

**FACULTY OF ARCHITECTURE**

DRAWING, GEOMETRY AND COMPUTATION

Luis Miguel Cotrim Mateus - [Immateus@fa.ulisboa.pt](mailto:Immateus@fa.ulisboa.pt)



**GDCII – FAULisboa – 2018/2019**

[home://www.fa.ulisboa.pt/~Immateus](http://www.fa.ulisboa.pt/~Immateus)

# **GDC II**

## **Sebenta**

**- Perspectiva e Axonometria -**

**PERSPECTIVA**

# Bloco P1

Introdução ao estudo da perspectiva:

- Apontamento histórico
- Apontamentos práticos

Os vários perspectógrafos:

- quadros planos e curvos
- a máquina fotográfica como perspectógrafo

As qualidades visuais das imagens em perspectiva

- a convergência das linhas paralelas
- a diminuição das dimensões aparentes com a distância

# A perspectiva desde a antiguidade clássica...



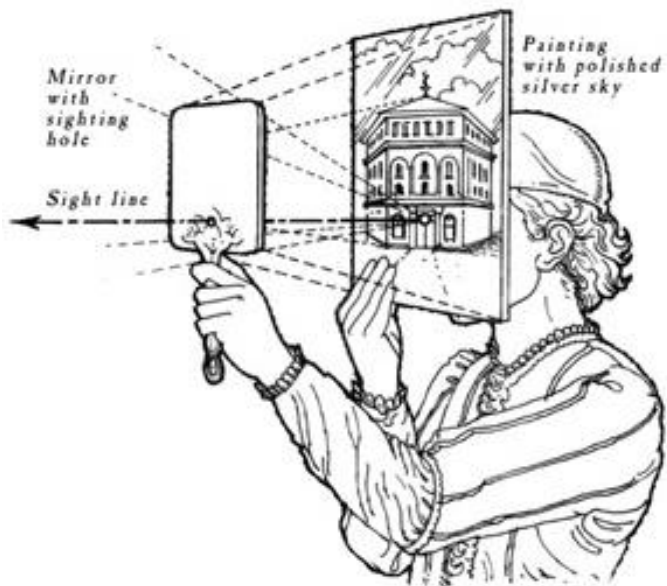
ILUSTRAÇÃO 1. Fragmento de decoração de uma parede, em estuque e tinta, de Boscoreale, pertencente ao «quarto estilo», século primeiro a. C., Nápoles, Museo Nazionali.



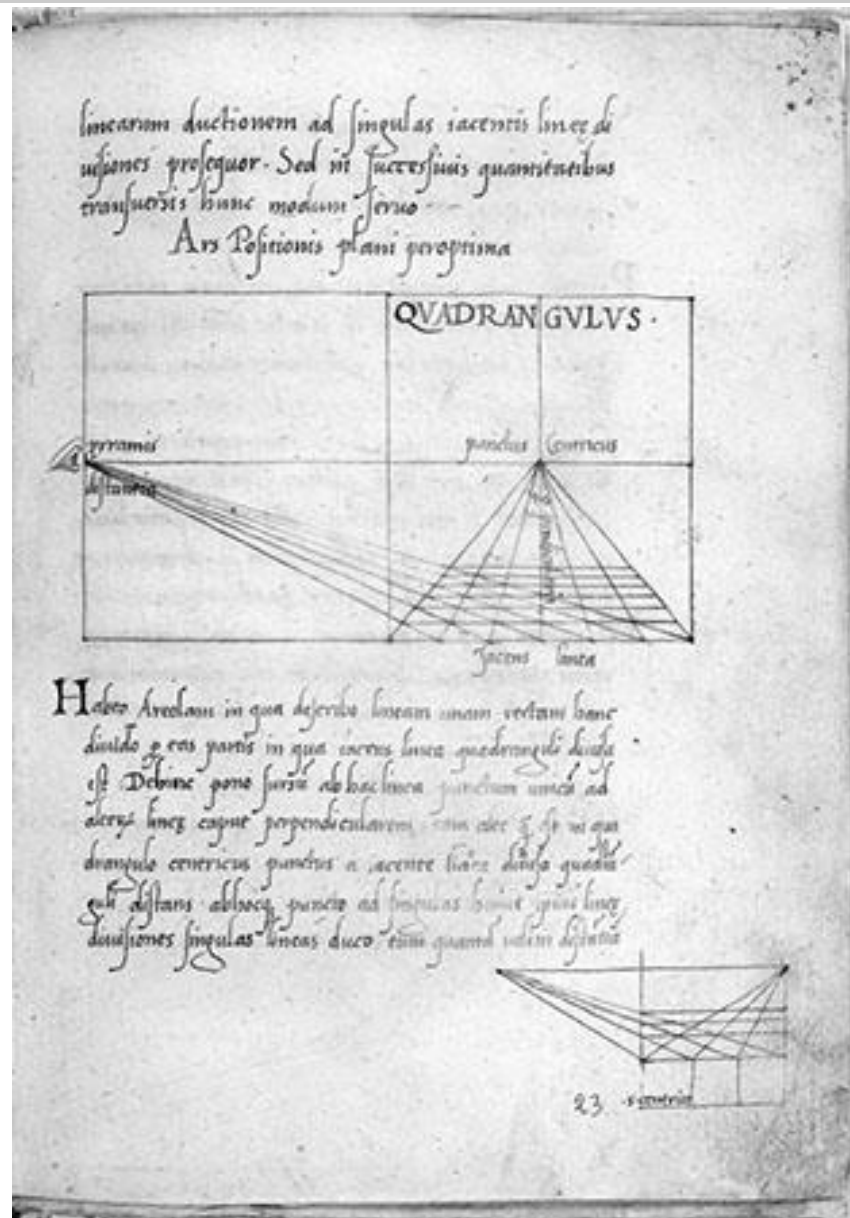
ILUSTRAÇÃO 10. Duccio di Buoninsegna, *A Última Ceia da Maestà*, 1301-1308. Siena, Museu dell'Opera del Duomo.



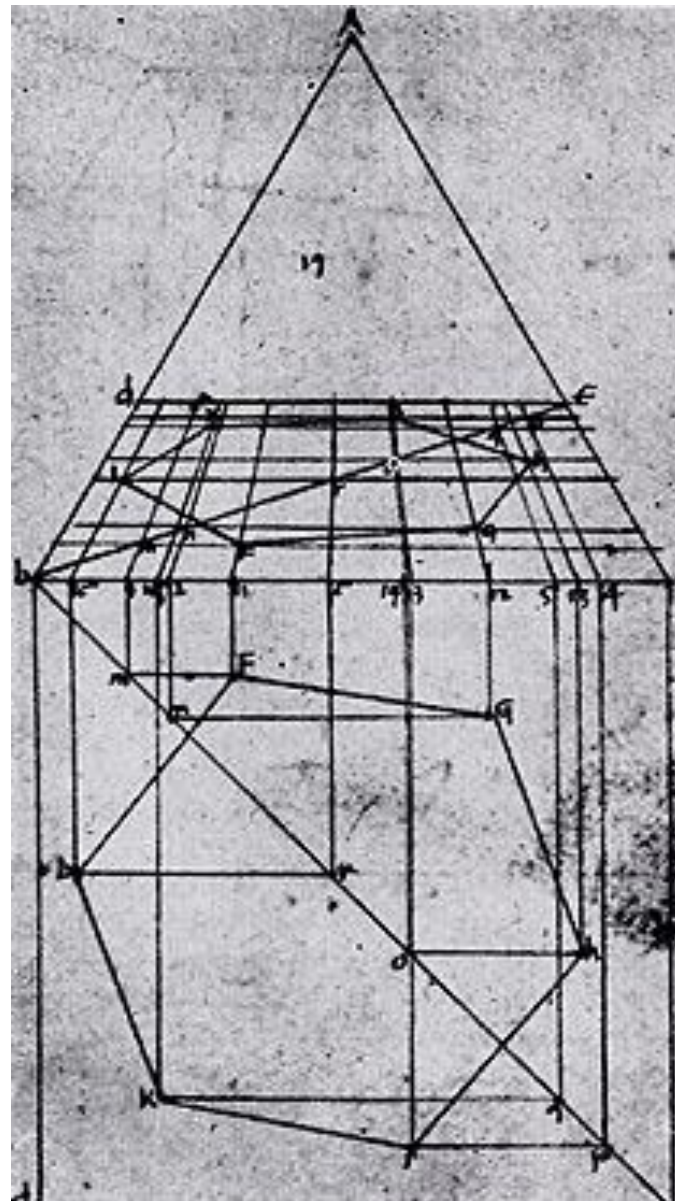
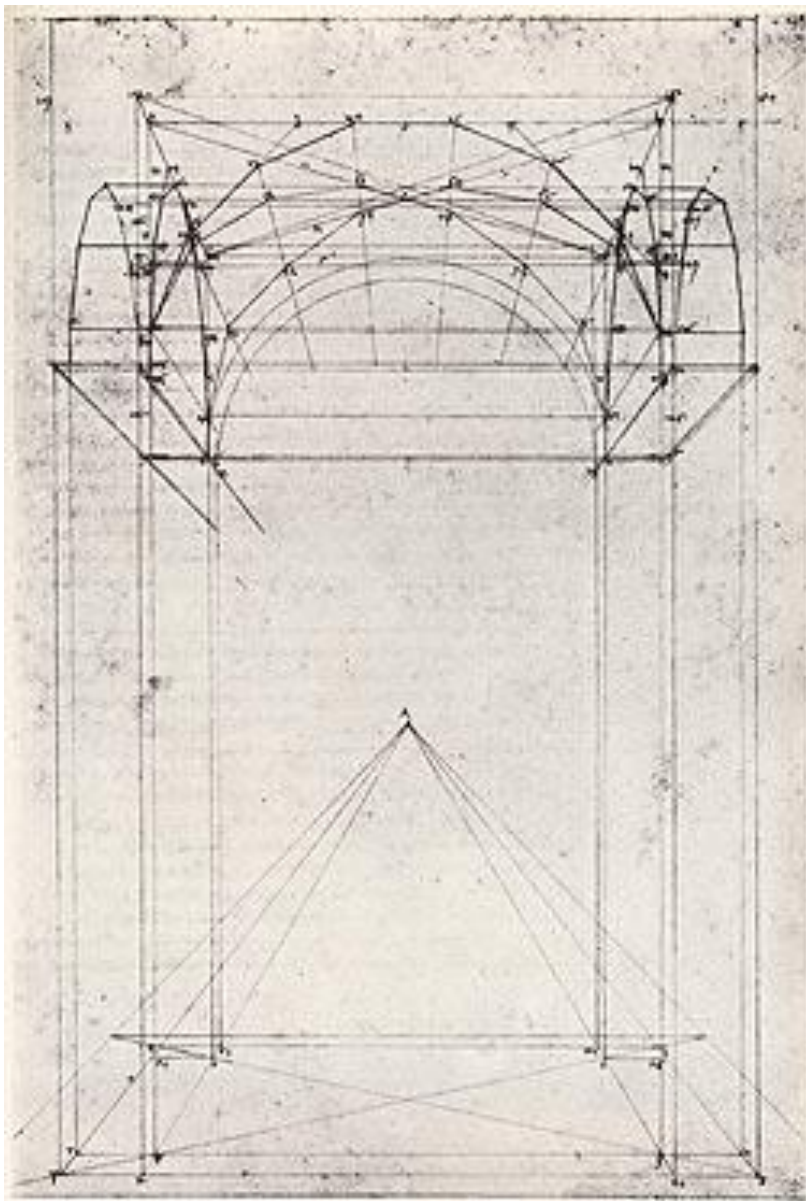
# Brunelleschi (1420) – a demonstração empírica da perspectiva



# Leon Battista Alberti – tratado *Della Pittura* (1435)

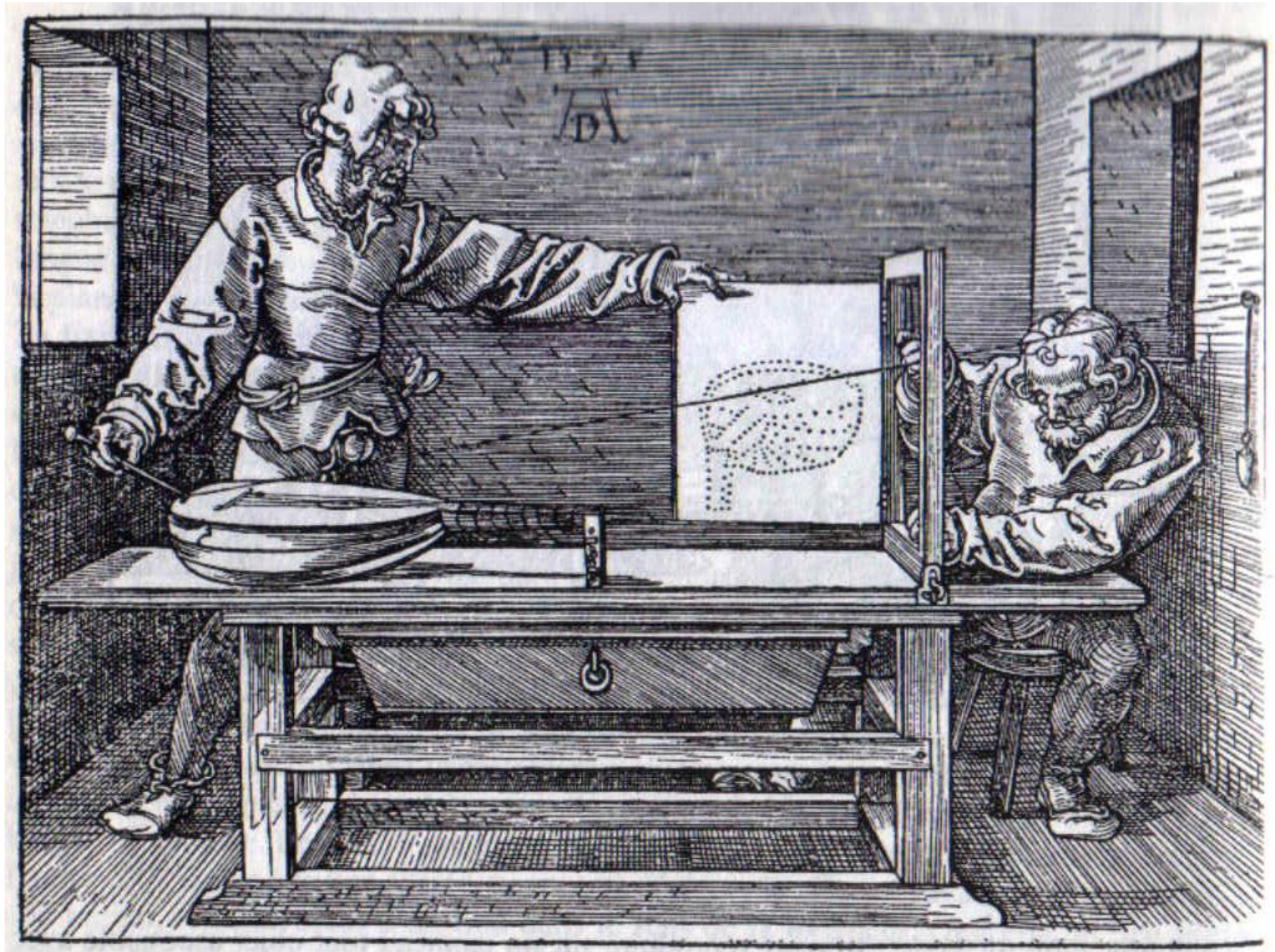


Piero de la Francesca – Tratado *De prospectiva pingendi* (sec. XV)



