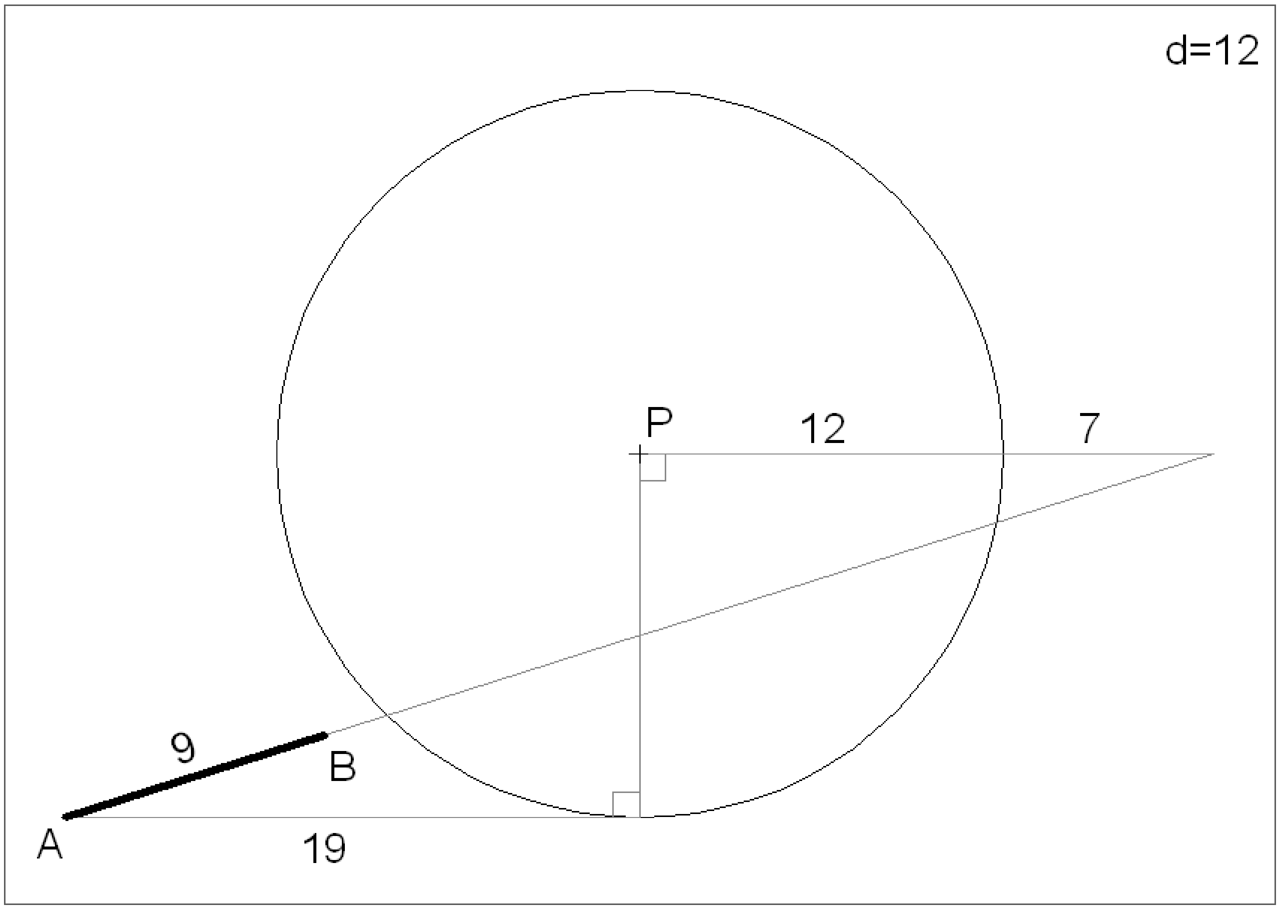
A figura anterior será considerada como projecção de cubos ou de prismas regulares (com altura dupla da largura da base) a representar em perspectiva.

O primeiro passo dessa representação é o entendimento da relação entre as direcções que podem ser encontradas na figura. O desenho seguinte traduz essa análise.



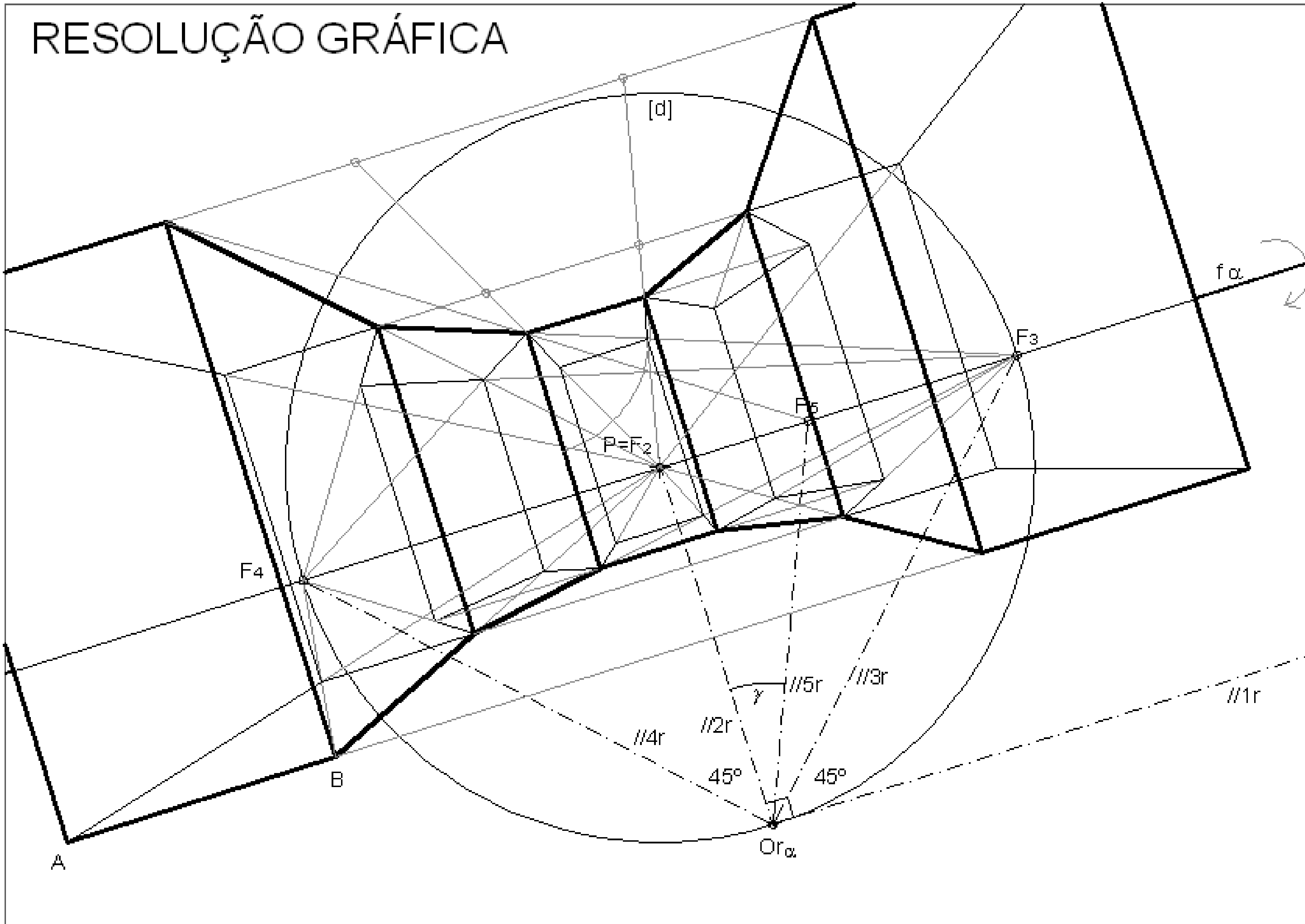
Exercícios - 1

Problema.
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.
O segmento [AB] é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.
O segmento [AB] é a perspectiva de um segmento paralelo ao quadro. E os quadrados são bases de prismas orientadas ortogonalmente ao quadro.
A altura dos prismas é o dobro da largura da base.
Represente a perspectiva dos prismas considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.

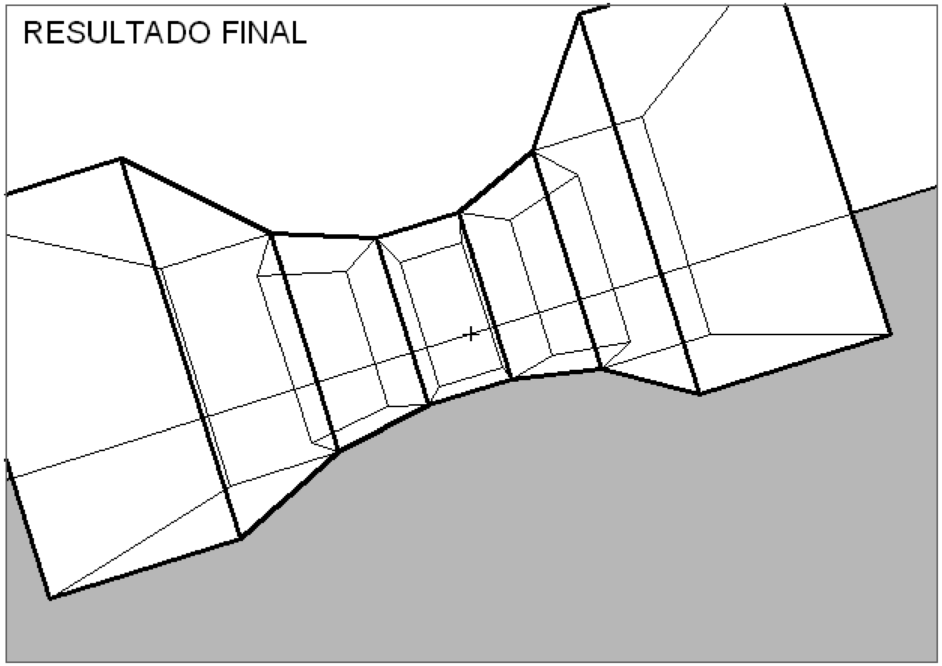


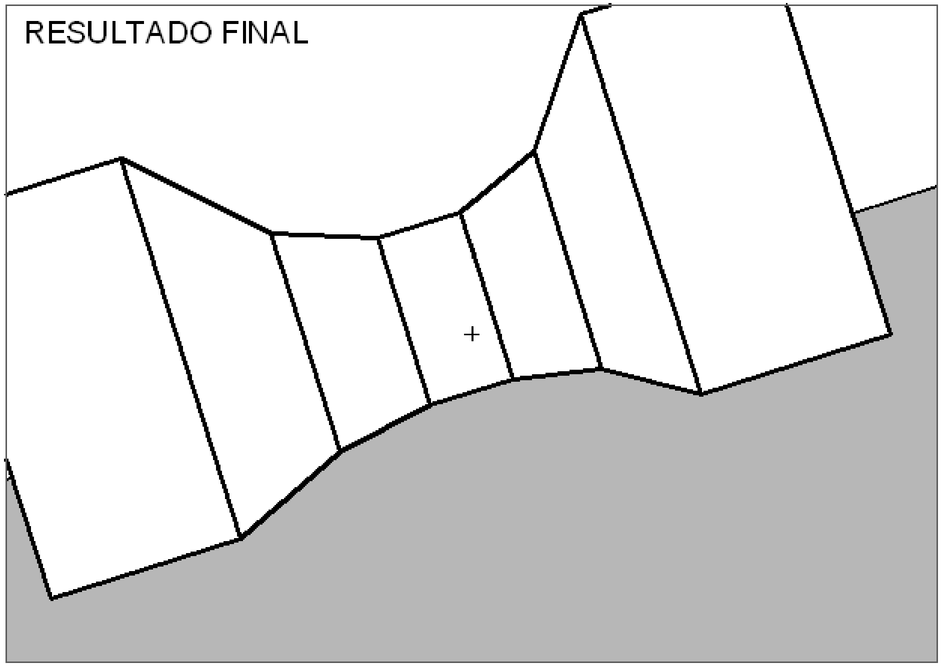
Exercícios - 1

RESOLUÇÃO GRÁFICA



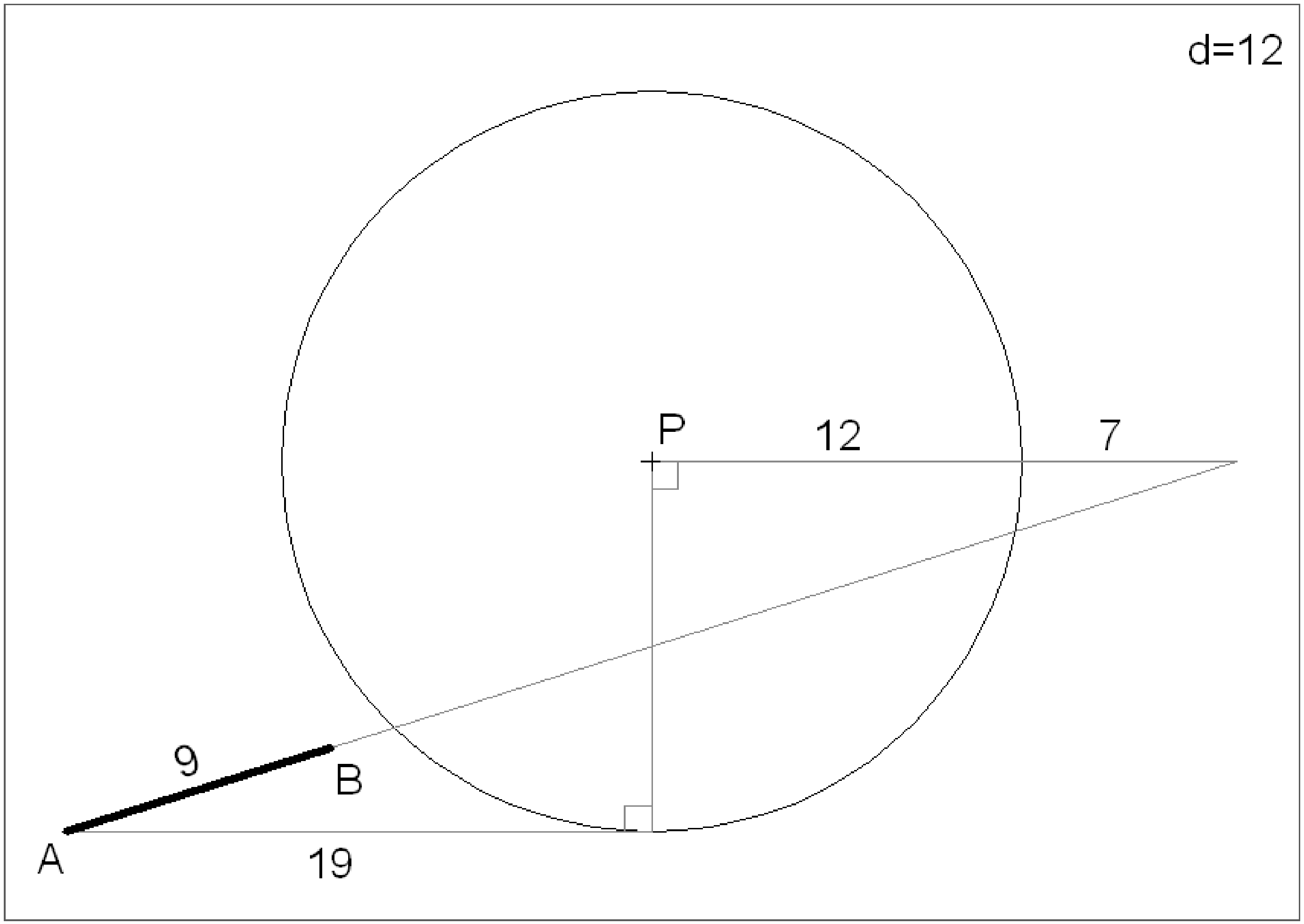
Exercícios - 1



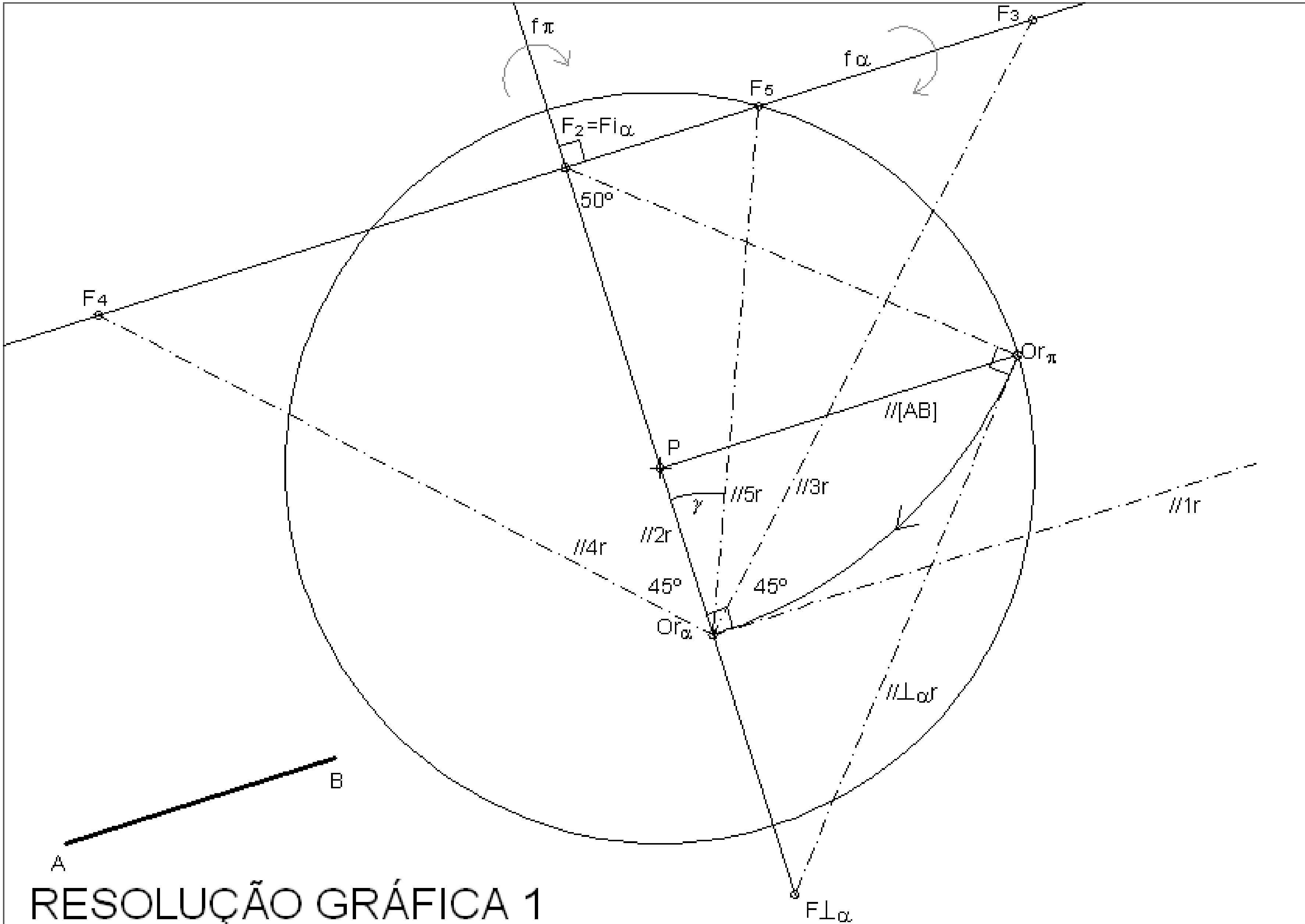


Exercícios - 2

Problema.
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.
O segmento [AB] é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.
O segmento [AB] é a perspectiva de um segmento paralelo ao quadro. E os quadrados são bases de cubos orientadas a 50º (ascendente) com o quadro..
Represente a perspectiva dos cubos considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.

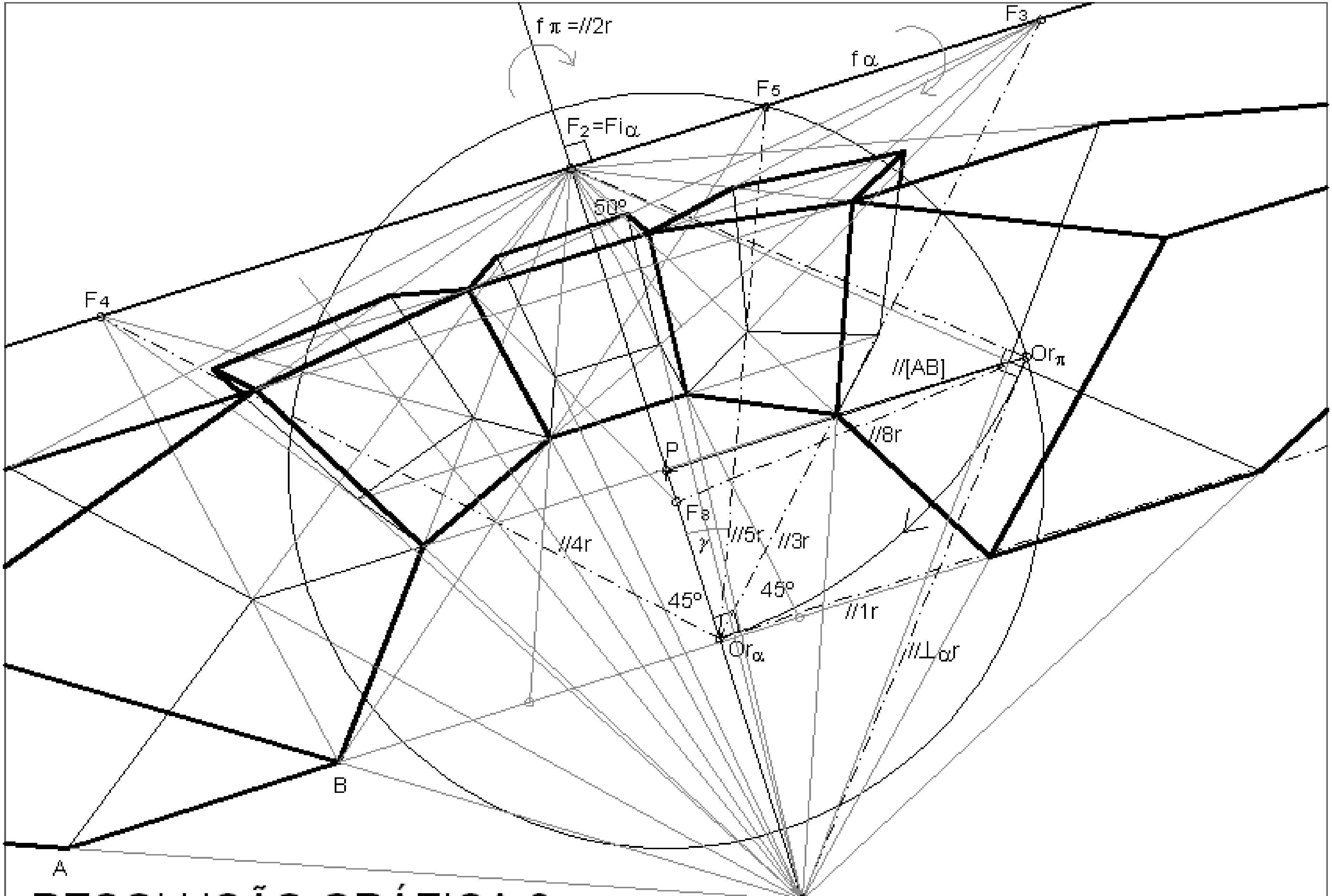


Exercícios - 2



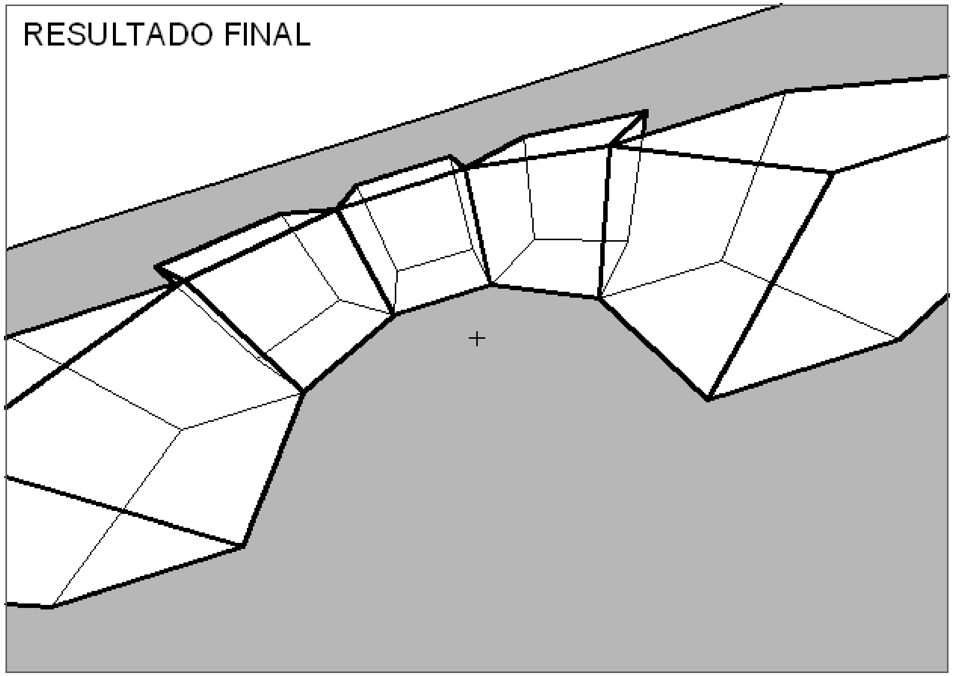
RESOLUÇÃO GRÁFICA 1

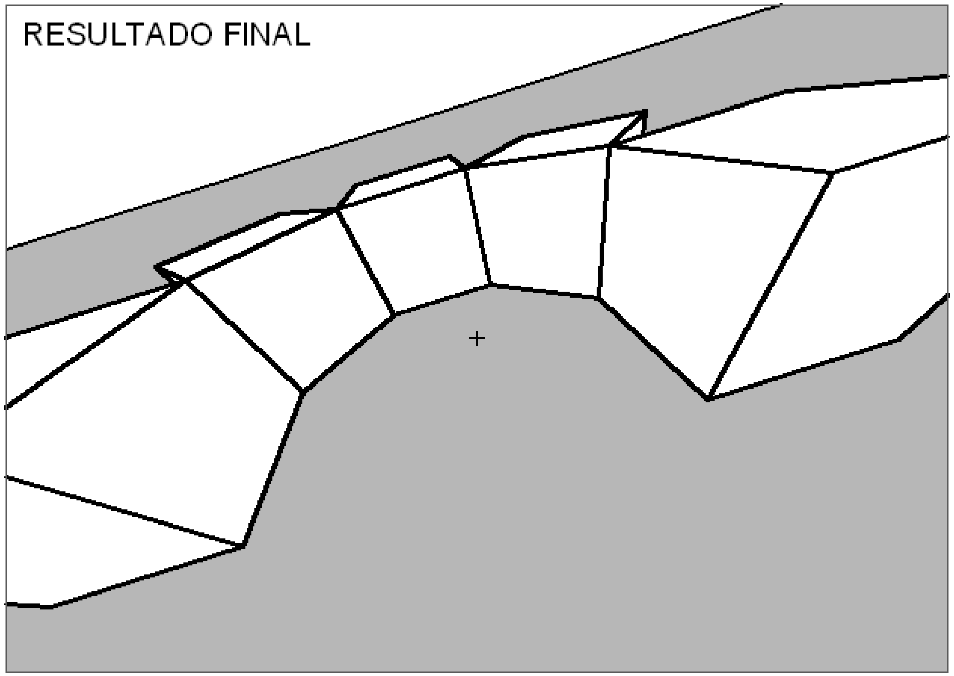
Exercícios - 2



RESOLUÇÃO GRÁFICA 2

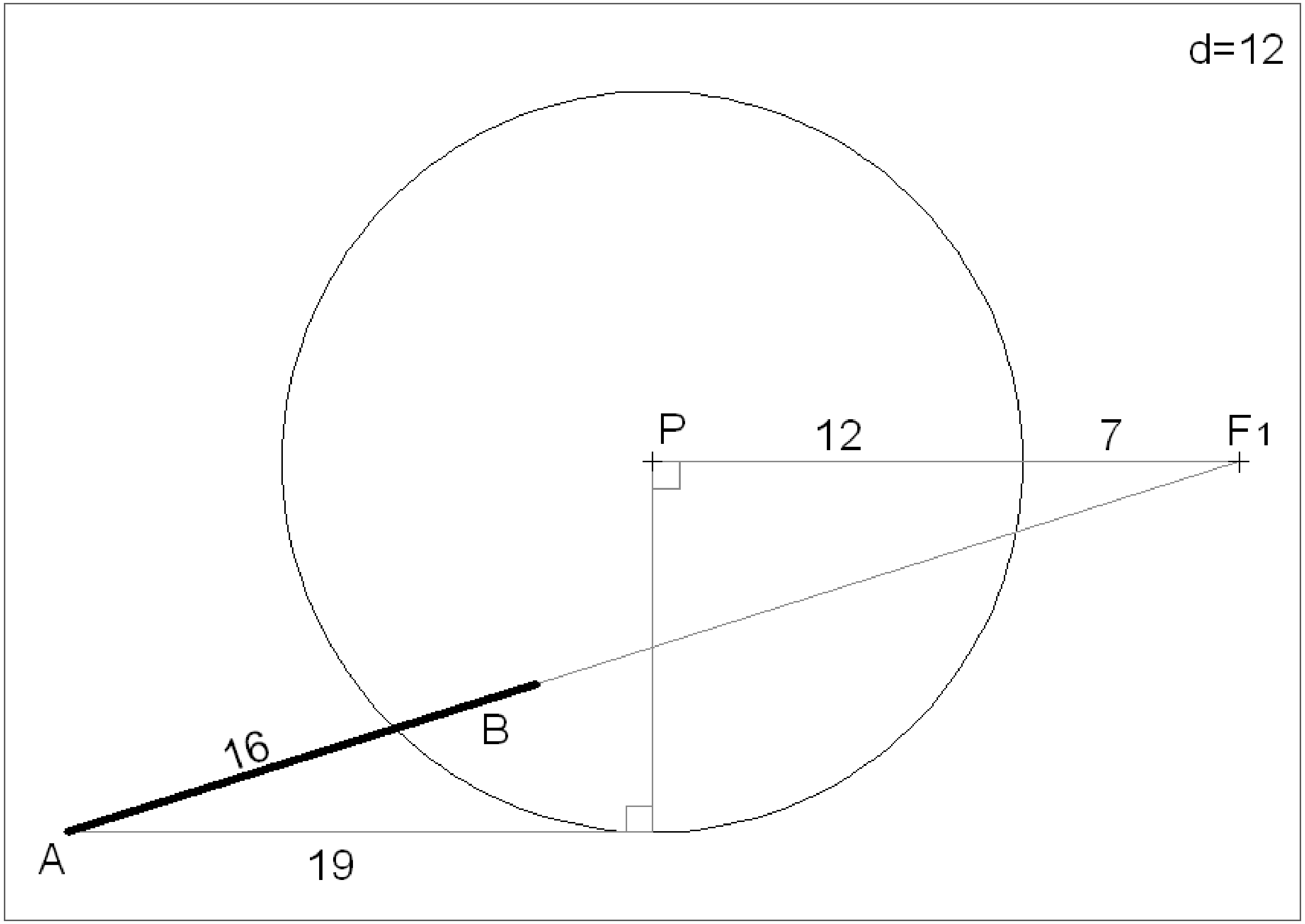
Exercícios - 2



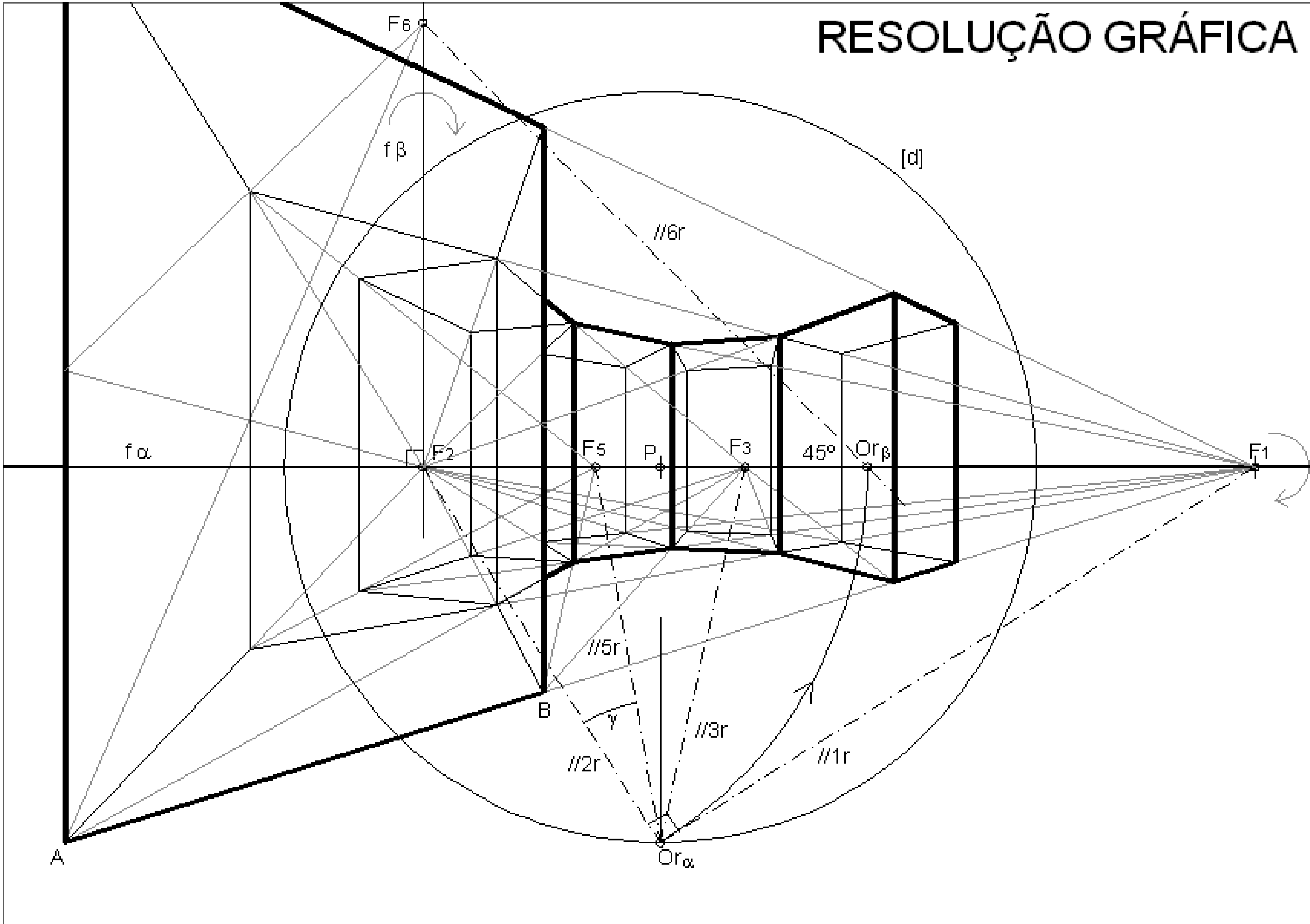


Exercícios - 3

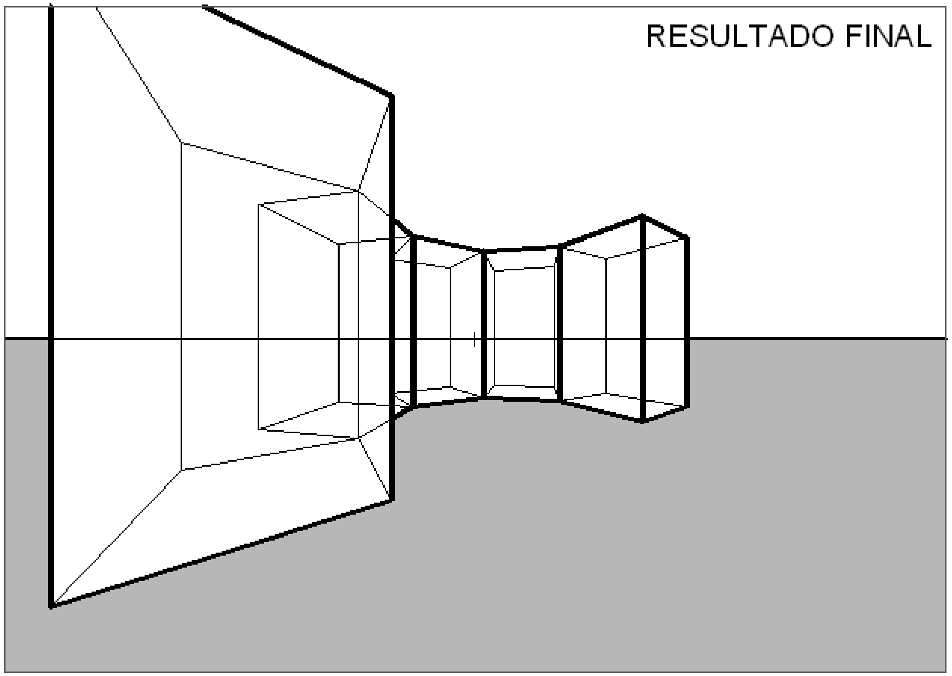
Problema.
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.
O segmento [AB] é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.
O segmento [AB] é a perspectiva de um segmento oblíquo ao quadro. E os quadrados são bases de prismas (com altura igual ao dobro da largura da base) orientadas ortogonalmente ao quadro.
Represente a perspectiva dos prismas considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.

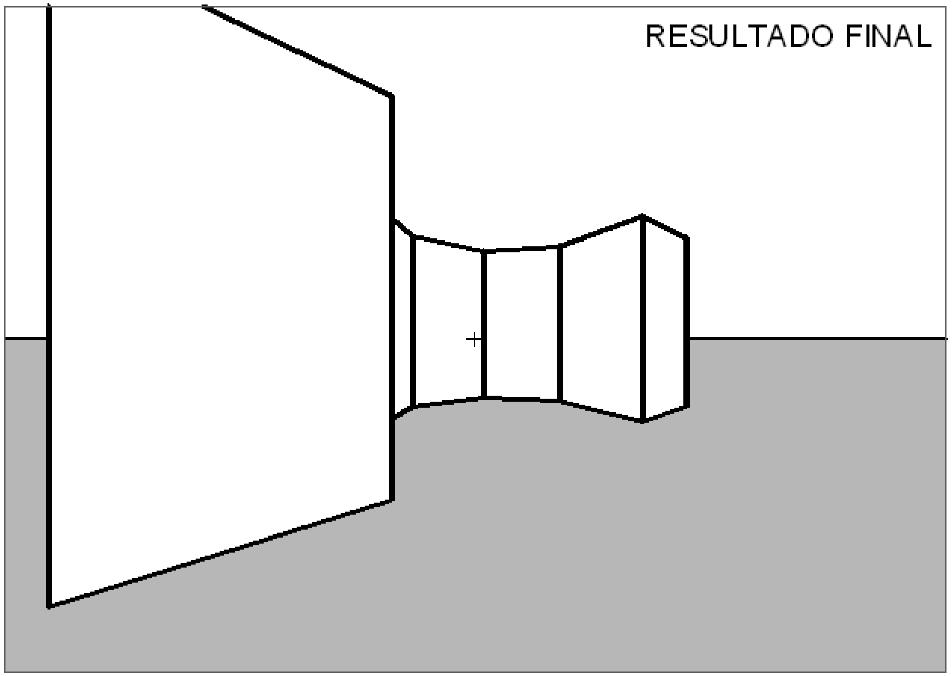


Exercícios - 3



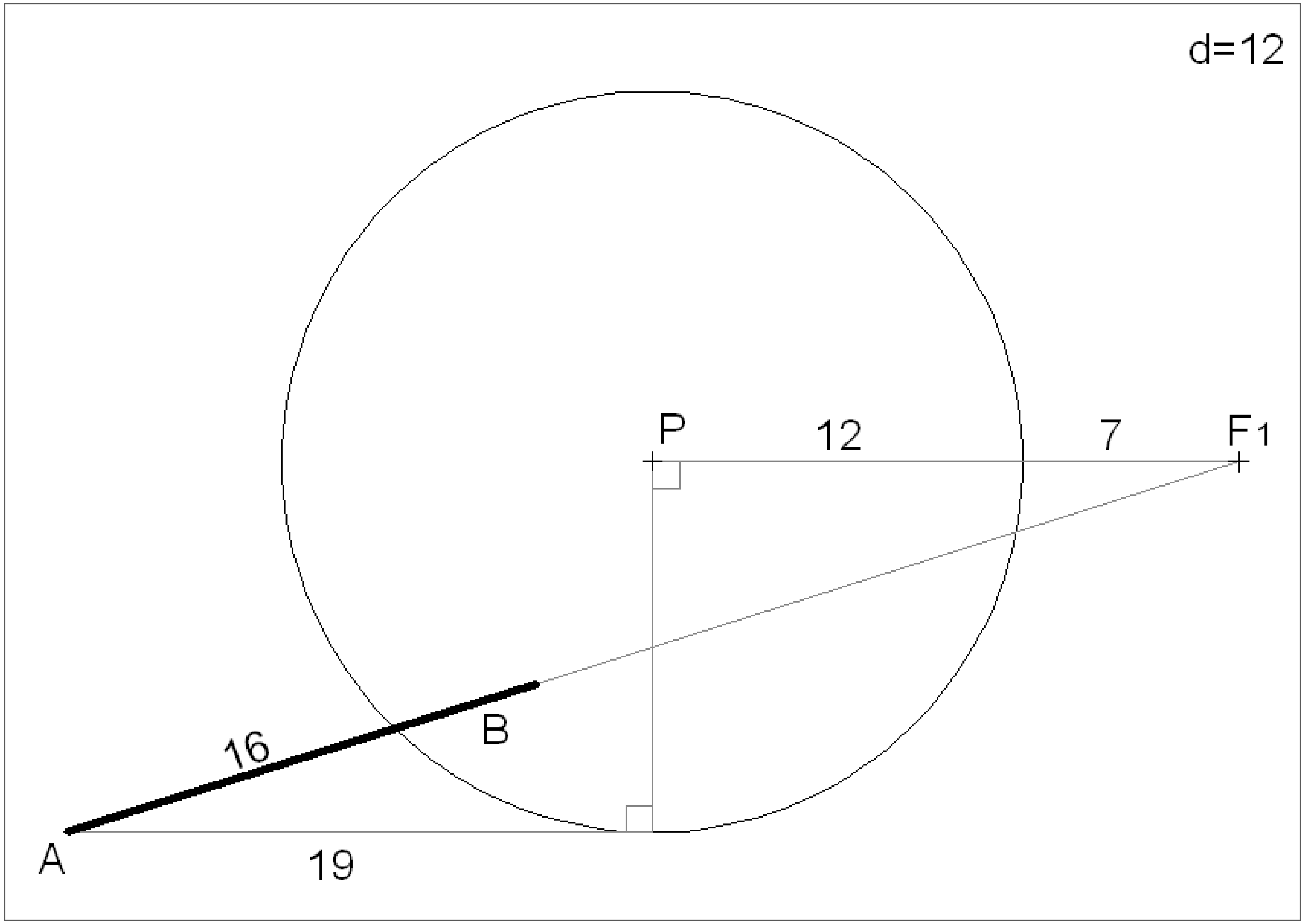
Exercícios - 3



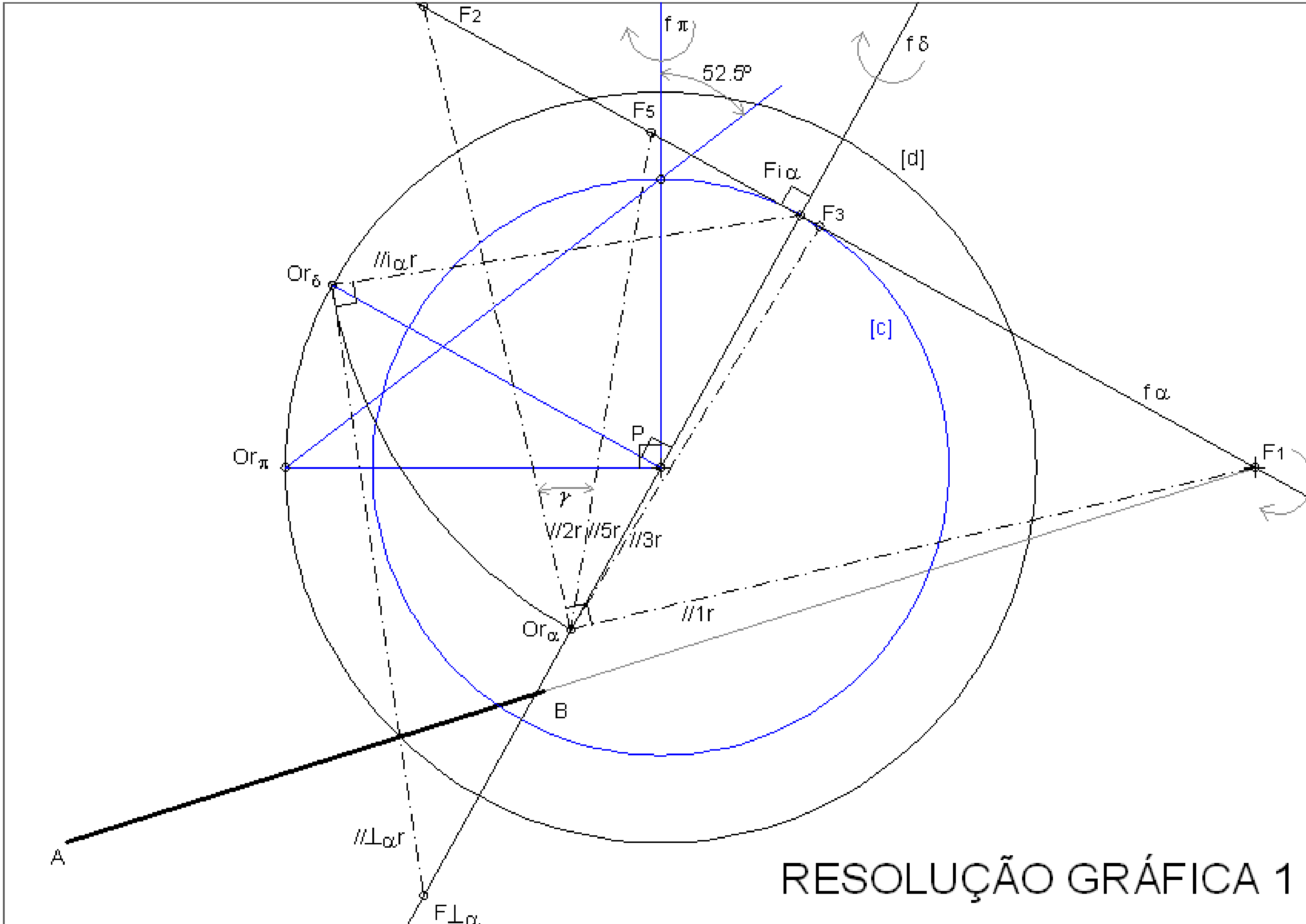


Exercícios - 4

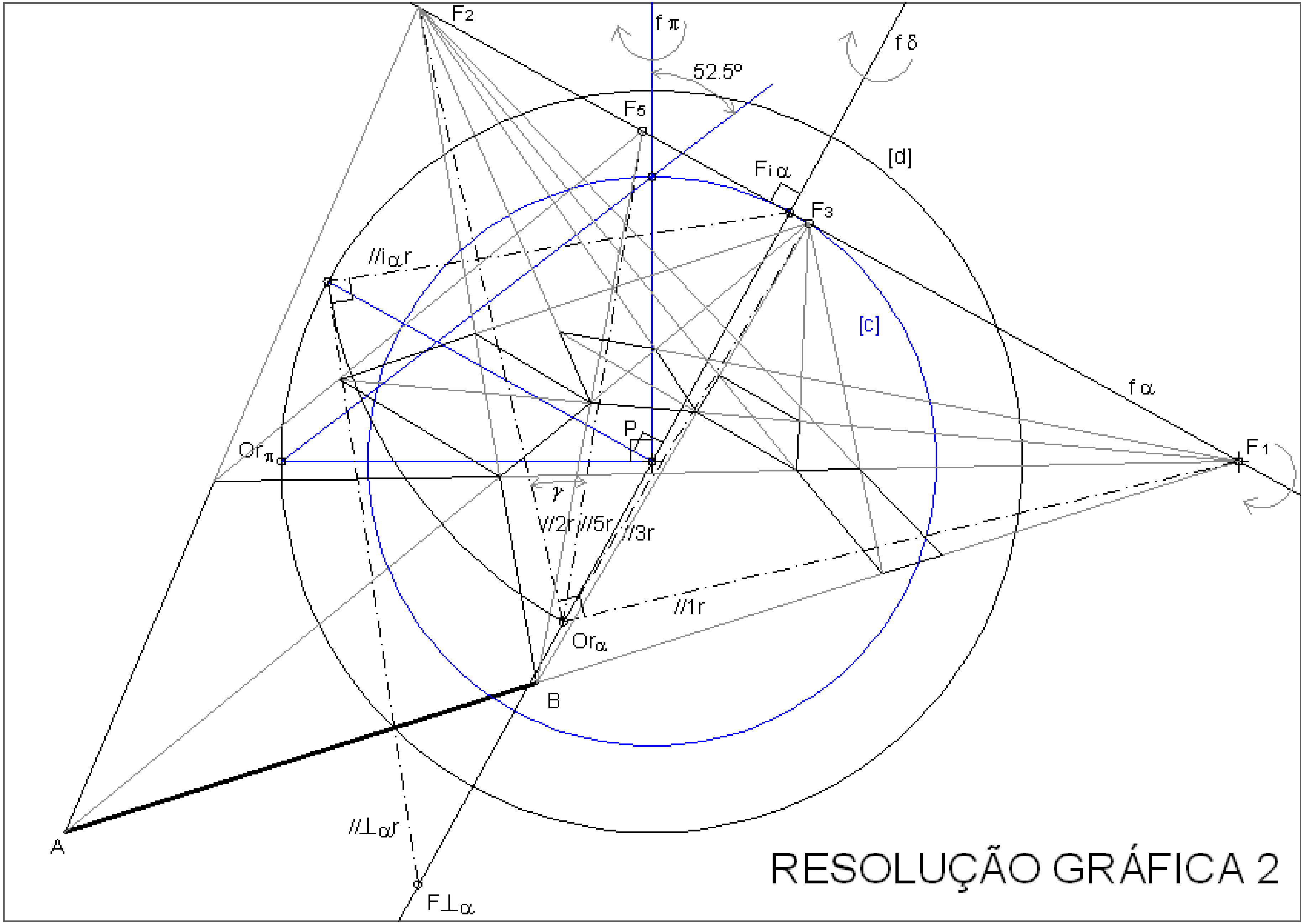
Problema.
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.
O segmento [AB] é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.
O segmento [AB] é a perspectiva de um segmento oblíquo ao quadro. E os quadrados são bases de cubos orientadas a 52.5º (ascendente) com o quadro.
Represente a perspectiva dos cubos considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.