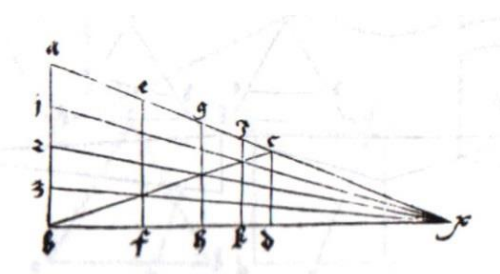


Albrecht Durer – Tratado *Underweysung der messung* (1525)



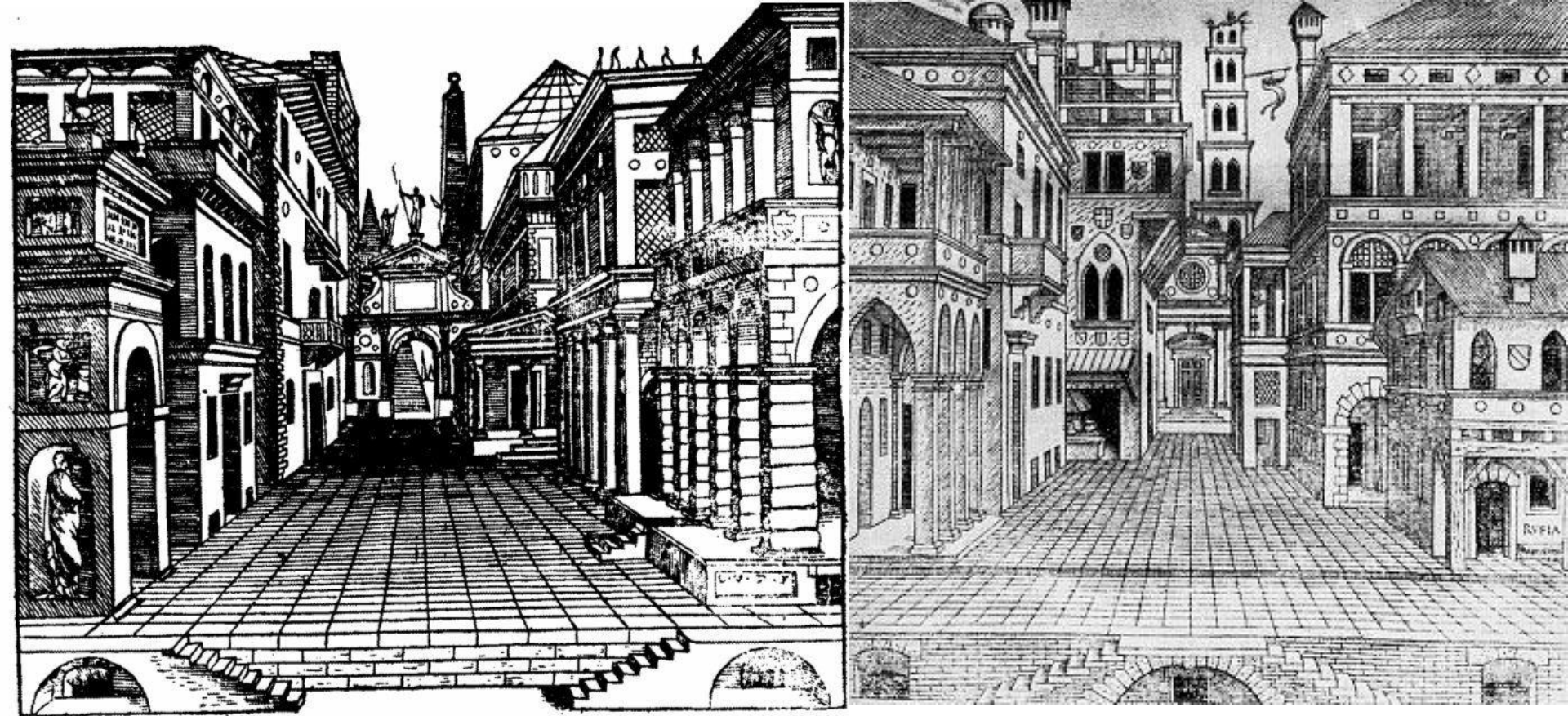


Albrecht Durer – Tratado *Underweysung der messung* (1525)





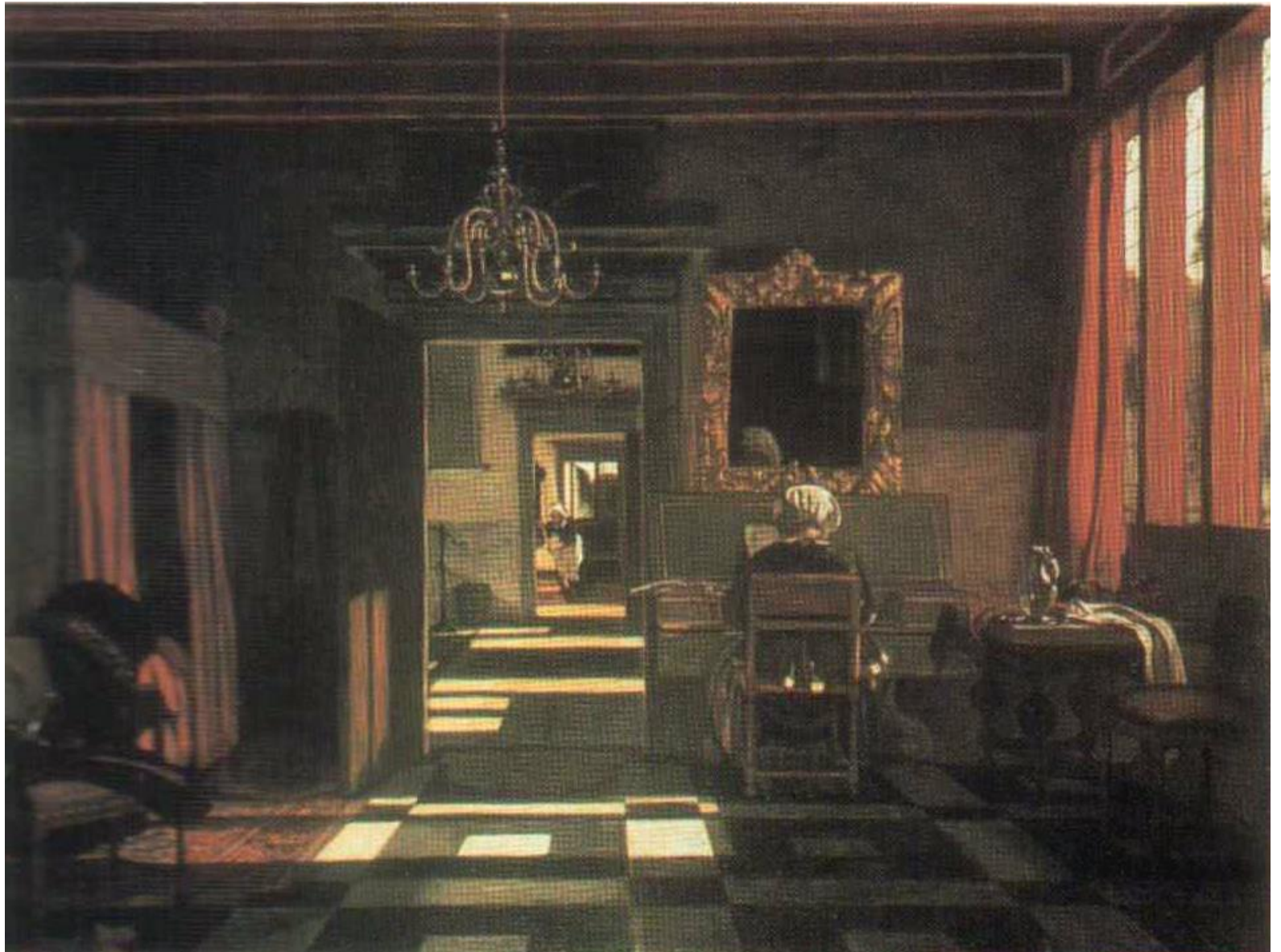
SERLIO – “*Il secondo libro dell' architettura*”, 1545 (vulgarização da perspectiva geométrica a partir do séc. XVI)



In  
<http://laperspective.canalblog.com/> (Cena Trágica - esquerda)  
<https://www.idixa.net/Pixa/pagixa-0902110712.html> (Cena Cómica - direita)



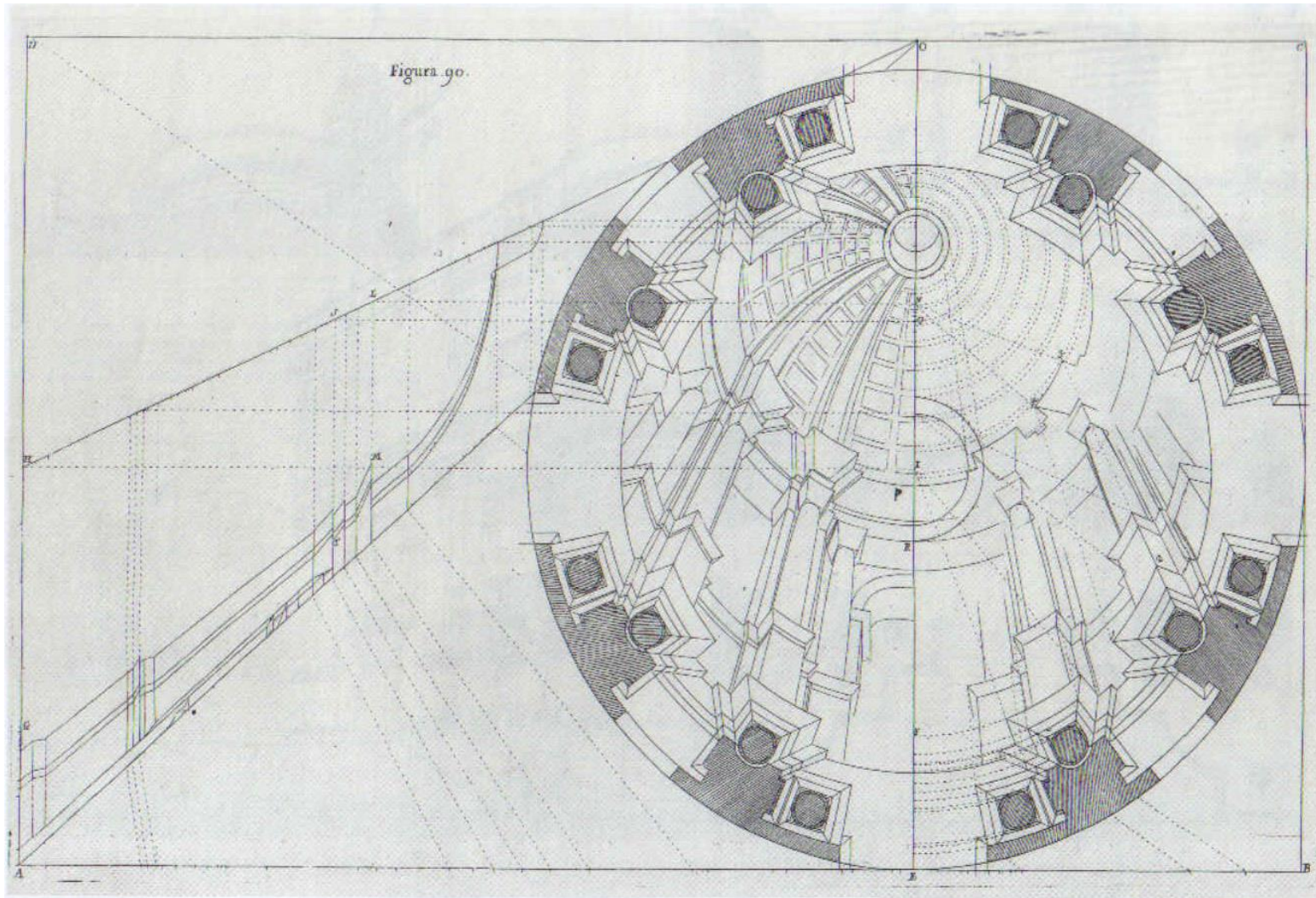
A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Emanuel White “Interior com mulher ao cravo” (1665)



In  
SMITH R: Introdução à perspectiva. 1996. Editorial Presença. ISBN 972-23-2025-4



# A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Andrea Pozzo “Perspectiva pictorum et architectorum” (1693-1700)



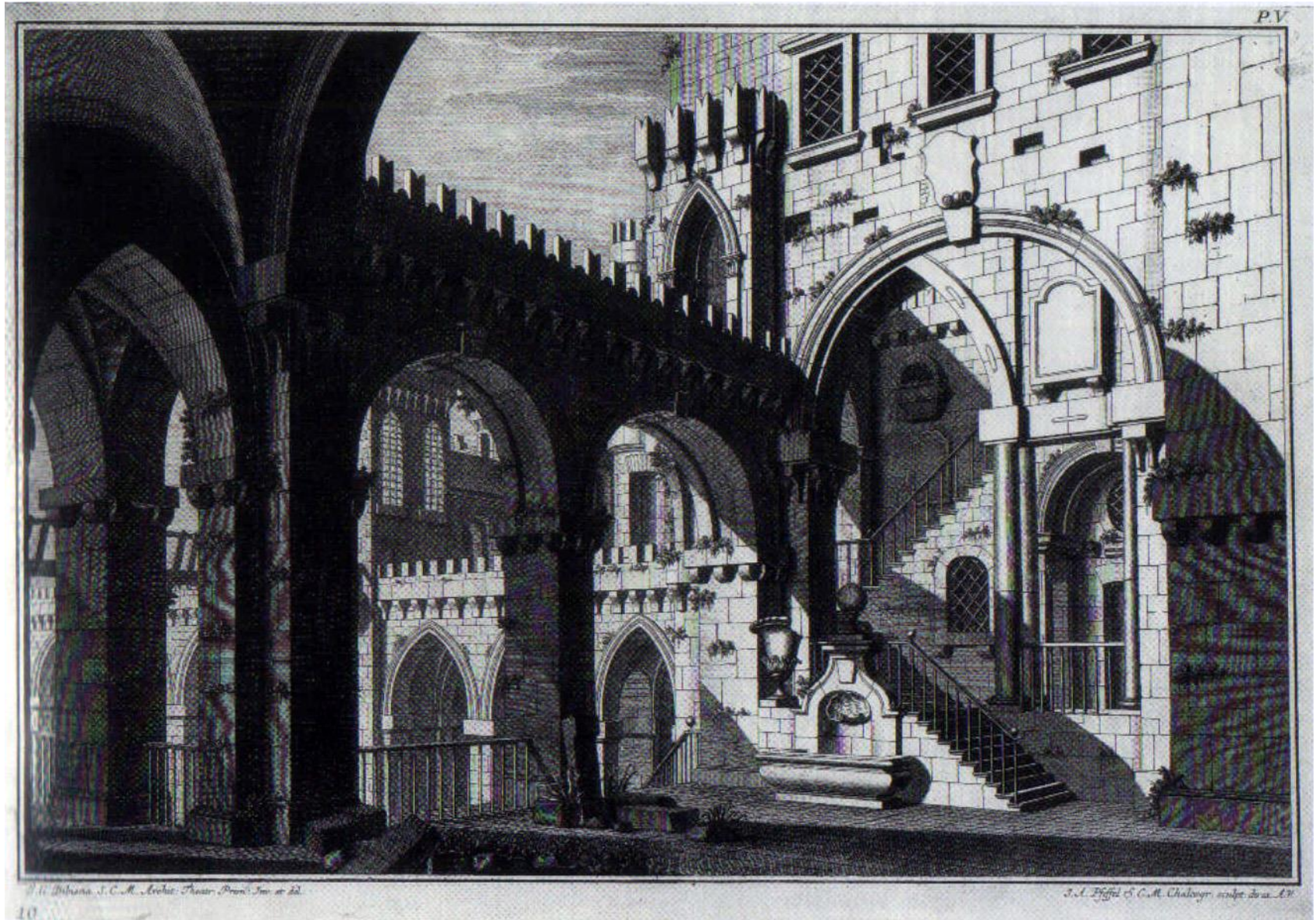
## 5 | Cúpula em *trompe-l'oeil* para a igreja de Santo Inácio em Roma

Elaboração da perspectiva da cúpula em *trompe-l'oeil*; projecto de 1685, com esquema de elaboração (à esquerda), linha de horizonte (CD), ponto de convergência (O) e centro de perspectiva (D).

T. 2, fig. 90. Gravura sobre cobre



# A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Galli Bibiena “Architettura e Prospettive”, 1740-1744



In  
(vários autores). Teoria da Arquitectura – do Renascimento aos nossos dias. Taschen. ISBN 3-8228-2693-6

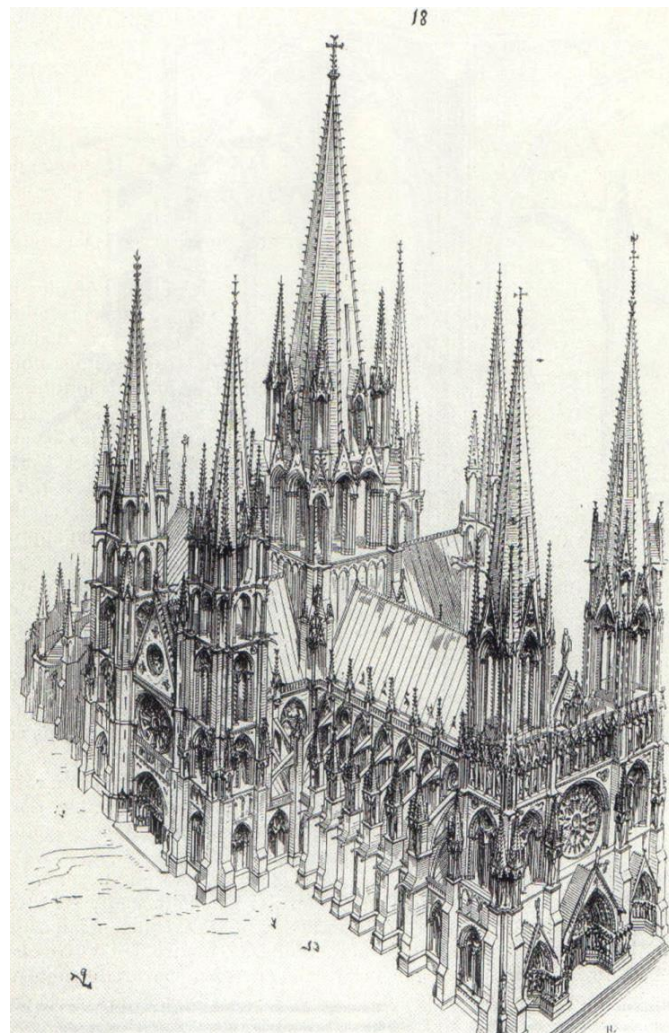


A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Antonio Canaletto “Praça de S. Marcos e a Colonnade da Procuratie Nuove” 1756



In SMITH R: Introdução à perspectiva. 1996. Editorial Presença. ISBN 972-23-2025-4

A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Eugène Viollet-le-Duc “Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle” 1854, 1868



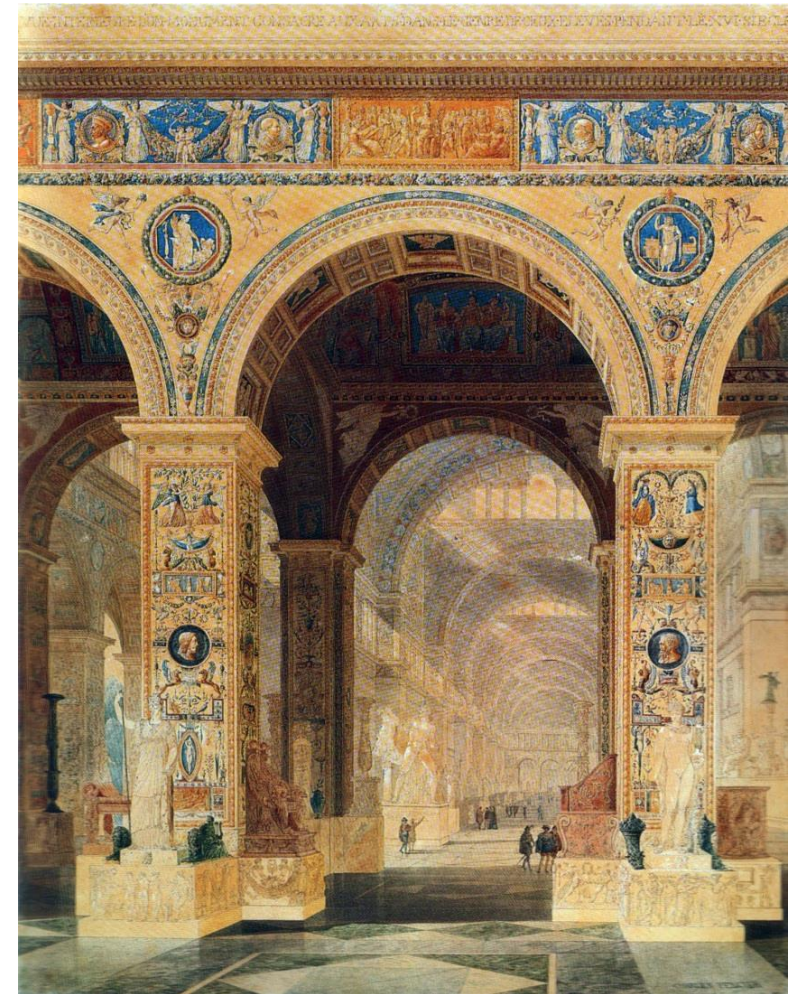
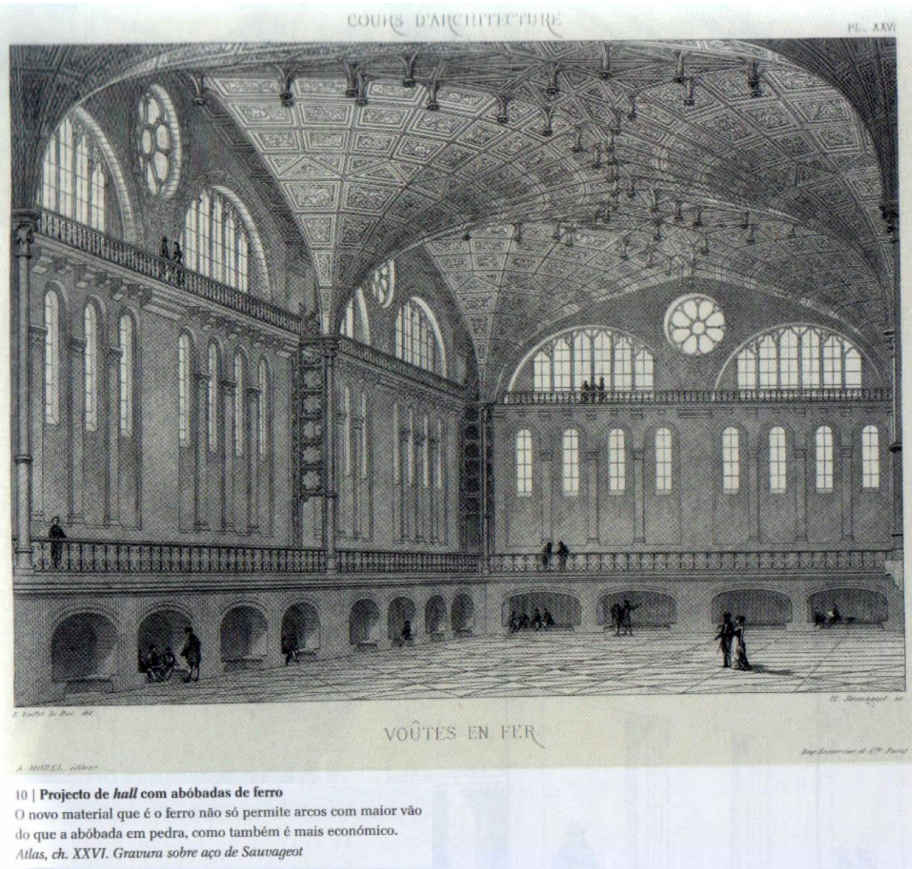
1 | A catedral ideal  
Ciente da sua sabedoria sobre a «verdadeira arquitectura», Viollet-le-Duc imagina uma igreja ideal, síntese dos grandes edifícios do gótico flamejante.  
Tomo II, p. 324.  
Gravura sobre madeira

In (vários autores). Teoria da Arquitectura – do Renascimento aos nossos dias. Taschen. ISBN 3-8228-2693-6



A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Eugène Viollet-le-Duc  
“Entretiens sur l’architecture“ de Eugène Viollet-le-Duc, 1863, 1872

A perspectiva entre os pintores e os arquitectos : Charles Percier  
“*Vue intérieure pour un Muséum*”, 1863, 1872

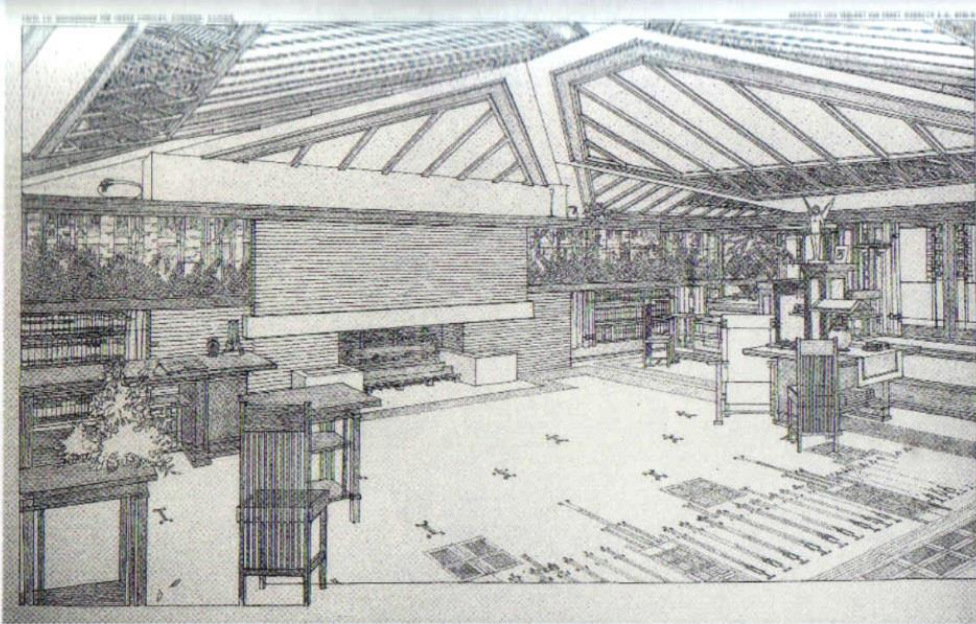


In  
(vários autores). Teoria da Arquitectura – do Renascimento aos nossos dias. Taschen. ISBN 3-8228-2693-6

In  
JACQUES A: Les dessins d'architecture du XIXe siècle. 1995. Bibliotheque de l'image. ISBN 9782878300321

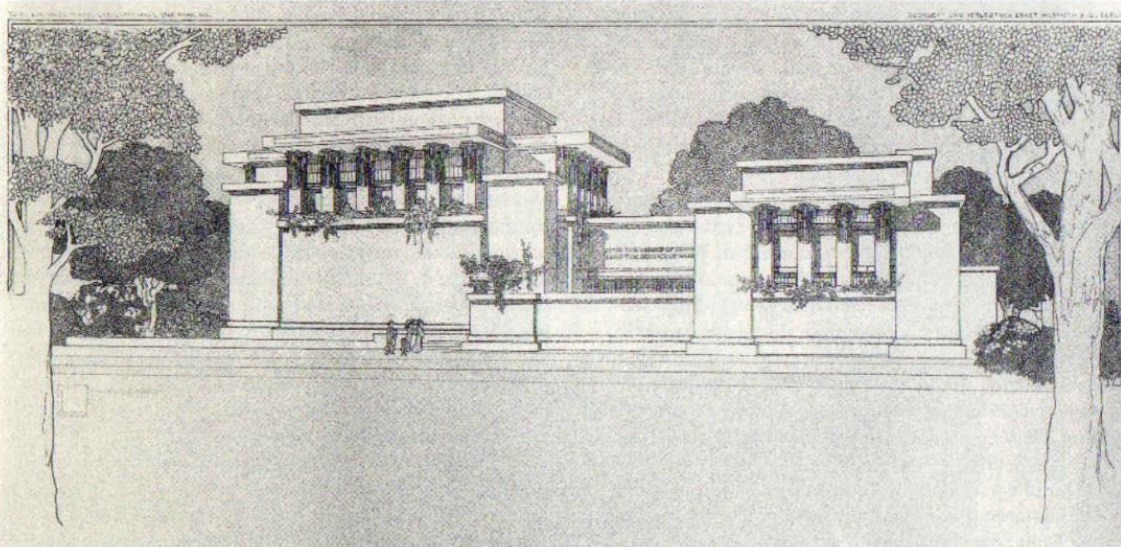


# A perspectiva entre os pintores e os arquitectos: Frank Lloyd Wright “*Ausgefuehrte Bauten und Entwurfe von Frank Lloyd Wright*”, 1910



10 | Casa Coonley de Riverside, Illinois (1906–1908)

O tecto da vasta sala de estar da Casa Coonley segue a inclinação do telhado. O próprio Wright indicou a disposição dos móveis. Ch. LVI b. *Desenho a caneta*



11 | Unity Temple em Oak Park, Illinois (1905–1908)

O templo é composto por uma sala de oração e por uma casa paroquial, dois cubos em betão armado de linguagem formal pesada e monumental, dispostos face a face.