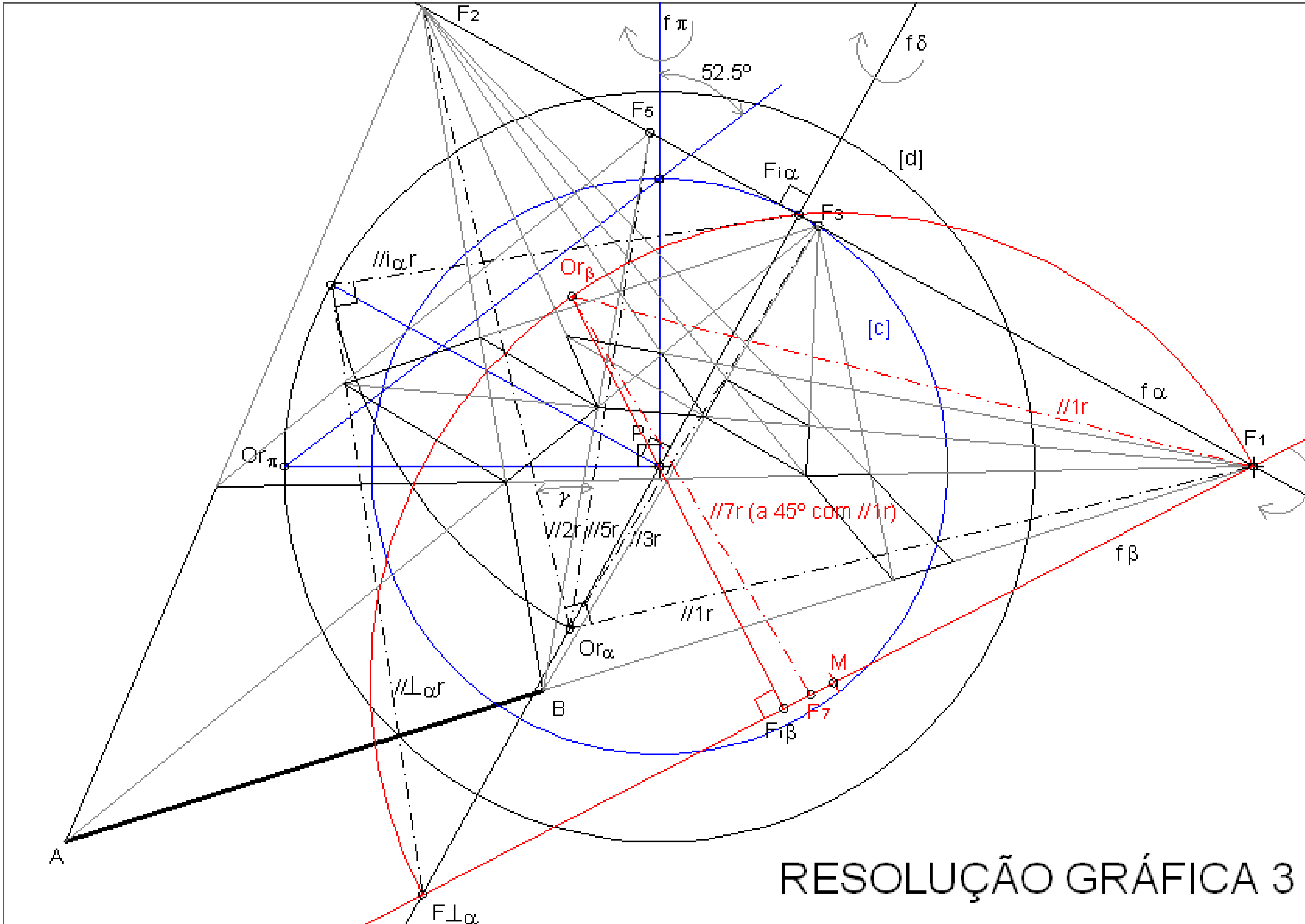
Exercícios - 4



Exercícios - 4

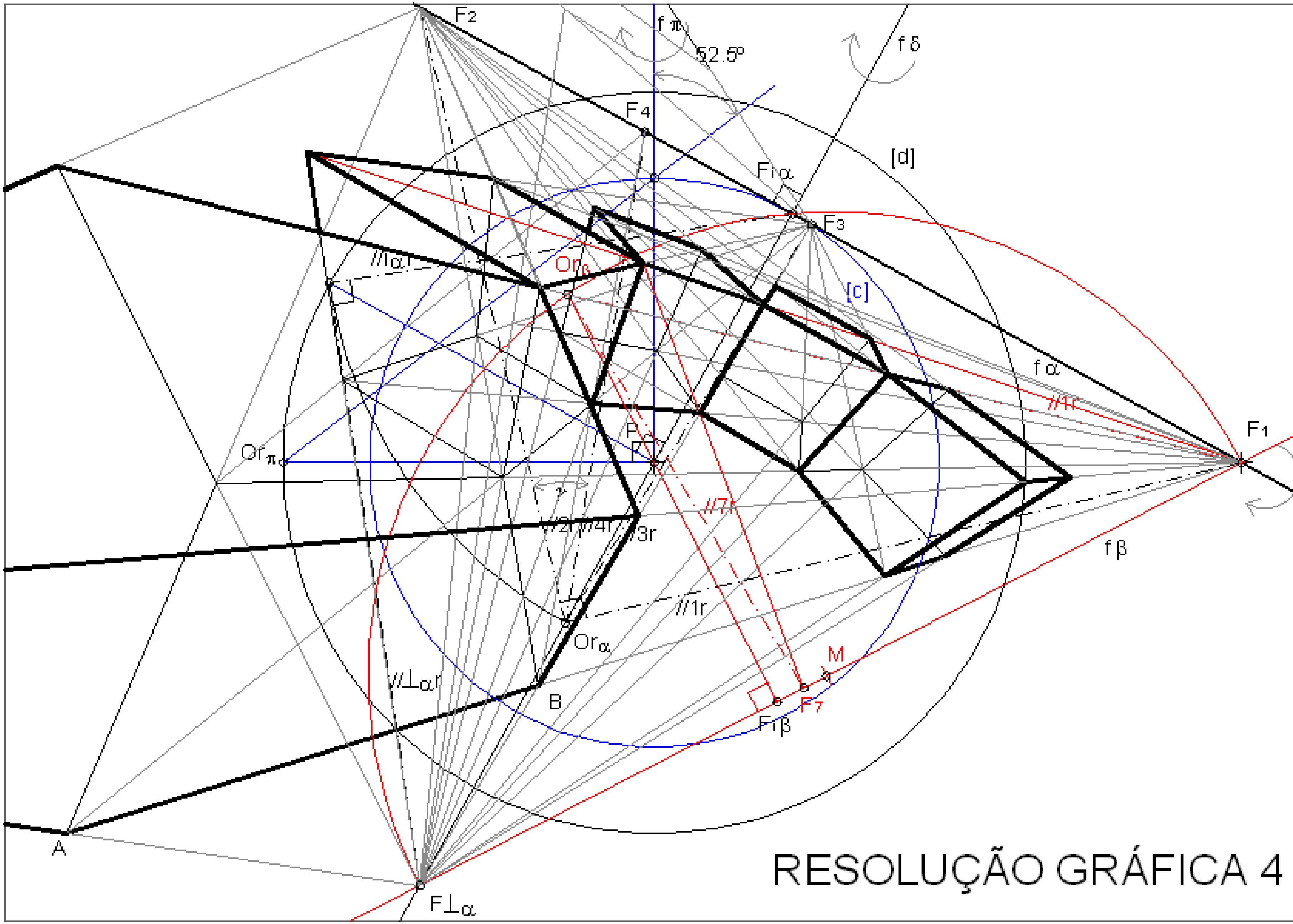


Exercícios - 4

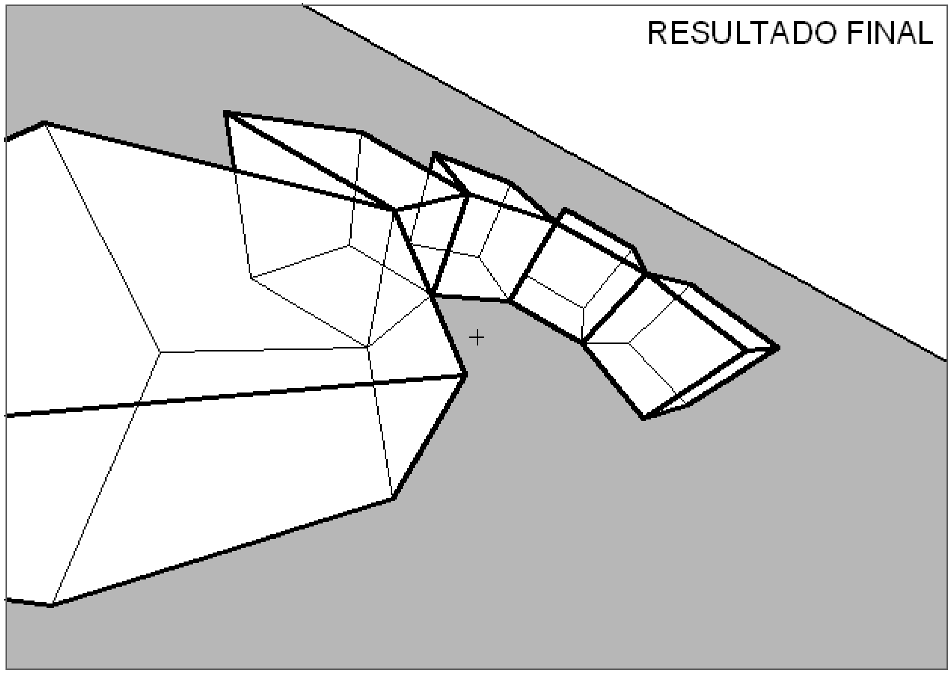


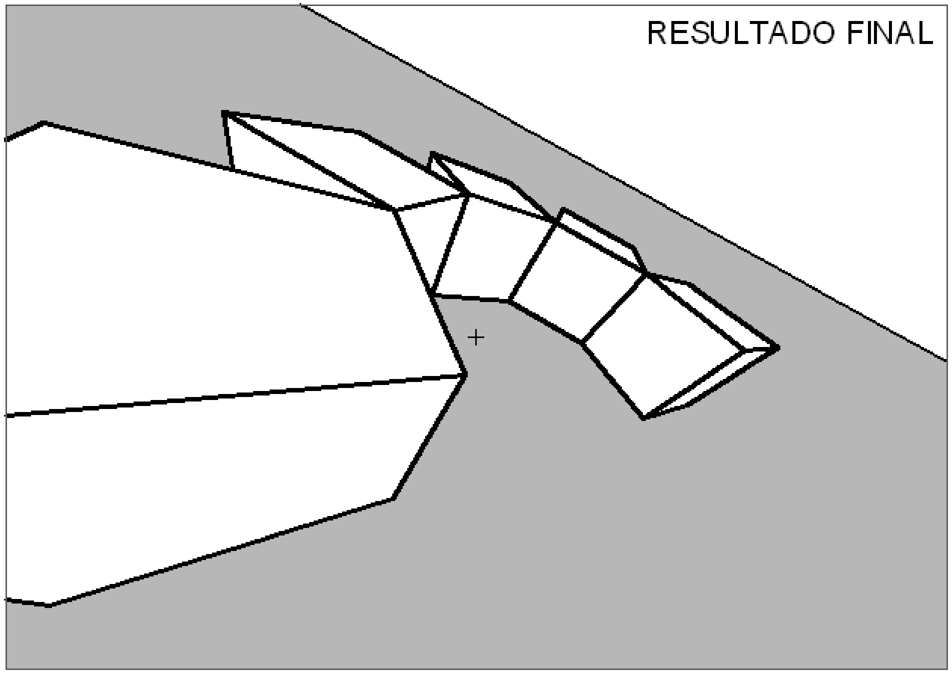
RESOLUÇÃO GRÁFICA 3

Exercícios - 4



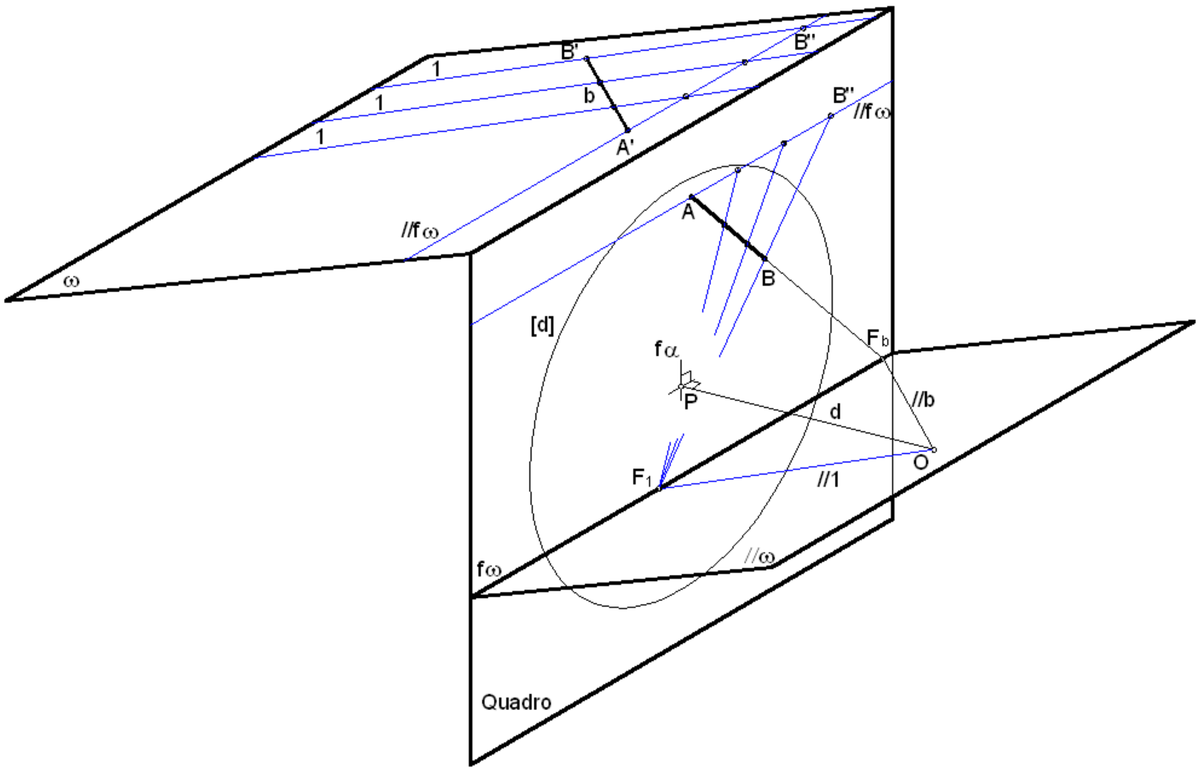
Exercícios - 4

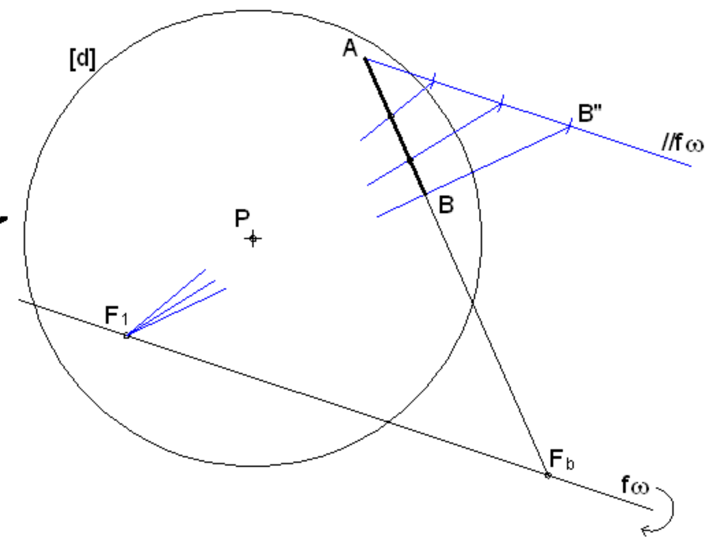




Controlo da proporção – T. Talles

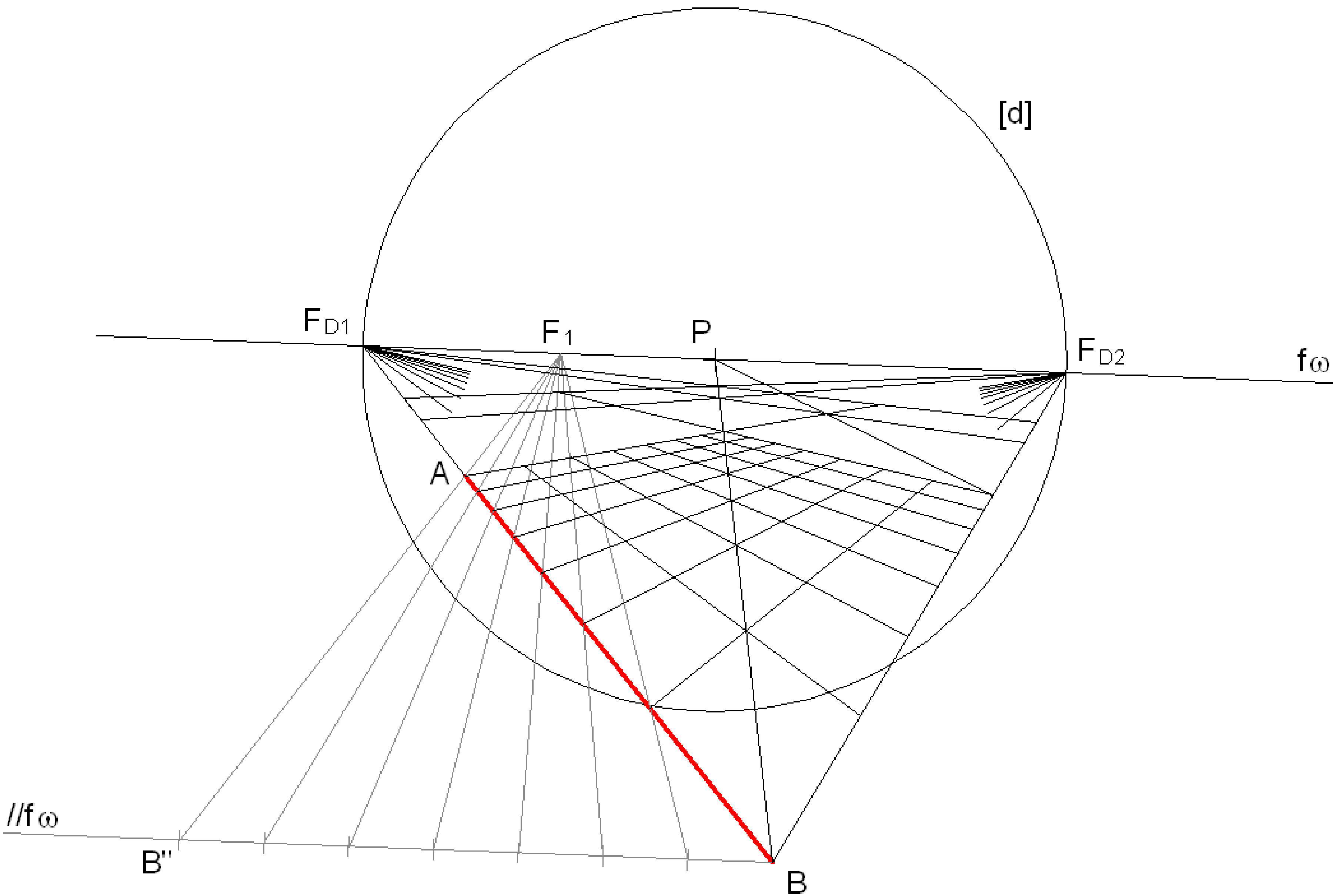
Conduz-se por um extremo do segmento que se pretende dividir, o ponto A, uma recta frontal (//fω), isto é, uma recta paralela ao quadro, em que se marca uma divisão com a proporção daquela que se pretende. O extremo oposto a essa divisão é o ponto B''. Esta recta e o segmento definem um plano. Este plano tem por linha de fuga uma recta com a direcção da recta frontal (fω). Esta passa pelo ponto de fuga da recta que contém o segmento, isto é, por F_b. Nessa recta marca-se a divisão com a proporção pretendida. Une-se o último ponto da divisão, o ponto B'', ao extremo oposto do segmento que se pretende dividir, o ponto B. Esta recta intersecta a linha de fuga fω num ponto de fuga auxiliar que designámos por F_1. A partir deste ponto procede-se ao resto da divisão.





Desenho de grelhas

Neste exemplo pretende-se o desenho de uma grelha quadrangular orientada ortogonalmente ao quadro.
O Segmento [AB] corresponde a 7 lados da grelha.



4. Estudo das superfícies

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito.

A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

Cada plano tem uma ORIENTAÇÃO; orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si.

Cada plano contém uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito.

A cada orientação de planos corresponde apenas uma recta imprópria, isto é, todos os planos paralelos entre si têm a mesma recta do infinito, daí dizer-se que planos paralelos se intersectam no infinito.

Uma orientação contém uma infinidade de direcções.

O lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as rectas impróprias é o PLANO IMPRÓPRIO, isto é, o plano do infinito.

A SUPERFÍCIE é uma entidade bidimensional gerada pelo movimento contínuo da linha.

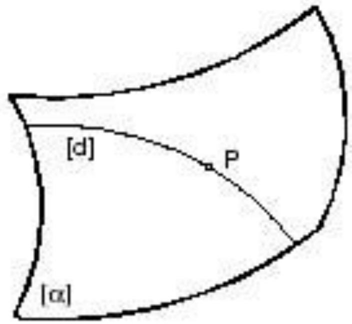
A GERATRIZ é a linha, deformável ou indeformável, que se move no espaço para gerar a superfície.

A DIRECTRIZ é a linha ou superfície em que se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a directriz for uma superfície, então a superfície gerada diz-se de NÚCLEO.

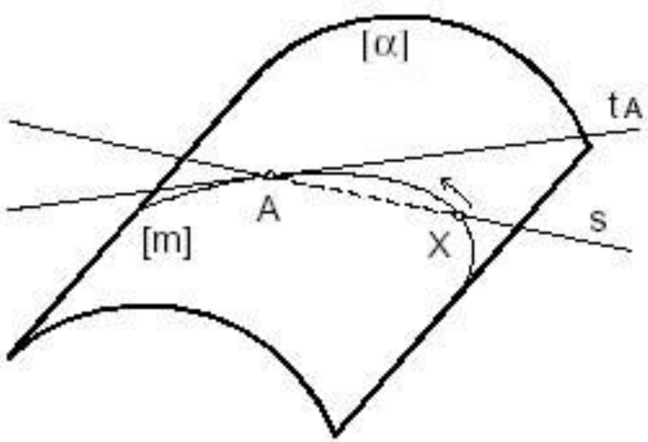
Estudo das Superfícies - Noções gerais

Condições de pertença



Se o ponto P pertencer à linha $[d]$ e a linha $[d]$ pertencer à superfície $[\alpha]$, então o ponto P pertence à superfície $[\alpha]$.

Recta tangente



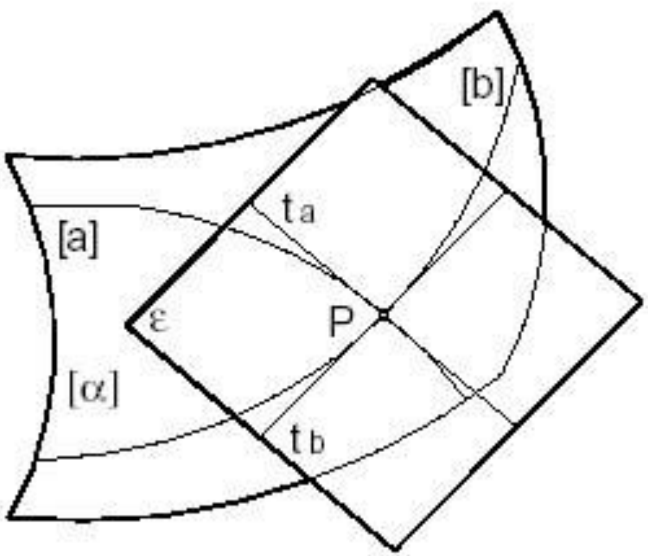
O ponto A pertence à linha $[m]$ e a linha $[m]$ pertence à superfície $[\alpha]$.

A recta t_A, tangente à linha $[m]$ no ponto A, é a posição limite da recta secante s, quando o ponto X tende para o ponto A.

Se a recta t_A é tangente à linha $[m]$, é também tangente à superfície $[\alpha]$.

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Plano tangente



Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas, pertencentes à superfície $[\alpha]$, concorrentes no ponto P.

Sejam t_a e t_b as rectas tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, no ponto P.

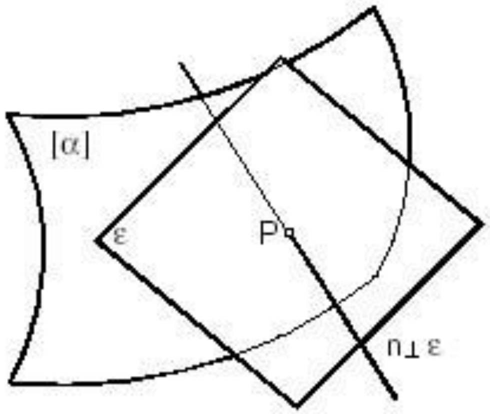
O plano ε, definido pelas rectas t_a e t_a, é o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

O plano ε é o lugar geométrico de todas as rectas tangentes à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

Do plano tangente a uma superfície diz-se que é OSCULANTE.

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Recta normal e plano normal



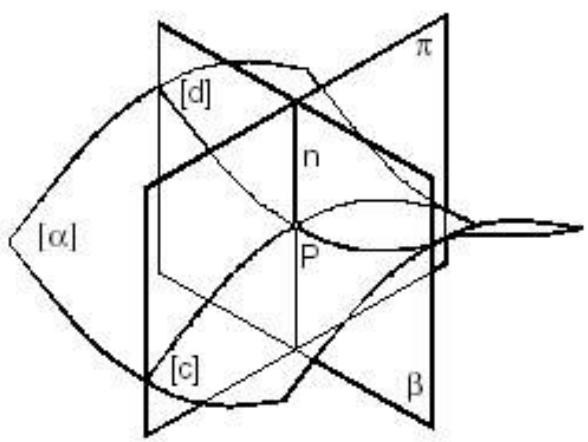
Seja ε o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

Seja n uma recta perpendicular ao plano ε no ponto P.

A recta n diz-se NORMAL à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

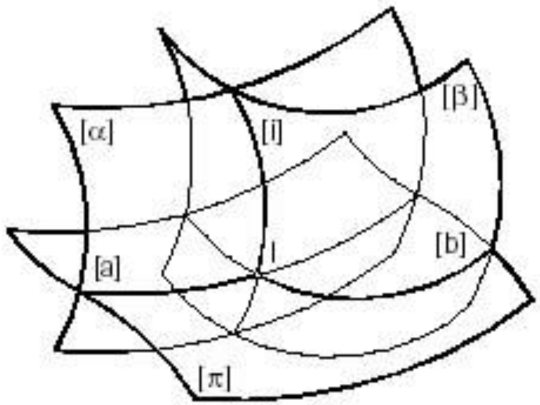
De um plano que contenha a recta n diz-se que é normal à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

Curvatura de uma superfície

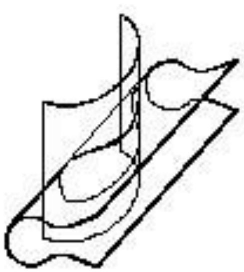


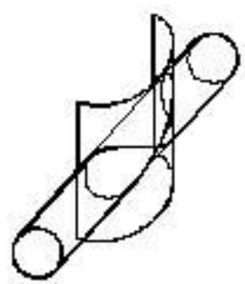
Estudo das Superfícies - Noções gerais

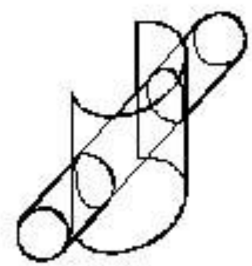
Intersecção de superfícies



Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto I da linha $[i]$.







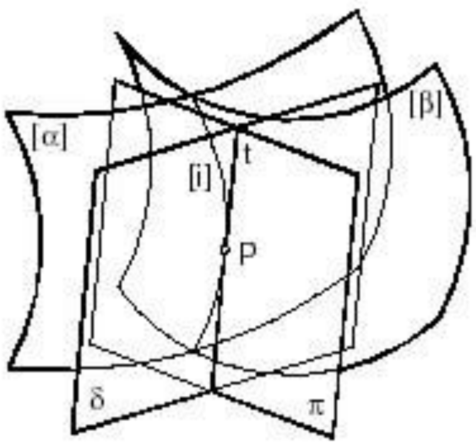
Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.

Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.

Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Recta tangente à linha de intersecção



Seja $[i]$ a linha de intersecção entre as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja P um ponto da linha $[i]$, logo ponto comum $[\alpha]$ e $[\beta]$.

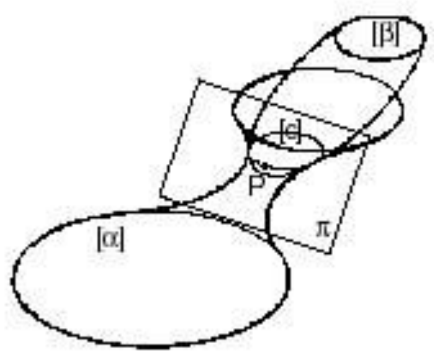
Seja δ o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P.

Seja π o plano tangente à superfície $[\beta]$ no ponto P.

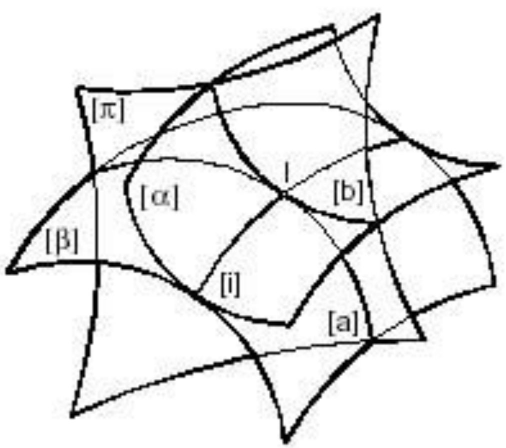
A recta t, de intersecção entre os planos δ e π, é a recta tangente à linha $[i]$ no ponto P.

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Concordância entre superfícies



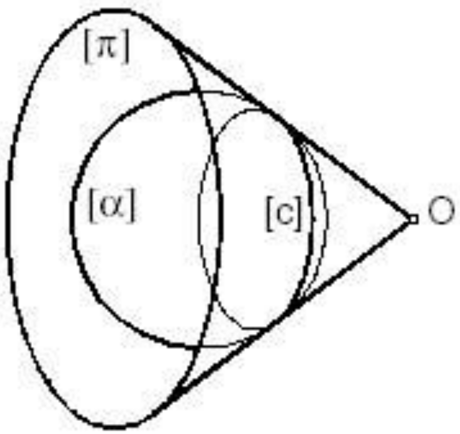
Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ admitirem os mesmos planos tangentes π em todos os pontos P da linha $[c]$ comum a ambas, então as duas superfícies dizem-se concordantes segundo a linha $[c]$.



Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo as linhas $[b]$ e $[a]$, respectivamente, de tal modo que as linhas $[b]$ e $[a]$ são tangentes entre si num ponto I da linha $[i]$.

Estudo das Superfícies - Noções gerais

Contorno aparente



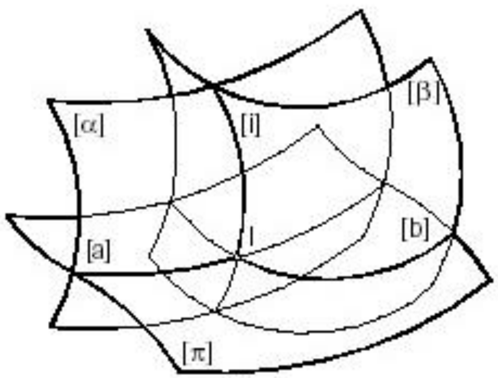
O contorno aparente de uma superfíce $[\alpha]$ para um "observador" (centro de projecções) O é a linha $[c]$ de concordância entre a superfície $[\alpha]$ e uma superfície cónica $[\pi]$ de vértice O, que projectada a partir de O sobre uma superfície $[\beta]$ qualquer determina nesta uma linha $[c']$ que delimita a projecção de $[\alpha]$.

Se o observador estiver no infinito, então $[\pi]$ é uma superfície cilíndrica.

Distinção entre superfície e sólido

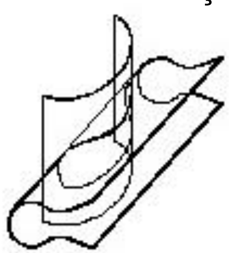
Uma superfície é a entidade que delimita o volume do sólido.

Estudo das Superfícies - Intersecções

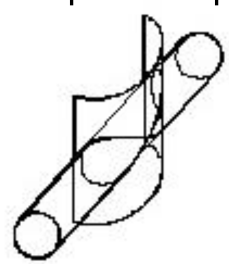


Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto I da linha $[i]$.

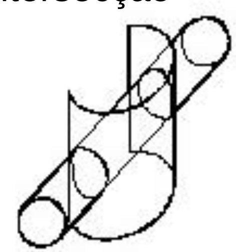
Linha de intersecção única



Linha de intersecção com ponto duplo

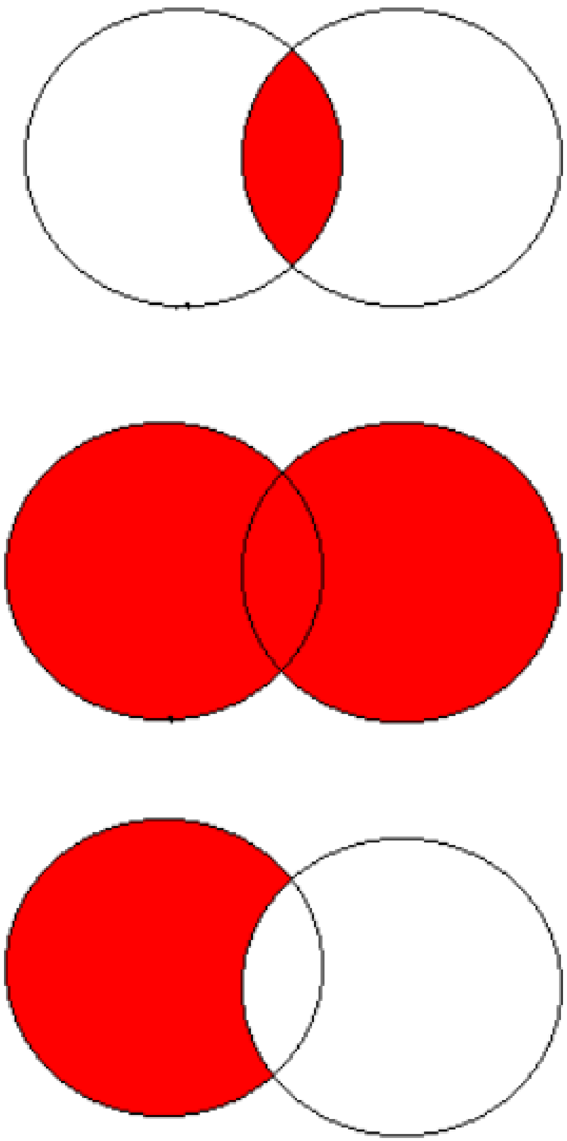


Duas linhas de intersecção



Da declaração feita, podem deduzir-se métodos gráficos para resolver a intersecção entre superfícies (e sólidos). Cada um desses métodos consistirá em definir superfícies auxiliares por meio das quais se determinam pontos das linhas de intersecção entre as superfícies base.
A seguir veremos dois métodos: i) intersecção entre superfícies cónicas, e ii) intersecção entre superfícies de revolução.
<u>Note-se no entanto, que perante cada caso concreto podem ser deduzidos mais convenientes aplicáveis ao caso em estudo. É por exemplo o caso em que uma das superfícies é projectante.</u>