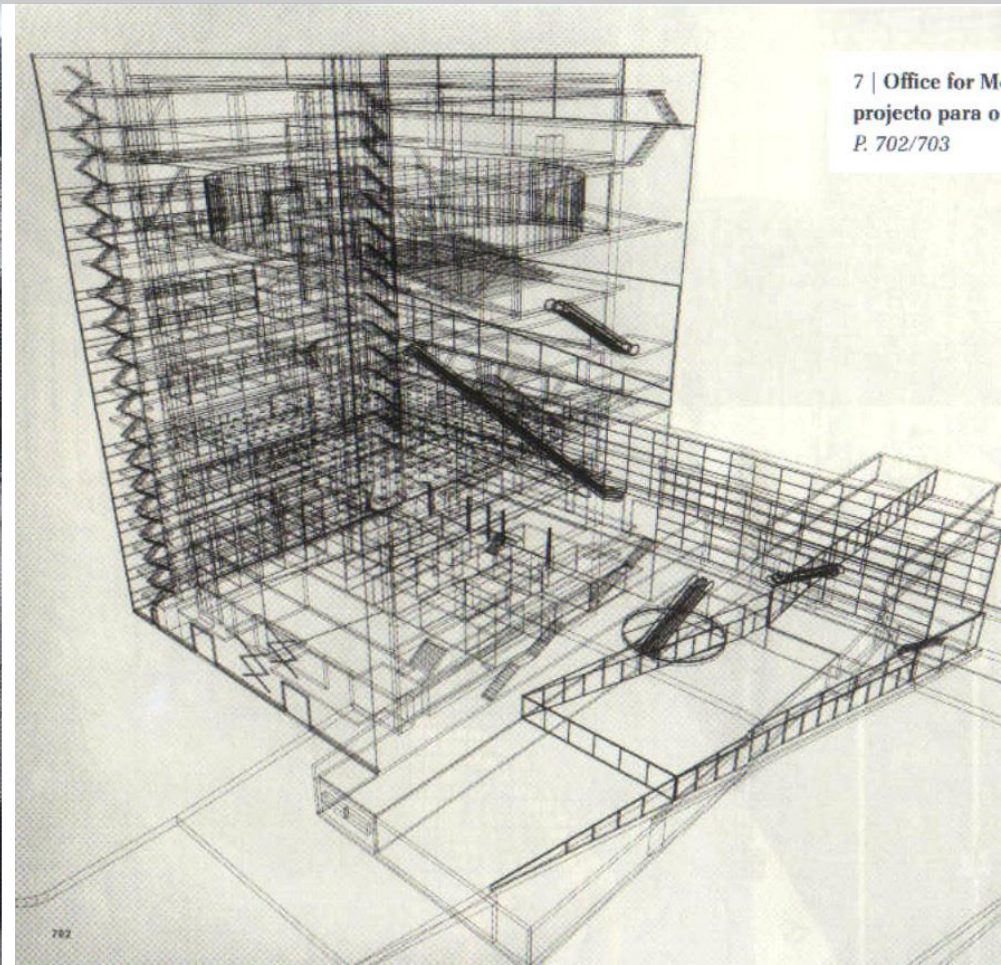


Os sec. XIX e XX e a fotografia como perspectiva: Paul Schmitthenner “*Das deutsche Wohnhaus*“, 1932



4 | Cidade-jardim de Staaken  
Schmitthenner realizou em 1914–1917 para os operários das fábricas de armamento de Spandau, perto de Berlim, a cidade-jardim de Staaken baseada no modelo das pequenas cidades holandesas ou do norte da Alemanha.  
*Ilustração adicional que não aparece no tratado*

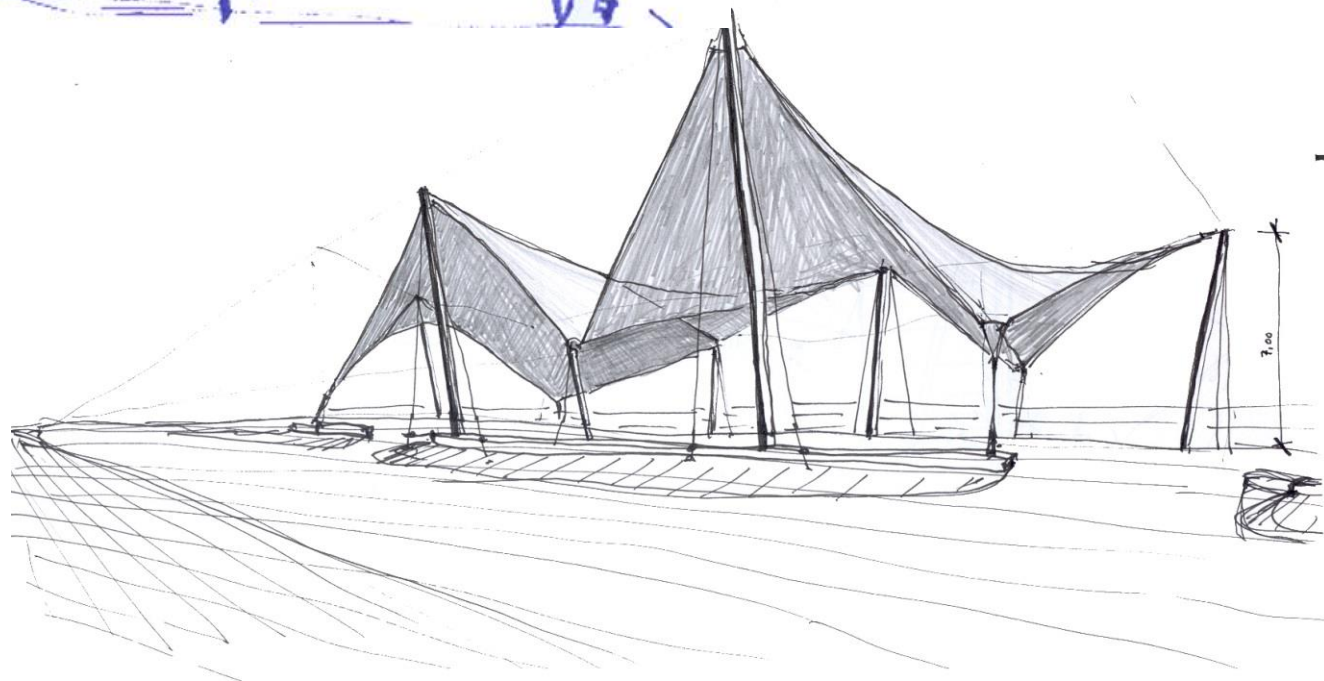
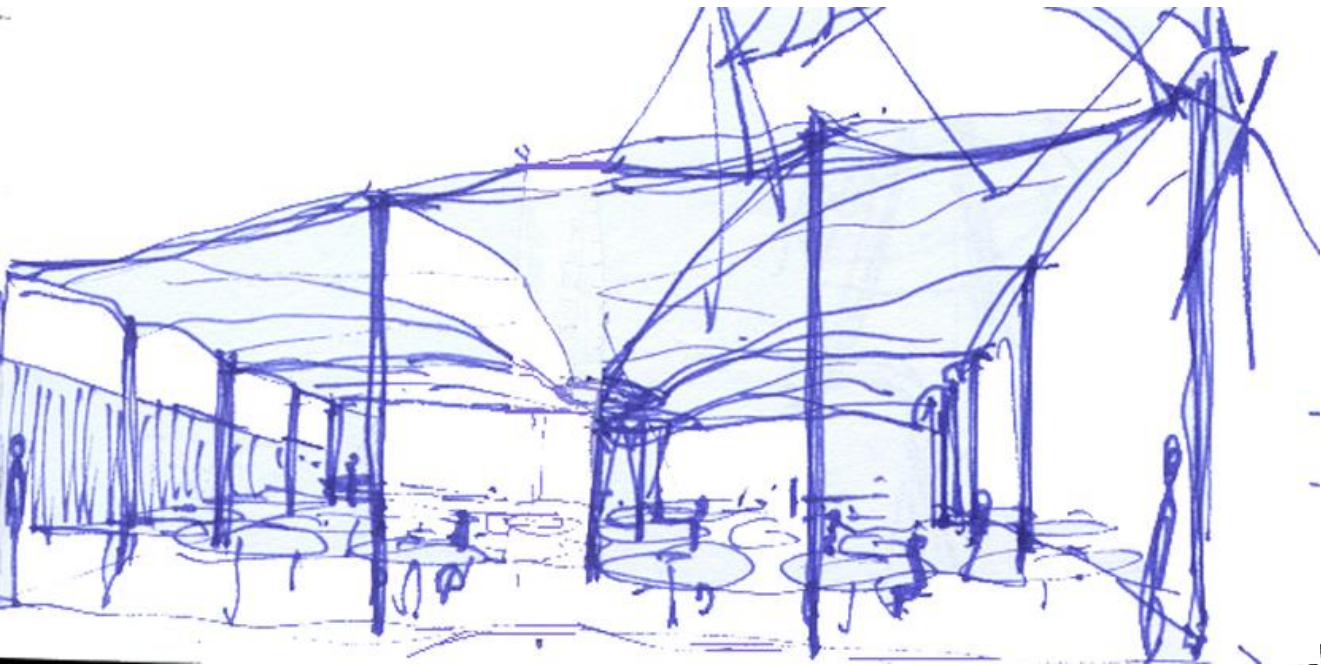
A perspectiva na visualização informática tornou-se uma tendência crescente no século XX.



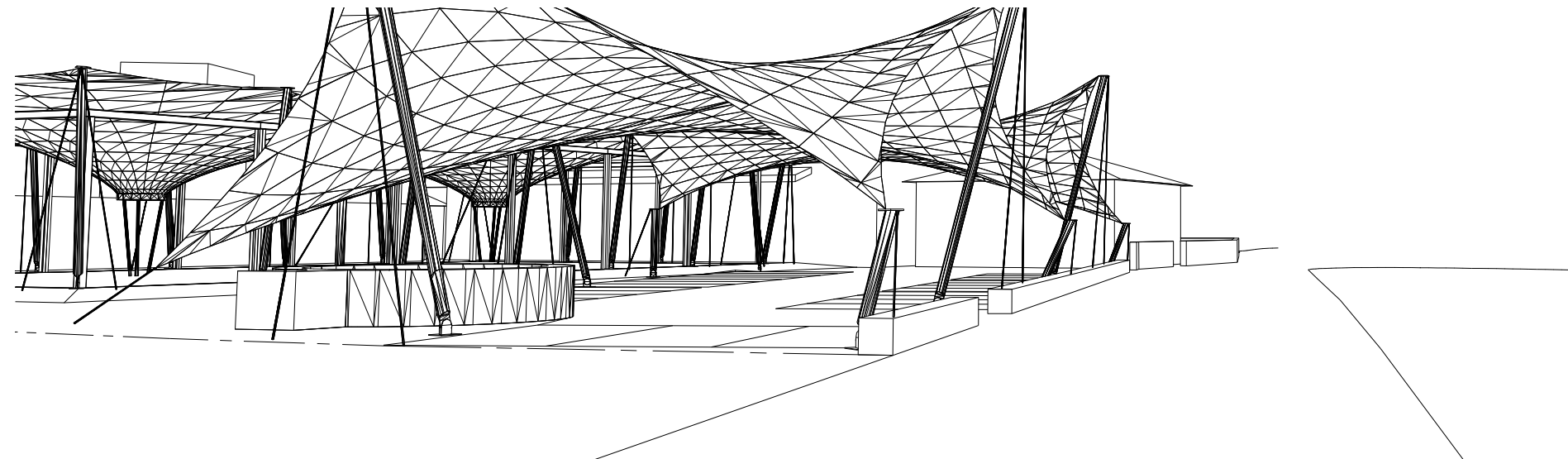
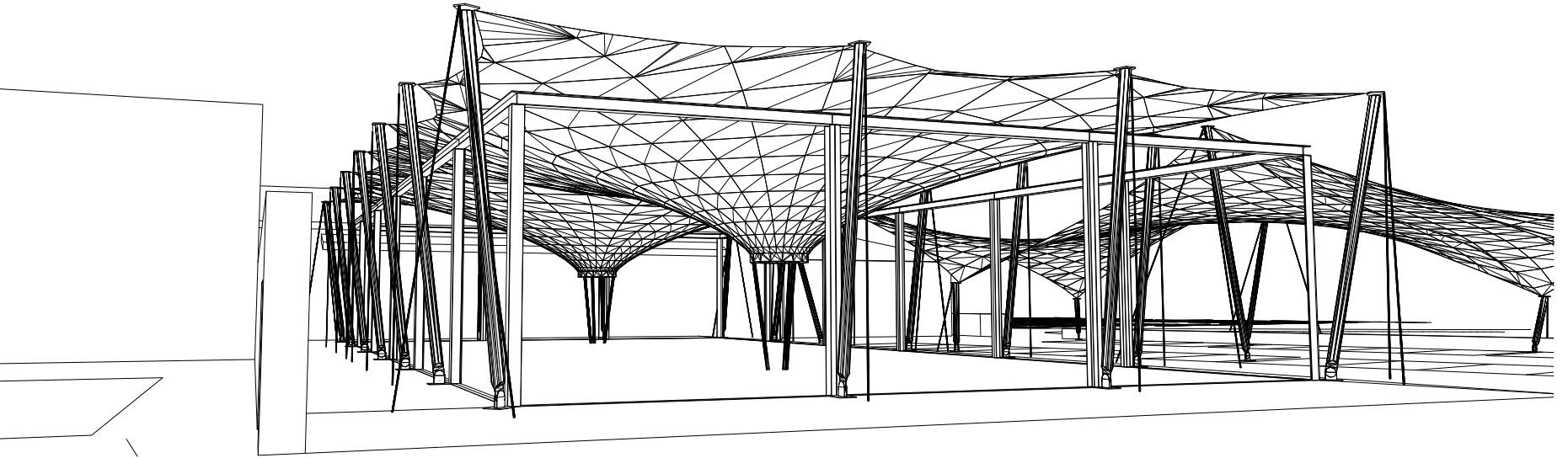
7 | Office for Metropolitan Architecture / Rem Koolhaas,  
projecto para o Centro de Arte de Karlsruhe  
P. 702/703



>> PERSPECTIVA NO PROCESSO DE CONCEPÇÃO: do esboço...