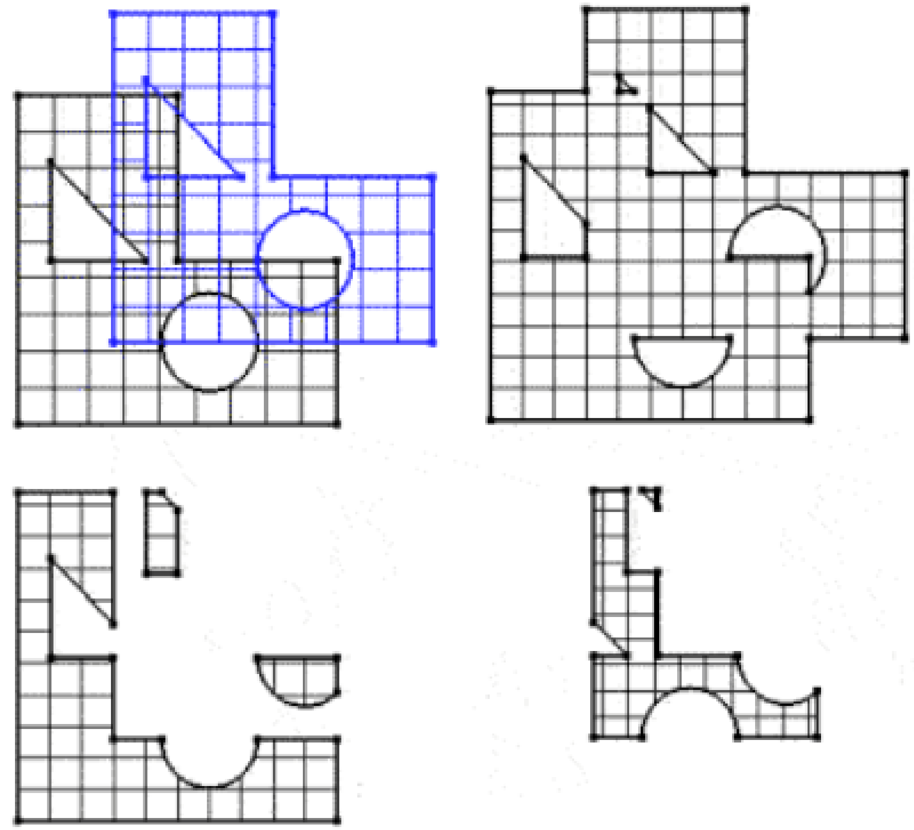
Operações booleanas



Intersecção

União

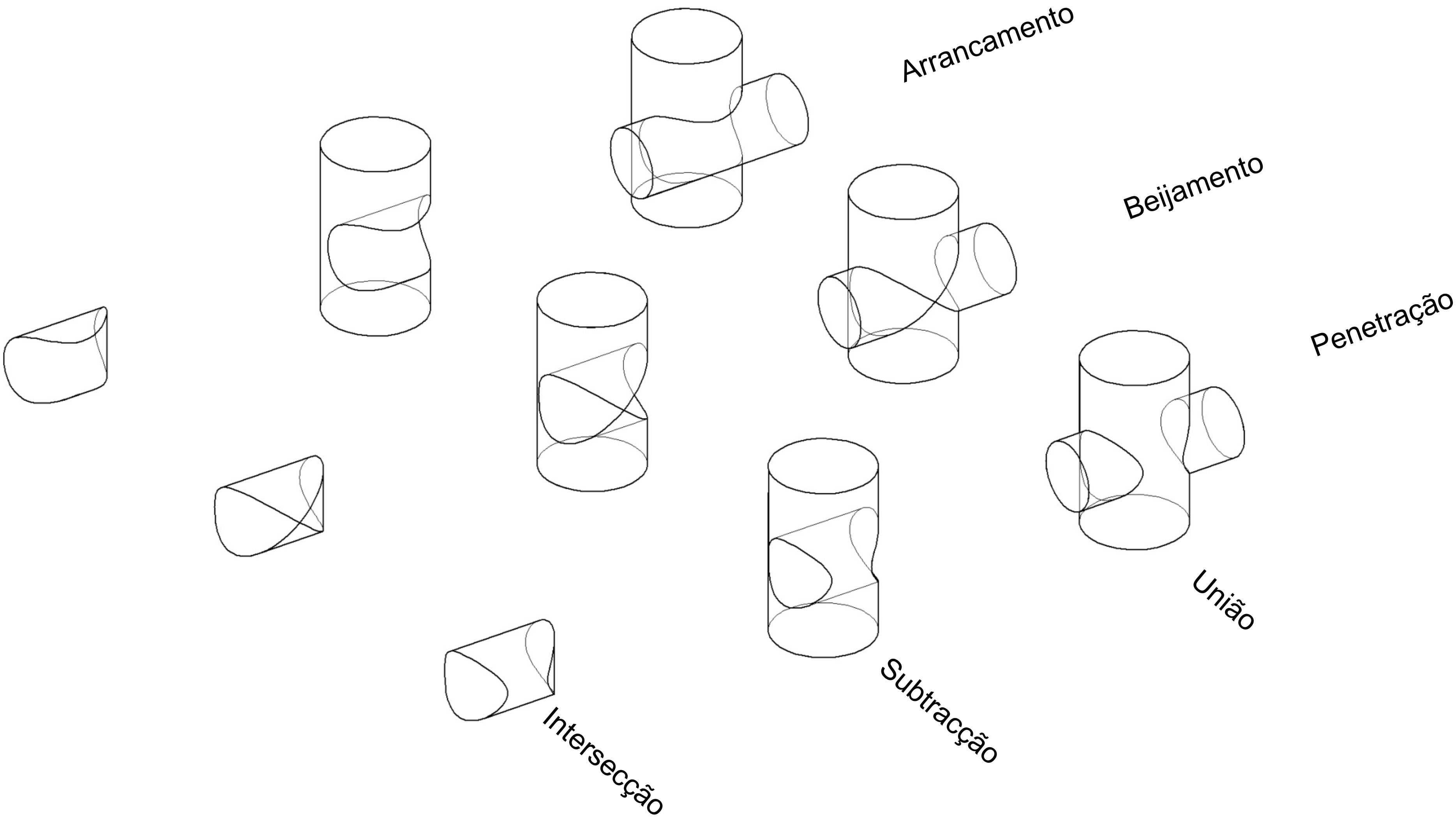
Subtracção



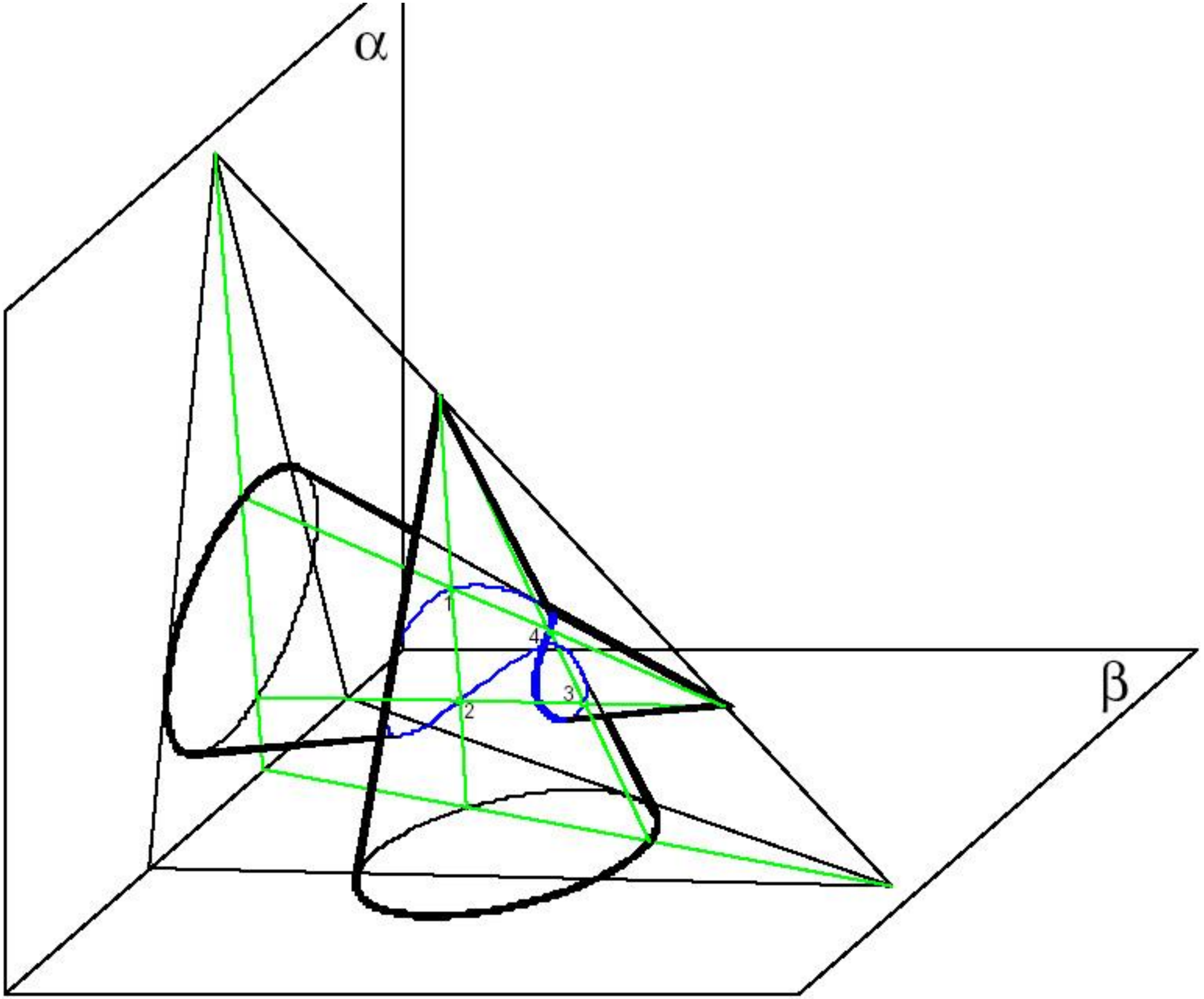
http://www.smlib.com/tsnlib.html

https://libguides.uwi.edu/c.php?g=280956&p=1891696

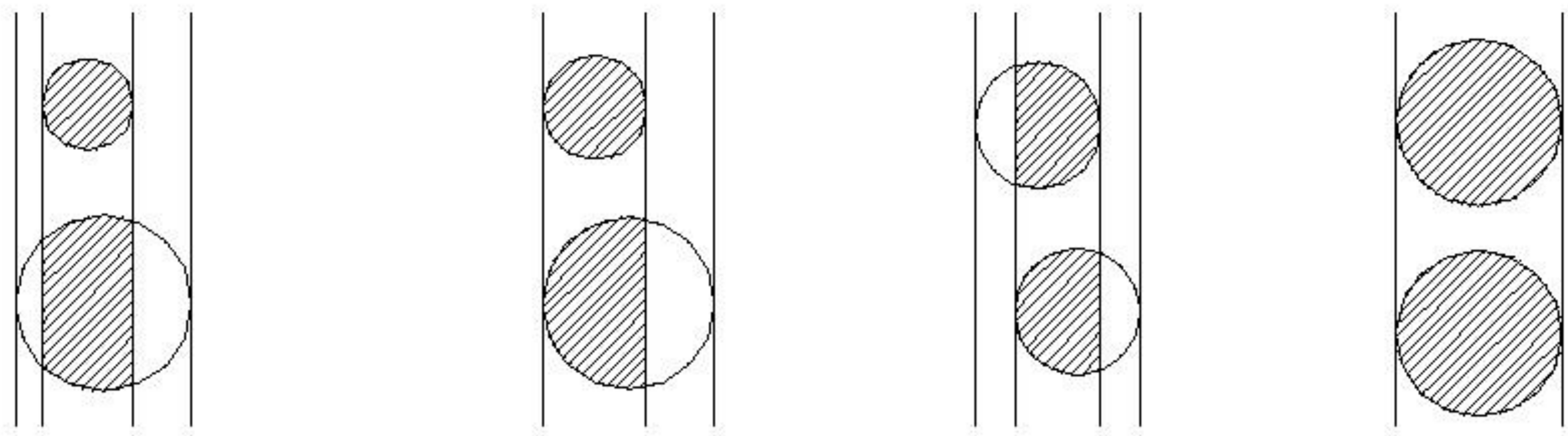
Estudo das Superfícies – Intersecções (sólidos)



Intersecções entre superfícies cónicas

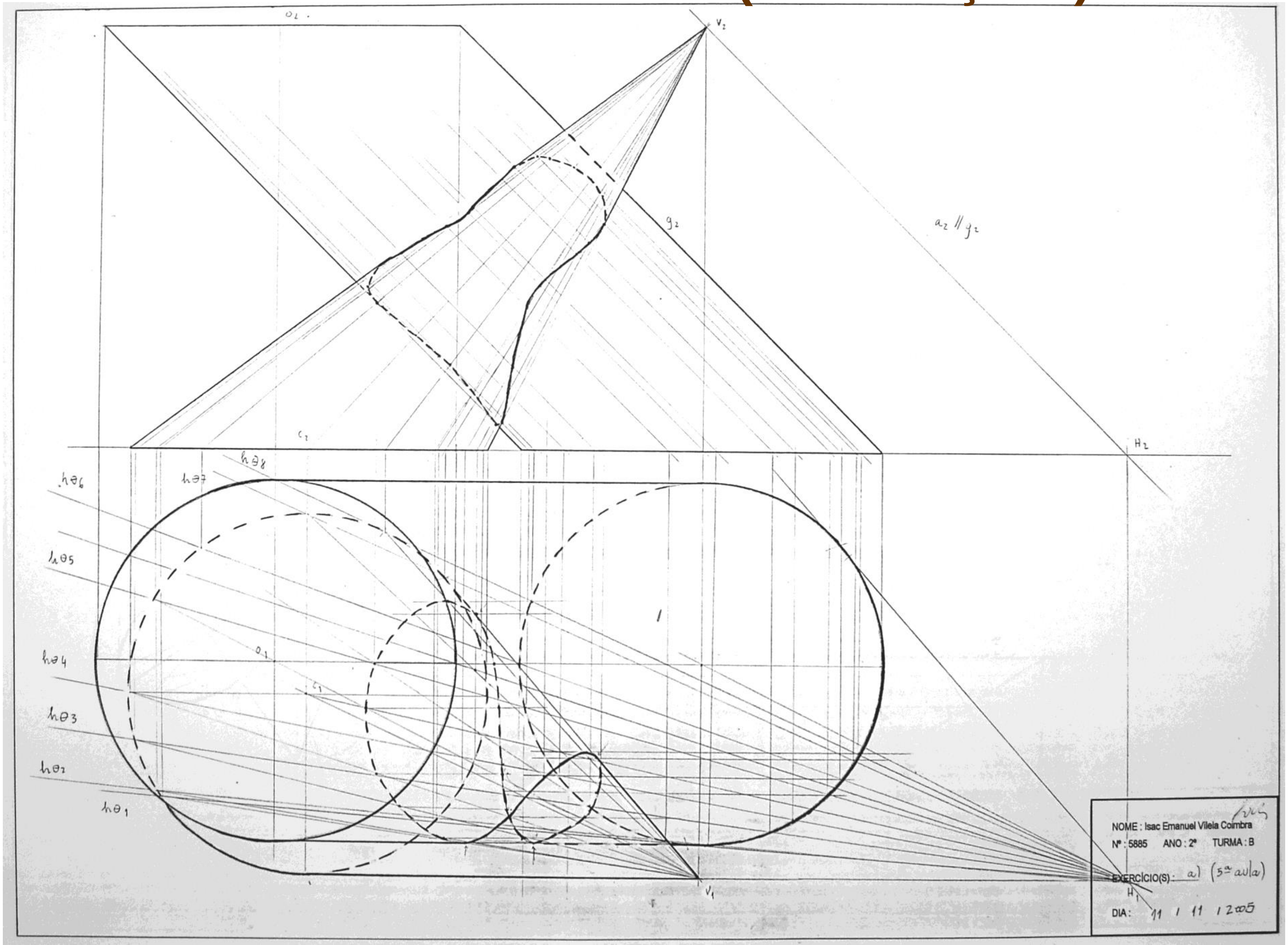


Intersecções entre superfícies cónicas

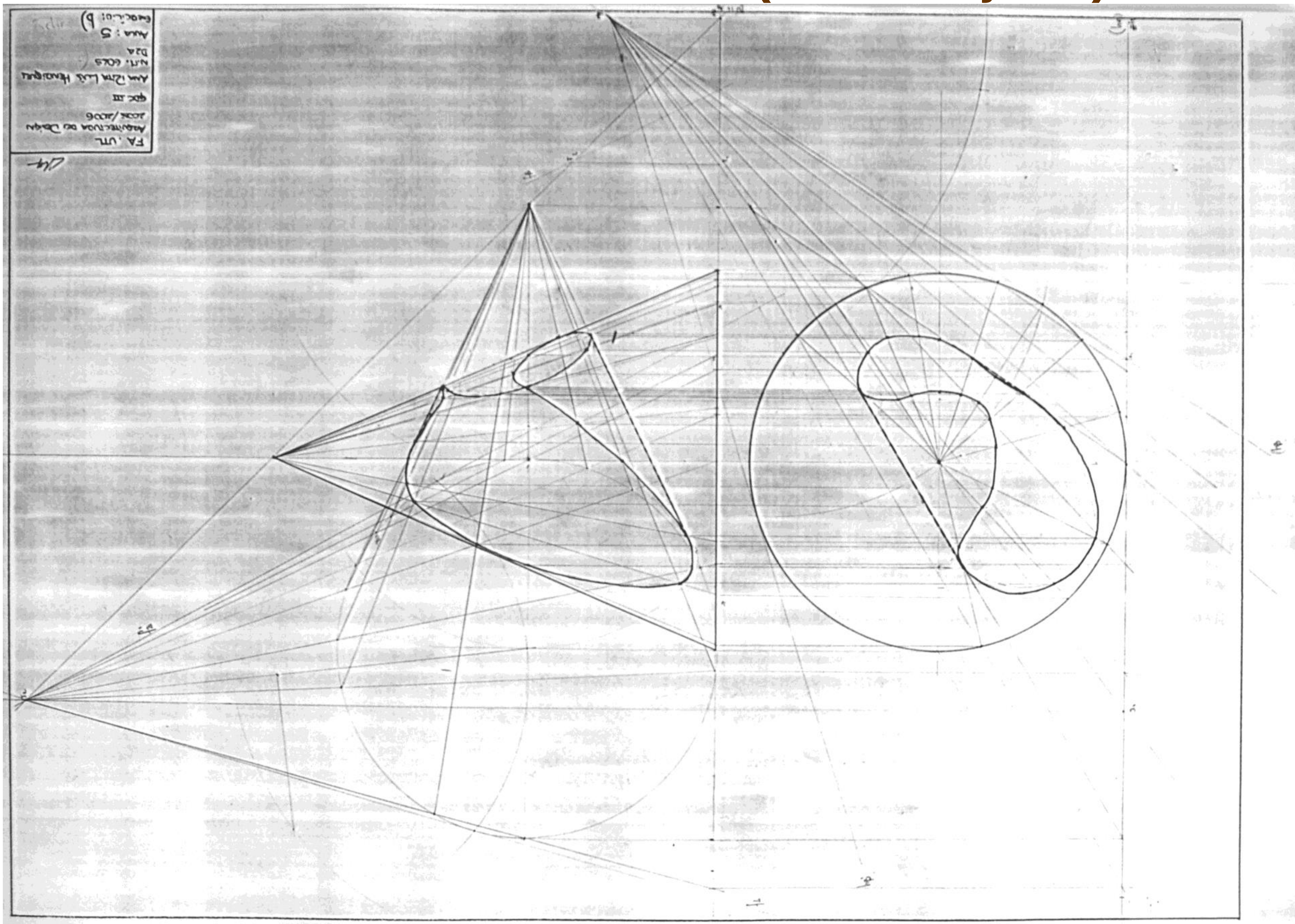


Penetração | Beijamento | Arrancamento | Beijamento Duplo

Exercícios resolvidos (intersecções)



Exercícios resolvidos (intersecções)



Intersecções/secções (exemplos no Design)

https://www.1stdibs.com/furniture/seating/chairs/verner-panton-cone-chairs-blue-orange-20th-century/id-f_34824852/

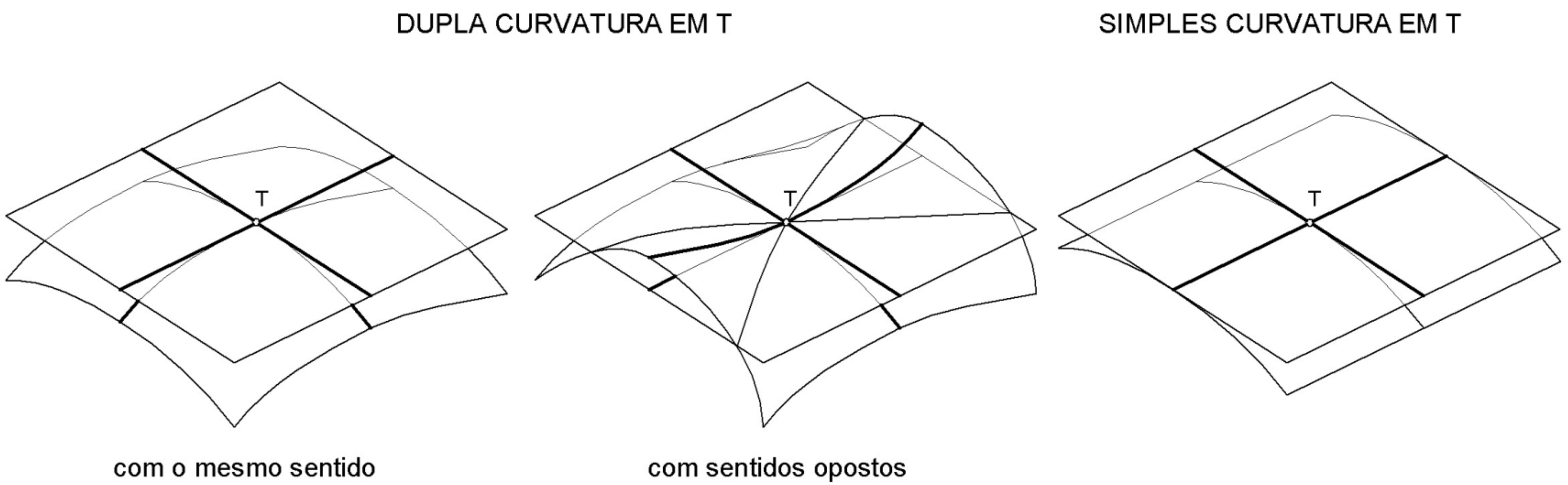
https://www.freepik.com/free-vector/ball-chair-round-armchair-front-side-view-futuristic-furniture-design-home-office-interior-comfortable-egg-shaped-seat-isolated-white-background-realistic-3d-vector-illustration_12120282.htm

https://smithshop.com/store/boolean-boxes

https://www.dezeen.com/2007/11/07/boolean-interior-by-torafu-architects/

Estudo das Superfícies – critérios de classificação

1. Quanto ao <u>tipo de geratriz</u> (regradas - geradas pelo movimento de uma recta; e curvas - não regradas)
2. Quanto à <u>ordem</u> (número máximo de pontos que uma recta pode ter em comum com a superfície)
3. Quanto à <u>curvatura</u> – critério de classificação local
4. Quanto à <u>topologia</u> (abertas e fechadas)
5. (outros)



Estudo das Superfícies – critérios de classificação

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1]
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1]
		outras	superfície regrada de uma só face
CURVAS		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2]	esférica; tórica; elipsoidal
		outras	serpentina; superfícies mínimas

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

4.1. Poliedros

Estudo das Superfícies – Poliedros

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares
		SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1]
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1]
		outras	superfície regrada de uma só face
CURVAS		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2]	esférica; tórica; elipsoidal
		outras	serpentina; superfícies mínimas

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Estudo das Superfícies – Poliedros regulares

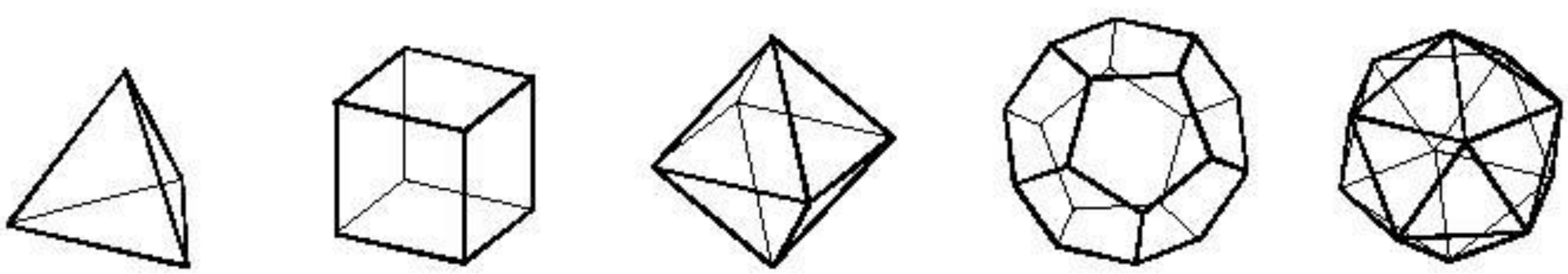
Superfícies Poliédricas

(Apenas serão considerados poliedros convexos topologicamente equivalentes à esfera)

A relação entre o número de arestas (**A**), vértices (**V**) e faces (**F**) de qualquer poliedro topologicamente equivalente a uma esfera vem dada pela fórmula de Euler:

$$A + 2 = V + F$$

Poliedros regulares: Todas as faces são poligonos regulares de apenas um tipo; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os "Sólidos platónicos".



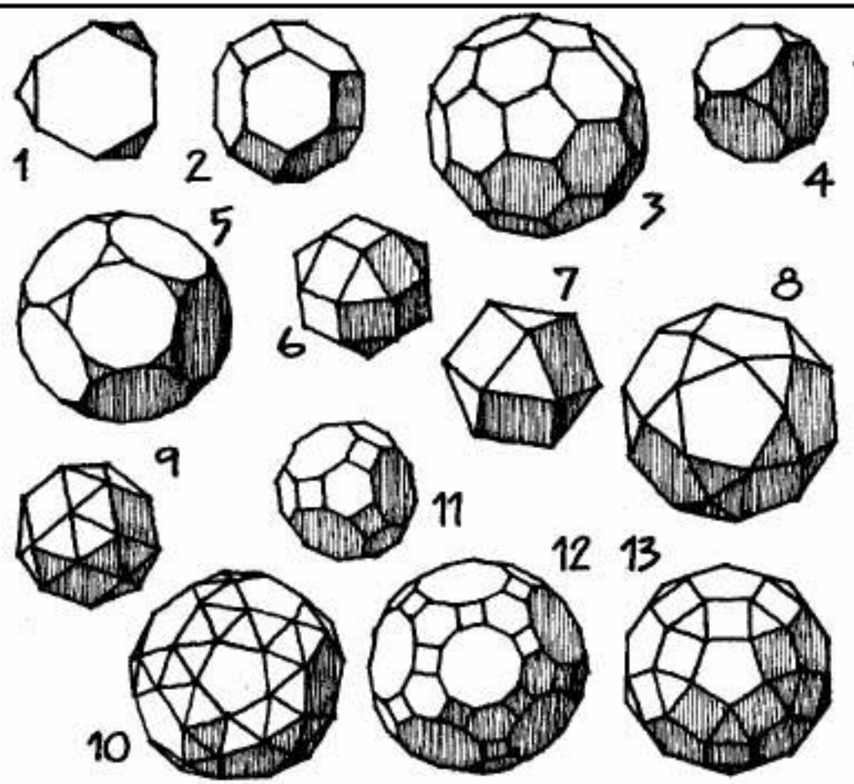
Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Estudo das Superfícies – Poliedros semi-regulares

Poliedros semi-regulares:

- poliedros de Arquimedes

Todas as faces são poligonos regulares de dois ou mais tipos sendo o comprimento da aresta uma constante; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os "Sólidos Arquimedianos"; todas as arestas e vértices são congruentes e podem obter-se dos poliedros regulares por algum processo de transformação geométrica. Também podem considerar-se nesta categoria os prismas regulares e os antiprismas regulares embora normalmente não seja comum.



1- Troncotetraedro
2- Troncoctaedro
3- Troncoicosaedro
4- Troncocubo
5- Troncododecaedro
6- Rombicuboctaedro
7- Cuboctaedro
8- Icosidodecaedro
9- Cubo achatado
10- Dodecaedro achatado
11- Troncocuboctaedro
12- Troncoicosidodecaedro
13- Rombicosidodecaedro

in "EDROS"

Estudo das Superfícies – Poliedros

Poliedros irregulares:

Todas as faces são polígonos de vários tipos; os vértices podem ou não pertencer a uma superfície esférica; o comprimento da aresta não é constante.

- pirâmides, bipirâmides, troncos de pirâmide, prismas, troncos de prisma

Uma bipirâmide é um sólido gerado pela "soma" de uma pirâmide com a sua simétrica relativamente ao plano da base.

- sólidos de Johnson

São poliedros em que todas as faces são regulares de mais que um tipo, não sendo, no entanto, poliedros regulares, semi-regulares, prismas regulares ou antiprismas regulares. Existem 92 ao todo.

Um poliedro que tenha por vértices os centros das faces de um outro poliedro diz-se DUAL daquele.

Estudo das Superfícies – Poliedros

- antiprismas, antipiramóides, tronco-antiprismas, antiprismóides, *outros*

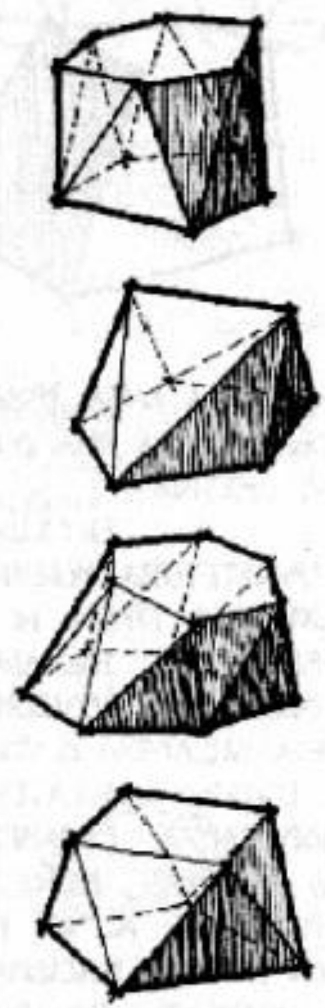
QUANDO LIGAMOS OS VÉRTICES DE DOIS POLÍGONOS NÃO COPLANARES, DE MODO A DEFINIR TRIÂNGULOS ENTRE ELES, FORMAM-SE POLIEDROS CONHECIDOS POR:

1- ANTIPRISMÓIDES – QUANDO OS POLÍGONOS NÃO TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS.

2- ANTIPIRAMÓIDES – QUANDO UM DOS POLÍGONOS É SUBSTITUÍDO POR UM SEGMENTO DE RETA.

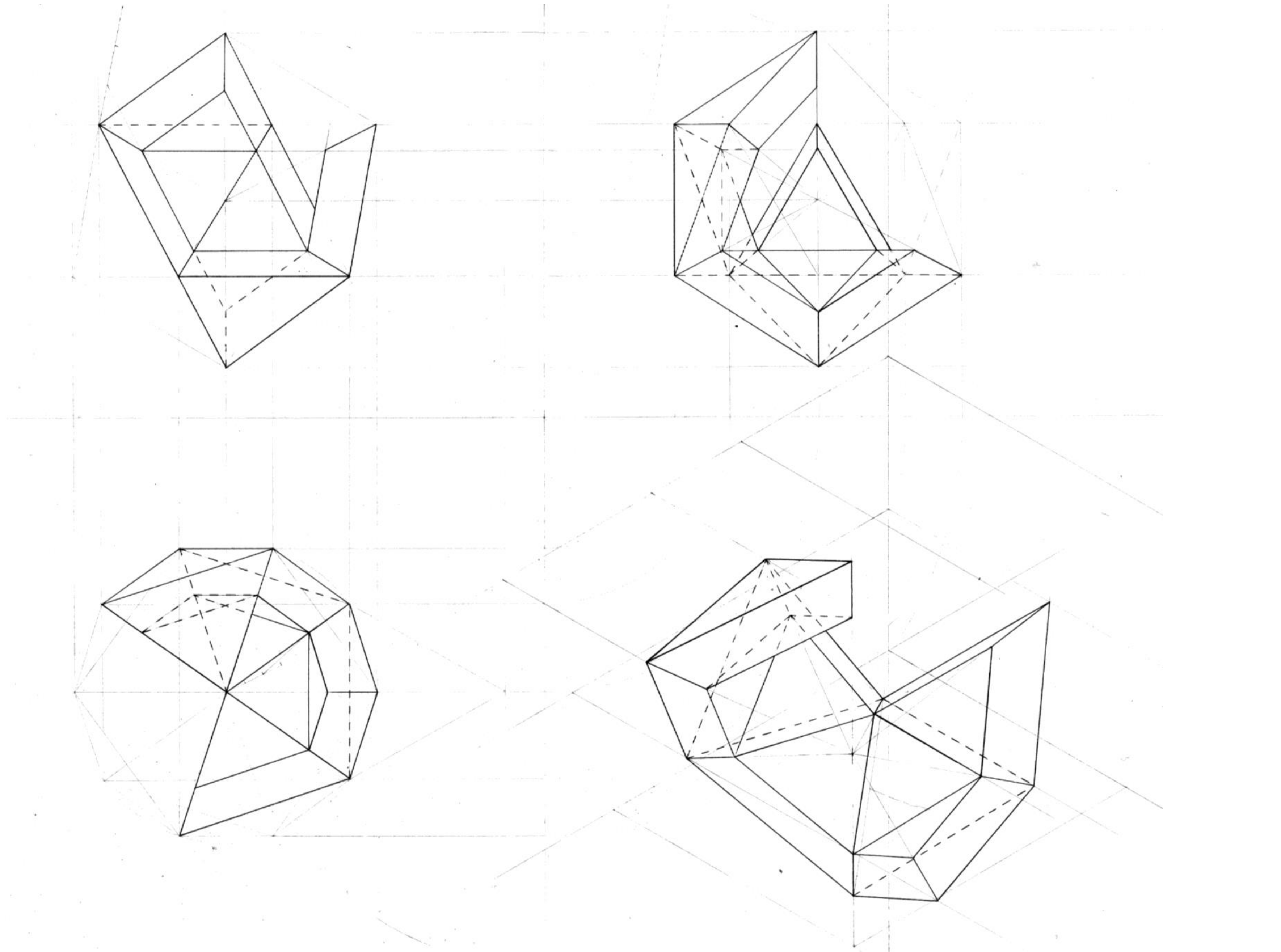
3- TRONCO-ANTIPRISMAS – QUANDO OS POLÍGONOS TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS E NÃO SÃO DE PLANOS PARALELOS.

4- ANTIPRISMAS – QUANDO OS POLÍGONOS TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS E ESTÃO EM PLANOS PARALELOS.

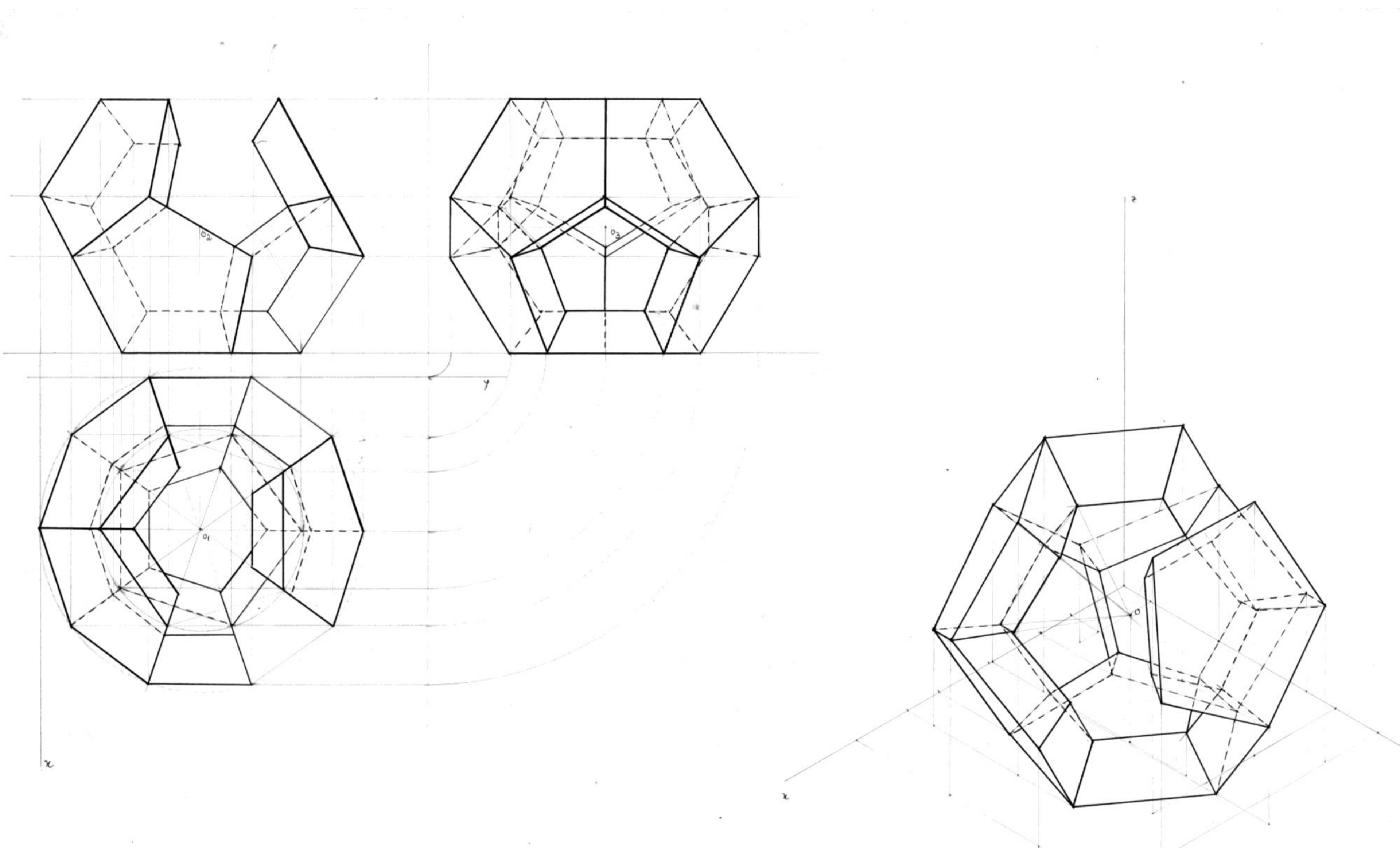


in "EDROS"

Poliedros (Exercícios resolvidos)



Poliedros (Exercícios resolvidos)



Poliedros (exemplos no Design)

https://www.archdaily.com/35128/habitable-polyhedron-manuel-villa

https://thearchitectsdiary.com/dodecahedronic-chair-creates-polyhedral-geometry-designed-by-hiroaki-suzuki/

4.2. Superfícies de revolução

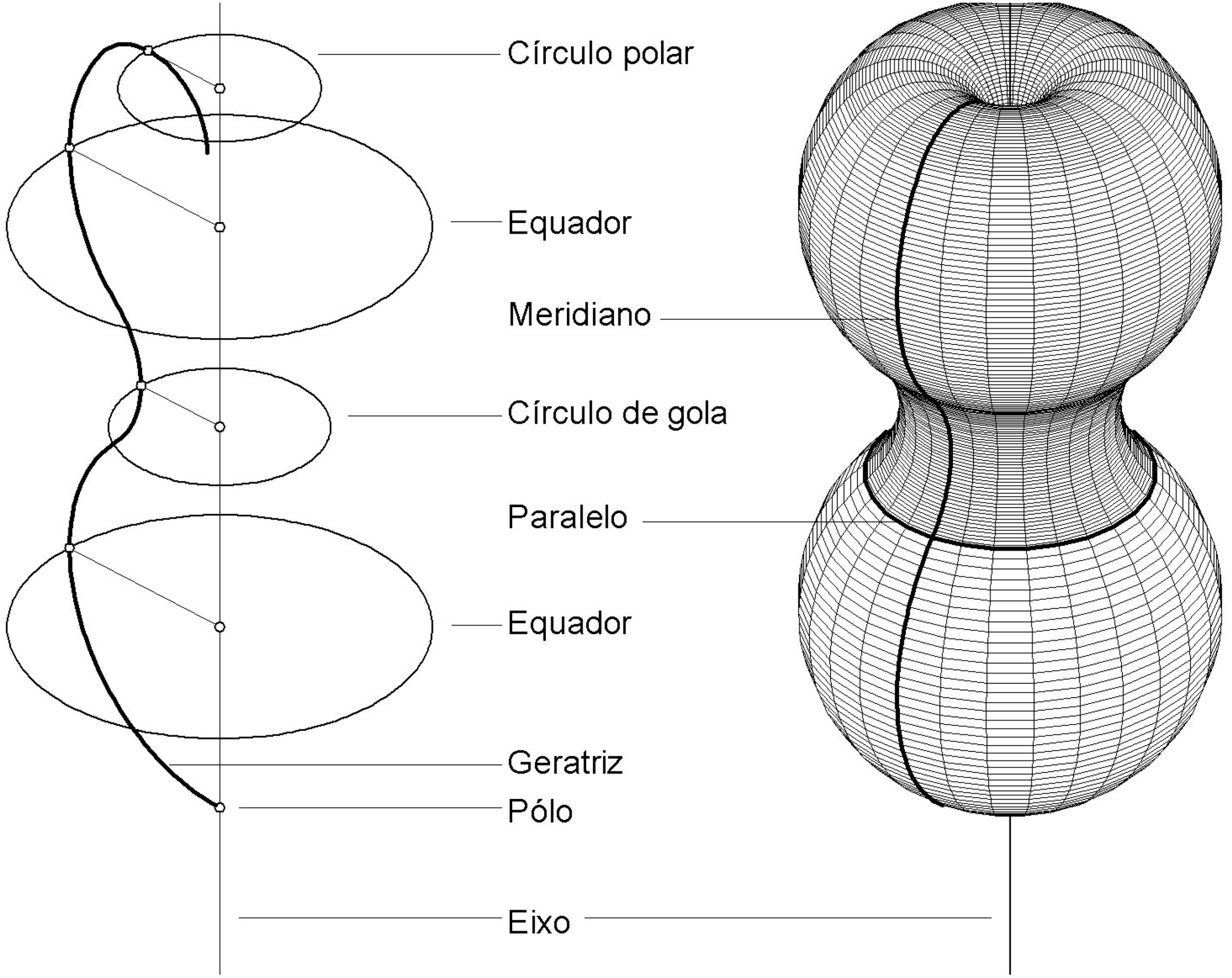
Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1]
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1]
		outras	superfície regrada de uma só face
CURVAS		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2]	esférica; tórica; elipsoidal
		outras	serpentina; superfícies mínimas

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

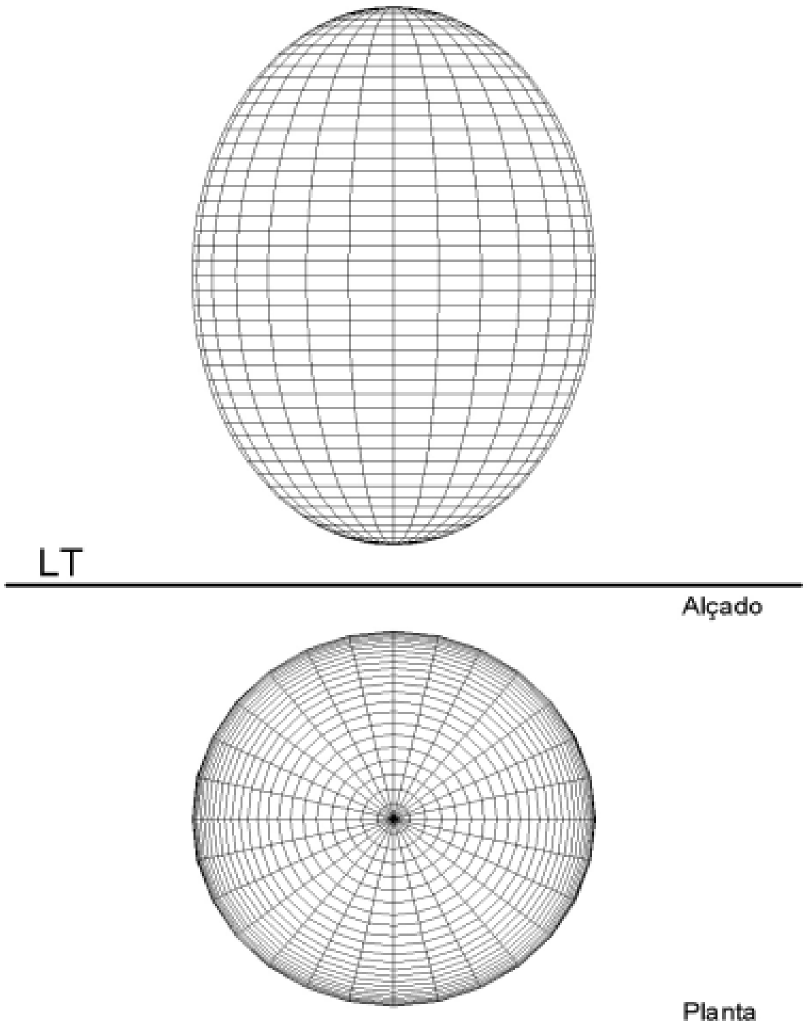
[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

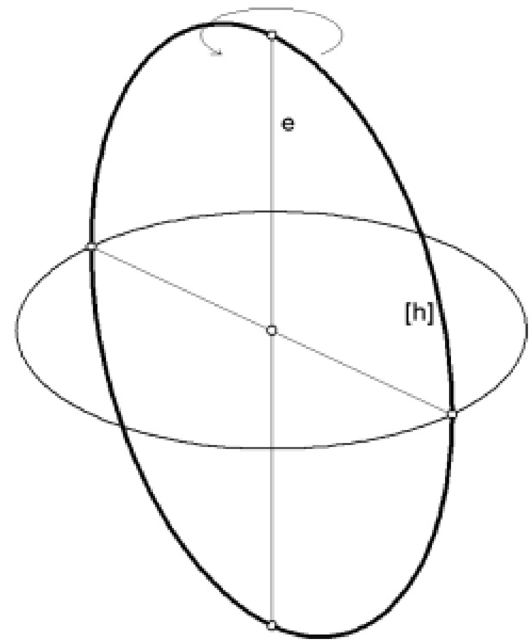
Superfícies de revolução

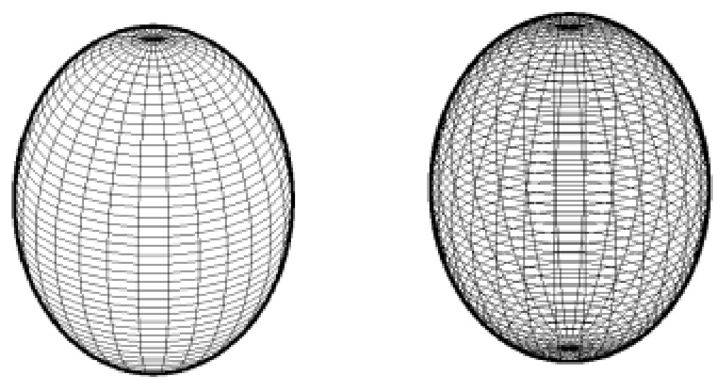


SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Superfícies de revolução (exemplos)

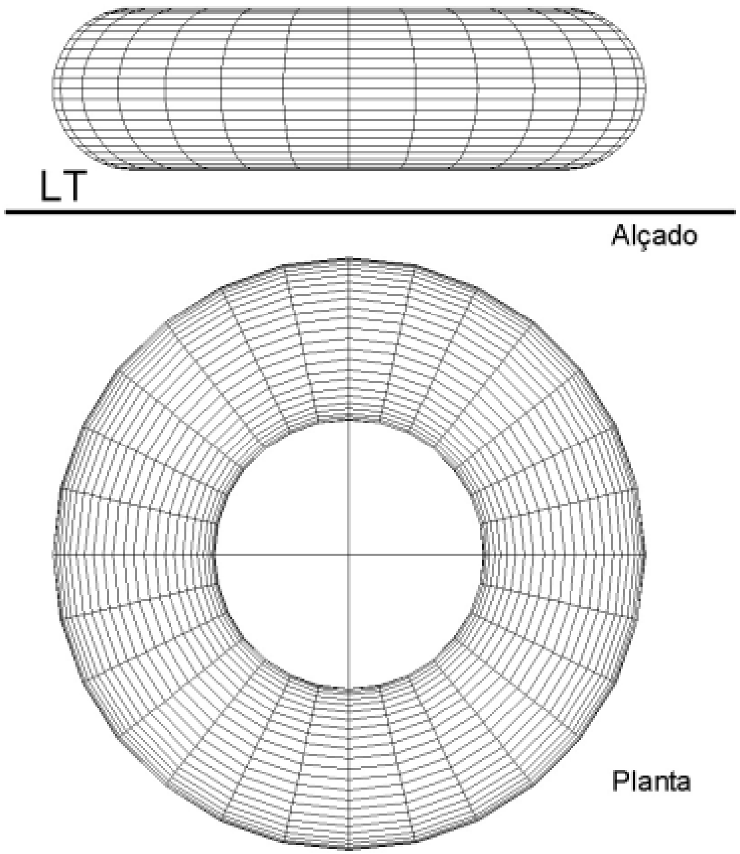


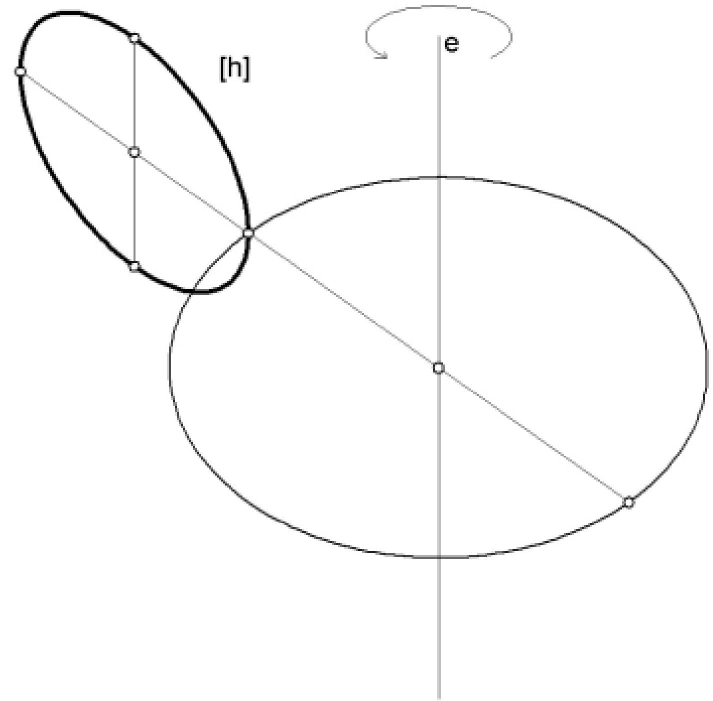


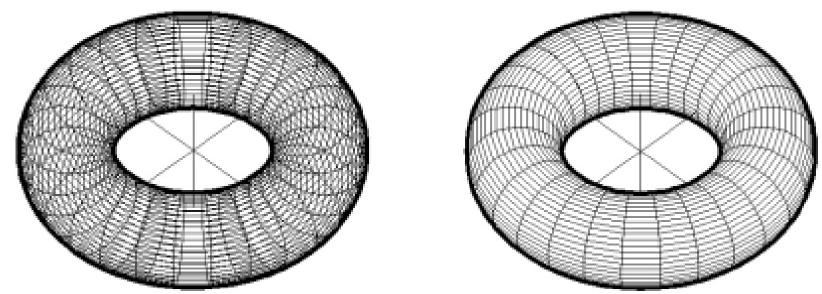


GERAÇÃO DO ELIPSÓIDE POR ROTAÇÃO DE UMA ELIPSE EM TORNO DE UM EIXO

Superfícies de revolução (exemplos)

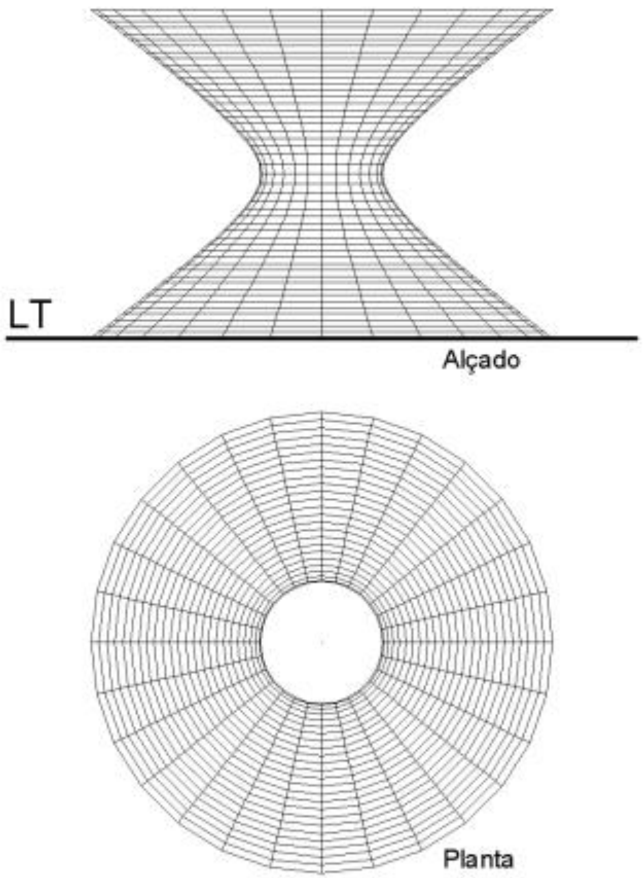


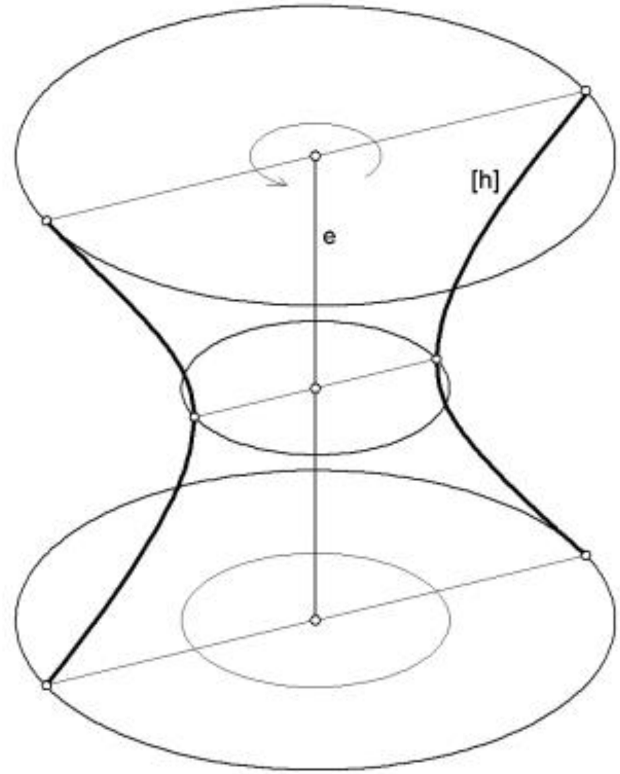


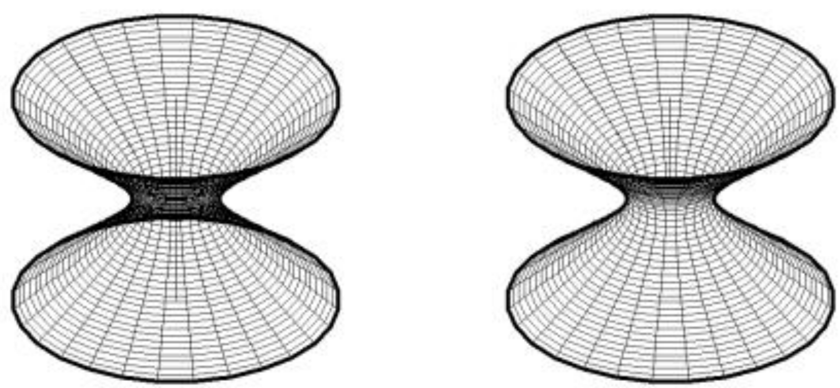


GERAÇÃO DO TORO POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM EIXO COMPLANAR

Superfícies de revolução (exemplos)

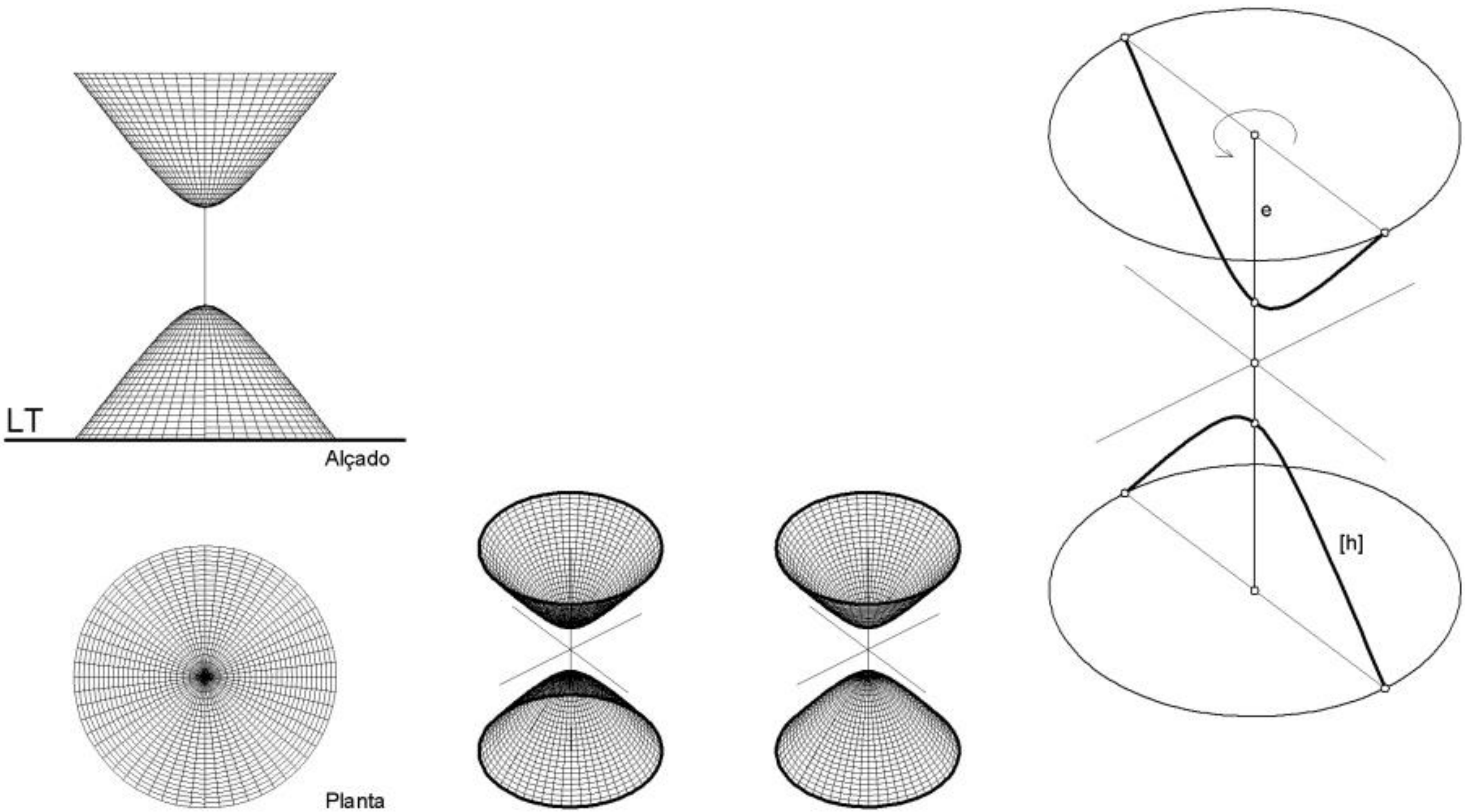






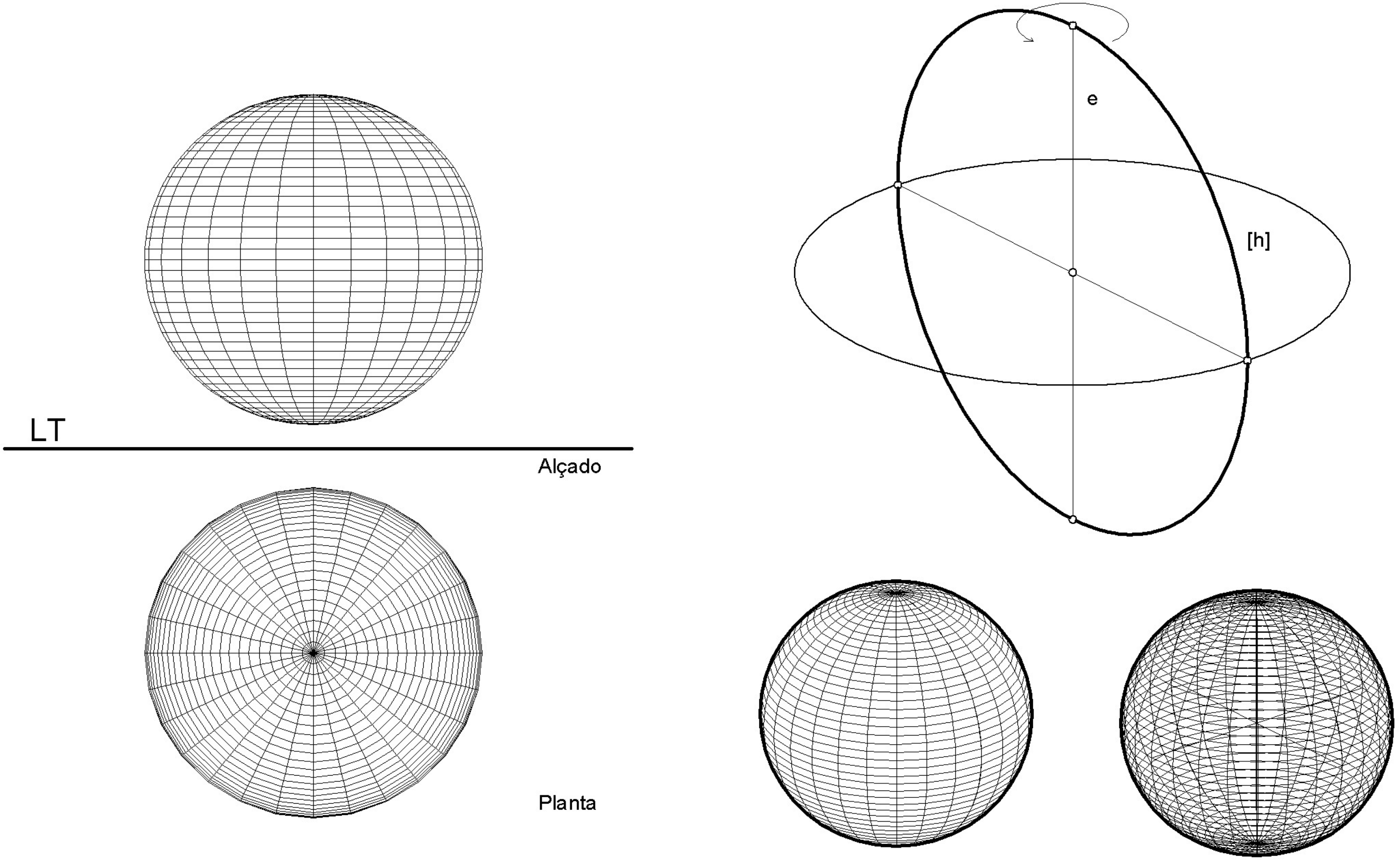
GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO REGRADO POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO

Superfícies de revolução (exemplos)



GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO DE 2 FOLHAS POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO

Superfícies de revolução (exemplos)



GERAÇÃO DA ESFERA POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM DIÂMETRO

Sup. de revolução (exemplos no Design)

https://www.amazon.com/Revolving-Casters-Diameter-Replacement-Hardwood/dp/B0BH4D9M4L

Torus sculpture - Architekt Lars Meess Olsohn
http://www.pneumocell.com/news/torus8m.html

Sup. de revolução (exemplos no Design)

https://cremadesign.co.za/shop/captain-flint-surface-light/

Museu Oscar Niemeyer
https://www.terra.com.br/noticias/oscar-niemeyer/oscar-niemeyer-fotos-52.htm

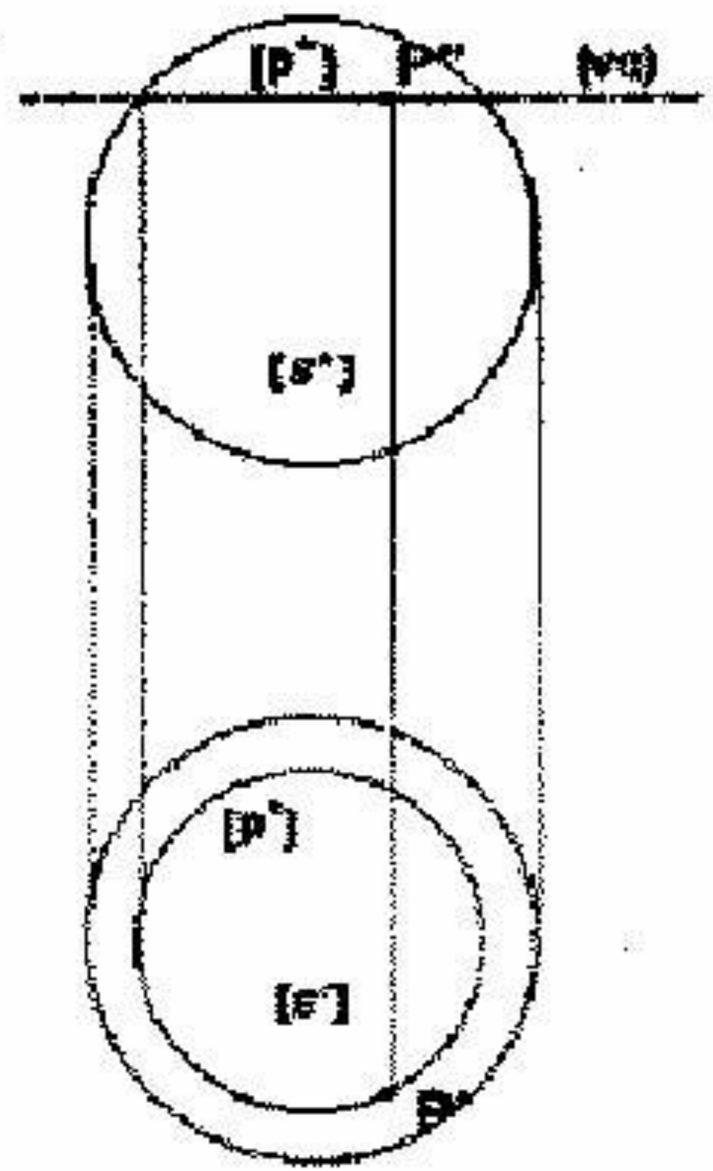
https://www.ebay.co.uk/itm/303548252102

https://ruralhandmade.com/productdetails/ellipsoid-shape-intricate-moroccon-design-with-circular-1

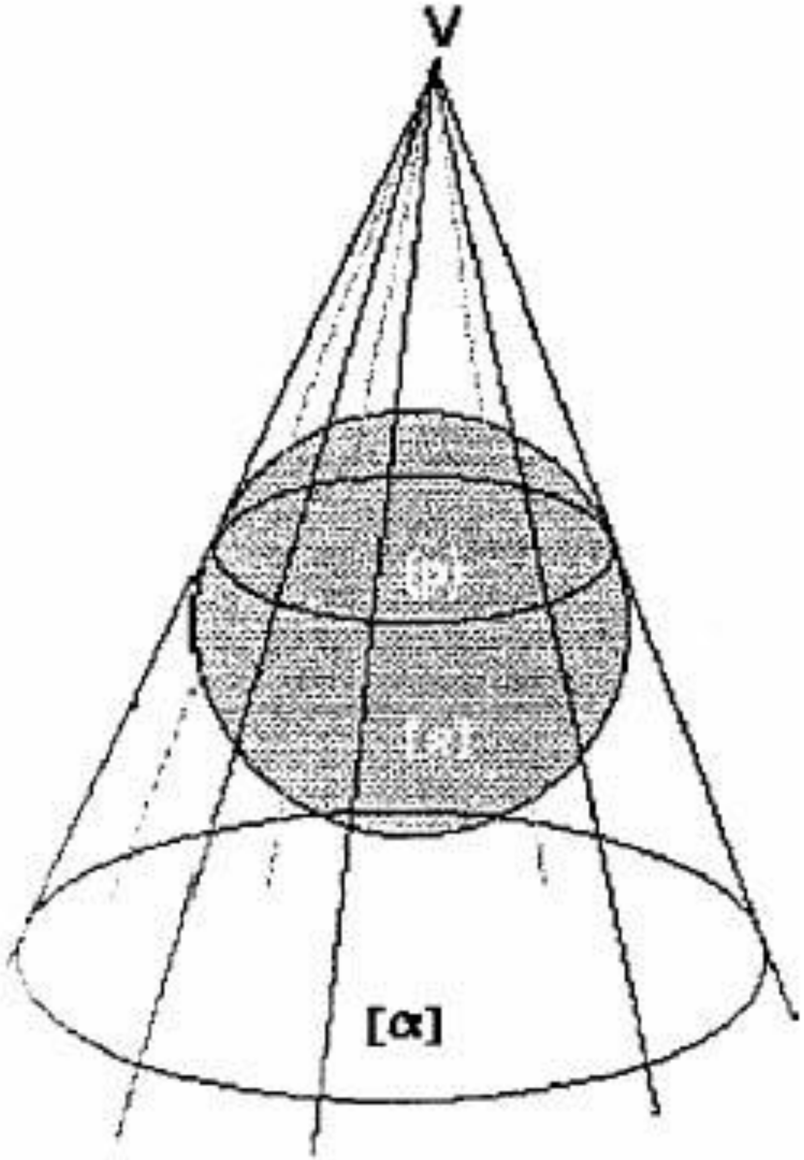
Estudo das Superfícies - superfície esférica

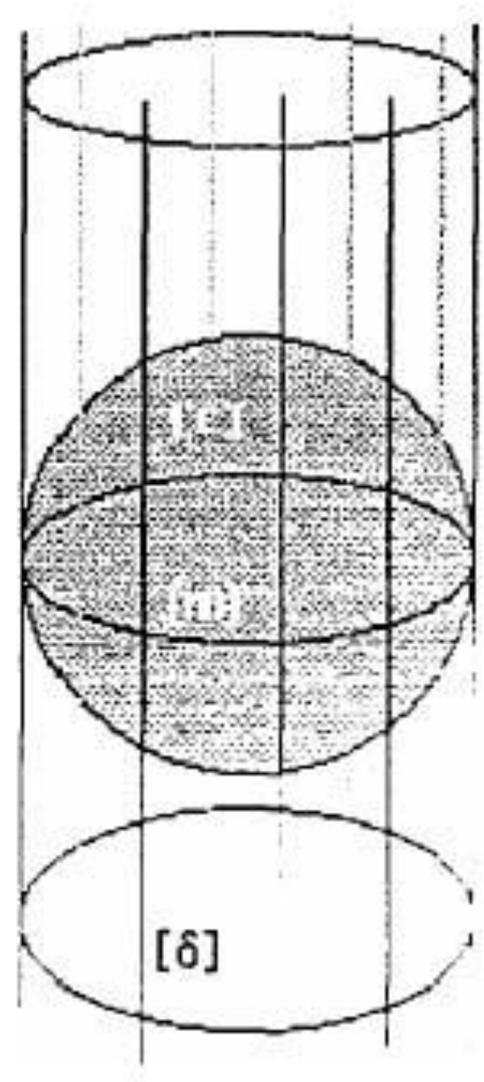
Desenhos da autoria do Professor Pedro Fialho de Sousa

1. Marcação de pontos na superfície

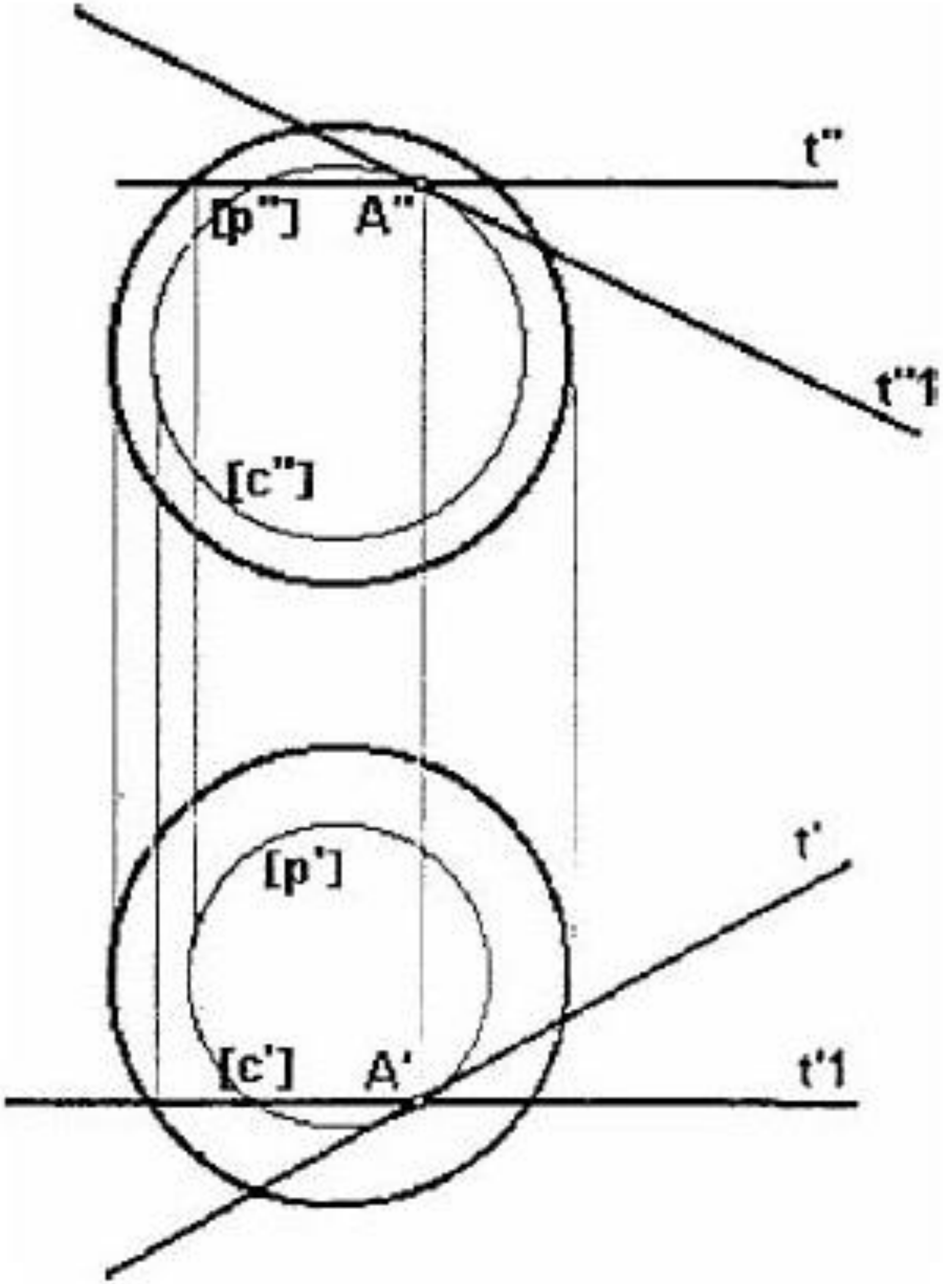


2. Concordância com superf. cónicas e cilindricas

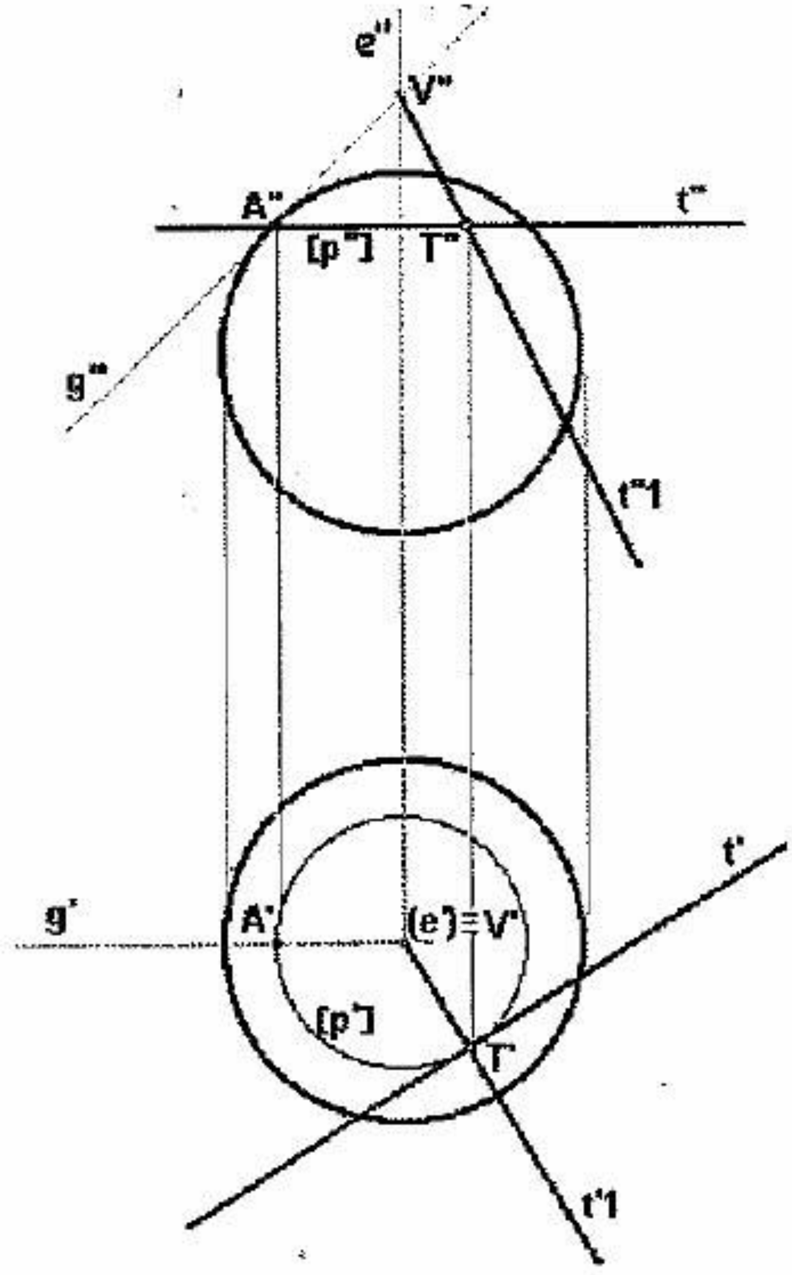




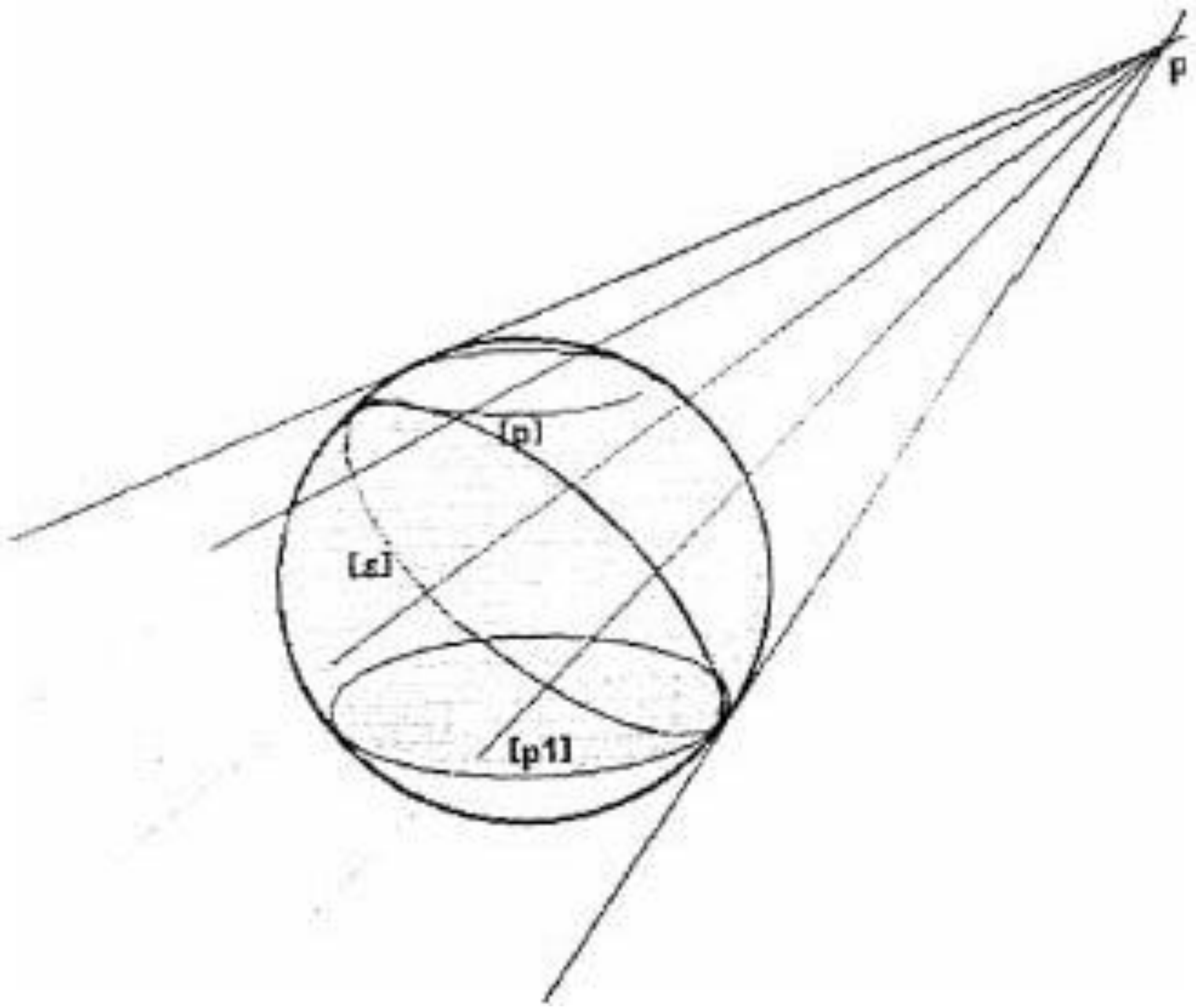
3. Plano tangente conduzido por ponto da superf.



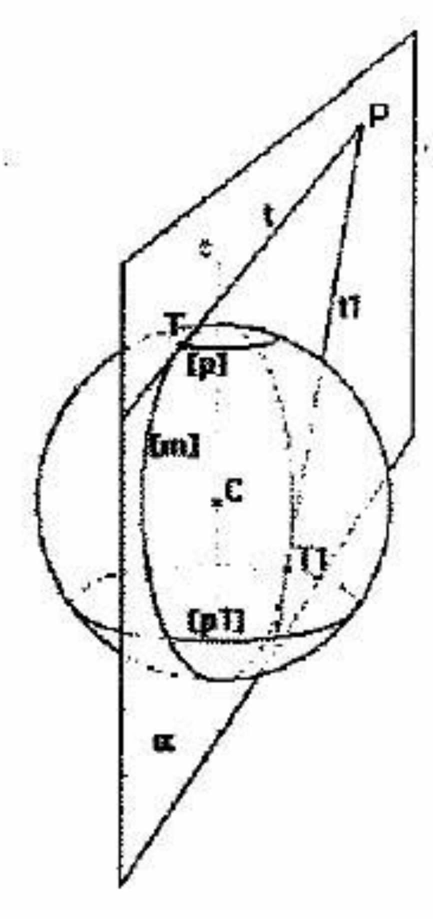
3. Plano tangente conduzido por ponto da superf.

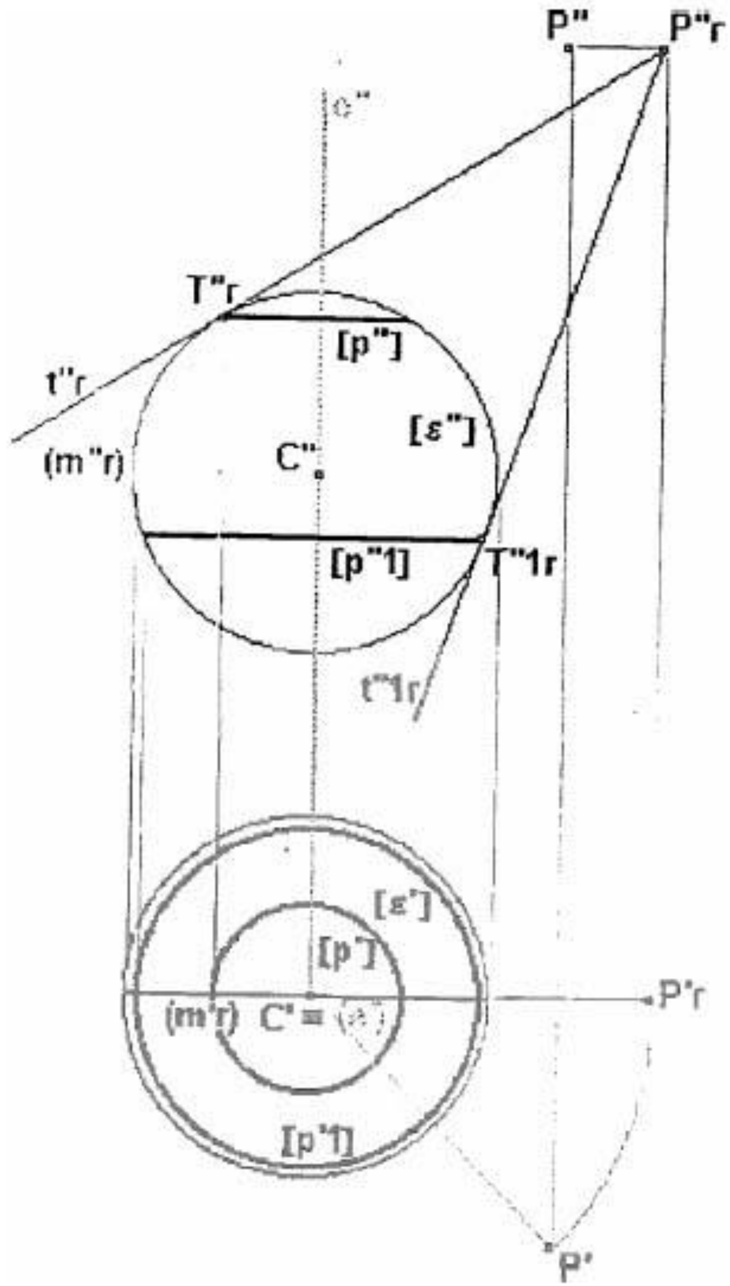


4. Plano tangente conduzido por ponto exterior

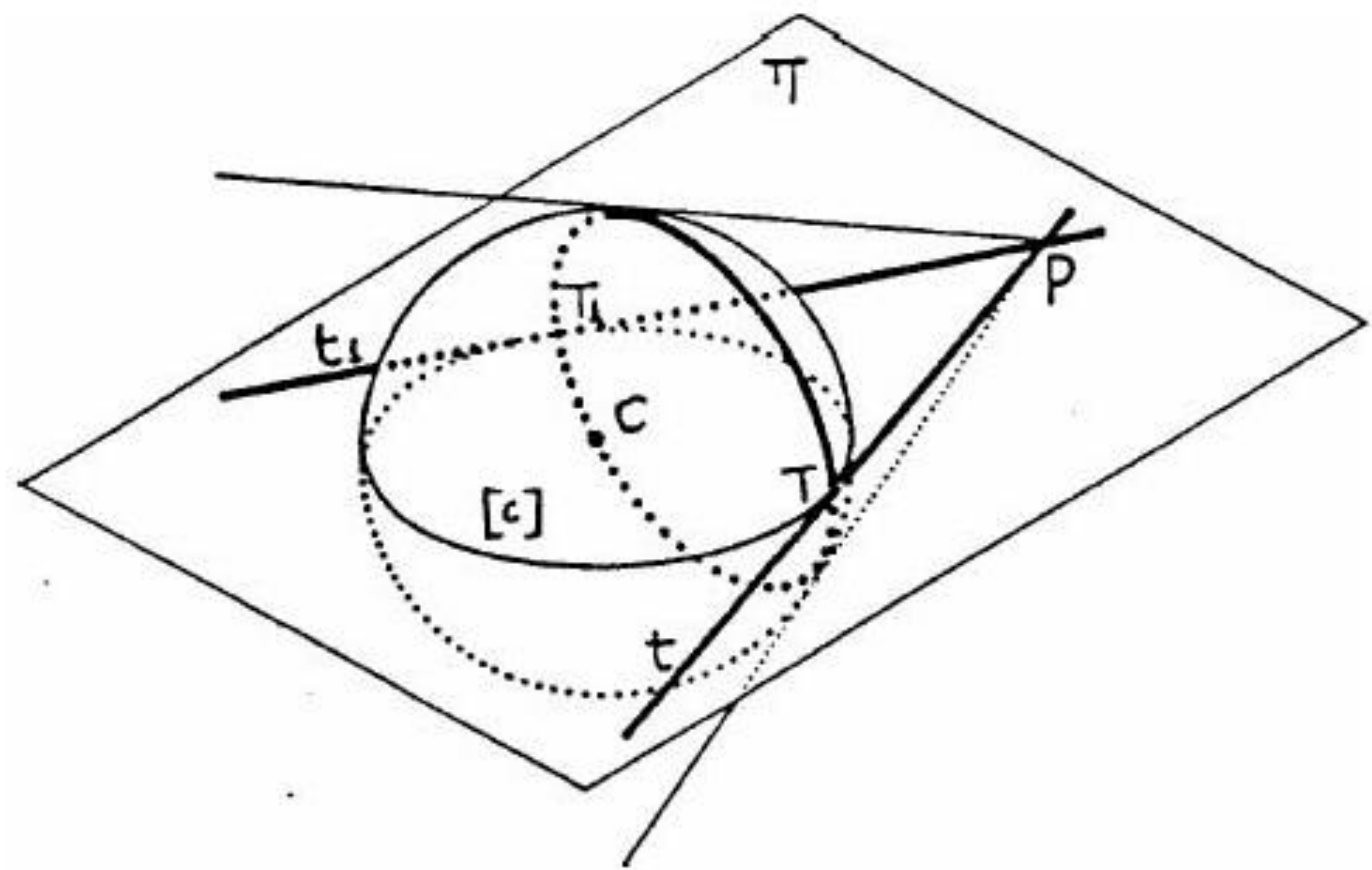


4. Plano tangente conduzido por ponto exterior

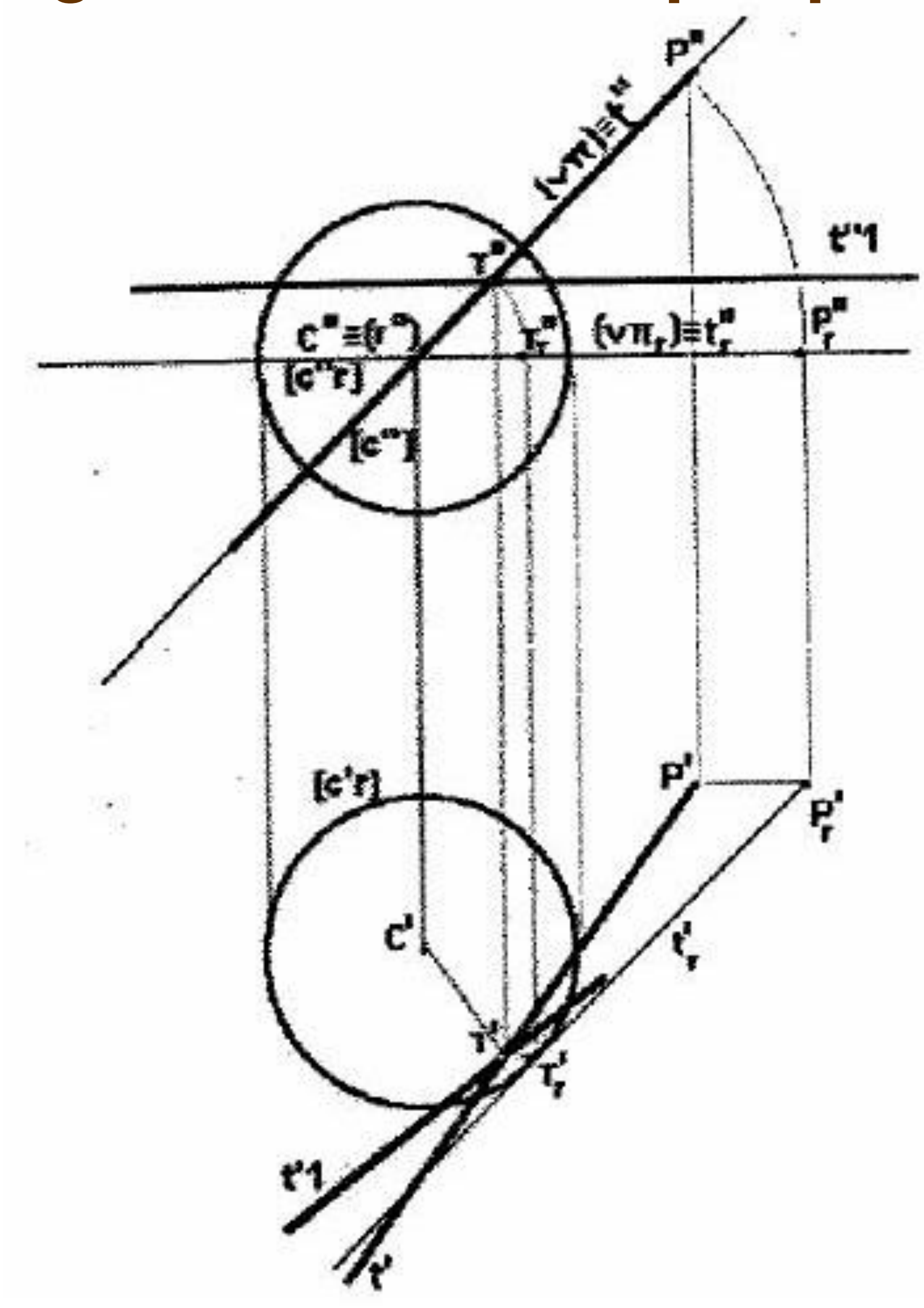




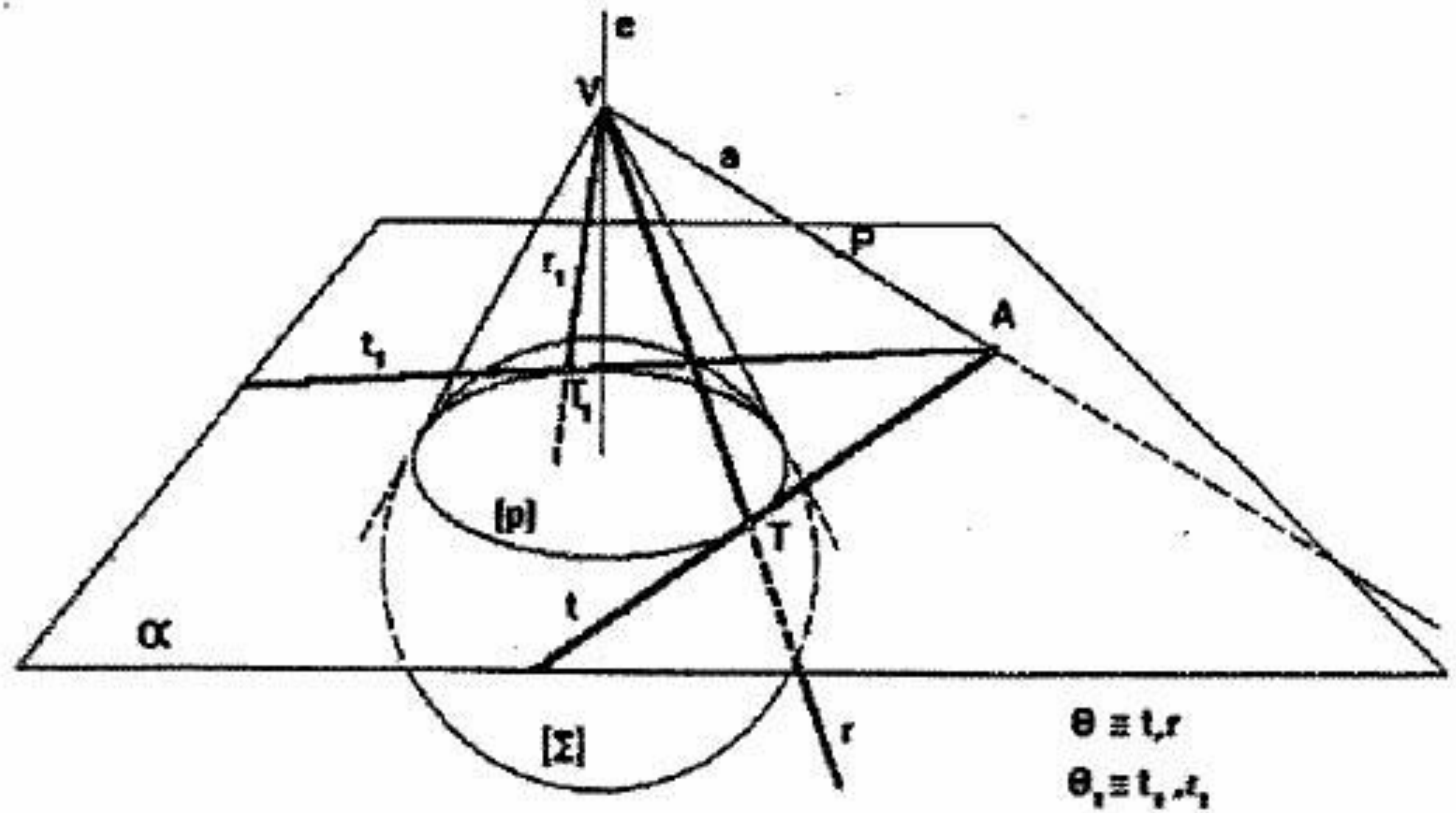
4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