>> PERSPECTIVA NO PROCESSO DE CONCEPÇÃO: ...às visualizações e...

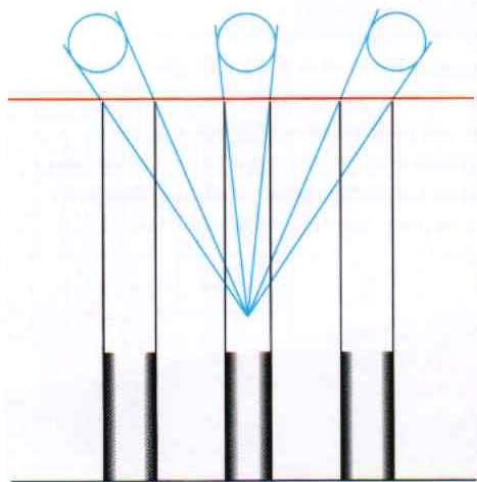


>> PERSPECTIVA NO PROCESSO DE CONCEPÇÃO: ...renderizações informáticas.





## >> PERSPECTIVA: Quadro plano Vs quadro curvo.

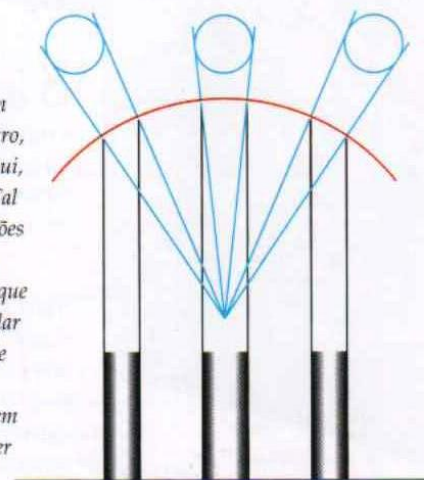


### Plano de quadro direito

Leonardo desenhou três colunas cilíndricas, com o mesmo diâmetro, paralelas ao plano de quadro (aqui, a vermelho) e demonstrou que, segundo a perspectiva linear, as duas colunas dos extremos pareciam mais largas do que a do centro. Ora, como o observador estava mais longe das duas colunas, não seria assim que as veria.

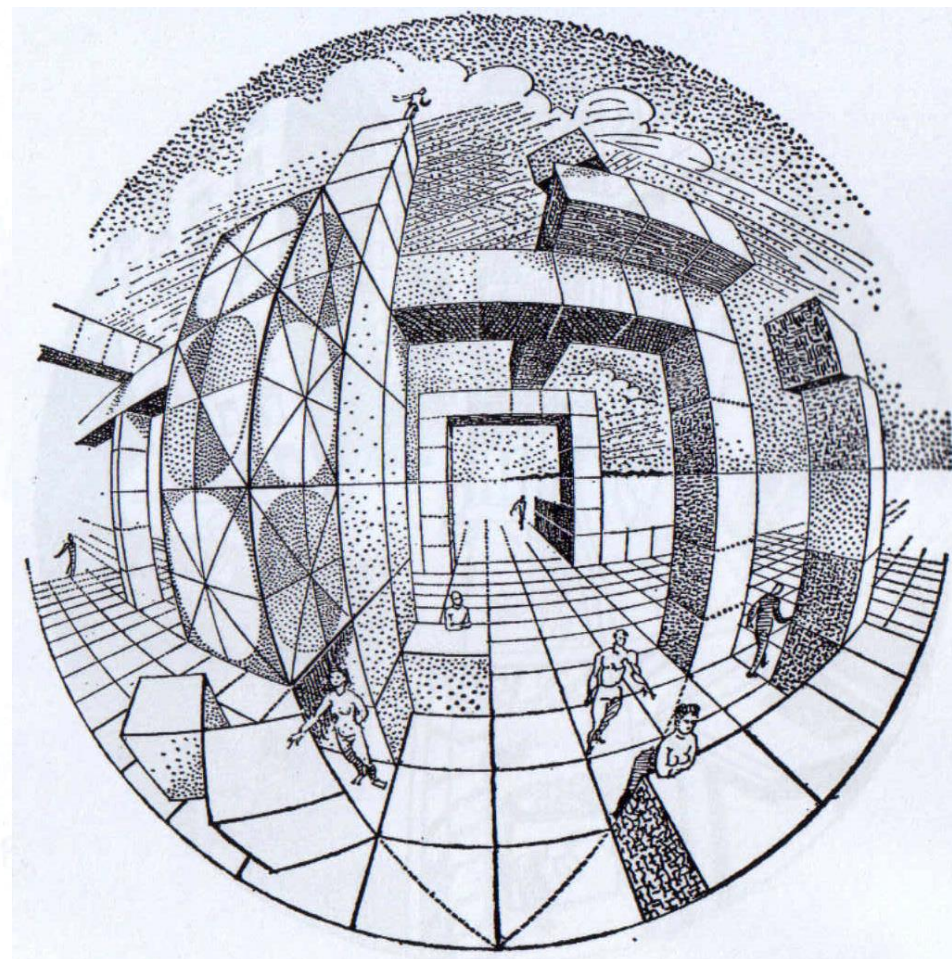
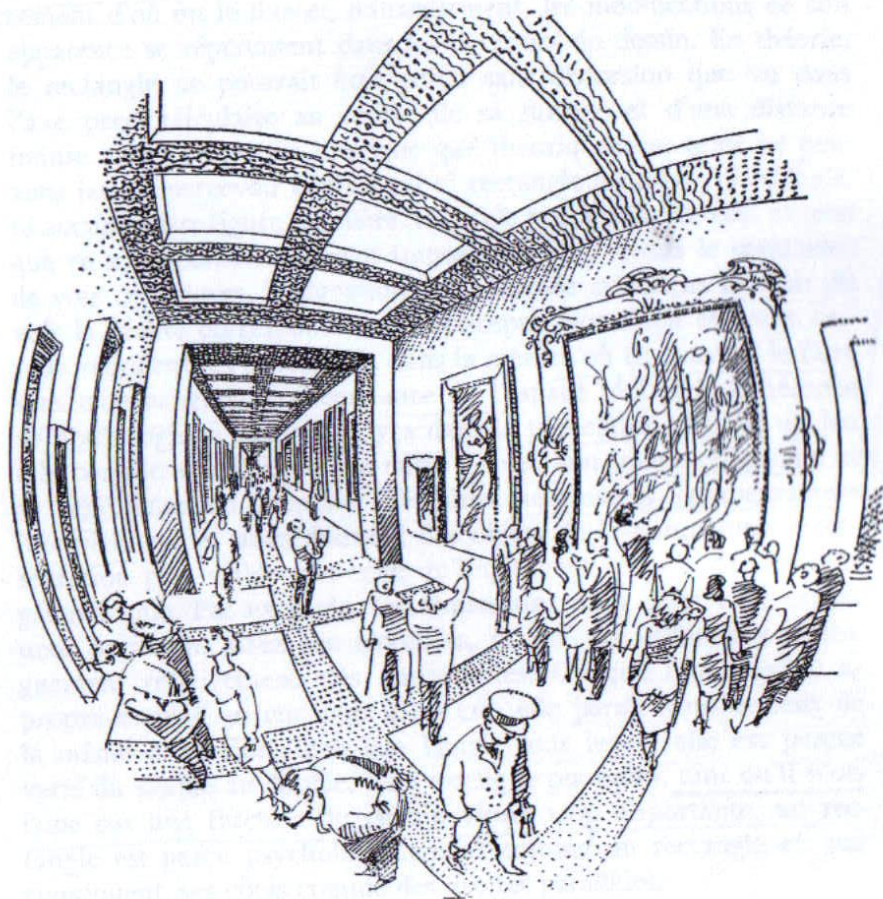
### Plano de quadro curvo

A fim de garantir que as duas colunas dos extremos parecessem ter o mesmo diâmetro da do centro, ou menos, o plano de quadro (aqui, a vermelho) teria de ser curvo. Tal facto vem confirmar as observações de Leonardo a partir de ângulos amplos, em que ele demonstrou que uma parede comprida, rectangular e horizontal, paralela ao plano de quadro, teria de ser desenhada a convergir para os lados, quer em direcção a uma linha central quer como linha curva.



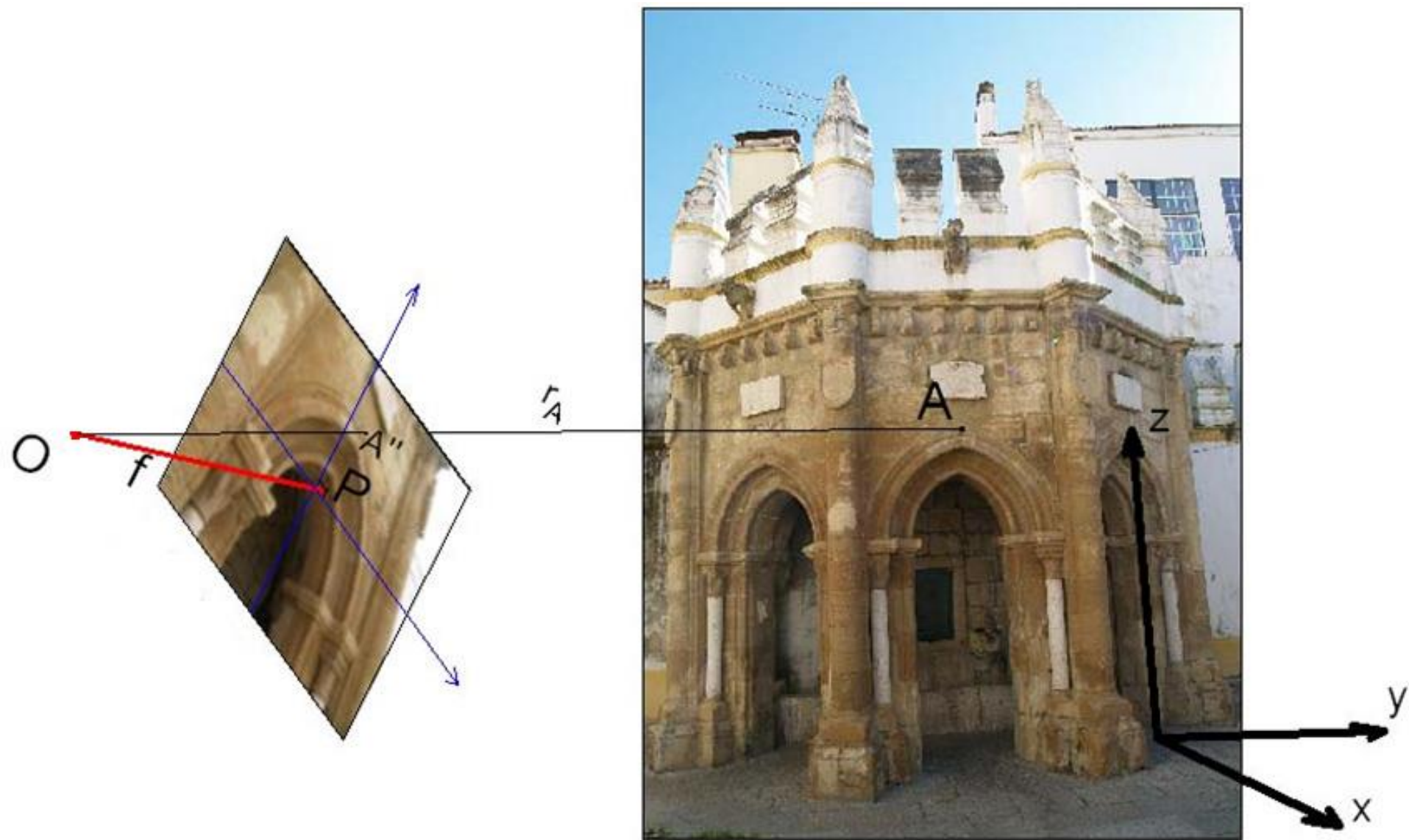


>> PERSPECTIVA: Superfície de projecção (quadro) curva.

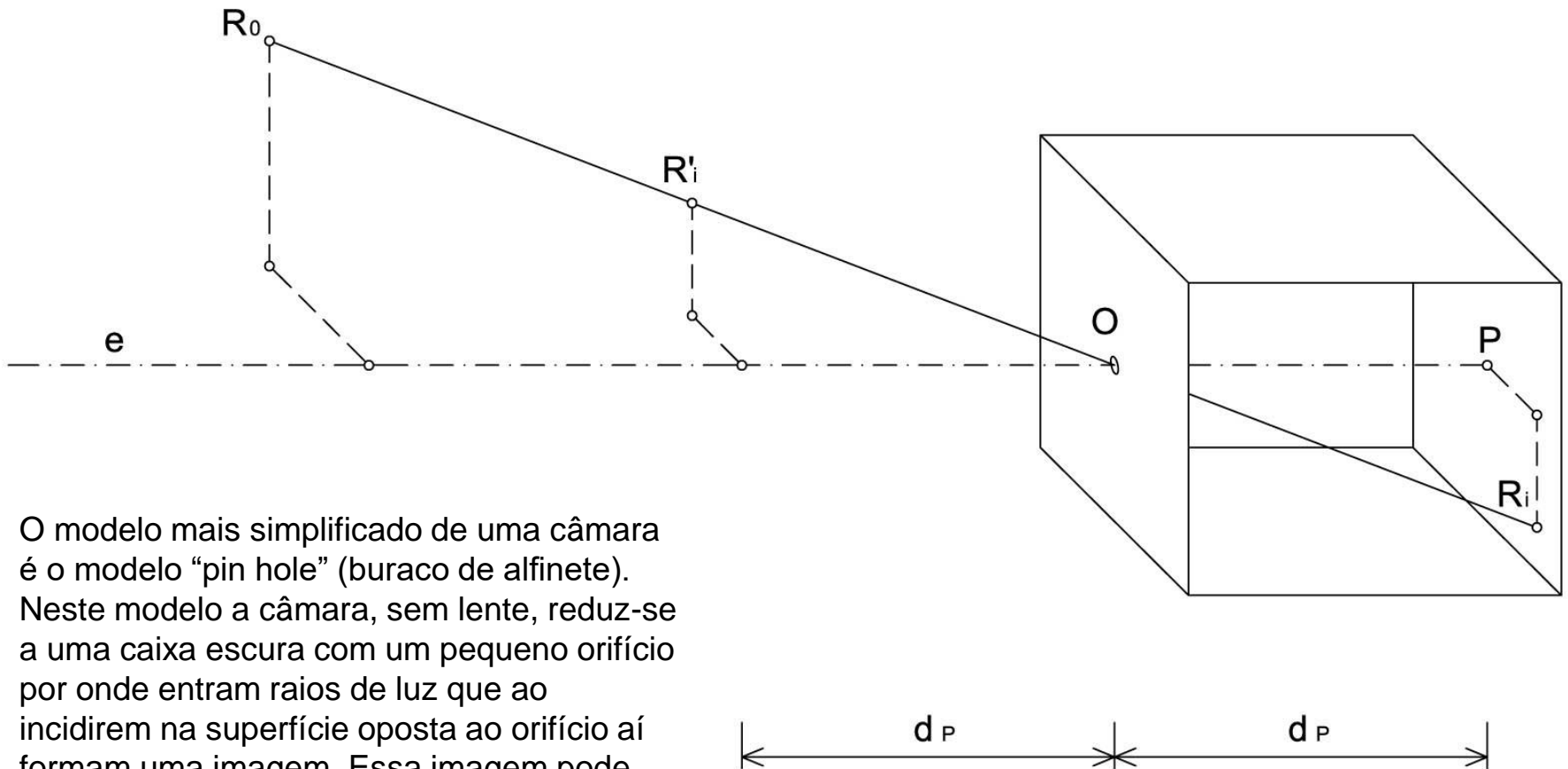




# >> A FOTOGRAFIA COMO PERSPECTIVA



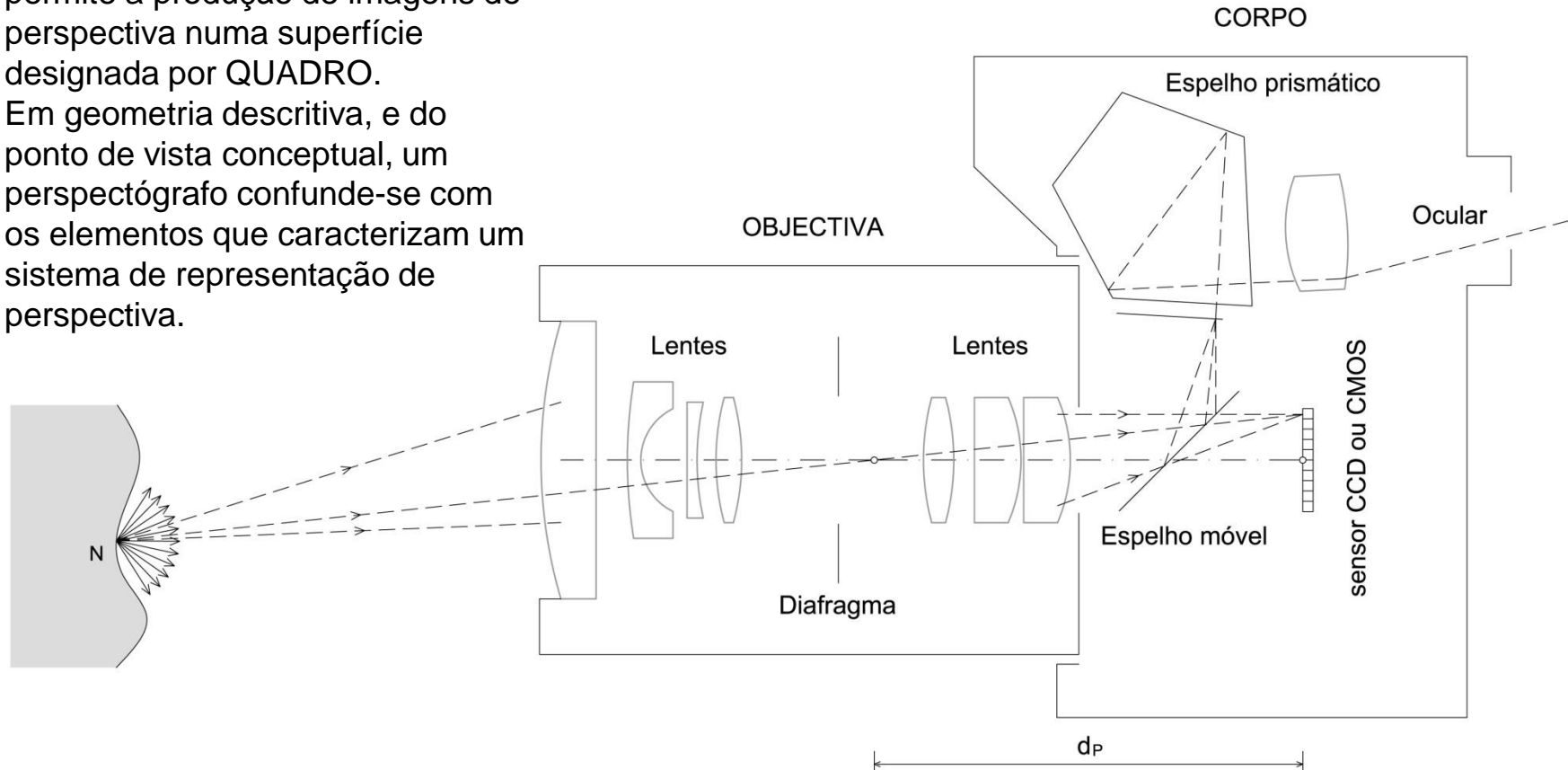
# >> A FOTOGRAFIA COMO PERSPECTIVA: o modelo da câmara escura (pin-hole)



O modelo mais simplificado de uma câmara é o modelo “pin hole” (buraco de alfinete). Neste modelo a câmara, sem lente, reduz-se a uma caixa escura com um pequeno orifício por onde entram raios de luz que ao incidirem na superfície oposta ao orifício aí formam uma imagem. Essa imagem pode ser capturada se na superfície for colocado um material sensível à luz.

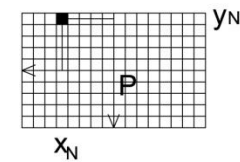
# >> A FOTOGRAFIA COMO PERSPECTIVA: a câmara fotográfica como perspectógrafo

Um PERSPÉCTOGRAFO é uma “máquina” física ou conceptual que permite a produção de imagens de perspectiva numa superfície designada por QUADRO. Em geometria descritiva, e do ponto de vista conceptual, um perspectógrafo confunde-se com os elementos que caracterizam um sistema de representação de perspectiva.



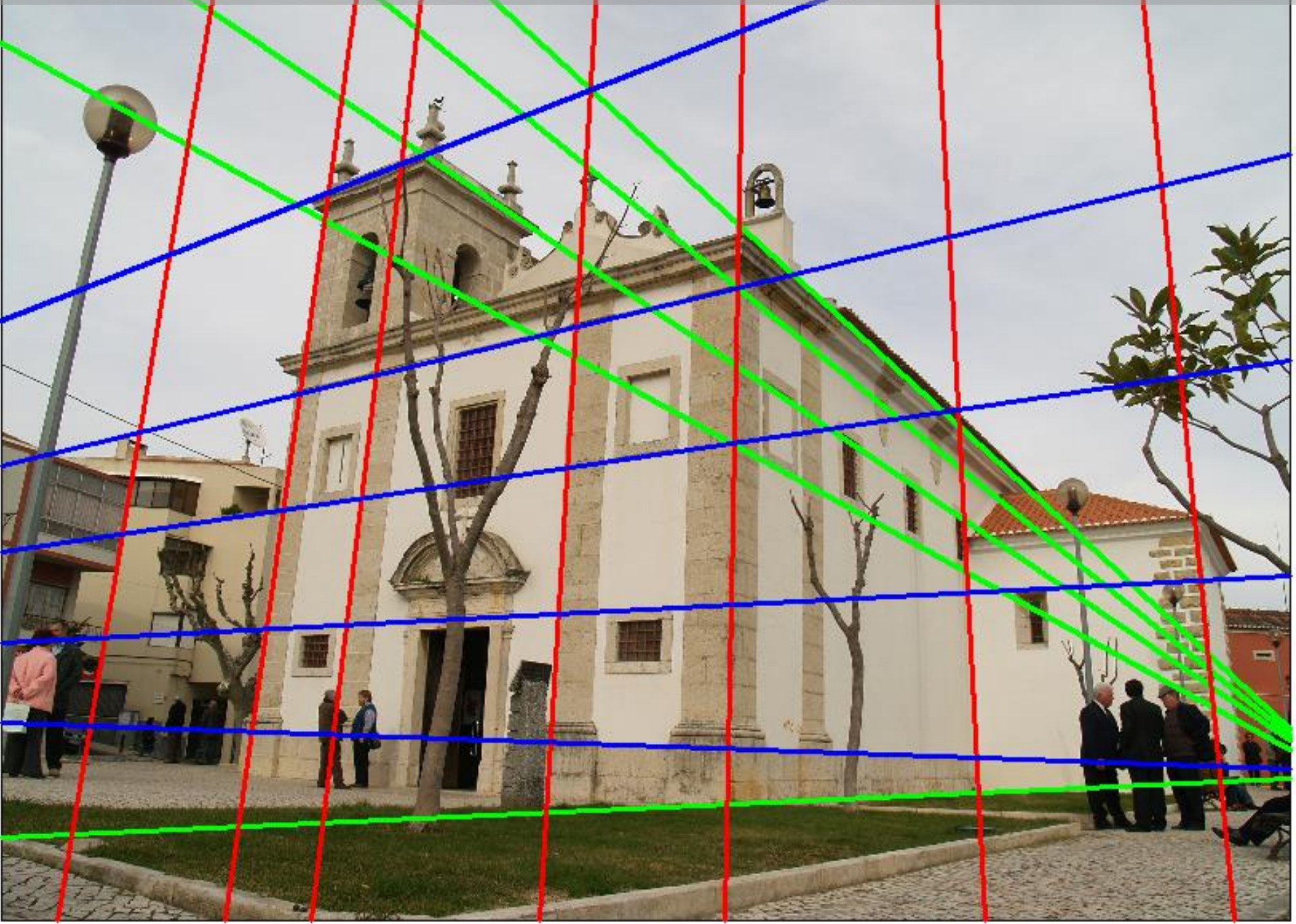
Numa câmara fotográfica digital o quadro é a superfície do sensor, do tipo CCD ou CMOS. As rectas projectantes sintetizam os feixes luminosos que são reflectidos pelos objectos e focados através do sistema de lentes da câmara.

sensor CCD ou CMOS





>> A FOTOGRAFIA COMO PERSPECTIVA: a convergência das linhas paralelas





>> A FOTOGRAFIA E PERSPECTIVA: a diminuição das dimensões com a distância





# Bloco P2

Perspectiva linear de quadro plano.

- Análise de desenhos de perspectiva executados à mão levantada e de imagens fotográficas (perspectivas de 1, 2 e 3 pontos de fuga; noção de sombra e reflexo; o método do paralelepípedo envolvente).
- O posicionamento do observador perante a cena e a representação da figura humana como indicador de escala e profundidade; a convergência e a diminuição do tamanho aparente como indicadores de profundidade.
- A noção empírica de ponto de fuga e de linha de fuga.

## Análise de desenhos executados à mão levantada.

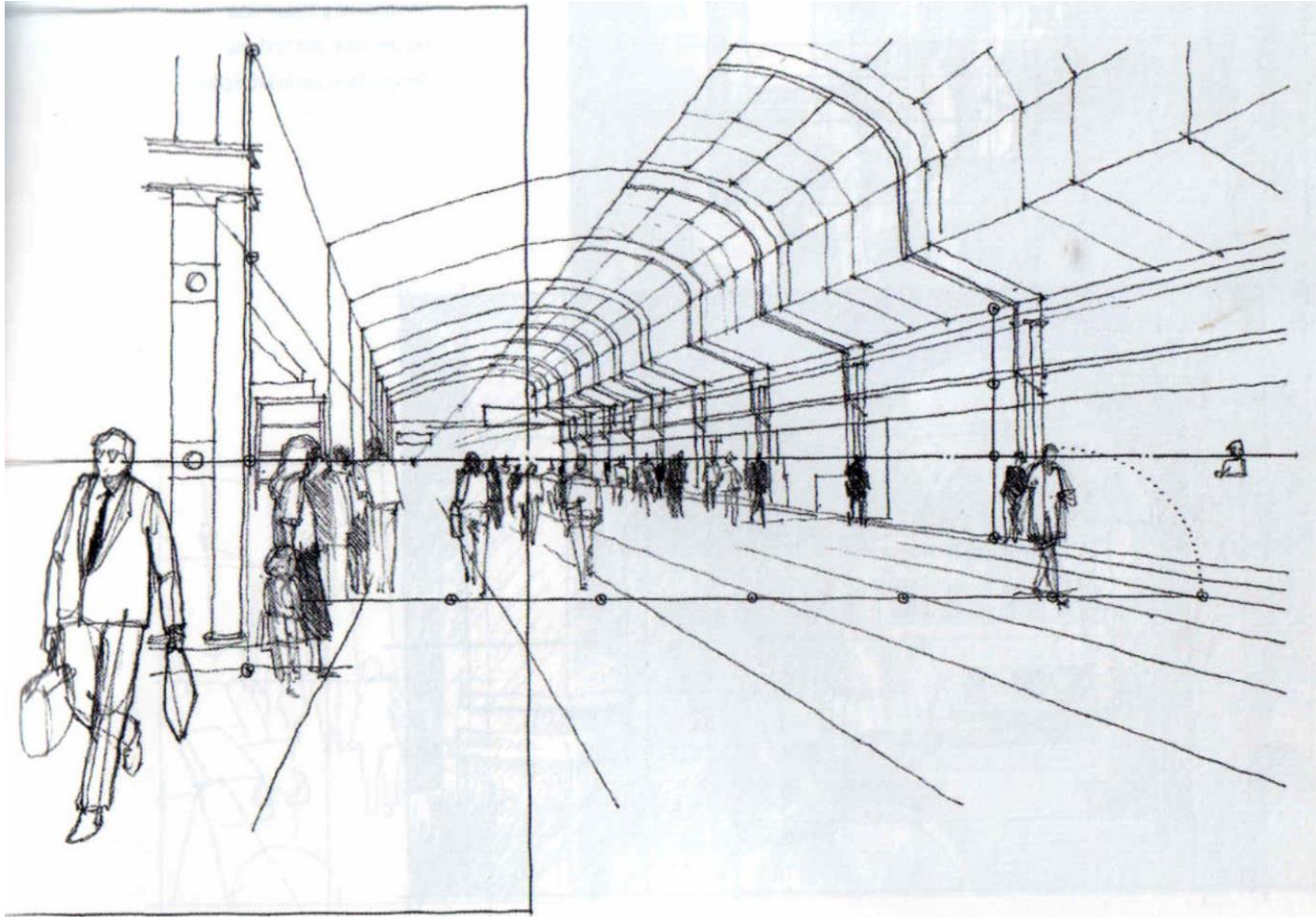
Se o observador de uma cena se encontrar a uma altura normal, digamos à altura de uma pessoa, as cabeças das pessoas situam-se todas numa linha única. Como todas as pessoas têm aproximadamente a mesma altura, a maior ou menor dimensão de uma figura é um indicador de ESCALA e PROFUNDIDADE ou de distância entre o observador e a figura visada.