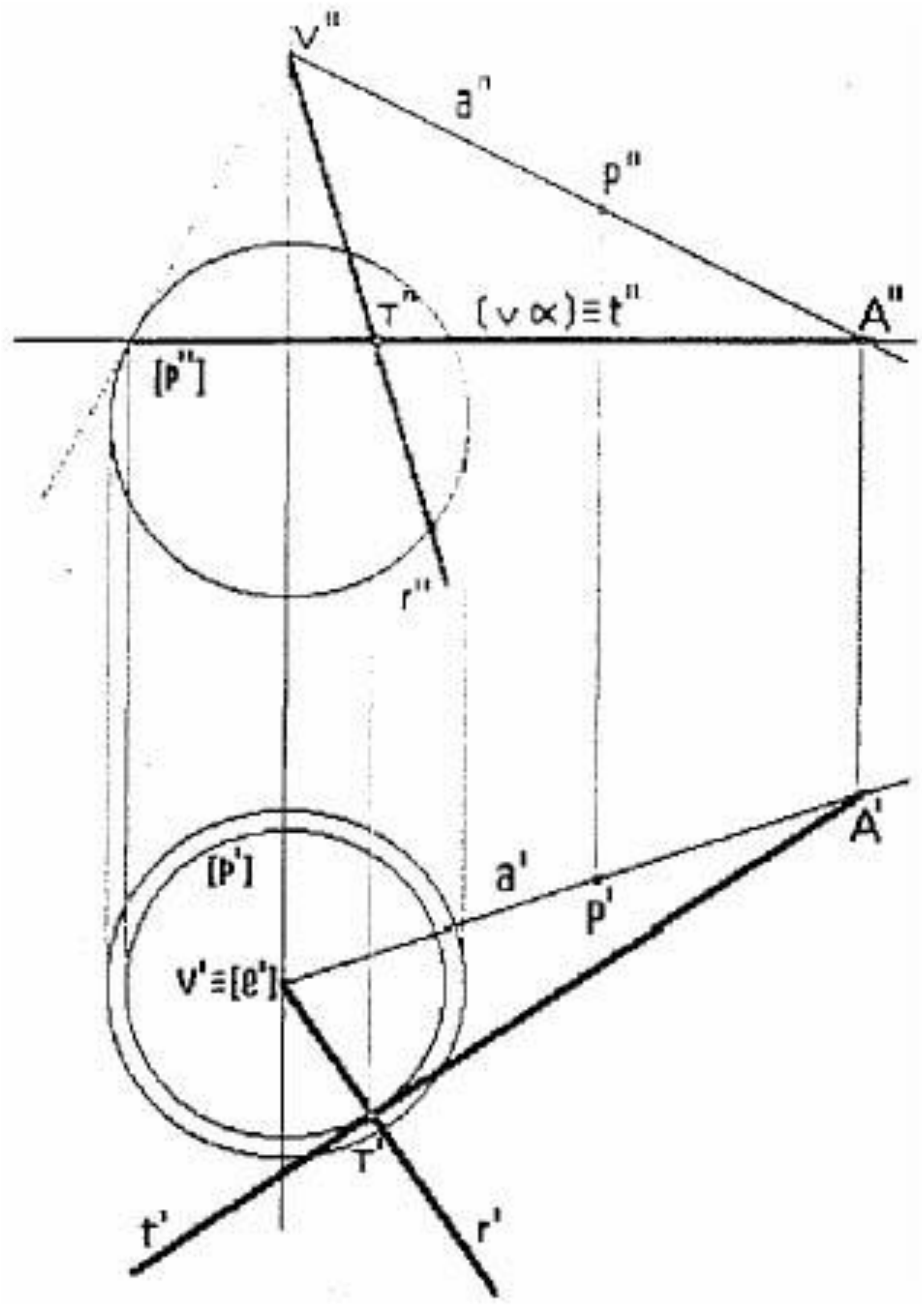
4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



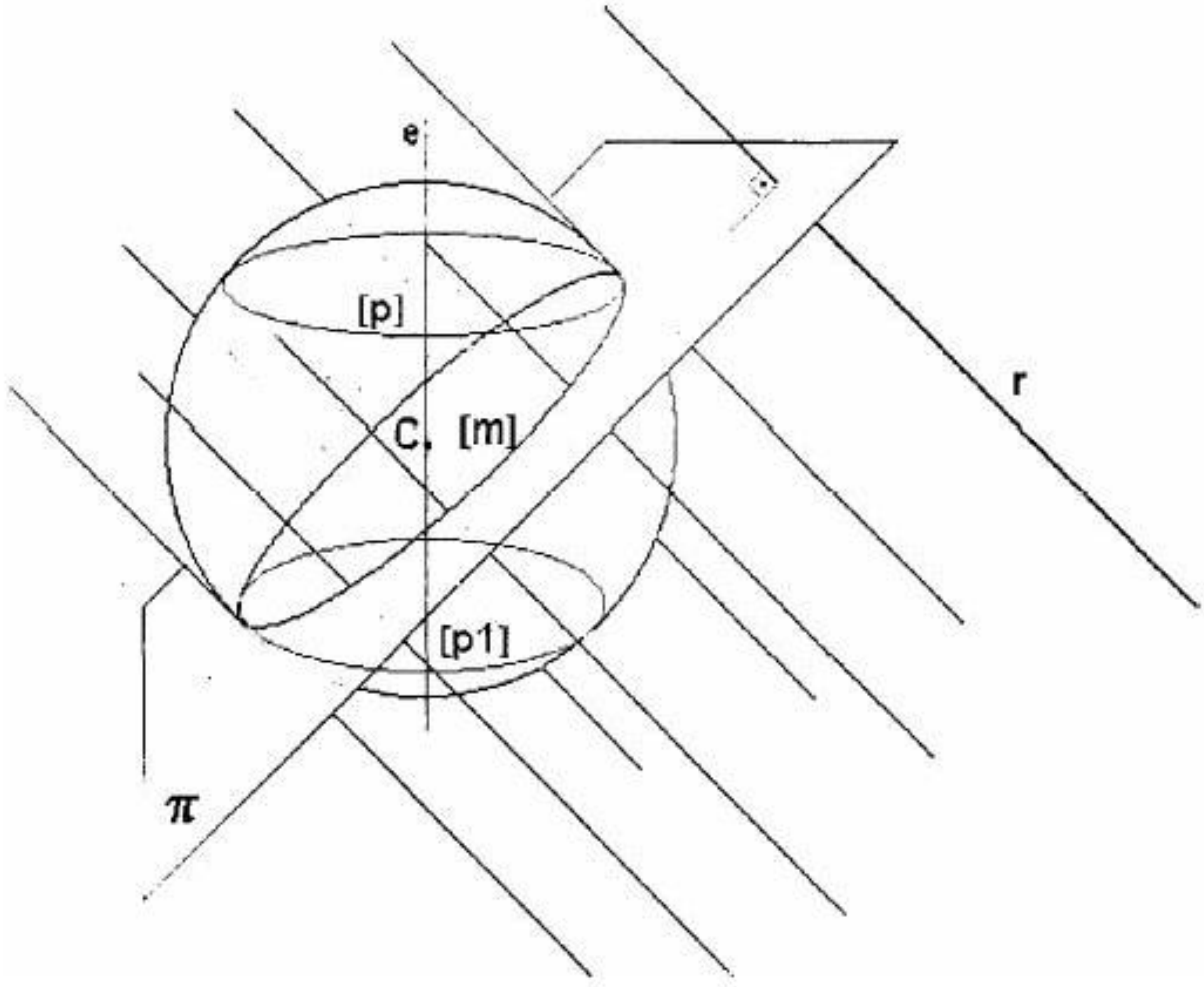
4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



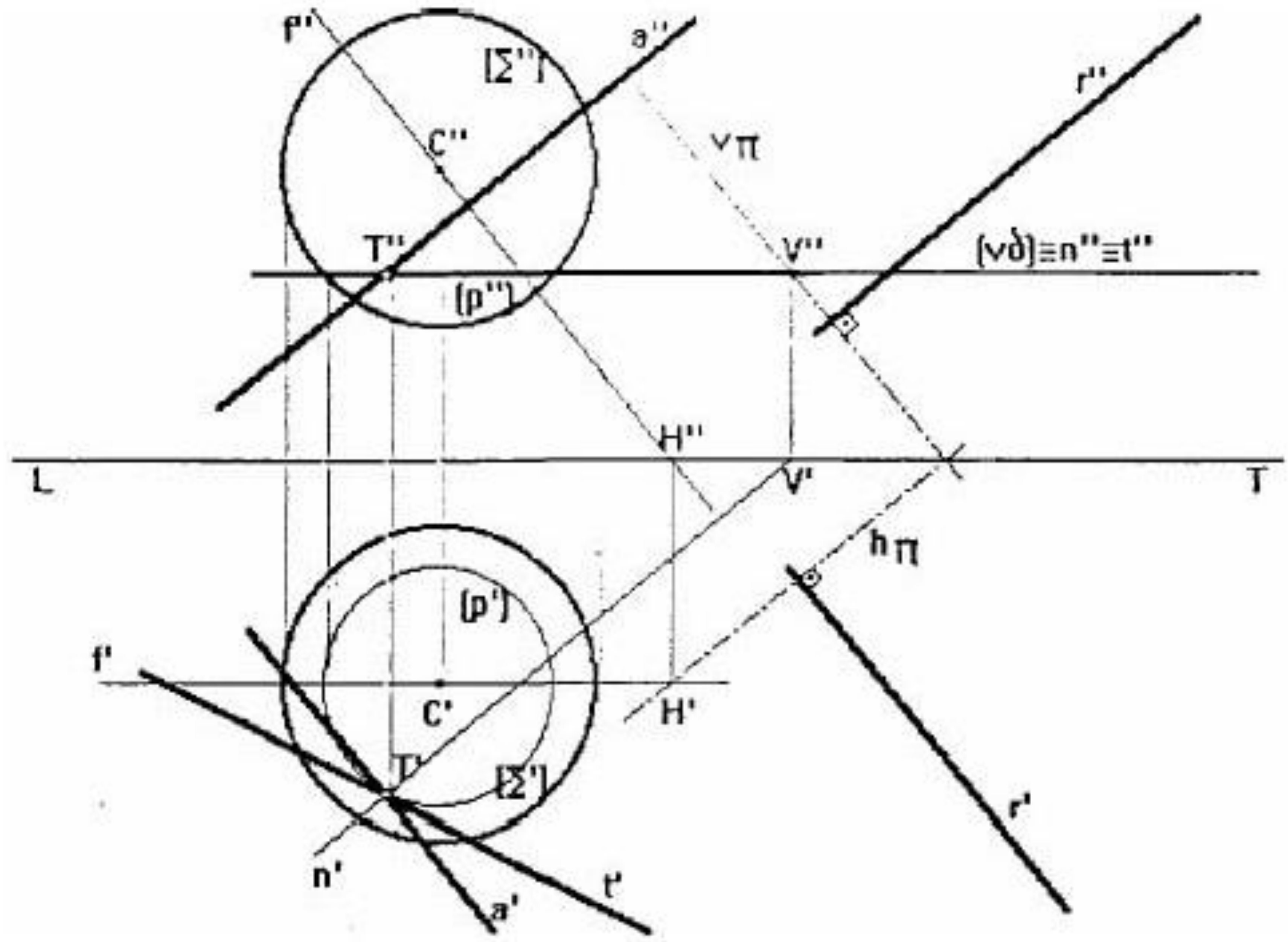
4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



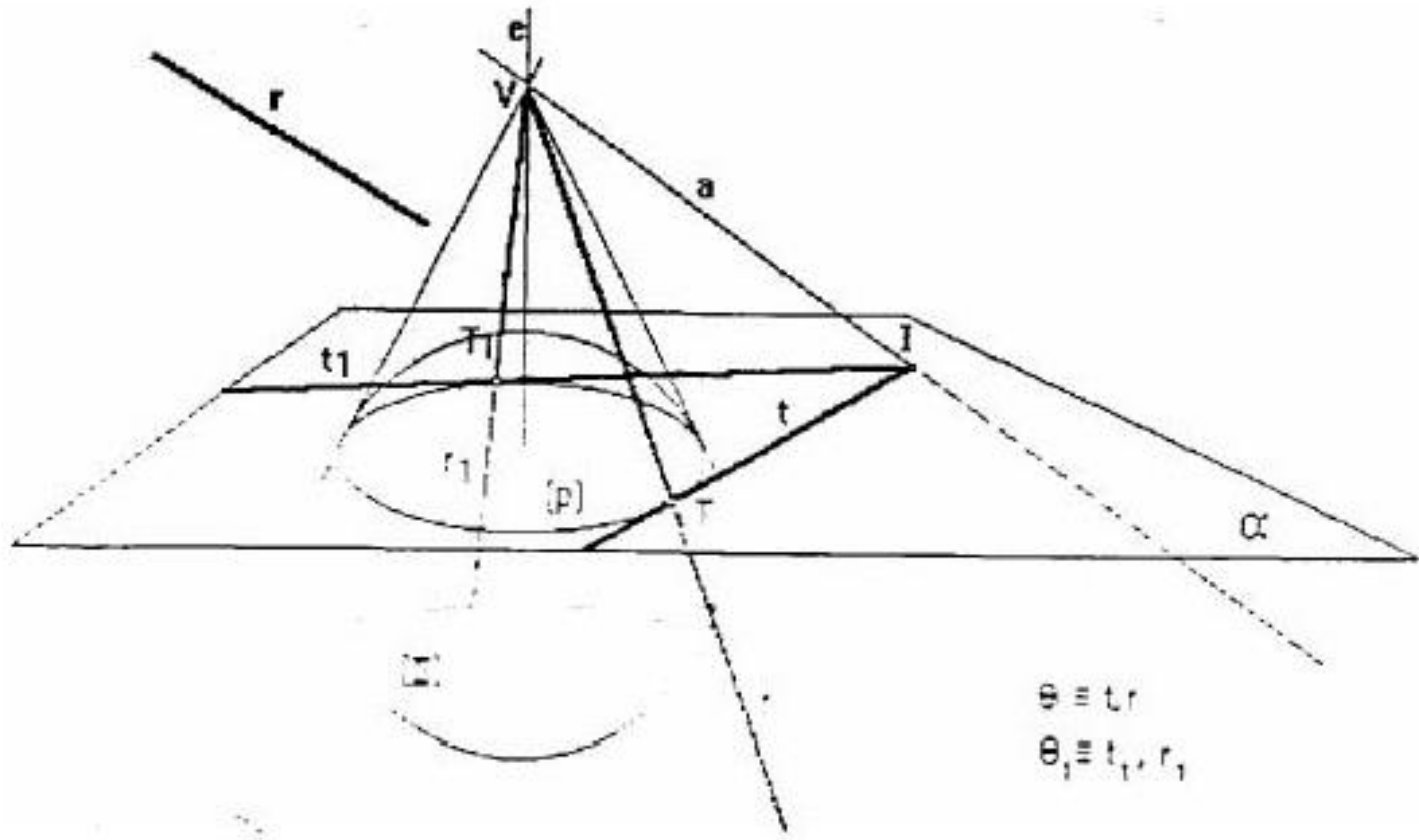
5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



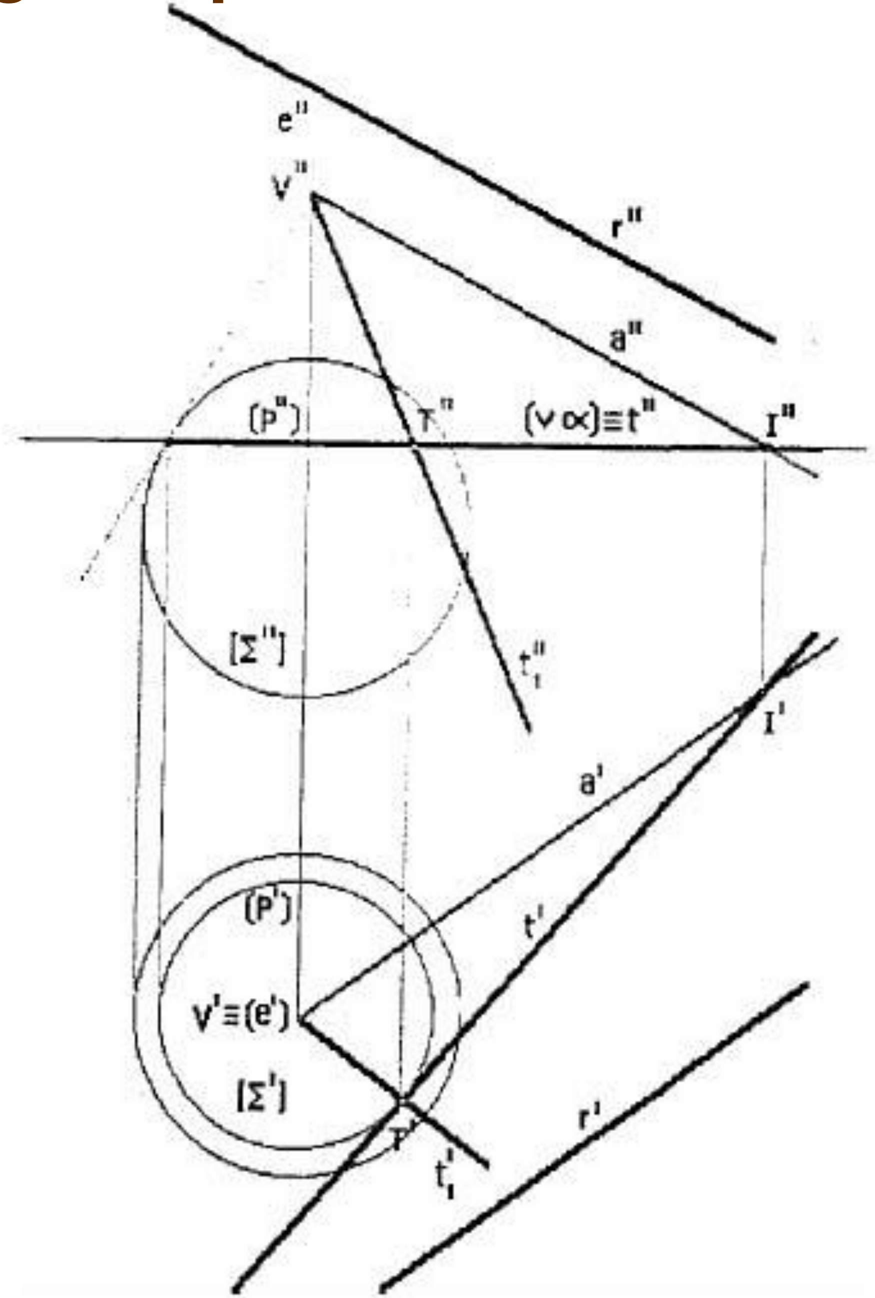
5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



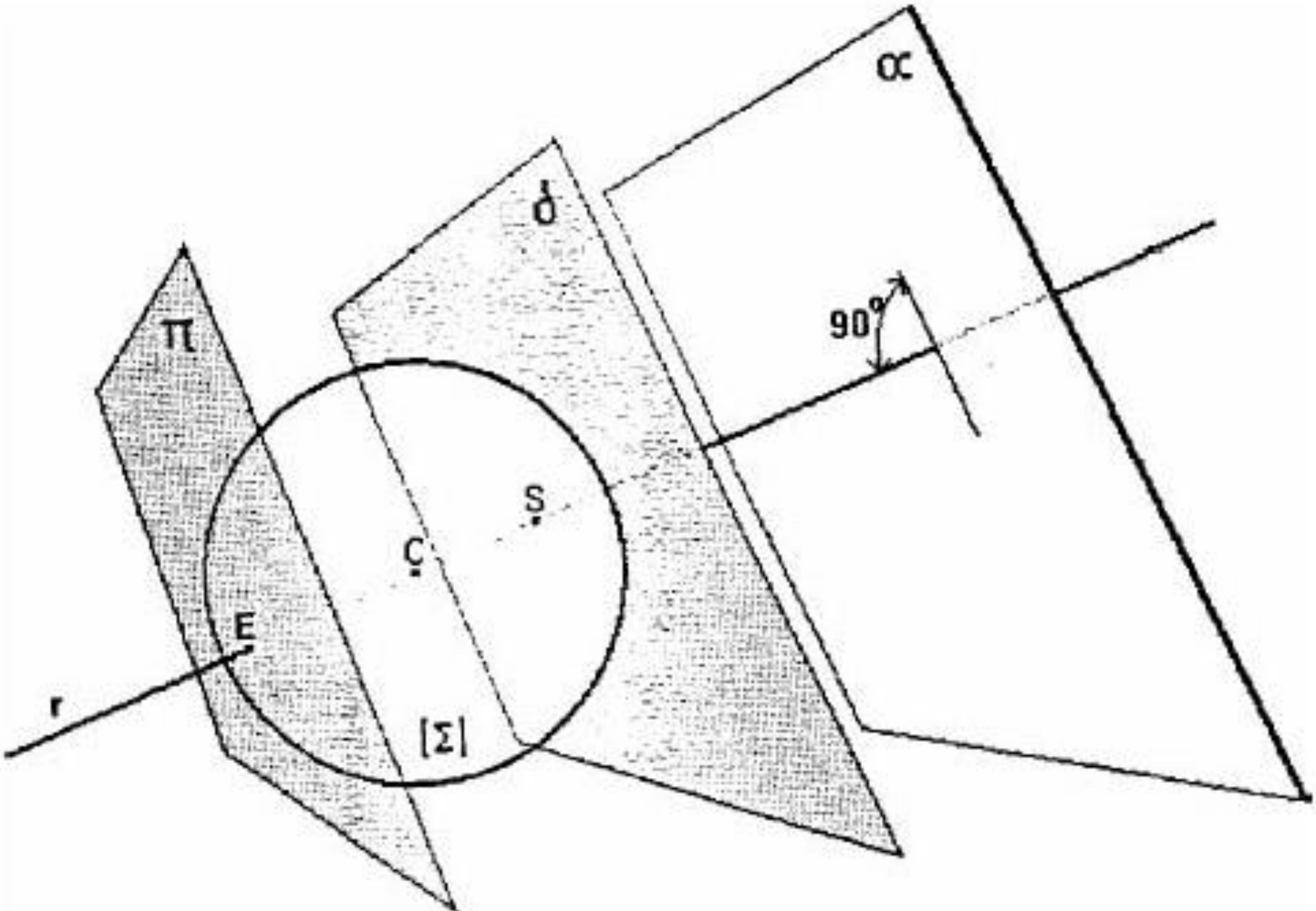
5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



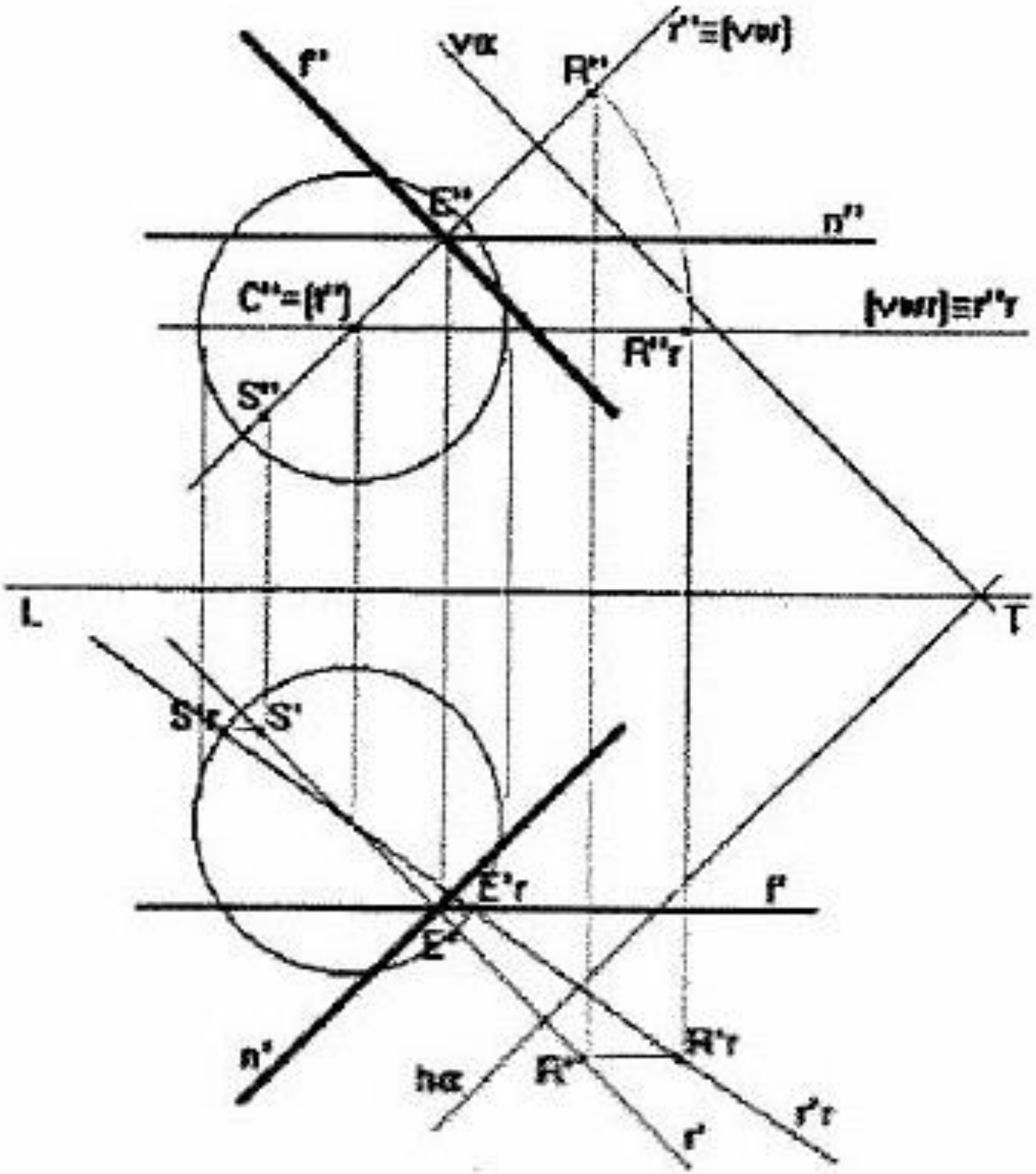
5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



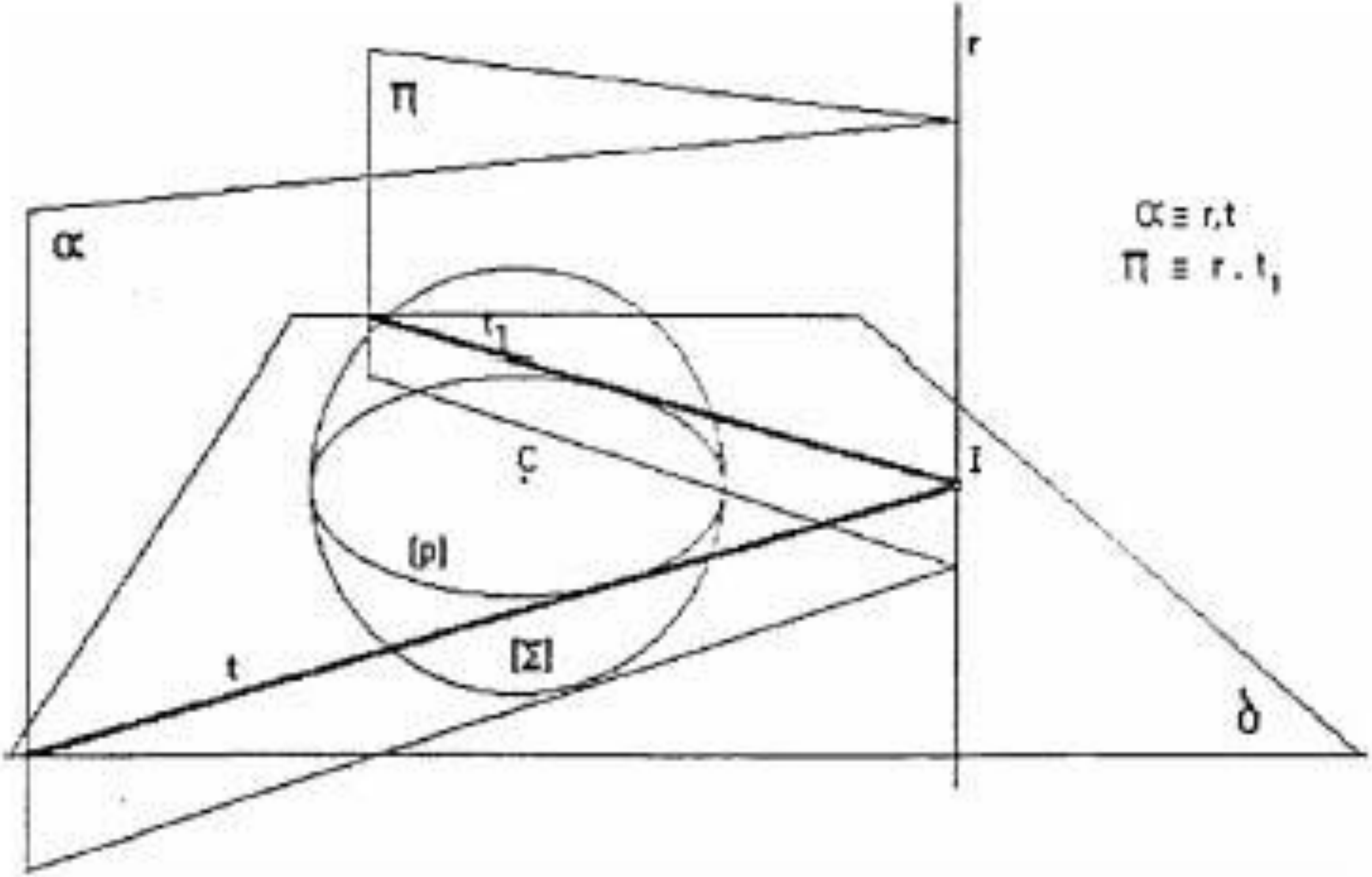
6. Plano tangente paralelo a um plano dado



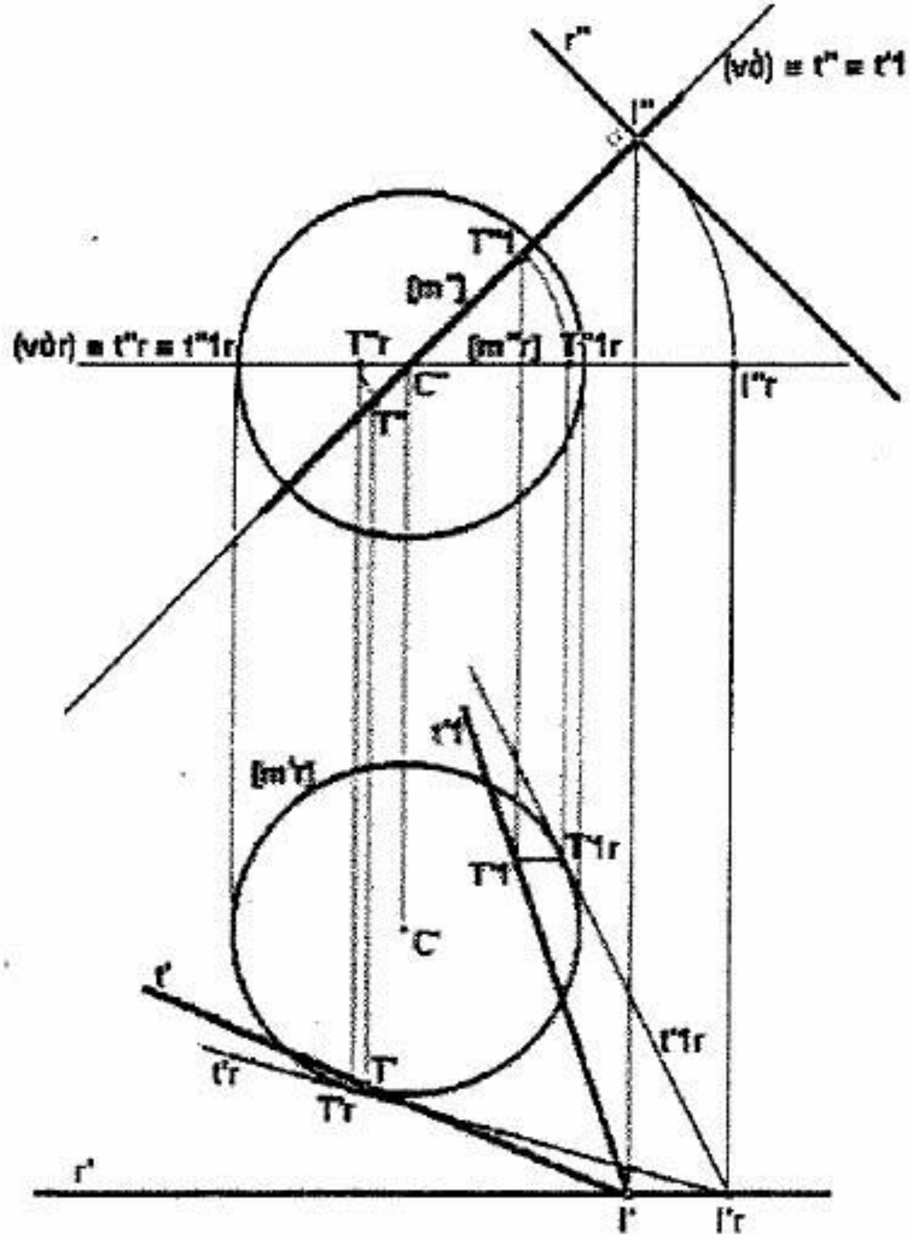
6. Plano tangente paralelo a um plano dado



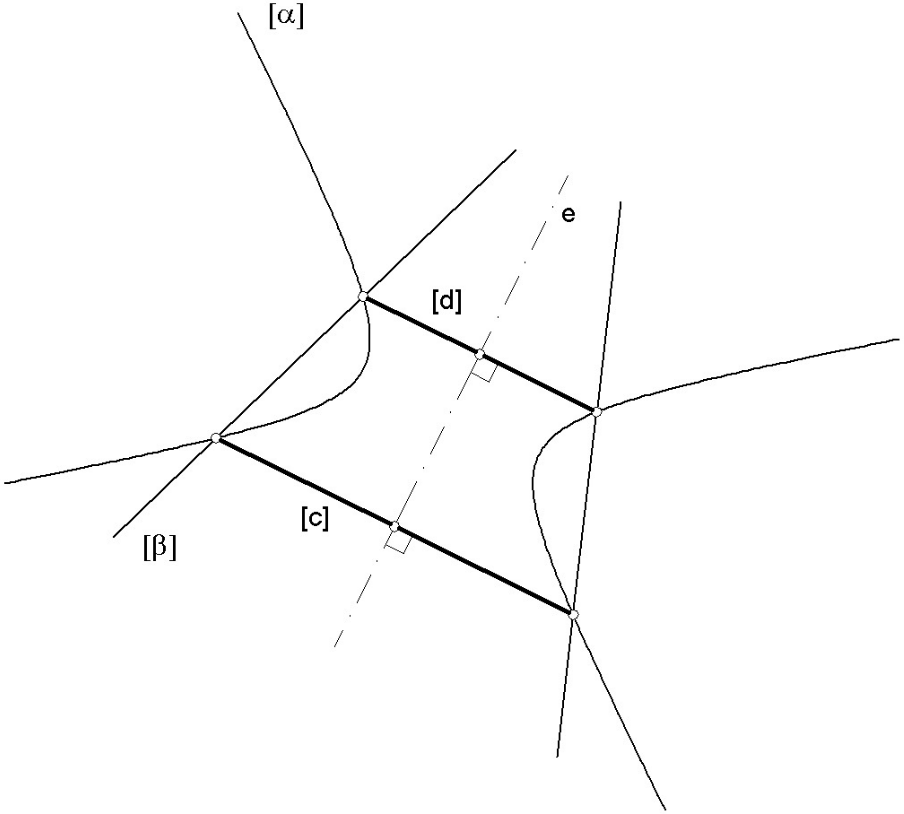
7. Plano tangente passante por uma recta dada

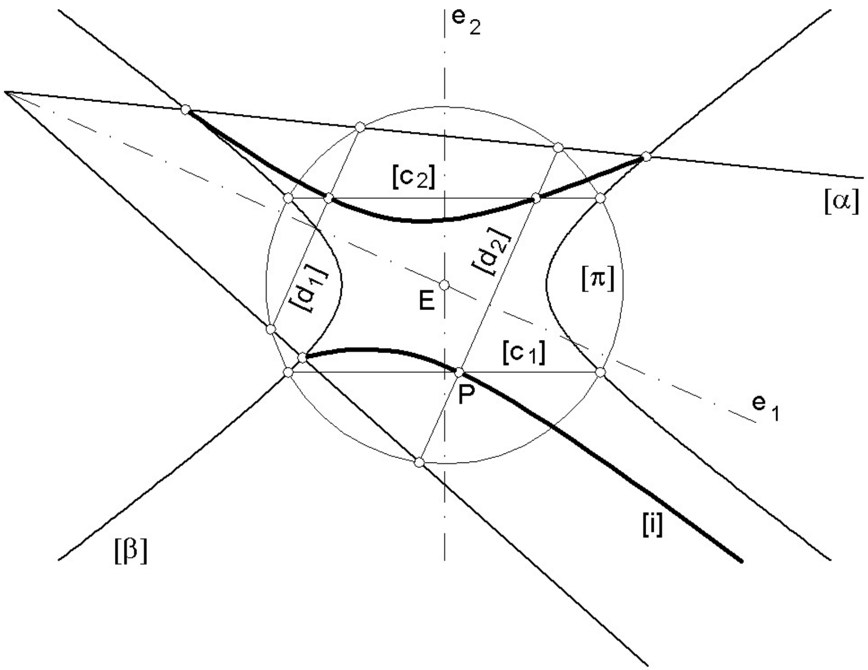


7. Plano tangente passante por uma recta dada



Intersecções entre superfícies de revolução

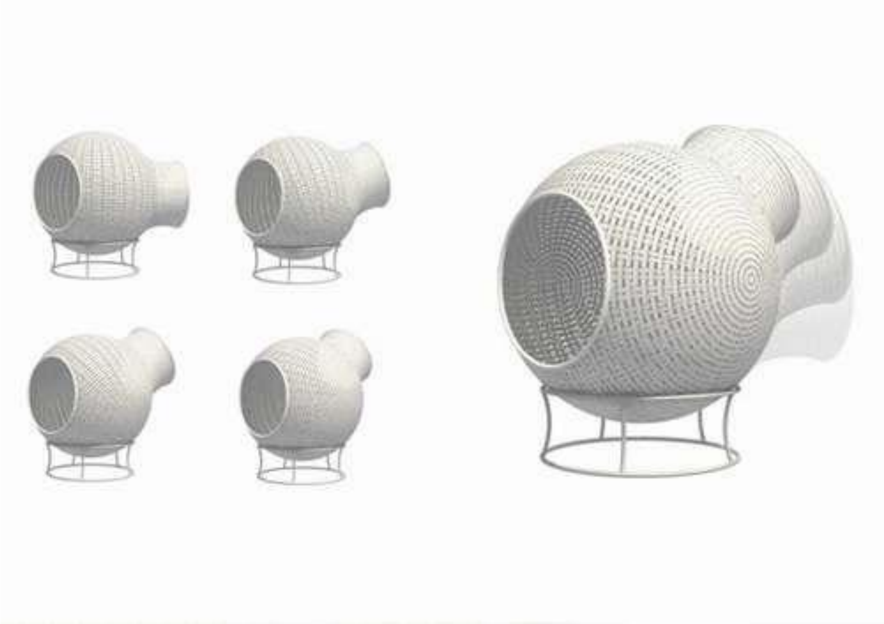


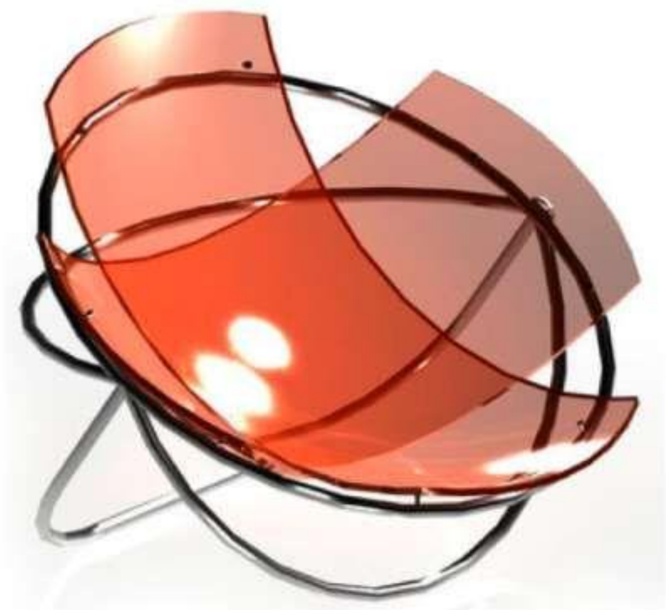


Duas superfícies de revolução com eixo comum intersectam-se segundo circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo.

Para intersectar duas superfícies de revolução com eixos concorrentes, utilizam-se superfícies esféricas auxiliares

Superfícies esféricas no Design





https://www.trendhunter.com/slideshow/spherical-furniture-designs

4.3. Superfícies planificáveis

Superfícies planificáveis (1)

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal (1)
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado (1)
		outras	superfície regrada de uma só face
CURVAS		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO (2)	esférica; tórica; elipsoidal
		outras	serpentina; superfícies mínimas

(1) Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

(2) Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

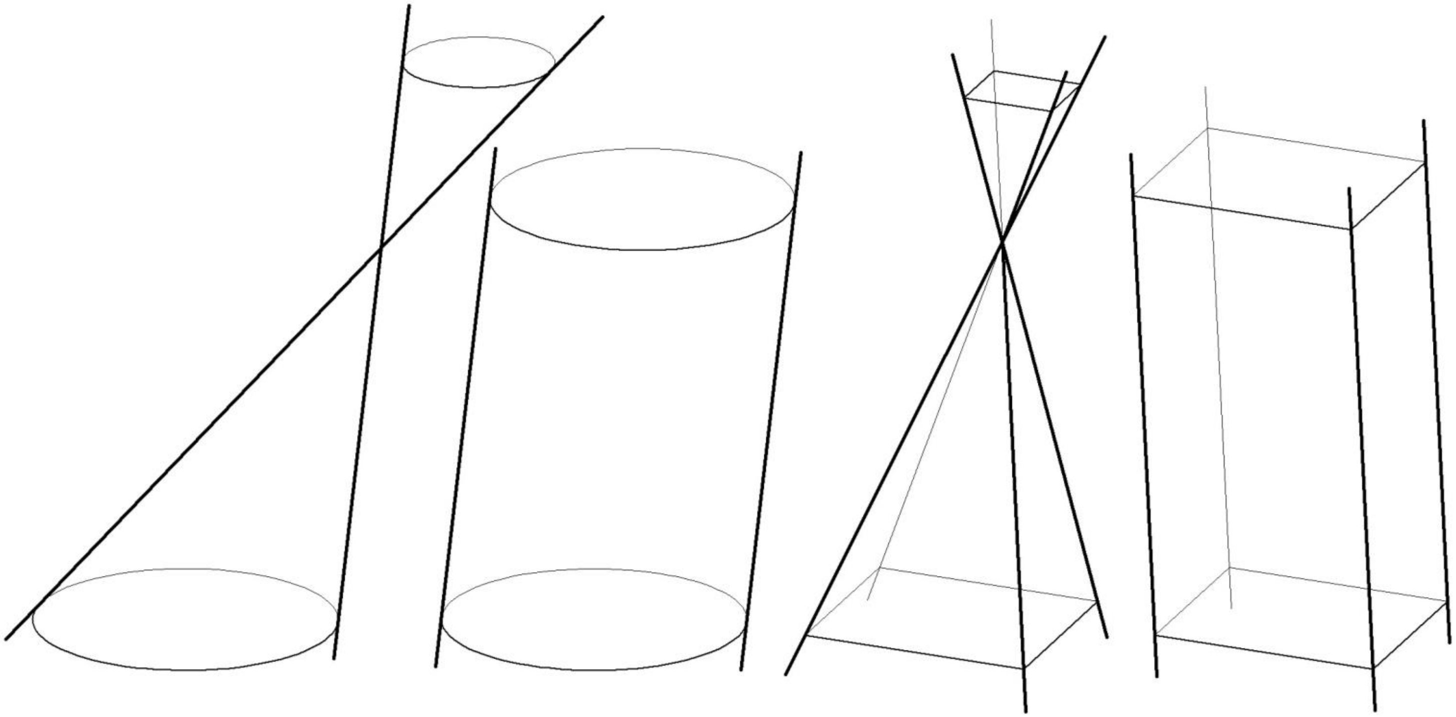
Superfícies planificáveis - conceito

Superfícies planificáveis

Para que uma superfície seja planificável deve ser regrada. Mas esta condição só por si não implica que a superfície seja planificável. Para além de ser regrada deve ainda acontecer que cada para de geratrizes infinitamente próximas entre si sejam concorrentes, isto é complanares. Do enunciado resulta que uma superfície planificável apenas admite um plano tangente por cada geratriz. A planificação corresponde ao "desenrolar" da superfíce até que esta coincida com uma dos planos tangentes. Nesta operação a superfíce não "estica" nem "encolhe", não se "rasga" nem adquire "pregas". Nesta operação preservam-se os comprimentos e os ângulos.

A resolução de problemas concretos depende, obviamente, do tipo particular de superfíce que se tem em presença. Assim, diferentes métodos serão utilizados para planificar superfícies cónicas ou cilindricas de revolução, cónicas ou cilindricas obliquas, convulutas, tangenciais, etc.

Superfícies planificáveis – “cónicas”



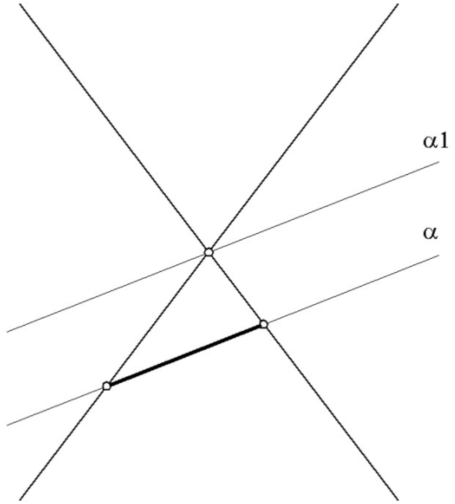
Teorema de Olivier

Este teorema aplica-se às transformadas das linhas de intersecção plana de superfícies cónicas e cilíndricas por planificação destas e pode ser enunciado do seguinte modo:

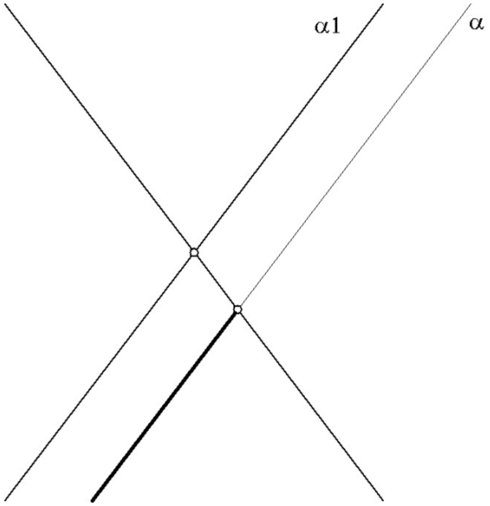
Se uma superfície, cónica ou cilíndrica, admite planos tangentes perpendiculares ao plano que produz a intersecção, então, os pontos de tangência entre a linha de intersecção e as rectas de intersecção entre os planos tangentes e o plano da intersecção correspondem, na planificação, aos pontos de inflexão da linha transformada da intersecção.

As linhas cónicas como intersecções planas em superfícies cónicas (de revolução ou não)

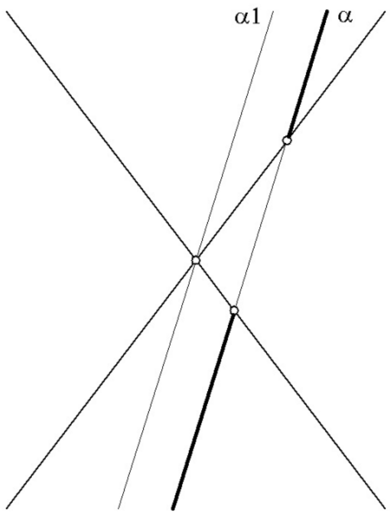
Uma linha CÓNICA resulta da intersecção produzida por um plano numa superfície cónica e pode ser representada através de uma equação de segundo grau.
As linhas cónicas são de três tipos: elipse, parábola e hipérbole.
A elipse é produzida quando o plano intersecta todas as geratrizes da superfície cónica.
A parábola é produzida quando o plano é paralelo a uma geratriz da superfície cónica.
A hipérbole é produzida quando o plano é paralelo a duas geratrizes da superfície cónica.



ELIPSE

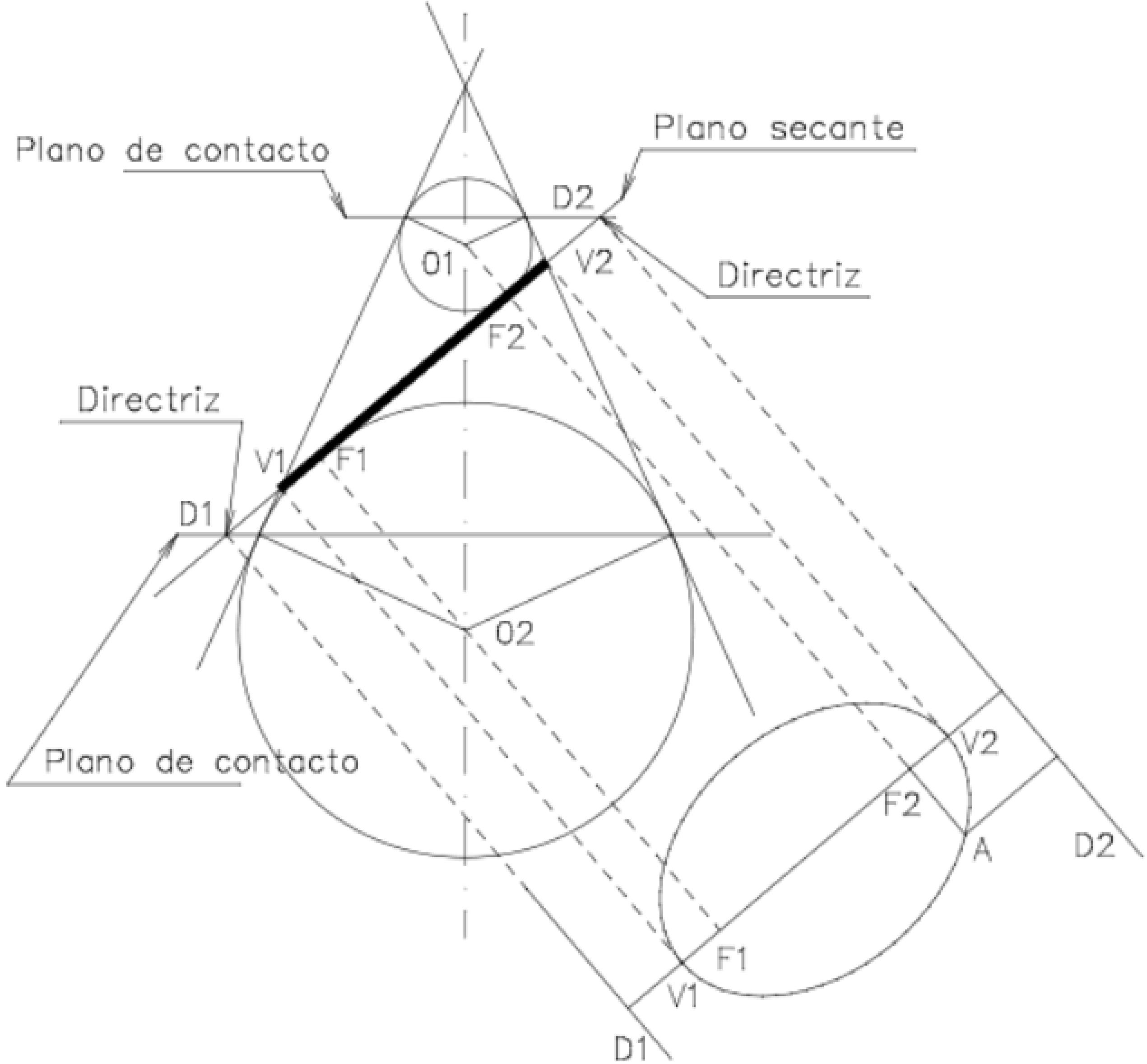


PARÁBOLA



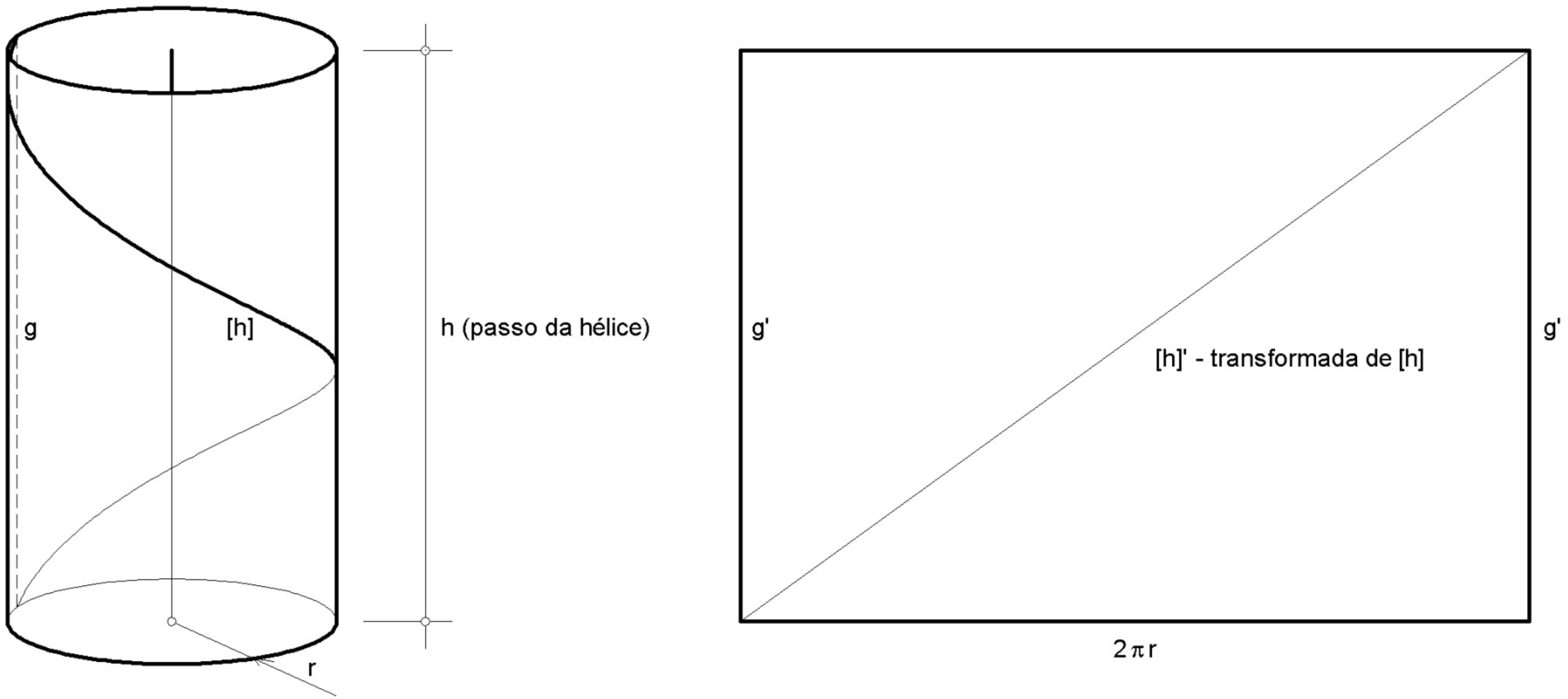
HIPÉRBOLE

As linhas cónicas como intersecções planas em sup. cónicas de revolução (Teorema de Dandelin)



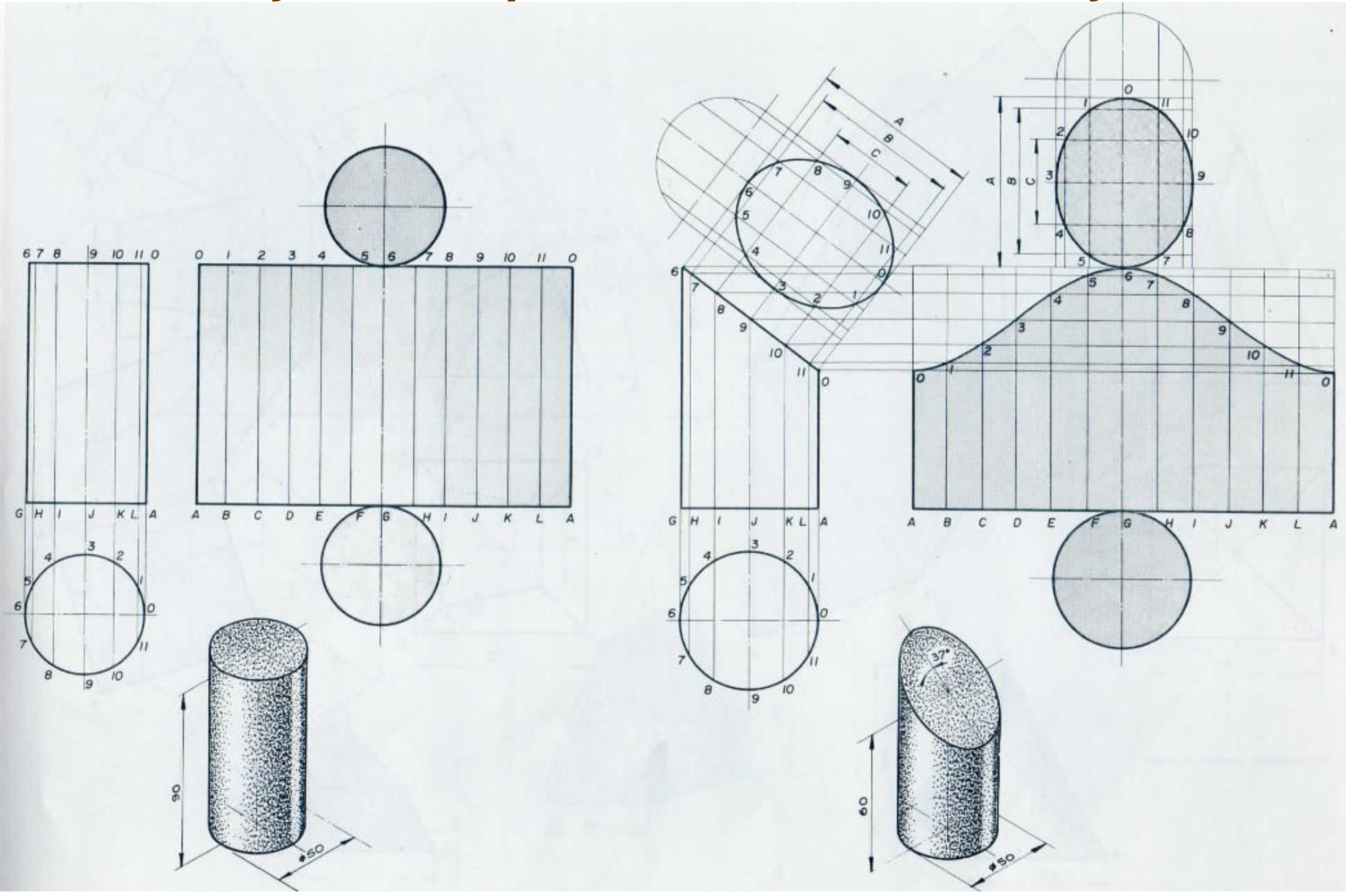
https://dibujotecni.com/geometria-plana/curvas-conicas/attachment/conicas2_dandelin/

A hélice cilíndrica



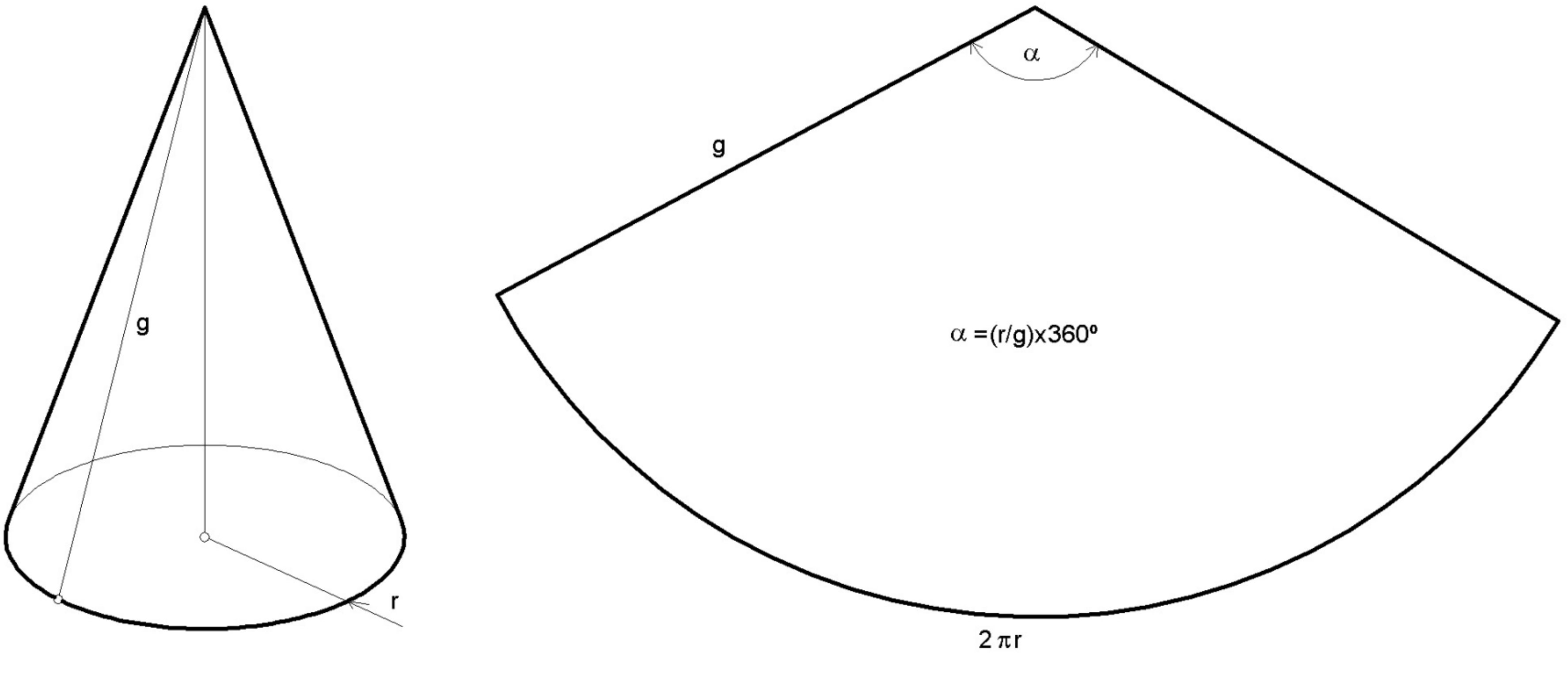
PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO / HÉLICE CILÍNDRICA

Planificação da sup. do cilindro de revolução



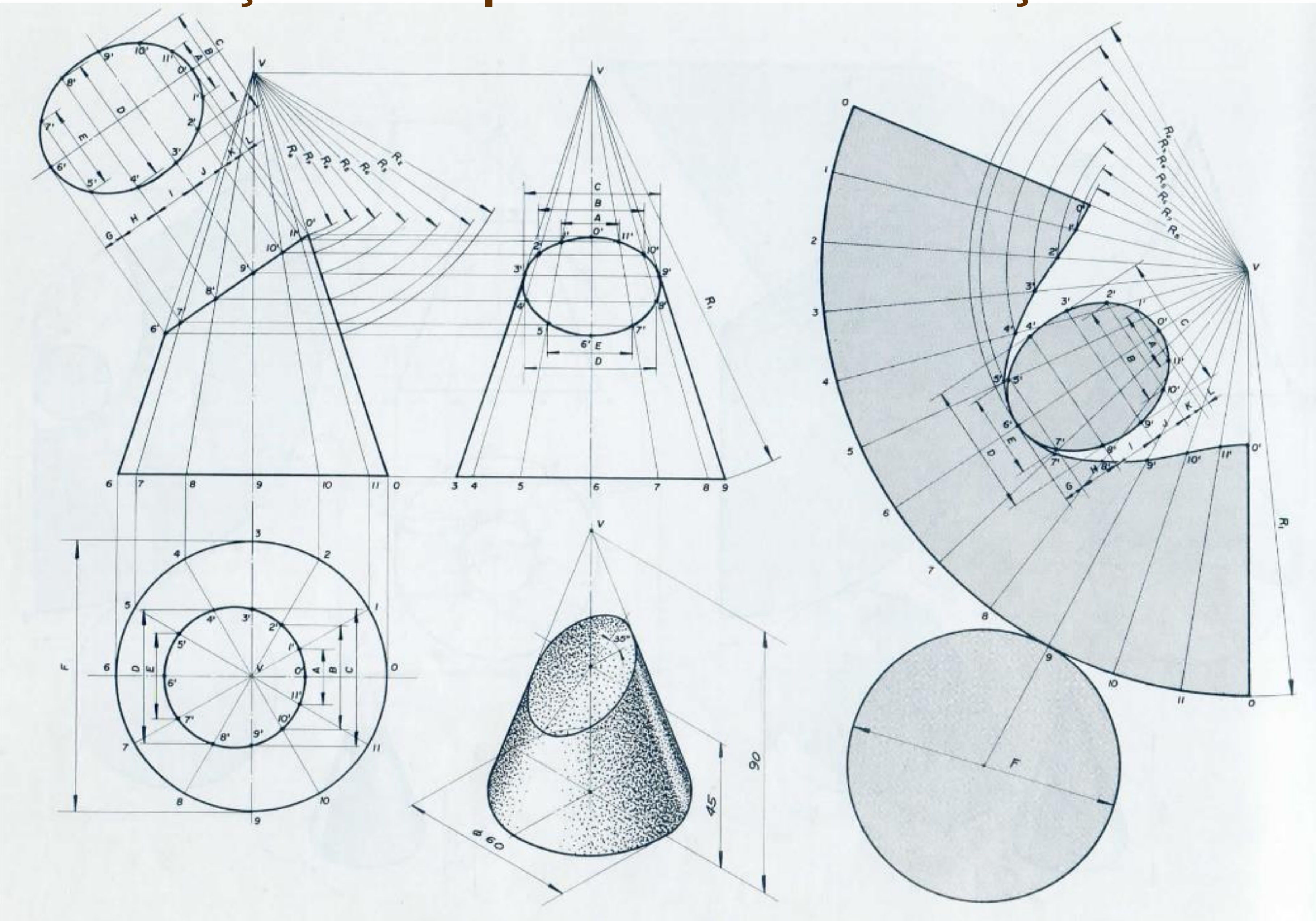
http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EngMec_NOTURNO/TM328/Protec/P.%20Cap.%2008.pdf

Planificação da superfície do cone de revolução



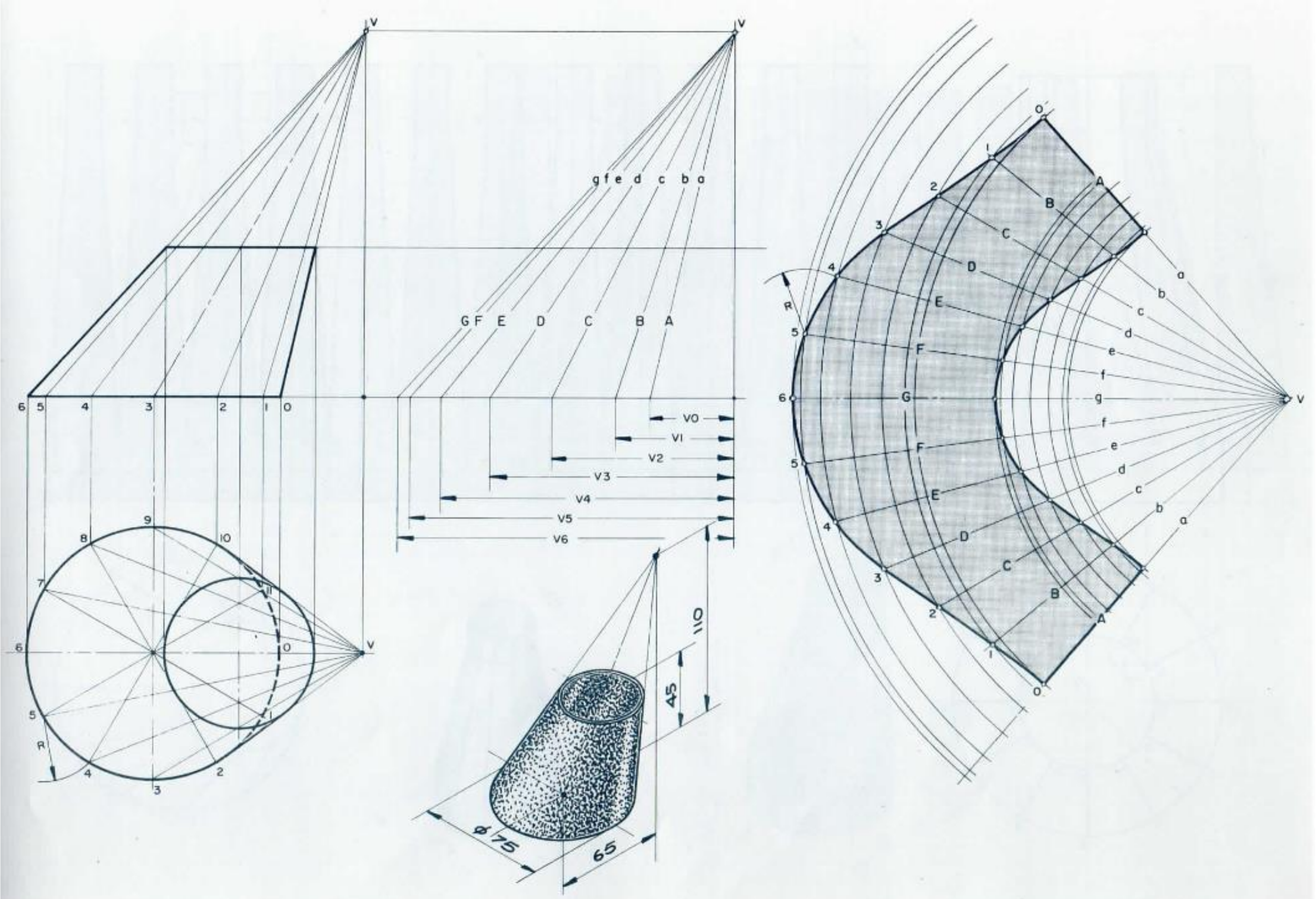
PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CONE DE REVOLUÇÃO

Planificação da sup. do cone de revolução



http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EngMec_NOTURNO/TM328/Protec/P.%20Cap.%2008.pdf

Planificação da sup. do cone oblíquo



http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EngMec_NOTURNO/TM328/Protec/P.%20Cap.%2008.pdf

Superfícies planificáveis – de igual pendente

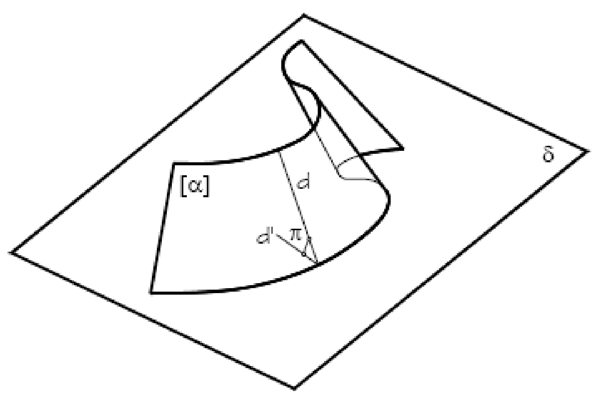
Uma superfície de igual pendente é uma superfície regrada que fica definida por uma linha directriz (curva ou não) e por uma “superfície directriz” relativamente à qual as geratrizes apresentam pendente constante. No caso mais comum, a superfície directriz a que nos referimos nesta definição é um plano horizontal de referência.

Uma das aplicações possíveis deste tipo de superfícies é a resolução de taludes ou coberturas em Arquitectura e Planeamento.

No caso mais comum referido a superfície directriz é um plano podendo a linha directriz ser recta ou curva, paralela ou não ao plano horizontal de referência.

Se a linha curva for paralela ao plano horizontal de referência designa-se por CURVA DE NÍVEL relativamente ao plano horizontal de referência.

. Superfícies de igual pendente



Seja d uma recta de maior declive, da superfície regrada* [α], relativamente a δ.

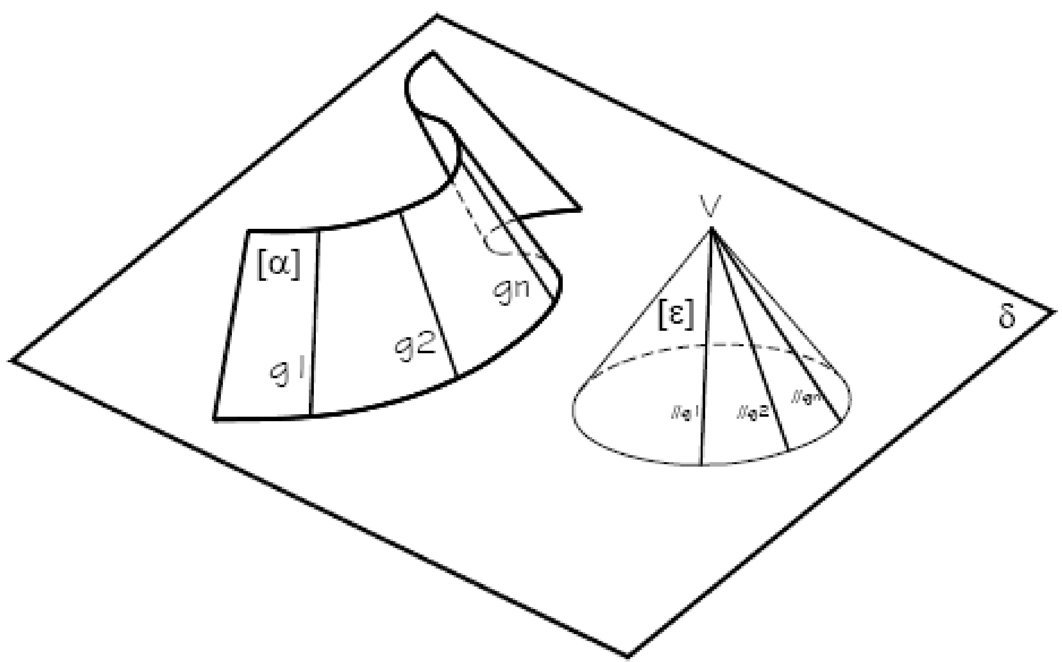
Superfícies planificáveis – de igual pendente

Seja π = K

Se para qualquer recta d $\in$ [α] , π = K , então [α] é uma superfície de igual pe

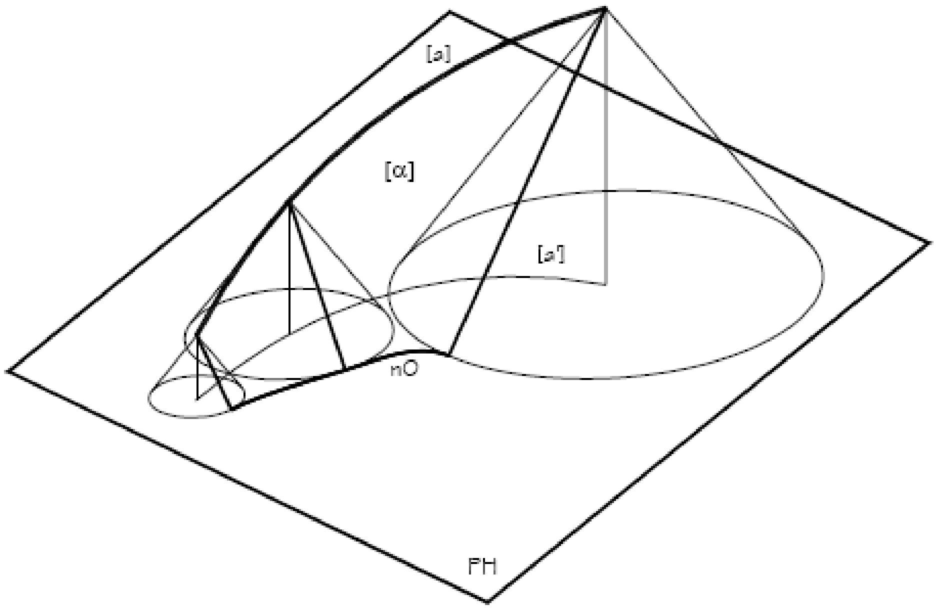
relativamente a δ.

* superfície regrada é toda a superfície gerada pelo movimento de rectas.



Superfícies planificáveis – de igual pendente

Uma superfície de igual pendente é, em geral, uma superfície de “cone director”, isto é, todas as suas geratrizes rectas são paralelas às geratrizes de uma superfície cónica de revolução de eixo perpendicular ao plano a que está a ser referida a pendente.



Uma superfíce de igual pendente é sempre a superfície envolvente do movimento de uma superfície cónica cujo vértice se apoia na directriz [a].

4.4 Superfícies empenadas

Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal[1]
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado[1]
		outras	superfície regrada de uma só face
CURVAS		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO[2]	esférica; tórica; elipsoidal
		outras	serpentina; superfícies mínimas

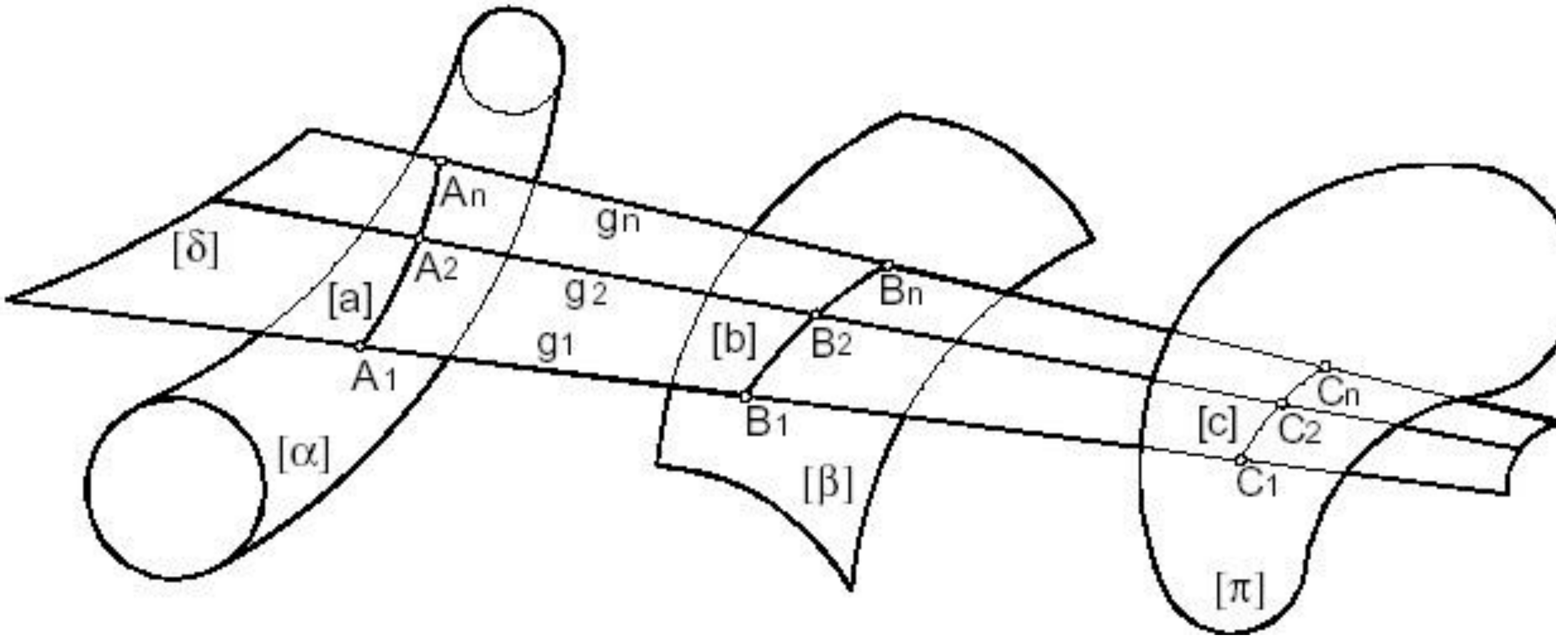
[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)

Uma superfície regrada não é planificável se duas geratrizes infinitamente próximas não se intersectarem. Esta condição é em geral cumprida quando a superfície é definida por três directrizes quaisquer . Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regrada ou em que esta degenera numa superfície planificável.



Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

A condição que se impõe para que as rectas g_1, g_2, g_n definam uma superfície regrada $[\delta]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\pi]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[\delta]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\pi]$ segundo linhas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas g_1, g_2, g_n designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfíces directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.

Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

Se a superfície $[\delta]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n, então diz-se que é SIMPLESMENTE REGRADA.

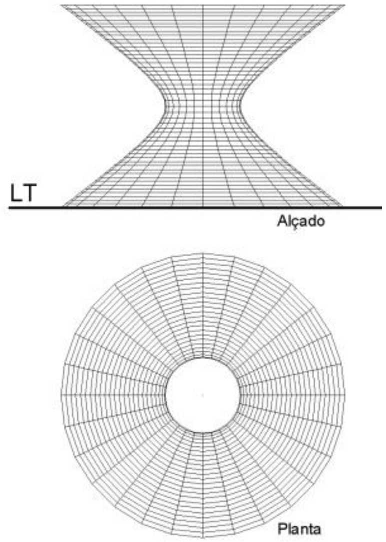
Se a superfície $[\delta]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n e j_1, j_2, j_n, então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

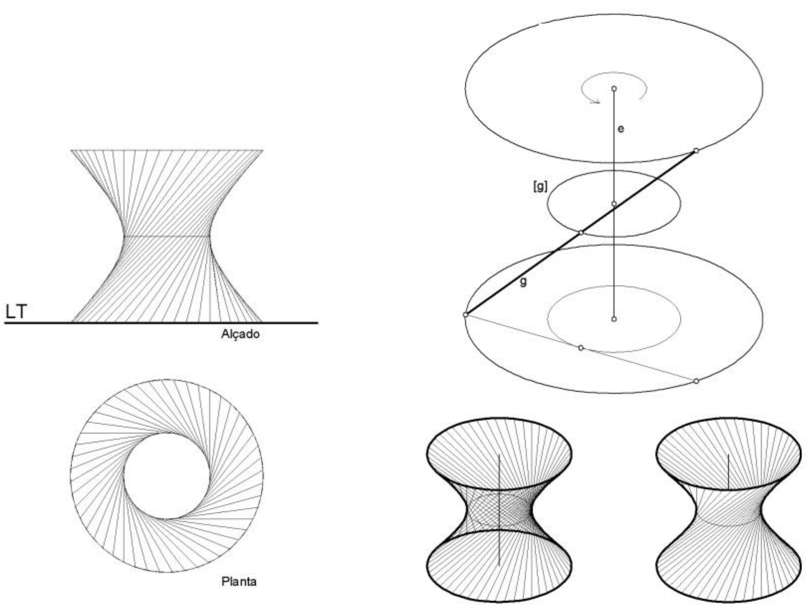
Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas às geratrizes d_1, d_2, d_n de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.