## Análise de desenhos executados à mão levantada.

Neste desenho o observador encontra-se a uma altura normal. A cabeça da criança representada à esquerda na cena aparece obviamente abaixo da linha que passa pelas representações das cabeças dos adultos. Outro indicador de profundidade é a diminuição de distâncias que intuimos, pela representação, serem espacialmente iguais. Acresce a estas características a convergência de linhas num ponto, que sabemos serem paralelas entre si no espaço tridimensional objecto.



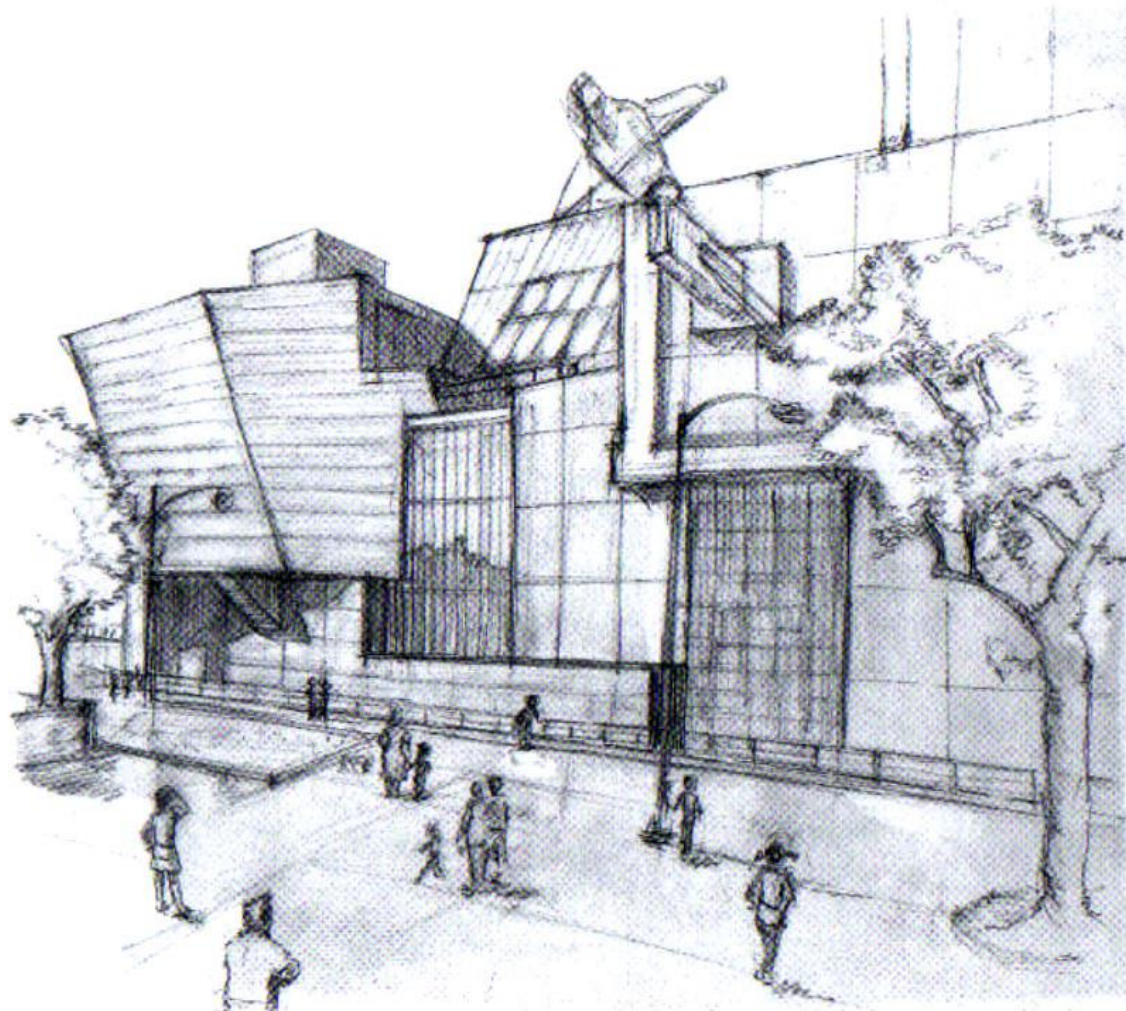
In

CHING F, JURSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

## Análise de desenhos executados à mão levantada.

Neste desenho o observador encontra-se a uma altura superior ao normal, provavelmente está situado num piso acima do piso da rua e em frente ao edifício representado. Por essa razão as cabeças das pessoas já não se encontram sobre uma linha única. Em todo o caso a dimensão relativa entre as figuras continua a ser um indicador da distância entre observador e objecto.

*Apontamento a lapis, por Carlos Conesa, a partir do projecto do Museu Aeroespacial da Califórnia (Los Angeles, E. U. A.), de Frank Gehry. A figura humana constitui sempre uma referência de escala na arquitectura.*

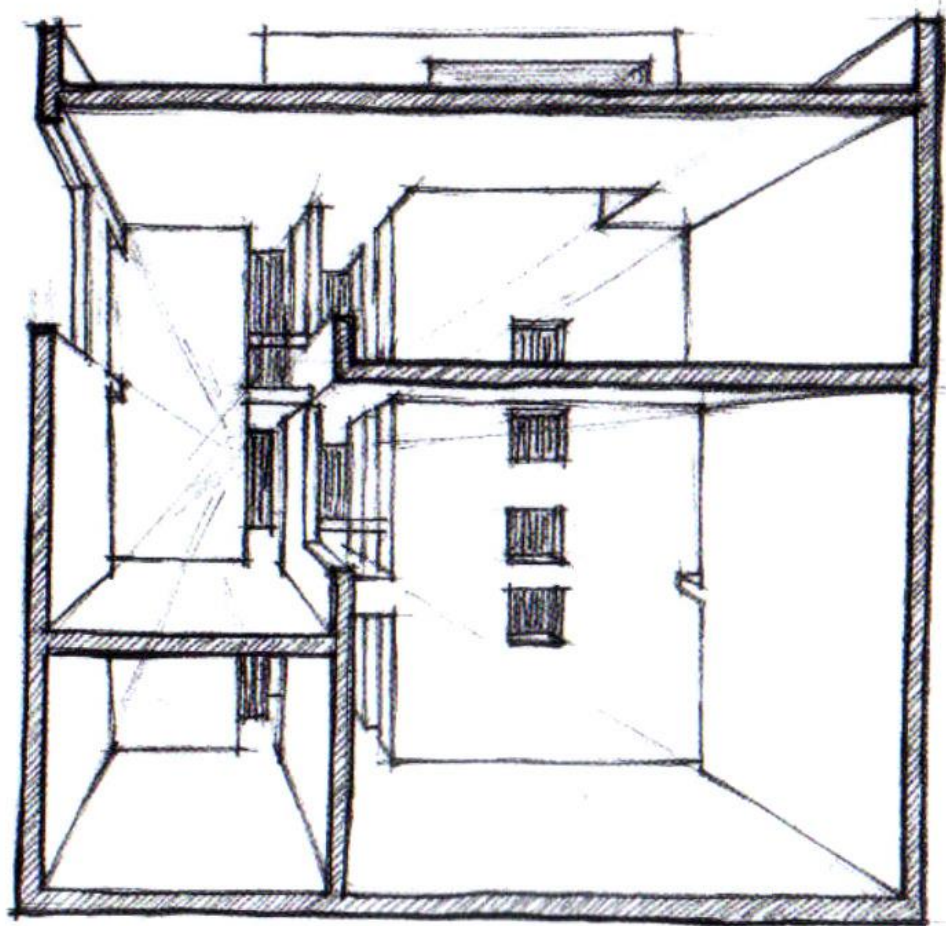




## Análise de desenhos executados à mão levantada.

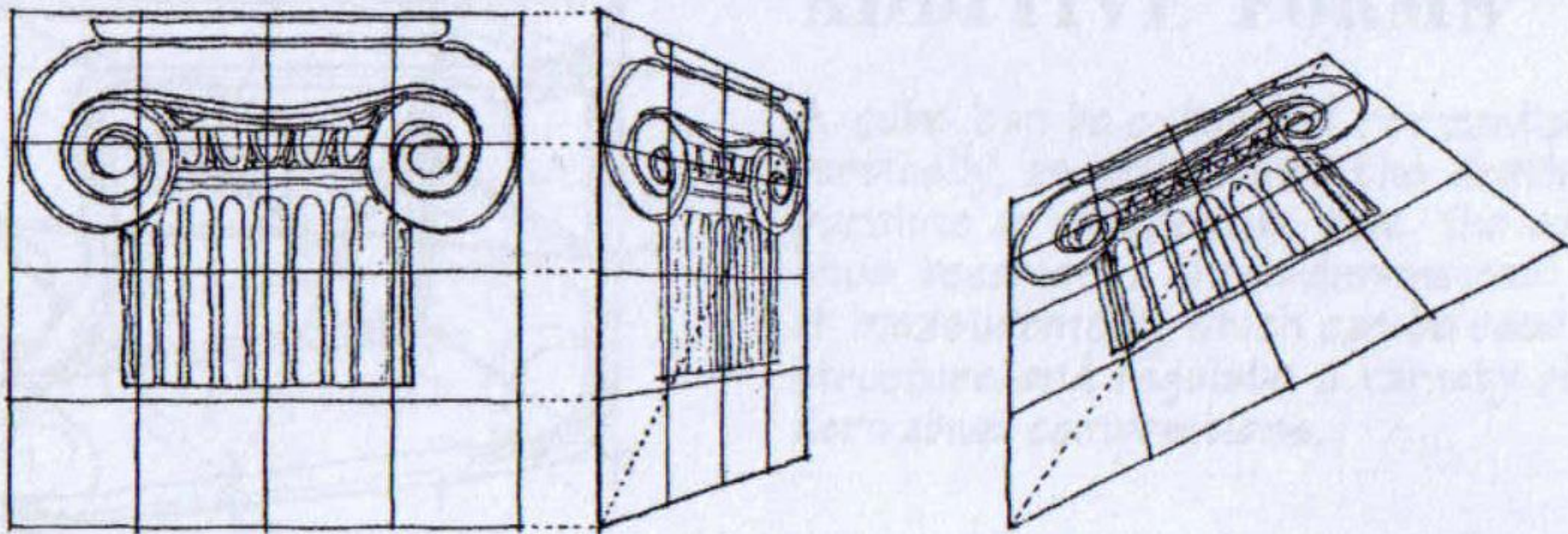
Este tipo de desenho designa-se por CORTE PERSPECTIVADO. Partindo de um corte e arbitrando o ponto de convergência, no desenho, das linhas ortogonais ao plano do corte, procede-se ao desenho dos restantes elementos em profundidade. Neste tipo de desenho os planos paralelos ao plano do corte mantêm as proporções embora diminuam de tamanho com a distância. O controlo da PROFUNDIDADE pode ser feito de forma intuitiva ou através de traçados elementares.

*Esquisso a lápis com base num corte perspectivado do projecto da casa Turégano (Pozuelo de Alarcón, Espanha), da autoria de Alberto Campo Baeza. Utilizaram-se diversas linhas contínuas de enquadramento, definição e trama.*



## Análise de desenhos executados à mão levantada.

Com efeito, o controlo da profundidade pode ser efectuado através da deformação perspéctica de uma grelha quadrada como se sugere na figura seguinte. Com efeito, este procedimento designa-se por HOMOLOGIA.