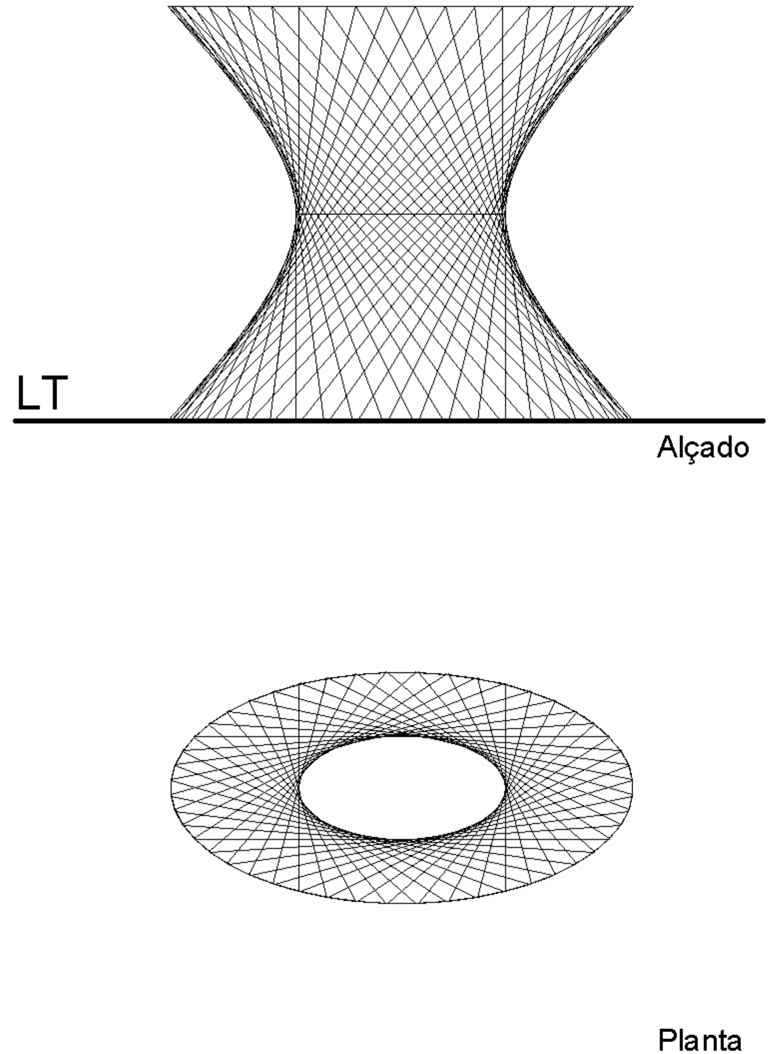
Superfícies empenadas (hiperbolóides)



GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO REGRADO

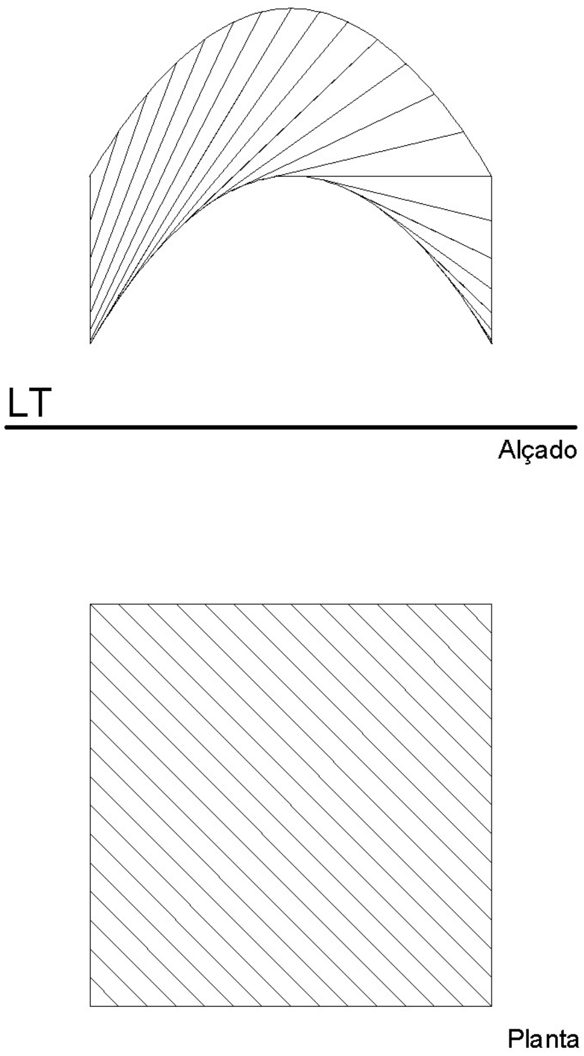


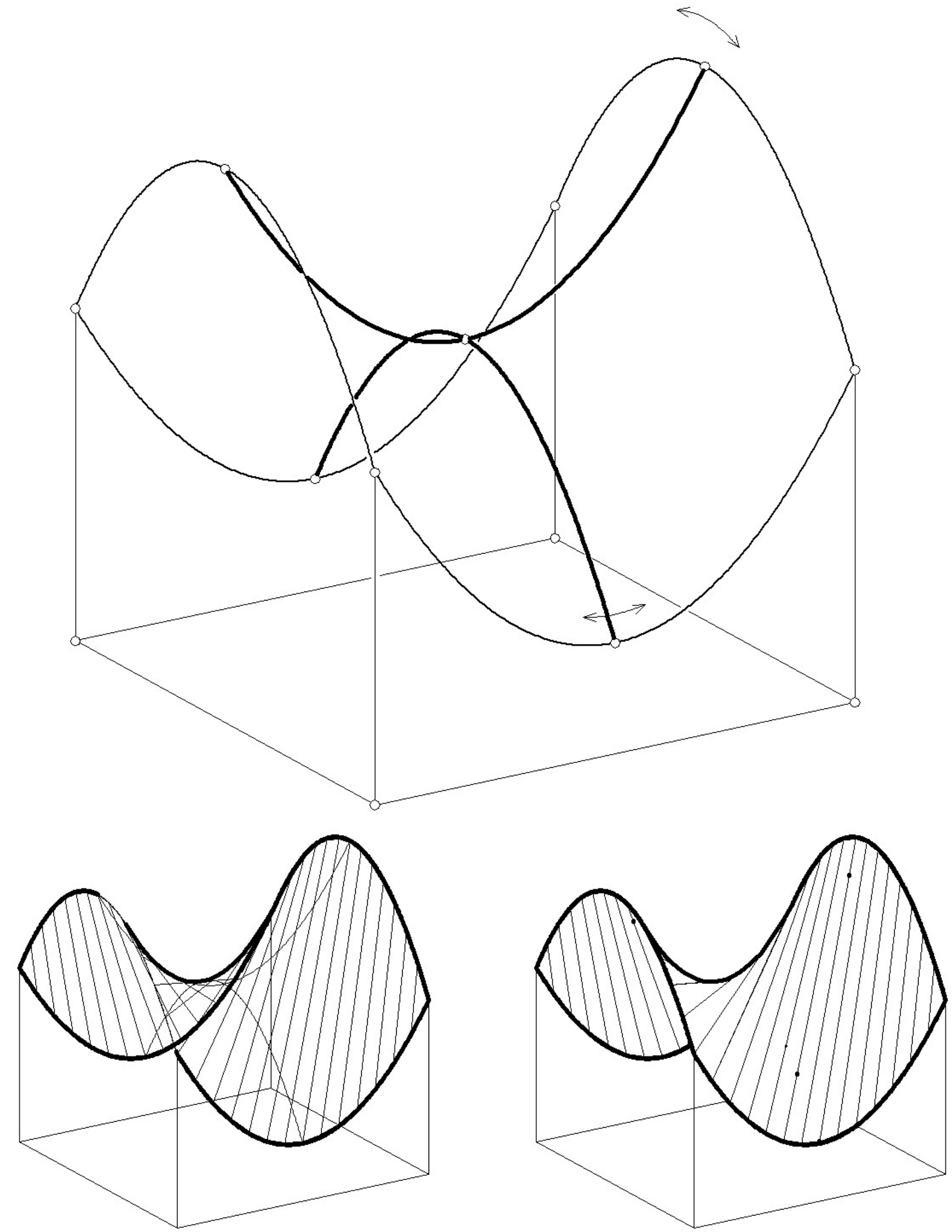
GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR ROTAÇÃO DE UMA RECTA



HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO

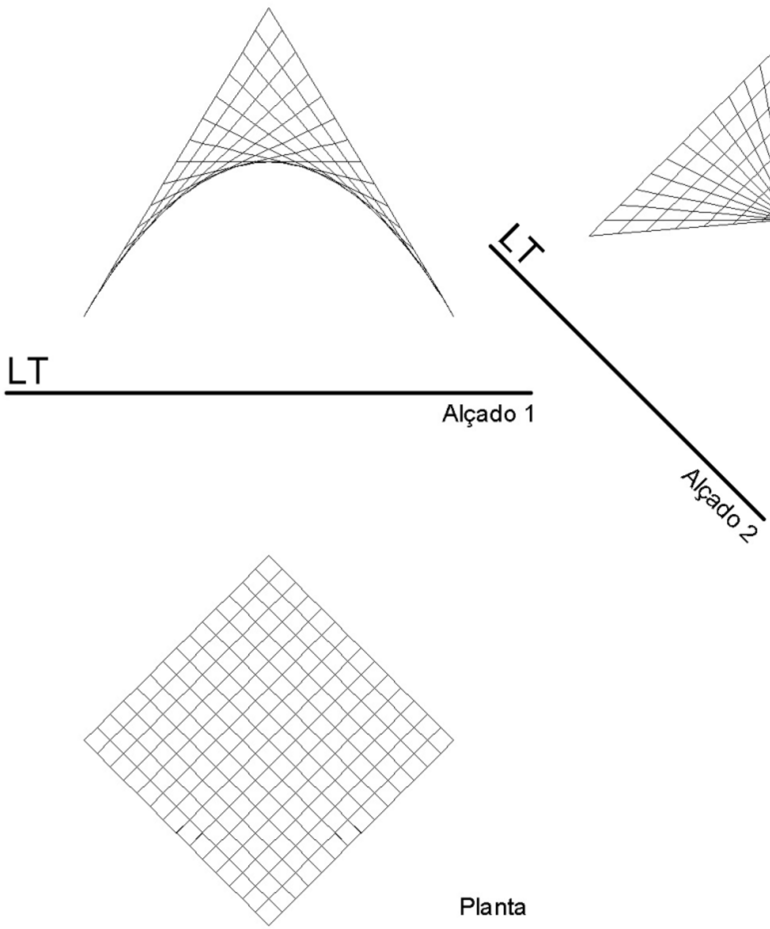
Superfícies empenadas (parabolóides)

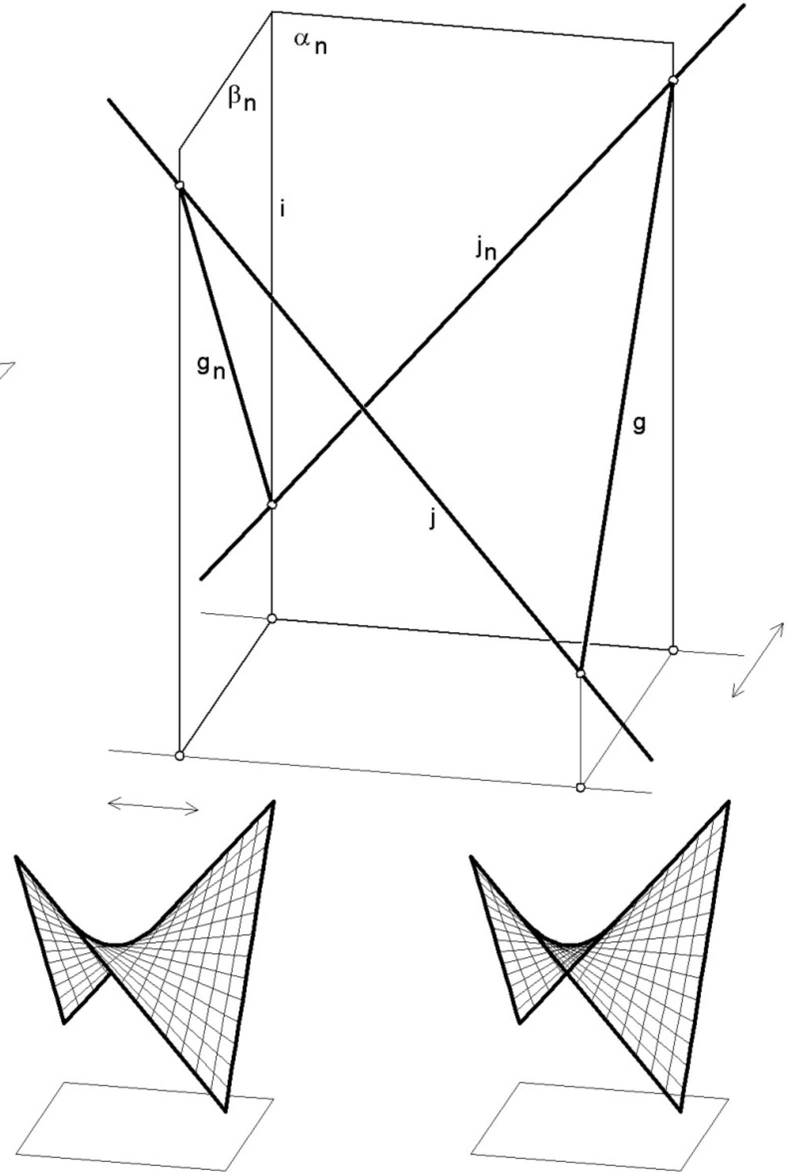




GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR MOVIMENTO DE UMA PARÁBOLA APOIADA NOUTRA PARÁBOLA

Superfícies empenadas (parabolóides)



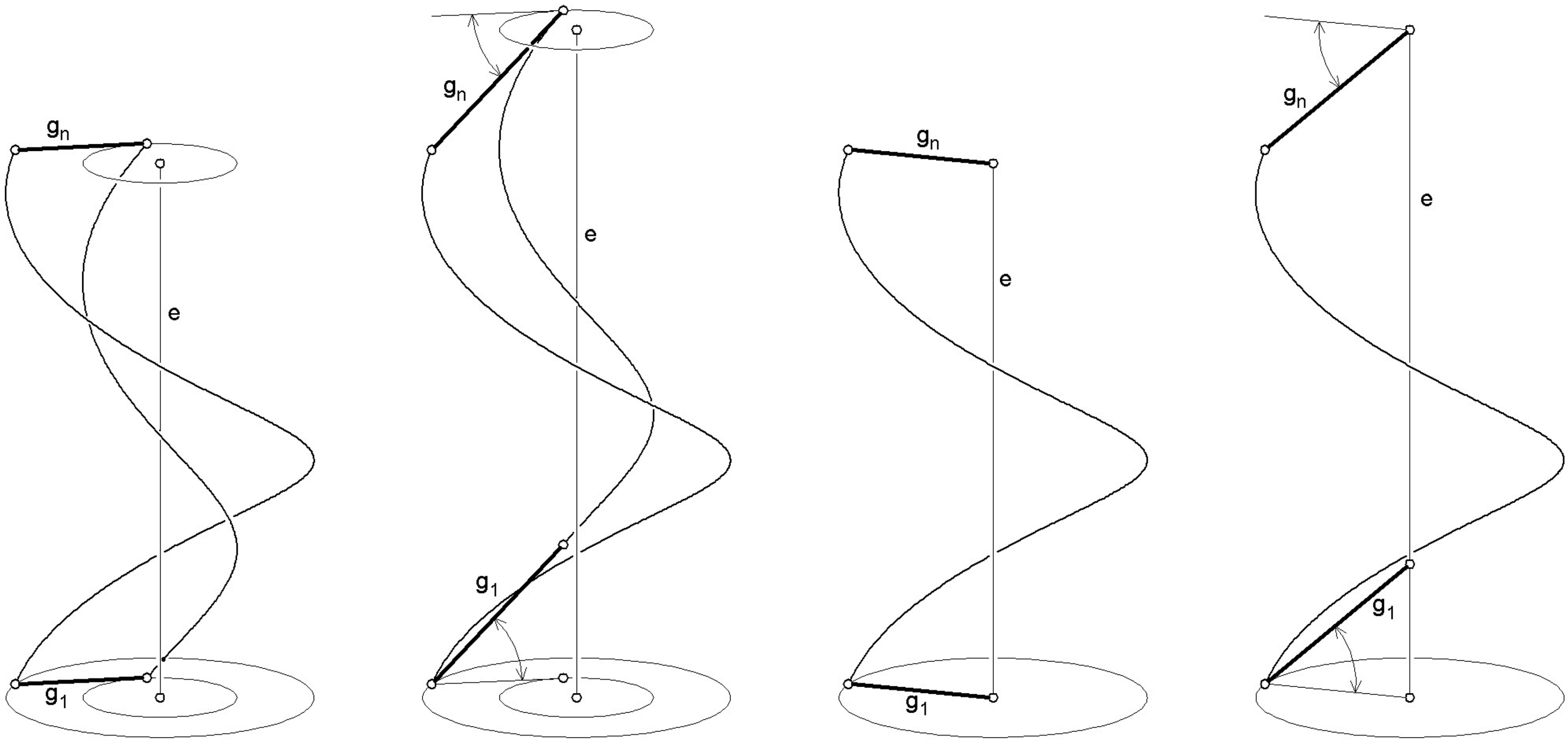


GERAÇÃO POR RECTAS / PLANOS DIRECTORES / PONTO DE DIVERGÊNCIA

Superfícies empenadas (helicoidais)

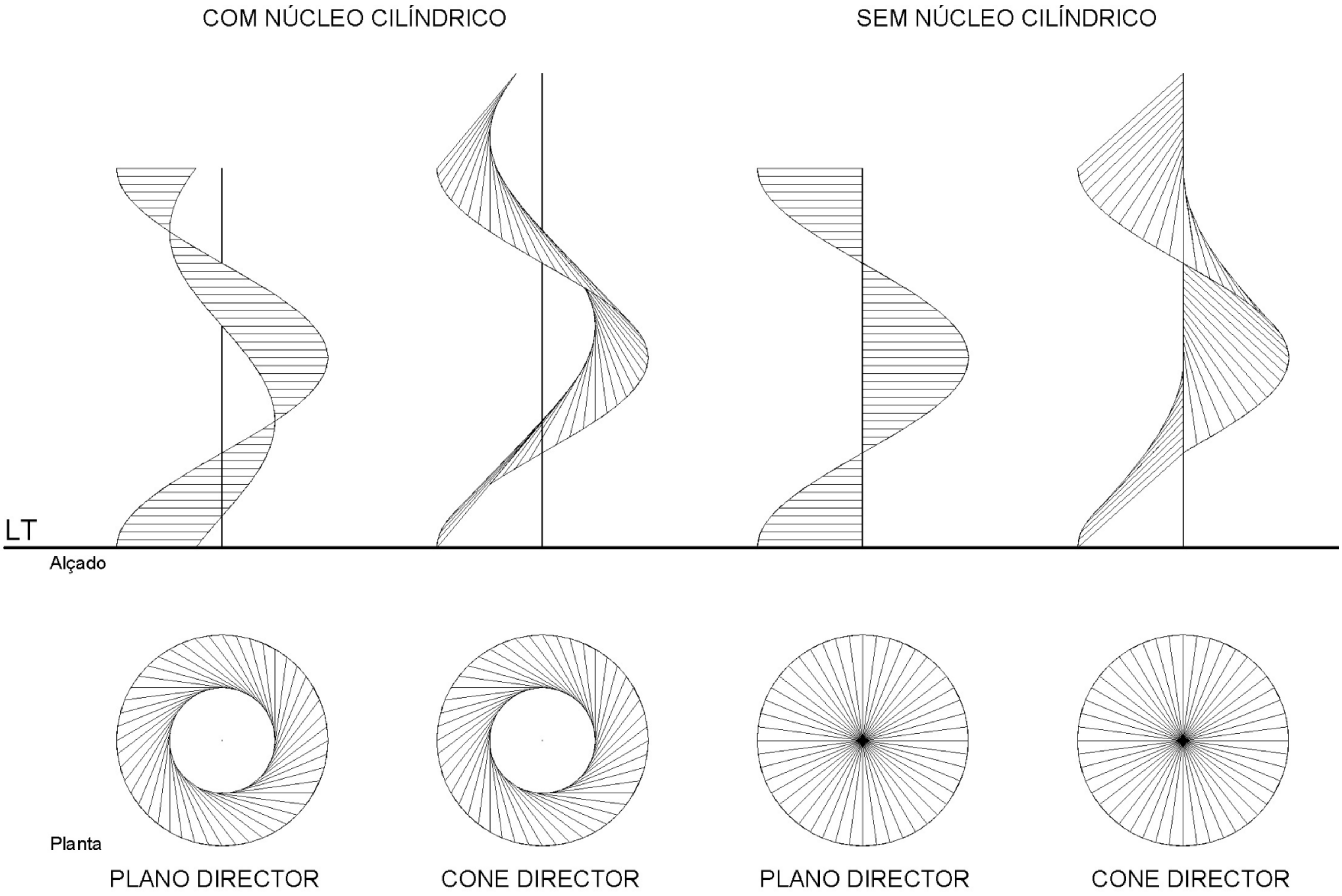
COM NÚCLEO CILÍNDRICO

SEM NÚCLEO CILÍNDRICO

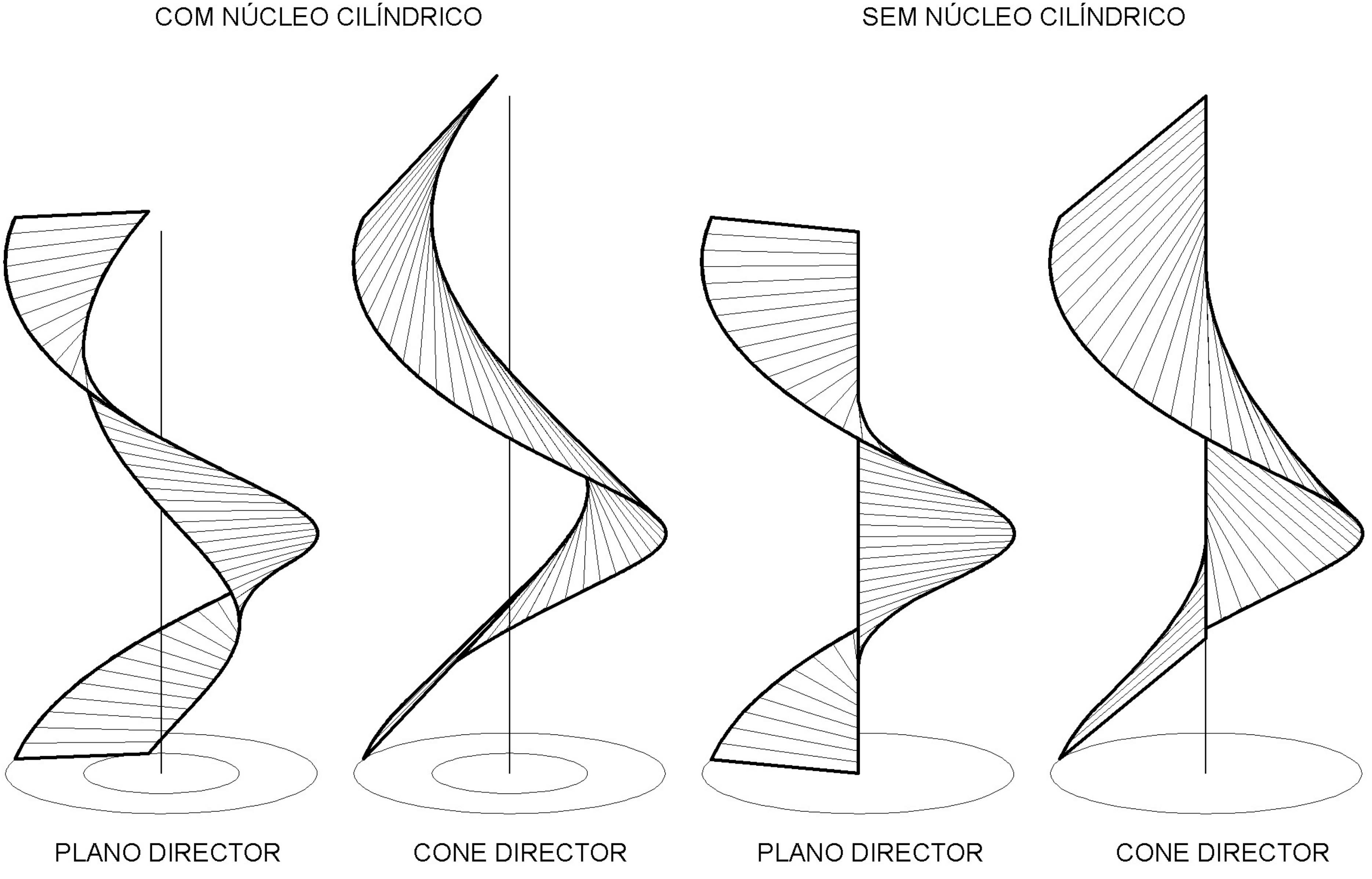


PLANO DIRECTOR | CONE DIRECTOR | PLANO DIRECTOR | CONE DIRECTOR

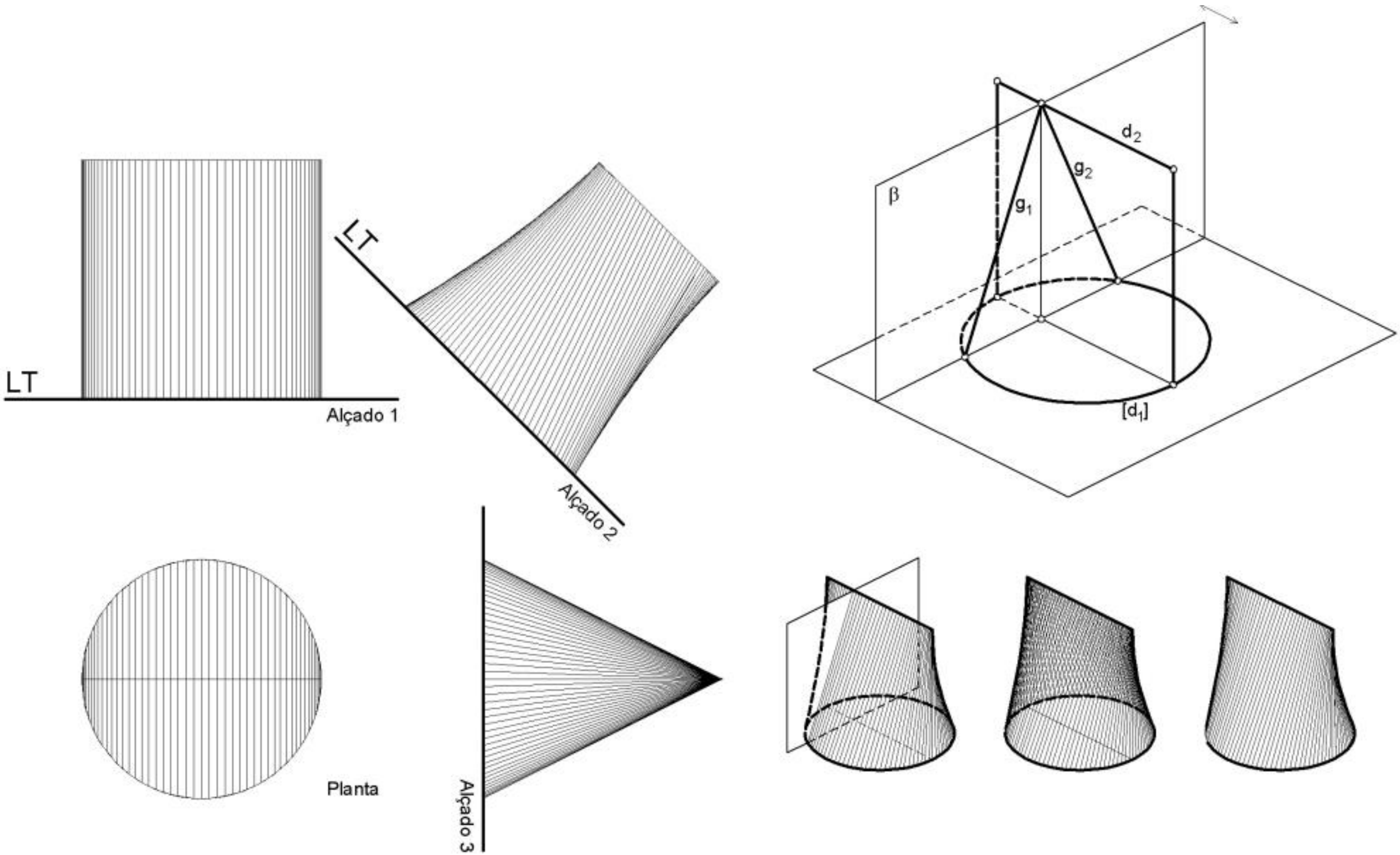
Superfícies empenadas (helicoidais)



Superfícies empenadas (helicoidais empenados)

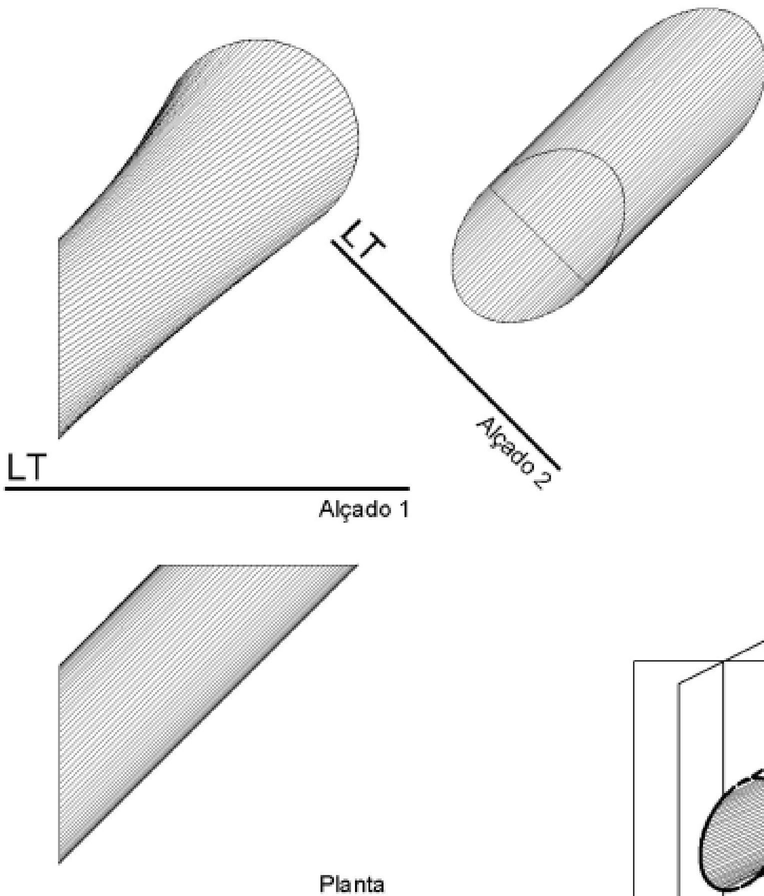


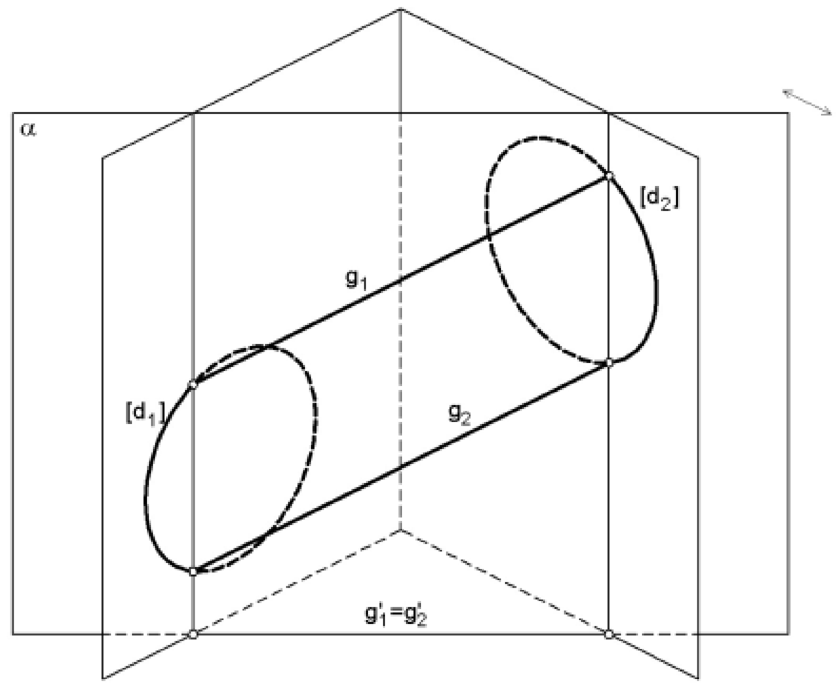
Outras superfícies empenadas

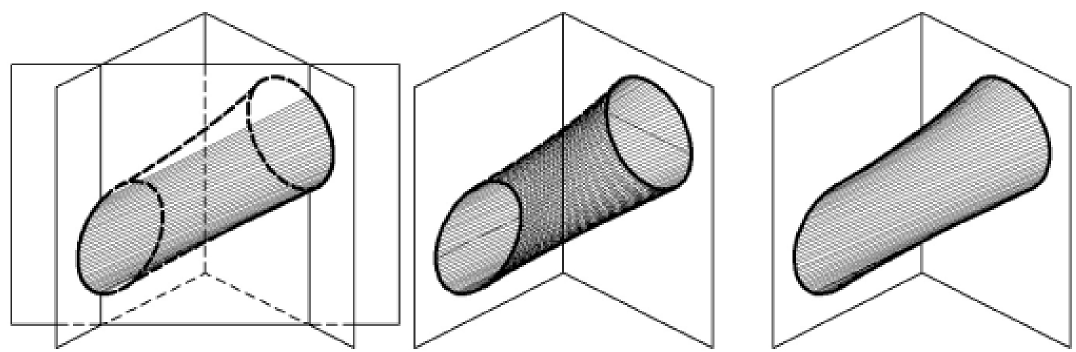


SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

Outras superfícies empenadas

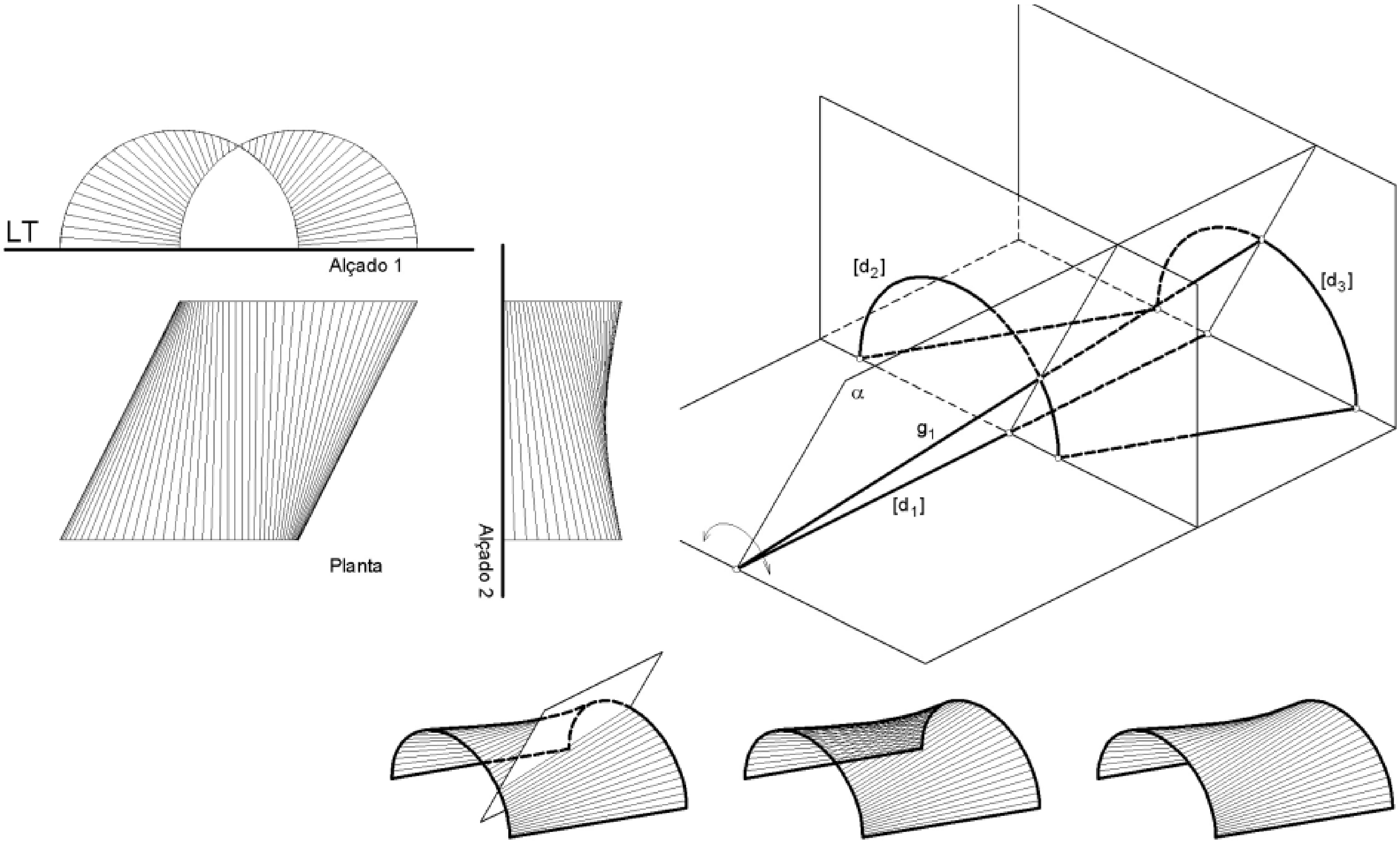






SUPERFÍCIE DE CILINDRÓIDE DE DIRECTRIZES CIRCUNFERENCIAIS

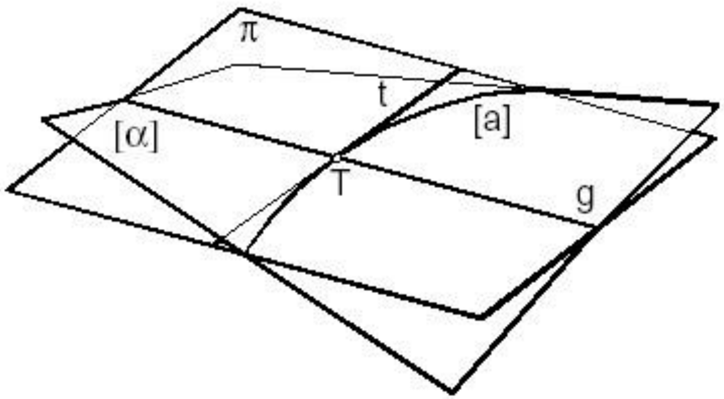
Outras superfícies empenadas



SUPERFÍCIE DE ARCO ENVIESADO - "CORNO DE VACA"

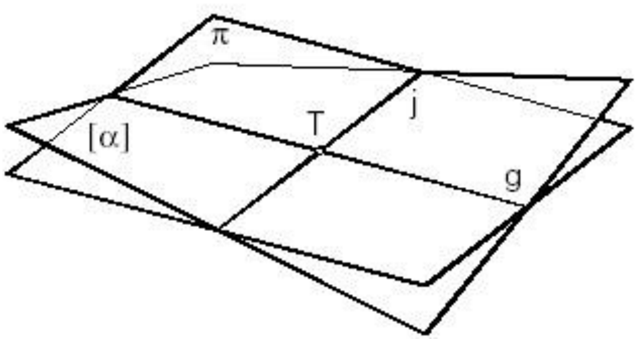
Superfícies empenadas - Planos tangentes

Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada



Numa superfíce empenada simplesmente regrada $[\alpha]$ o plano π, tangente a $[\alpha]$ num ponto T, contém a geratriz recta g que por ele passa. Este plano intersecta a superfíce segundo a recta g e segundo uma linha $[a]$. O plano π contém a recta t tangente à linha $[a]$ no ponto T.

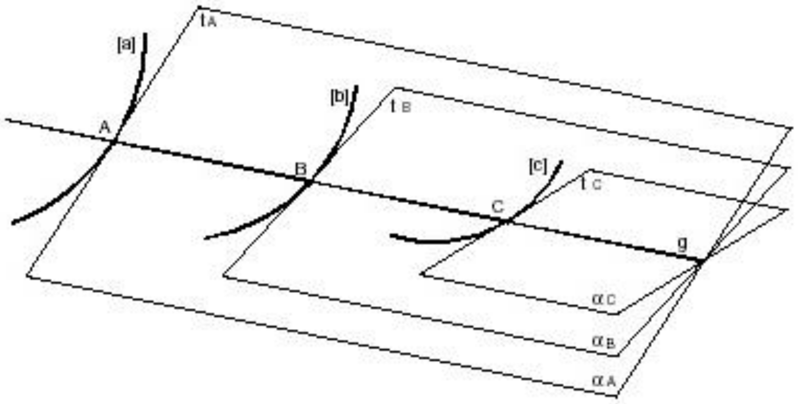
Plano tangente a uma superfície duplamente regrada



Numa superfície empenada duplamente regrada, $[\alpha]$, o plano π, tangente a $[\alpha]$ num ponto T, fica definido pelas duas geratrizes rectas, g e j, que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.

Superfícies empenadas - Planos tangentes

Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz

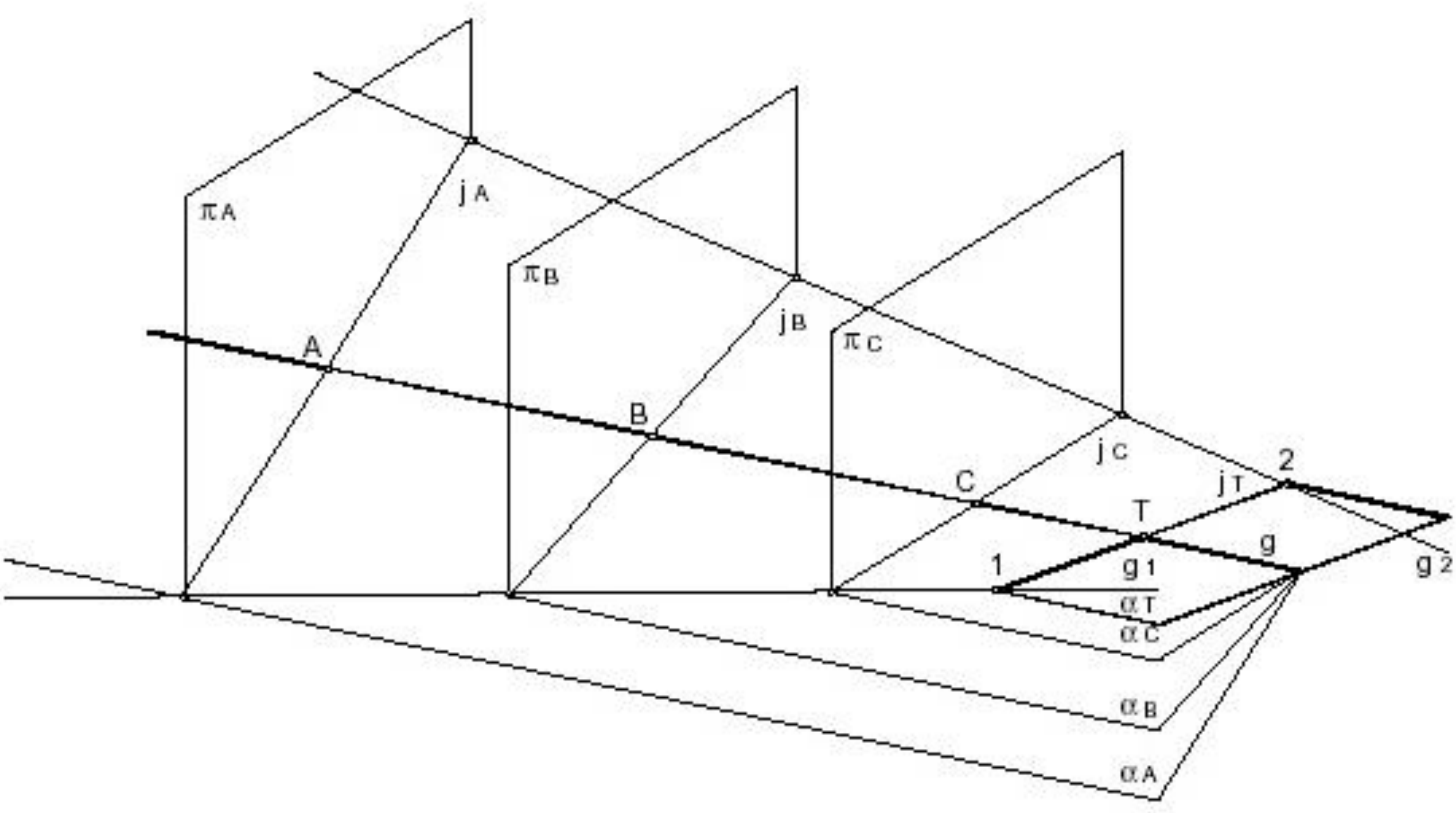


Considere-se a superfície empenada regrada $[\delta]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja g uma geratriz recta, da superfície $[\delta]$, que contém os pontos A, B e C pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos α_A, α_B e α_C tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos A, B e C, respectivamente, ficam definidos pela geratriz g e pelas rectas t_A, t_B e t_C, respectivamente tangentes a $[a]$ em A, a $[b]$ em B e a $[c]$ em C.

Superfícies empenadas - Planos tangentes



Superfícies empenadas - Planos tangentes

Se se intersectar o plano α_A com um plano π_A qualquer (passante pelo ponto A), o plano α_B com um plano π_B qualquer (passante pelo ponto B), e o plano α_C com um plano π_C qualquer (passante pelo ponto C), obtêm-se, respectivamente, as rectas j_A, j_B e j_C tangentes à superfície regrada empenada $[\delta]$ nos pontos A, B e C, respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g.

Como os planos π_A, π_B e π_C podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g.

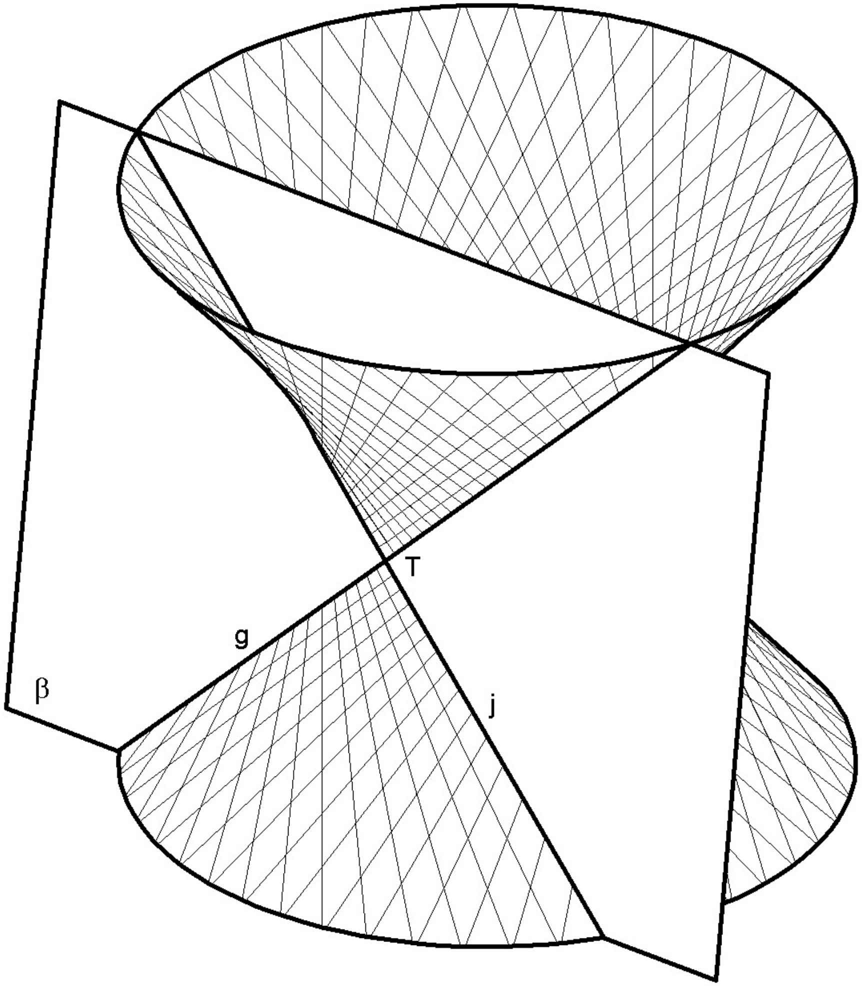
Se os três planos π_A, π_B e π_C forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.

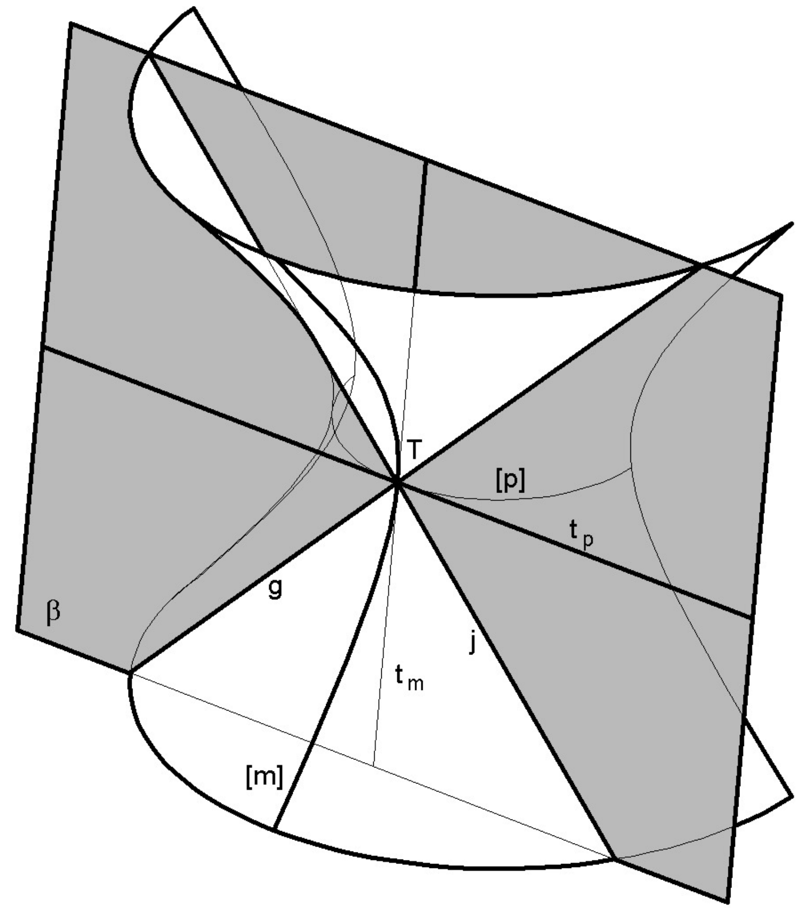
Superfícies empenadas - Planos tangentes

Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfíce $[\delta]$ ao longo da geratriz g.

Determinar o plano α_T, tangente à superfície $[\delta]$ num ponto T qualquer da geratriz g, consiste em determinar a geratriz j_T (do sistema contrário ao de g e concorrente com g no ponto T) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.

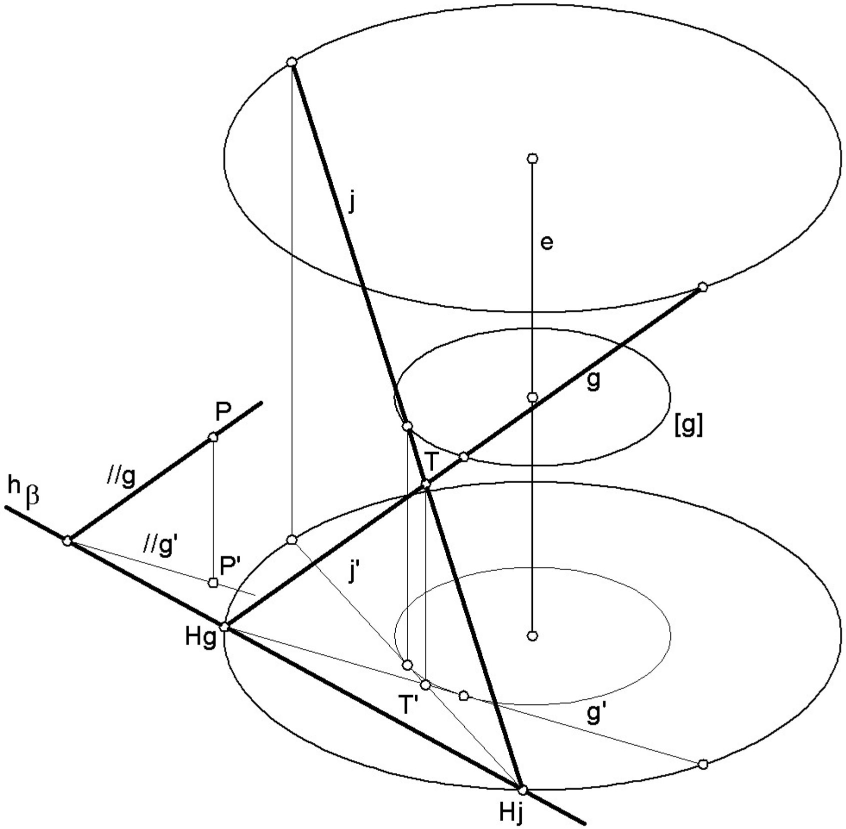
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes

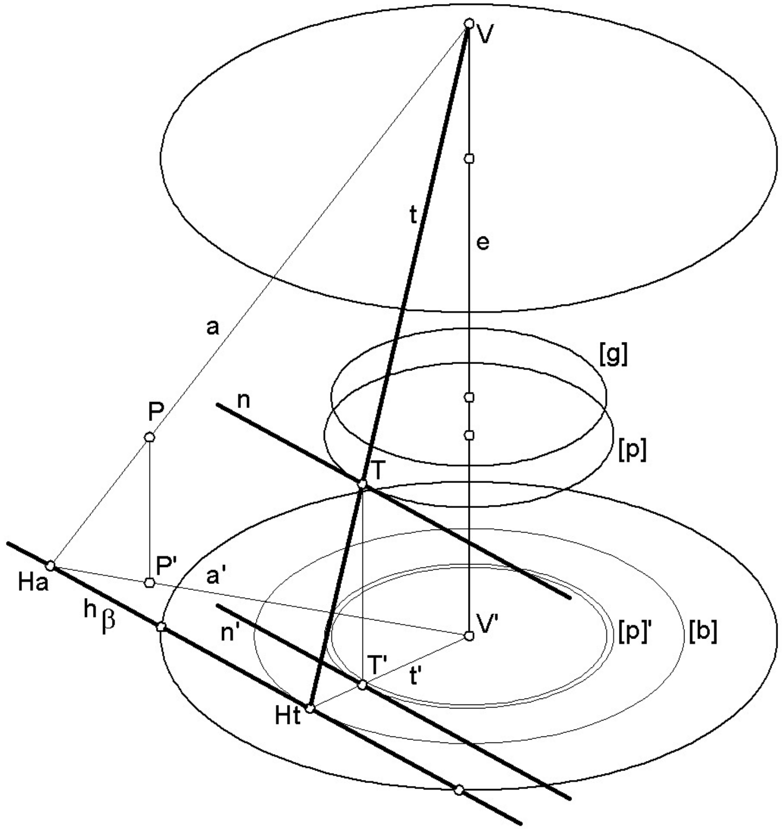




PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO DA SUPERFÍCIE

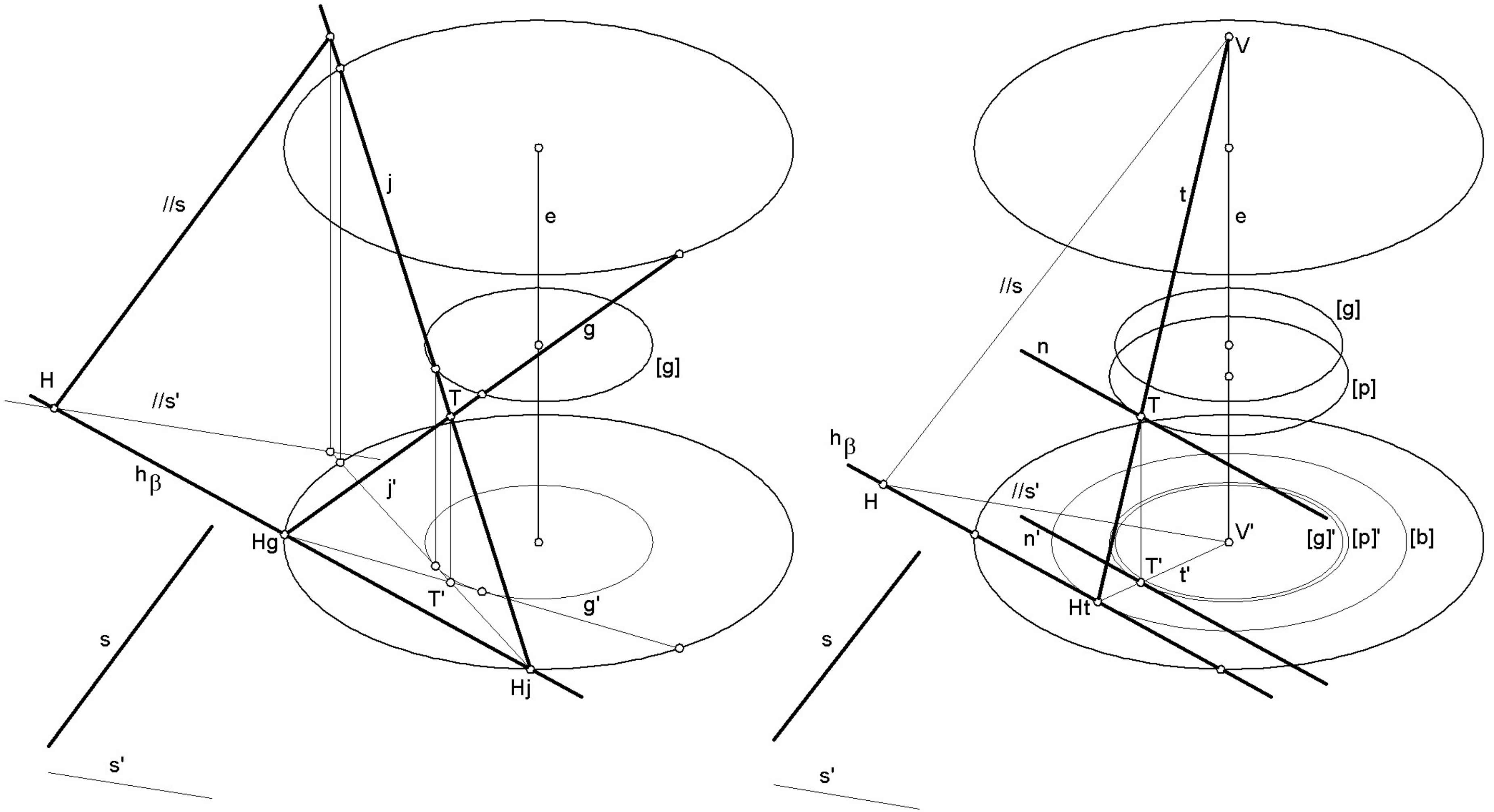
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes





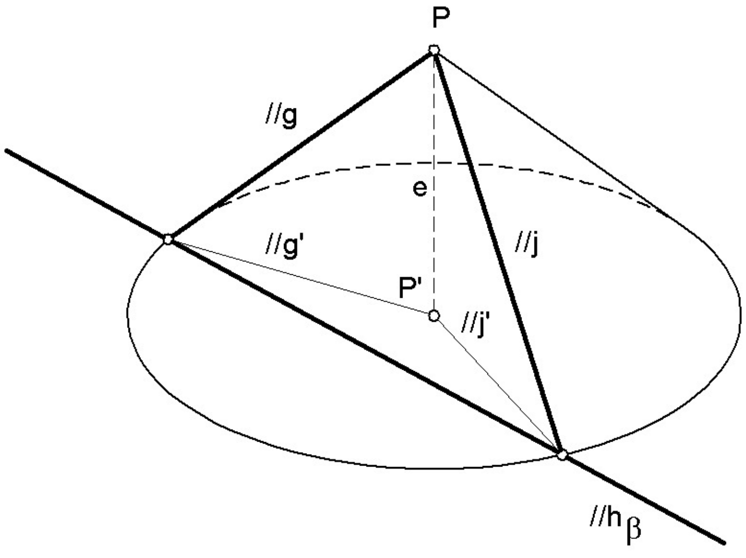
PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR PONTO EXTERIOR

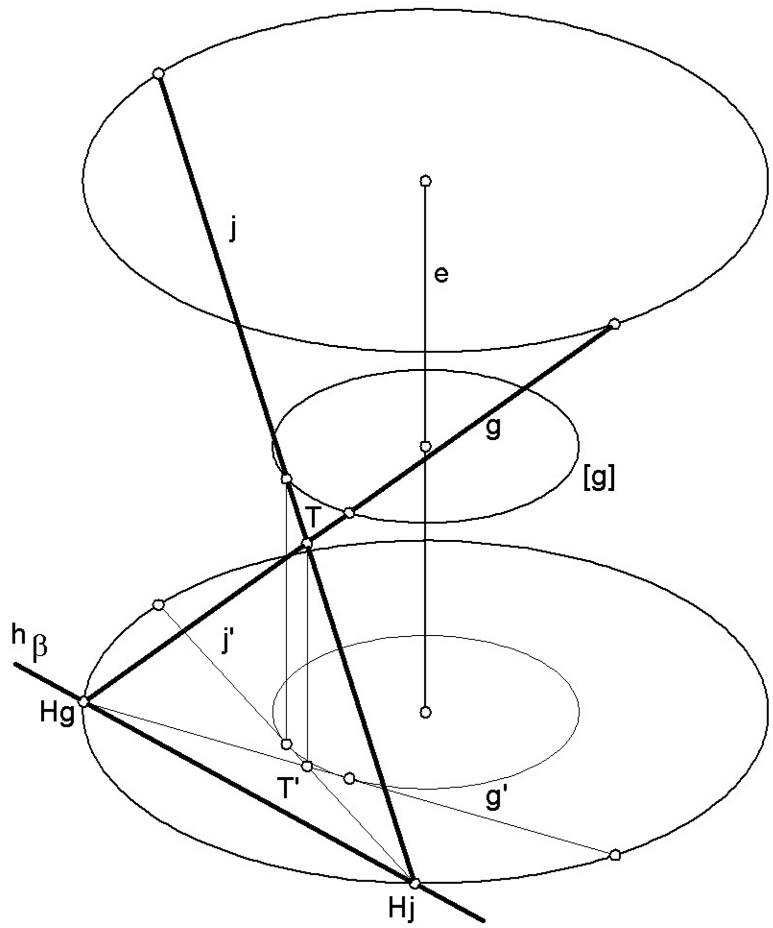
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

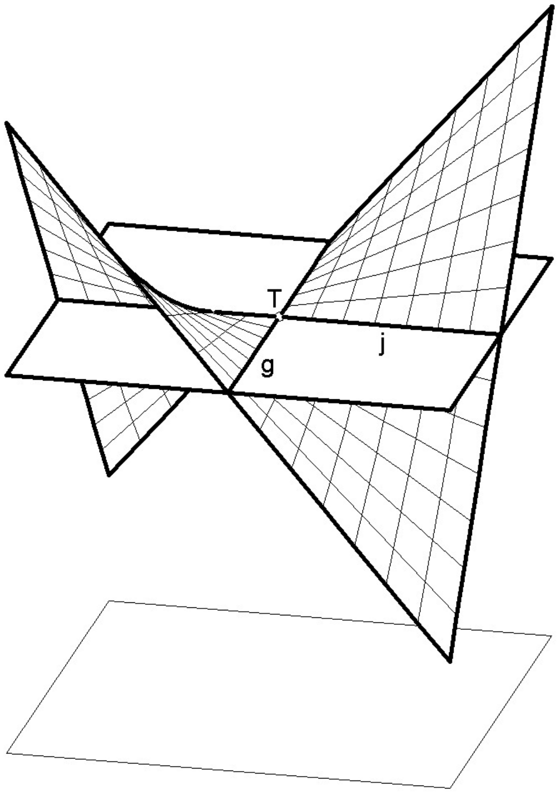
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



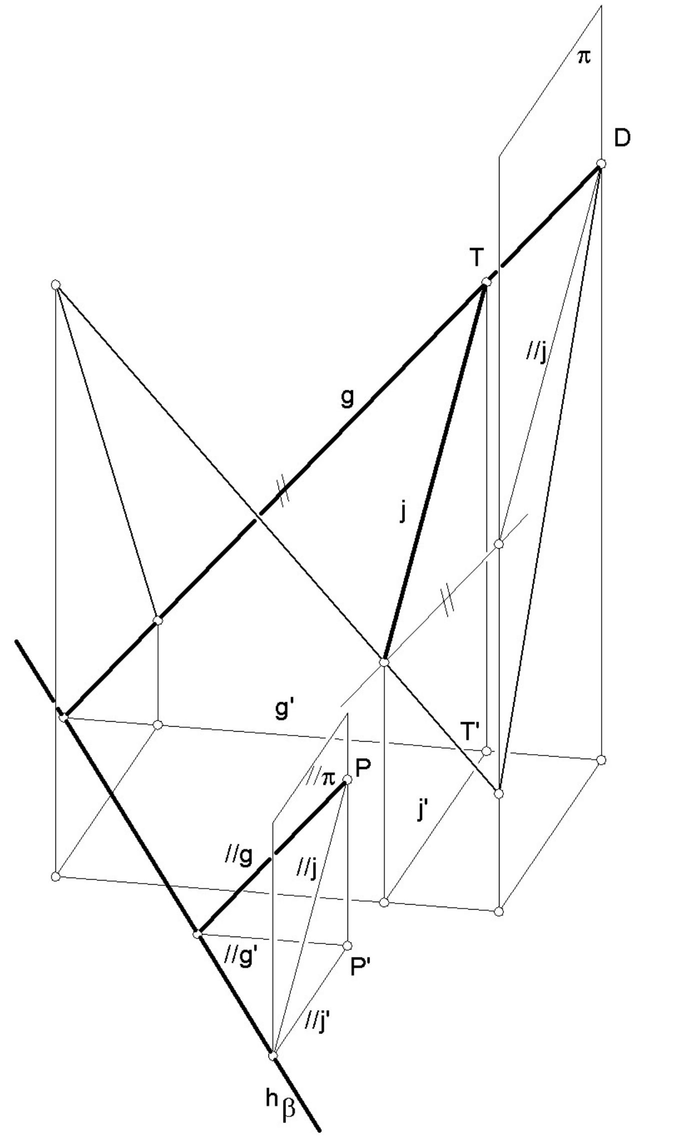


PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes

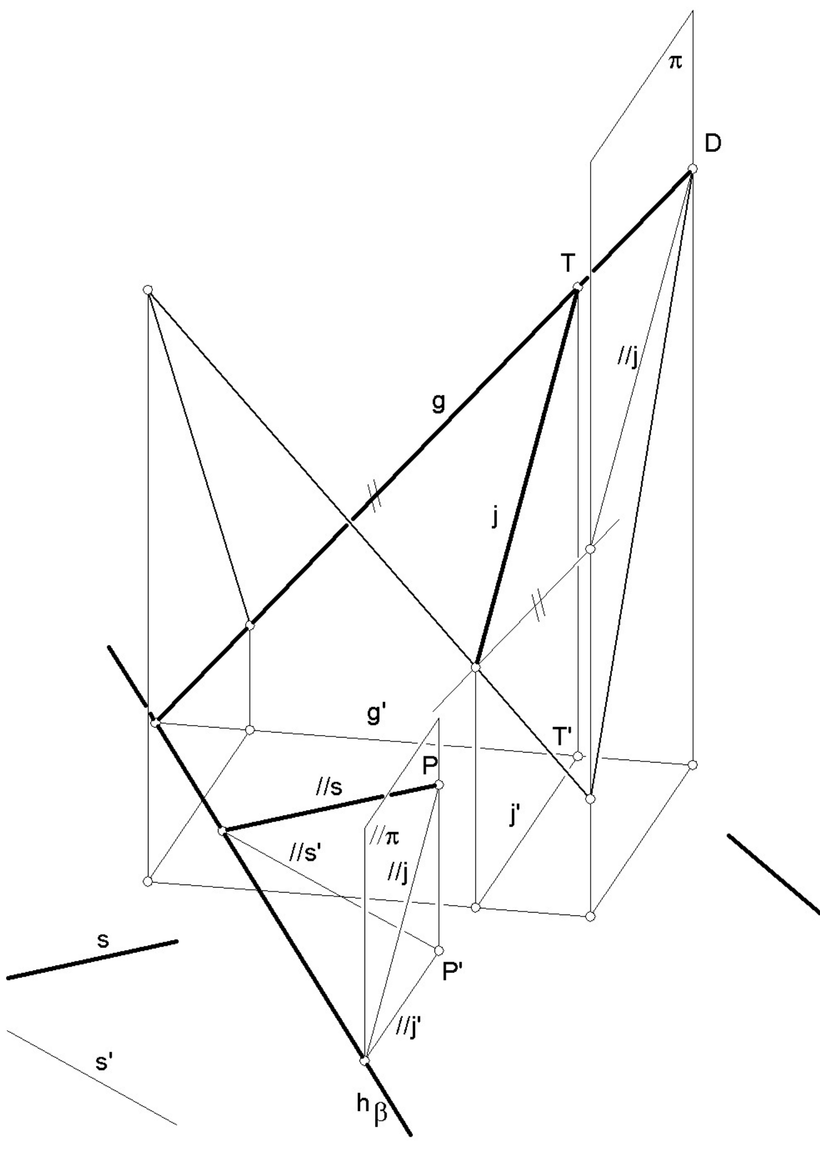


PLANO TANGENTE NUM PONTO DA SUPERFÍCIE

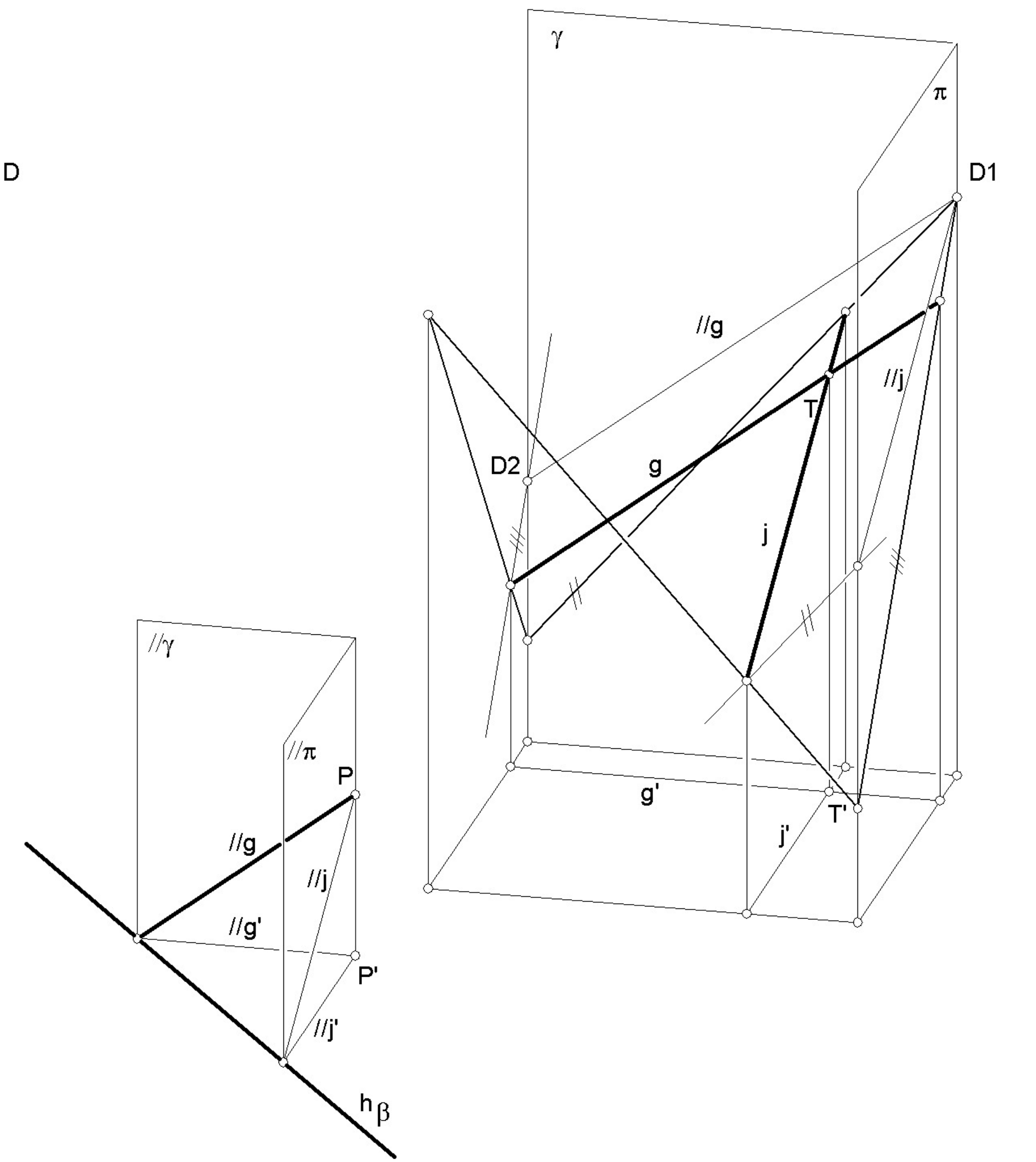


PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO EXTERIOR

Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes

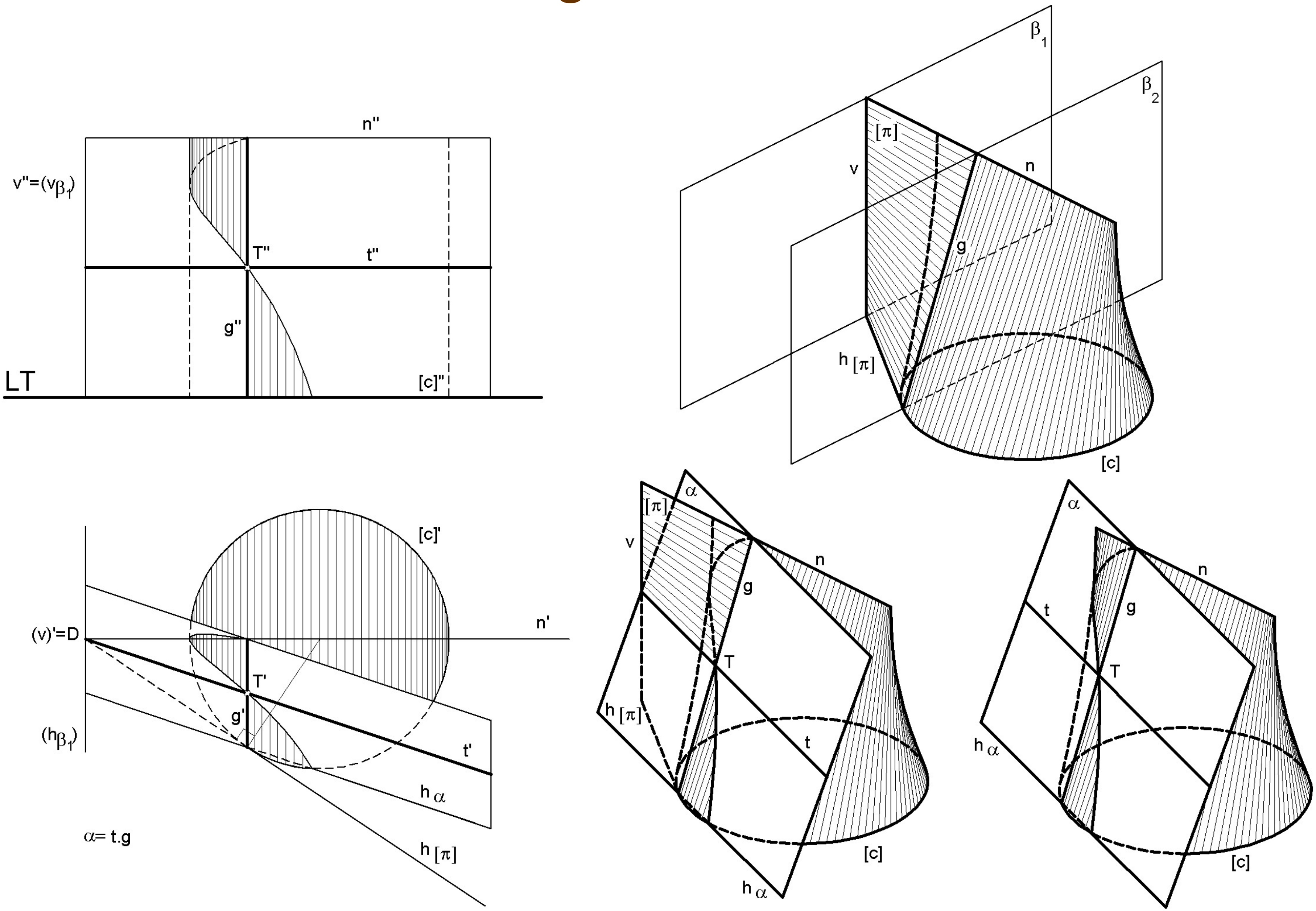


PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA



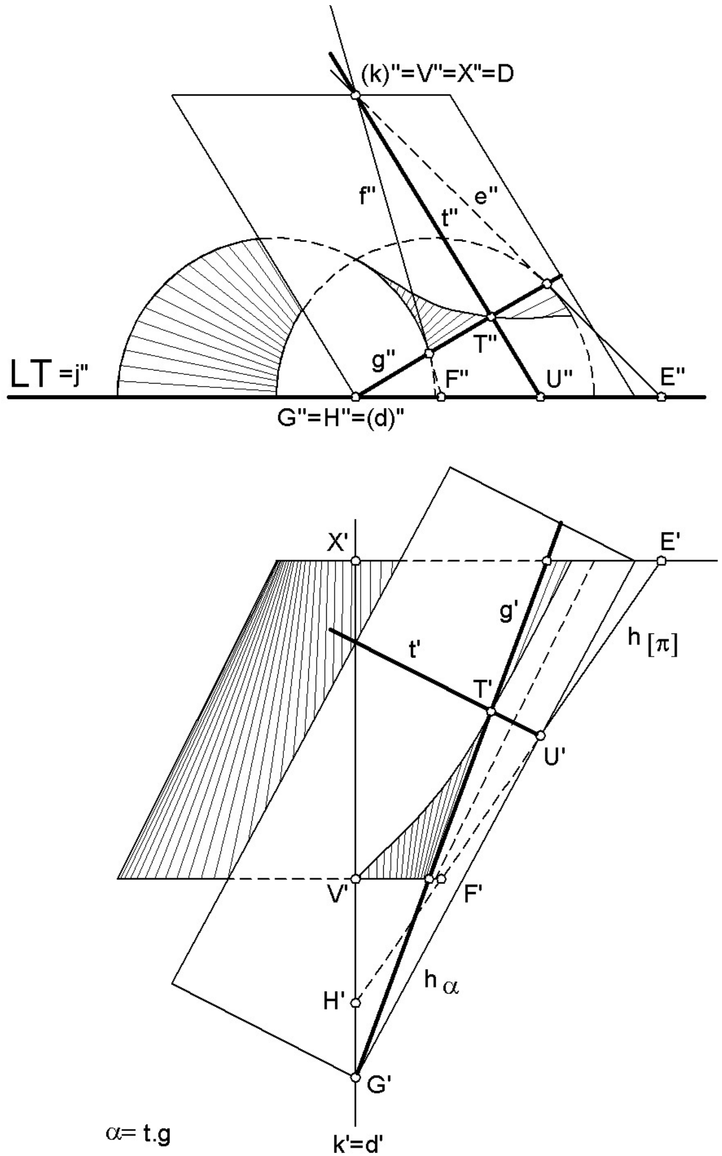
PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Conóide - Planos tangentes



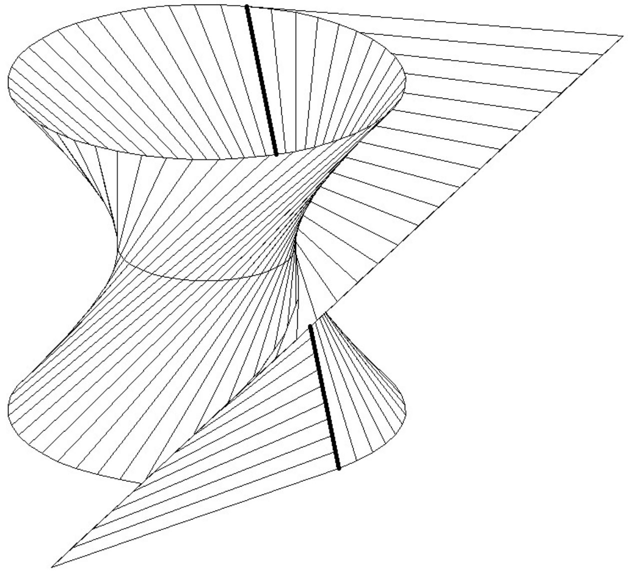
PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

Corno de vaca - Planos tangentes

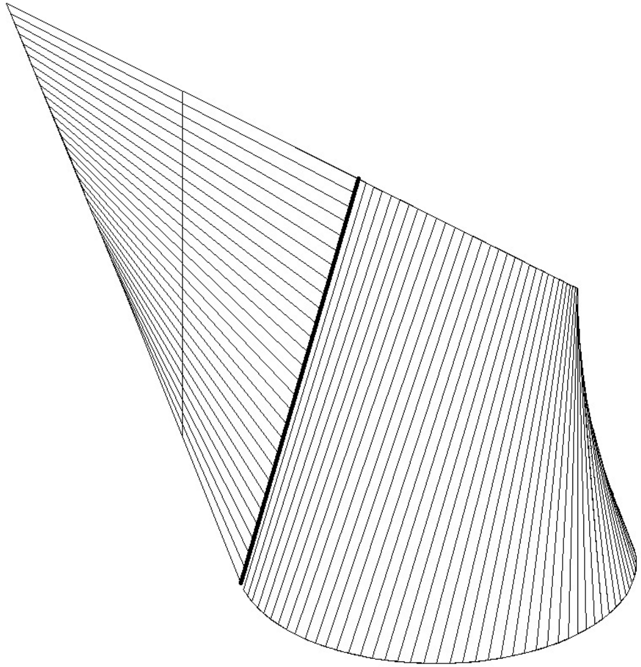


PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DO "CORNO DE VACA"

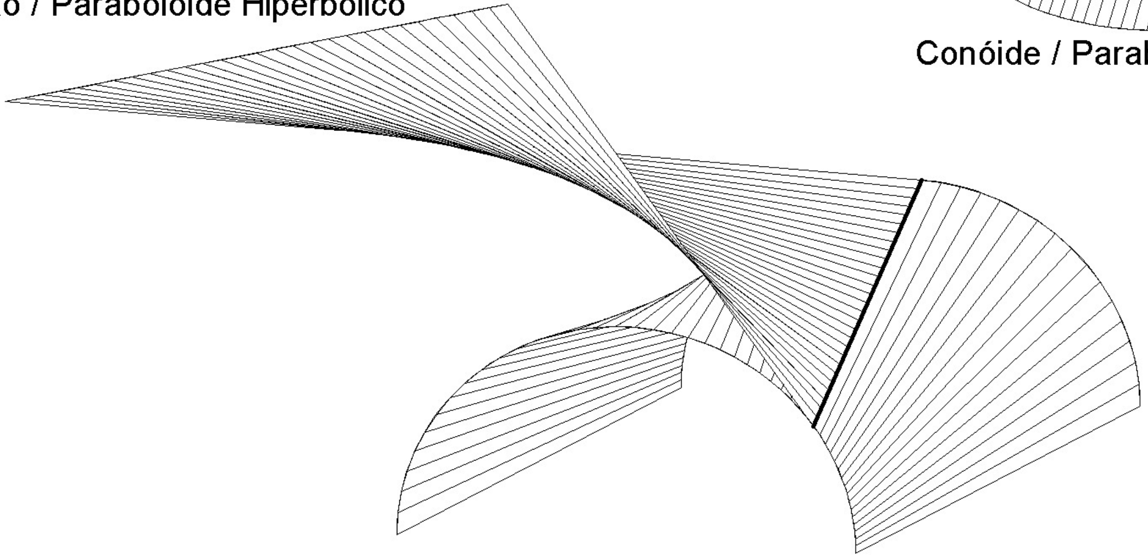
Superfícies empenadas - Concordâncias



Hiperbolóide de Revolução / Parabolóide Hiperbólico

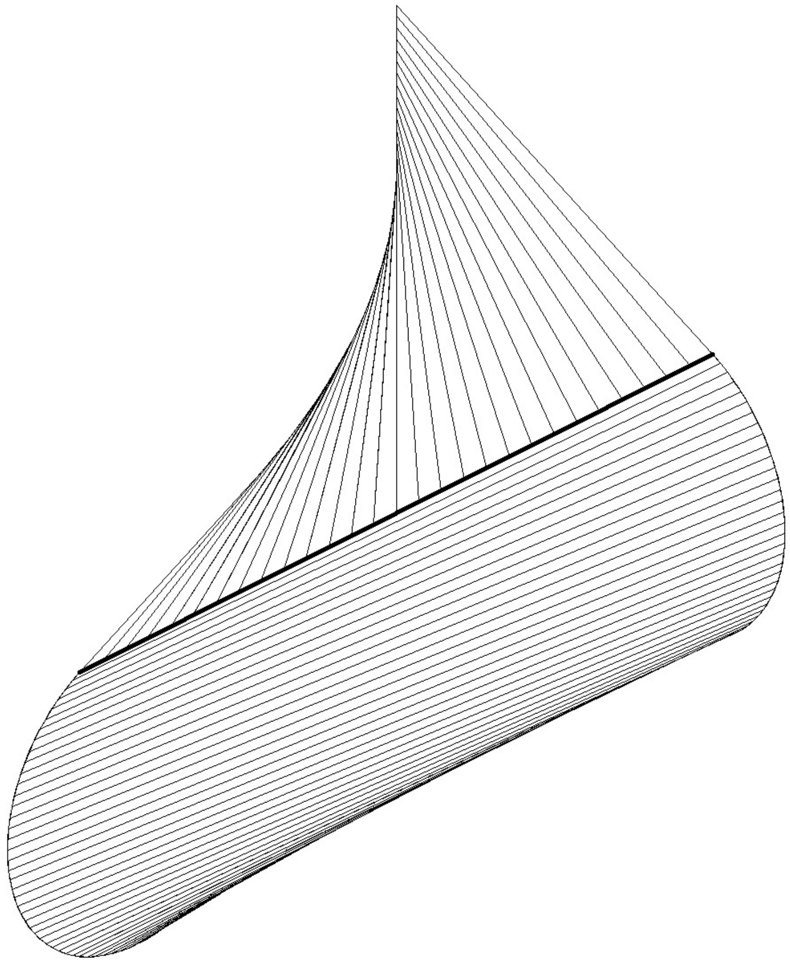


Conóide / Parabolóide Hiperbólico

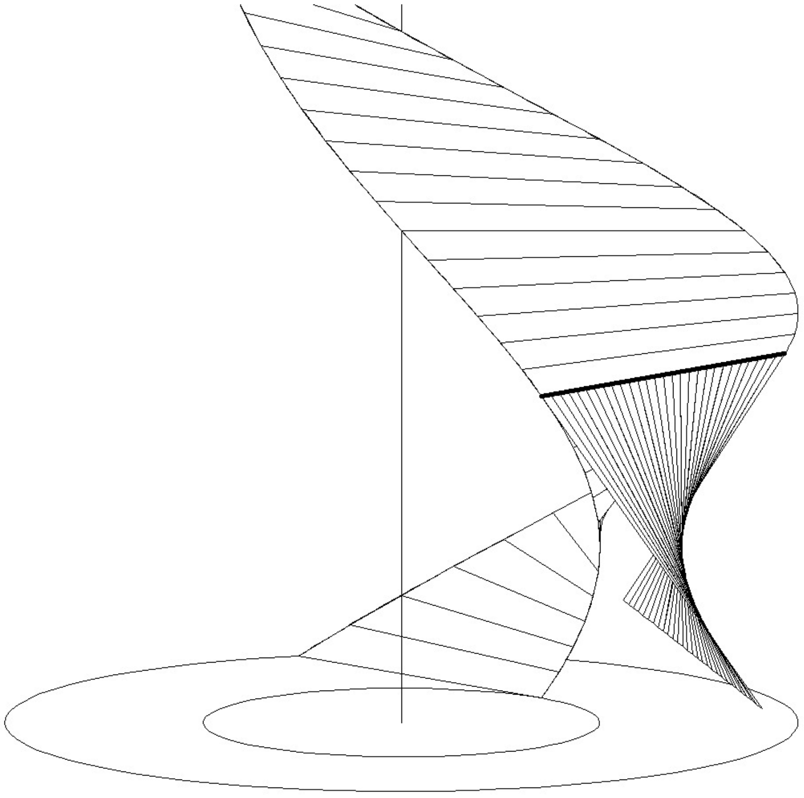


Corno de Vaca / Parabolóide Hiperbólico

Superfícies empenadas - Concordâncias

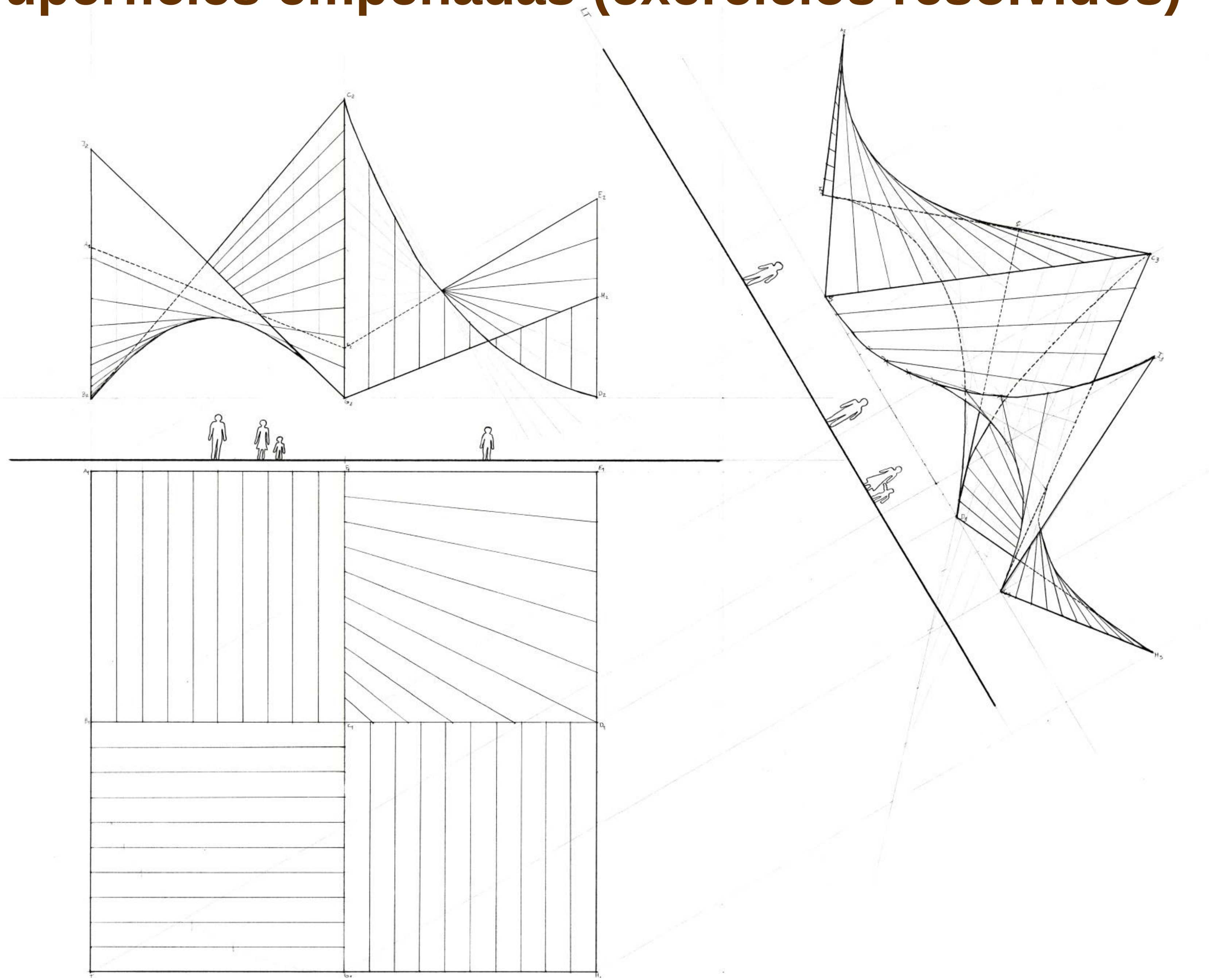


Cilindróide / Parabolóide Hiperbólico

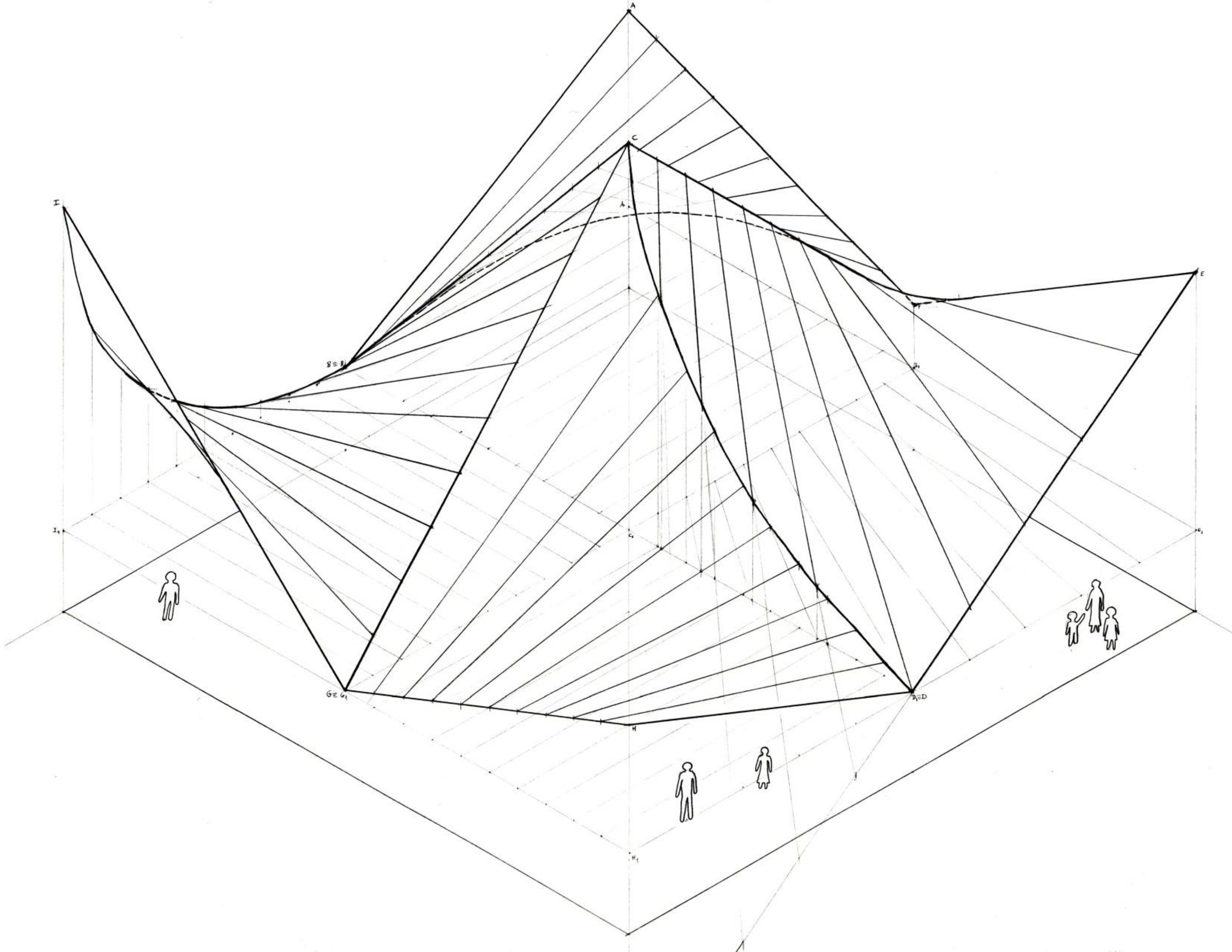


Helicóidal Regrado / Parabolóide Hiperbólico

Superfícies empenadas (exercícios resolvidos)



Superfícies empenadas (exercícios resolvidos)



Superfícies empenadas no Design

https://www.trendhunter.com/trends/parabola-chair

https://www.pinterest.pt/pin/547187423470341512/

https://in.pinterest.com/pin/11118330325499258/

https://www.pinterest.pt/pin/491033165600564723/