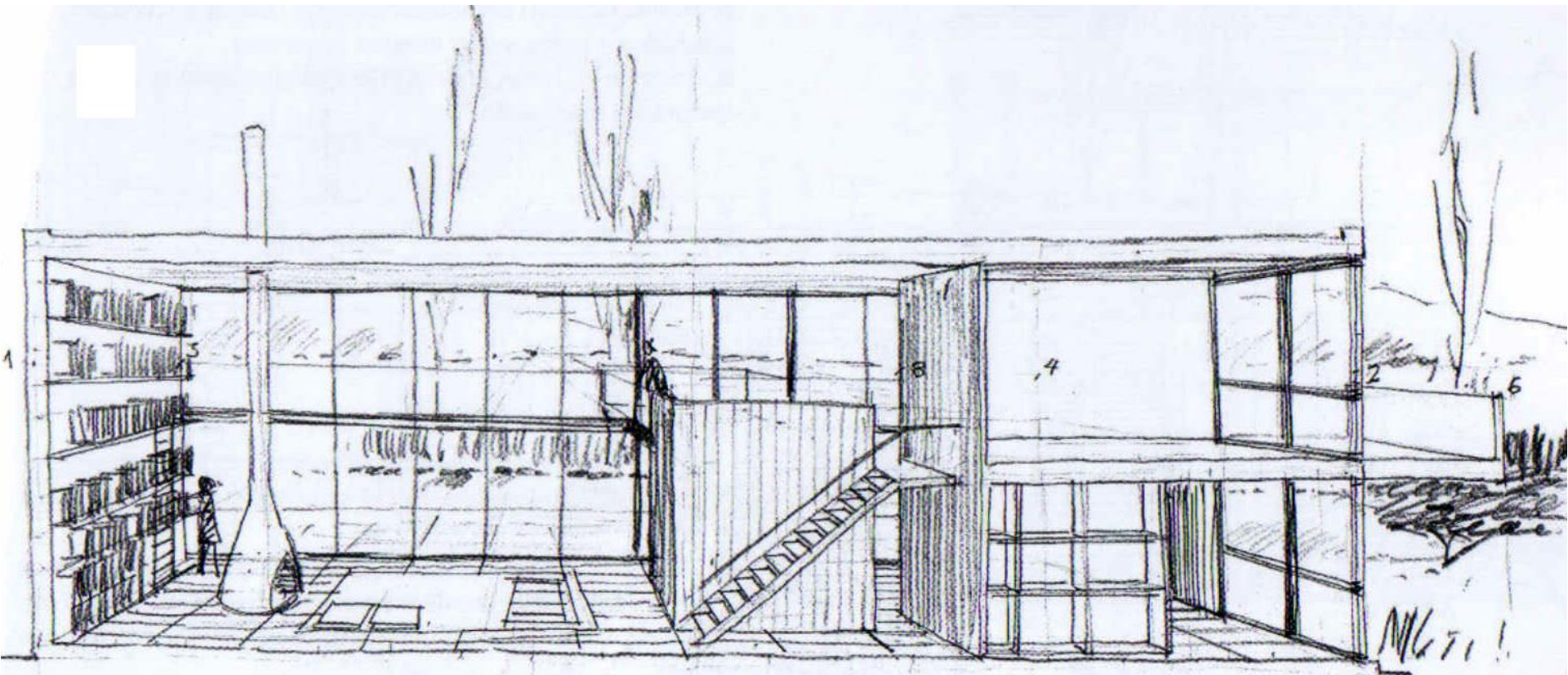
In

CHING F: Drawing – a creative process. 1990. Van Nostrand Reinhold. ISBN 0-442-31818-9



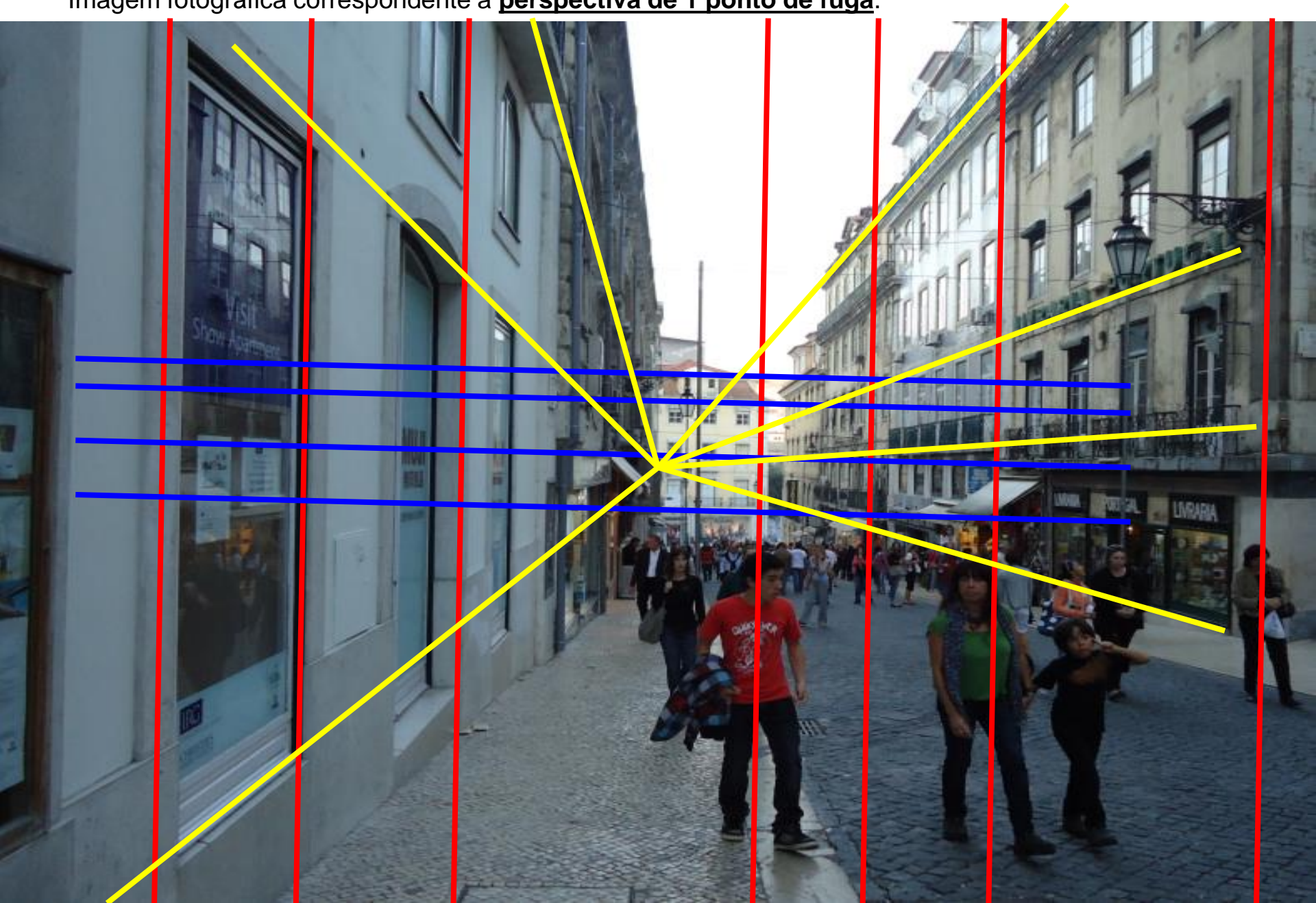
## Análise de desenhos executados à mão levantada.

Este tipo de perspectiva, por vezes designada por **perspectiva de 1 ponto de fuga**, corresponde a uma situação em que o observador adopta como DIRECÇÃO PRINCIPAL DO OLHAR uma das três direcções estruturantes de uma cena tri-ortogonal. Isto é, o observador olha de frente para uma orientação de planos o que implica que no desenho apenas uma das três direcções apresenta CONVERGÊNCIA no desenho.



# Análise de fotografias

Imagem fotográfica correspondente a perspectiva de 1 ponto de fuga.

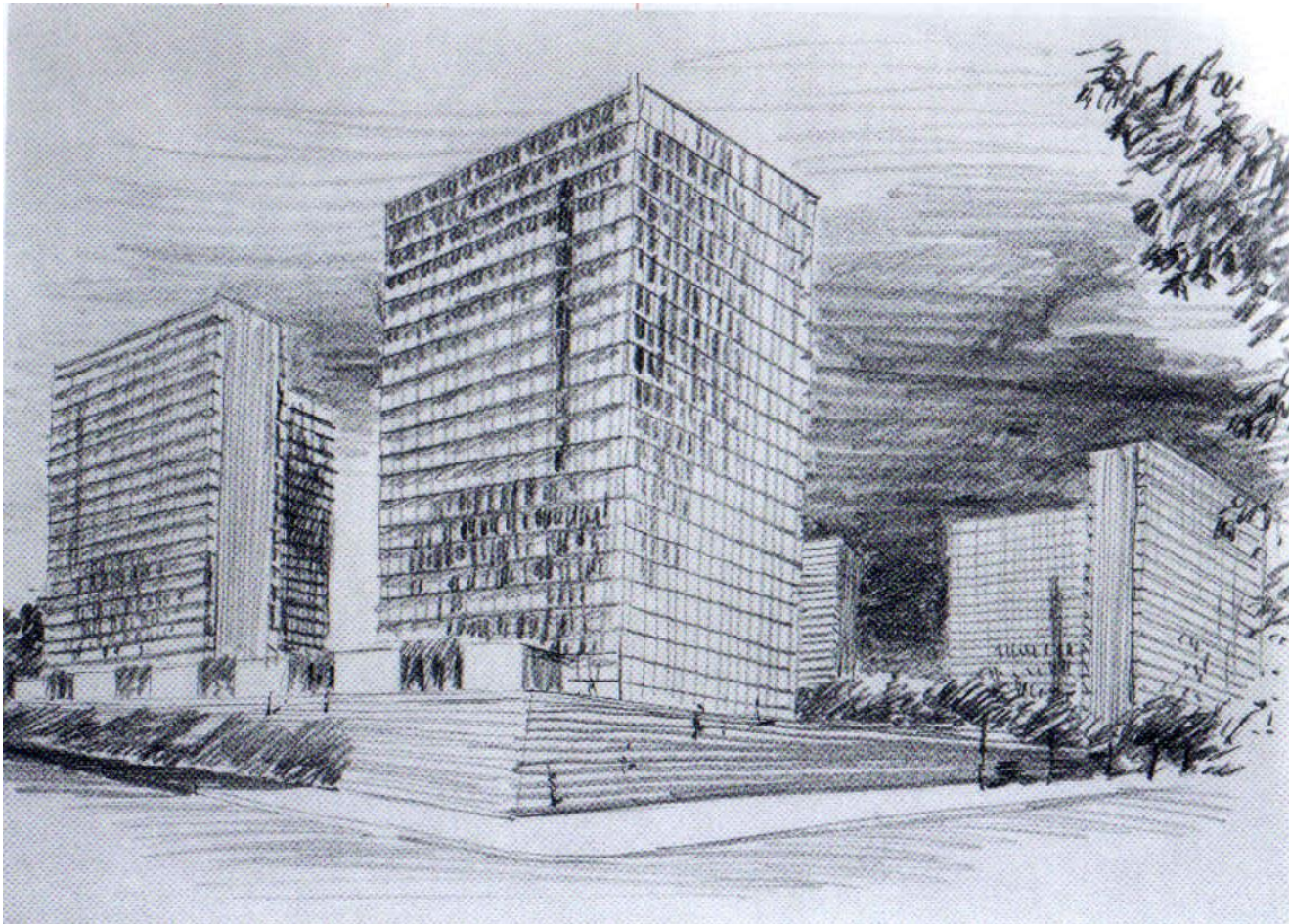




## Análise de desenhos executados à mão levantada.

Já neste tipo de desenho duas direcções apresentam convergência aparecendo as rectas verticais paralelas entre si. As proporções são mantidas na direcção vertical.

Este tipo de perspectiva, por vezes designada por **perspectiva de 2 pontos de fuga**, corresponde a uma situação em que o observador adopta como direcção principal do olhar uma direcção ortogonal a uma das direcções estruturantes de uma cena tri-ortogonal, sem ser paralela a nenhuma das outras duas. Neste caso a direcção principal do olhar do observador é horizontal sem ser paralela às direcções horizontais estruturantes do objecto.

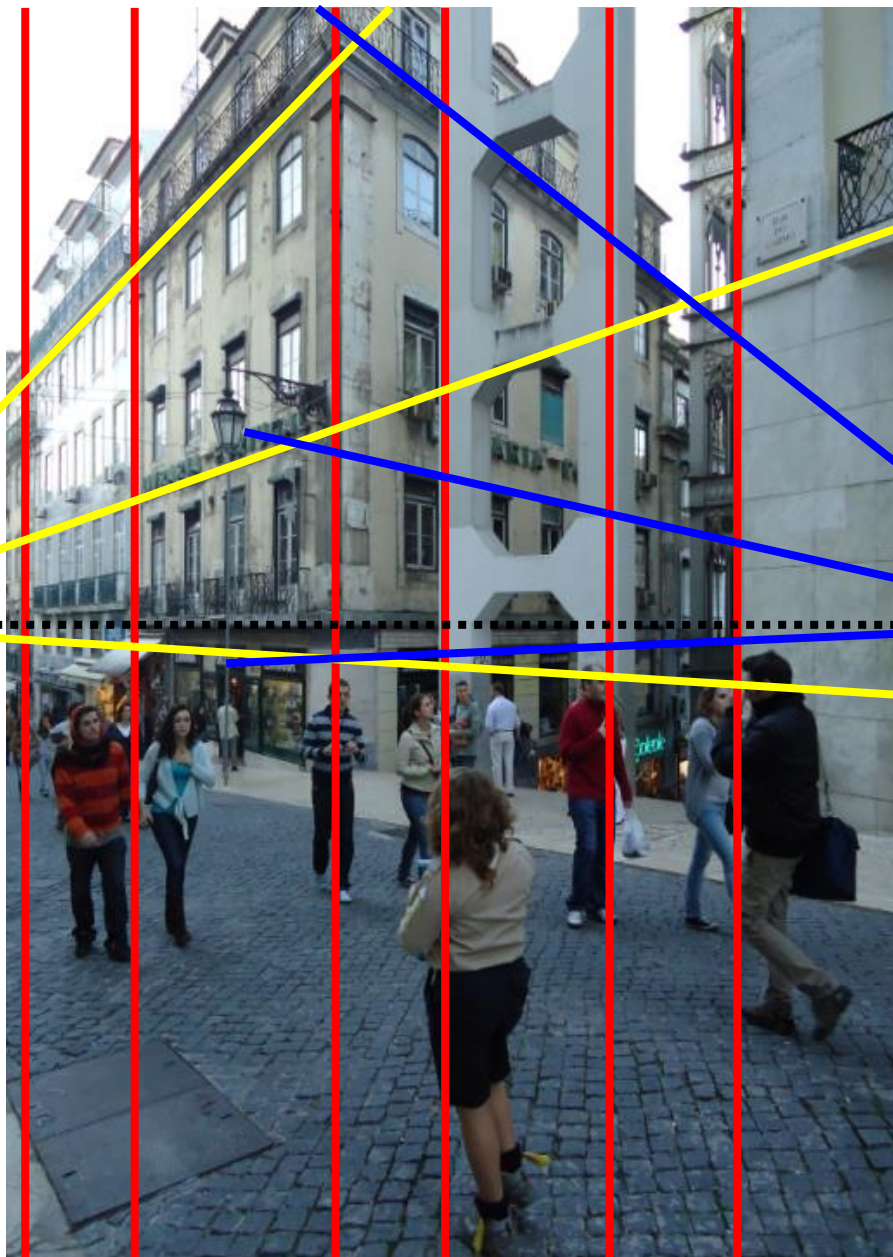


In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

# Análise de fotografias

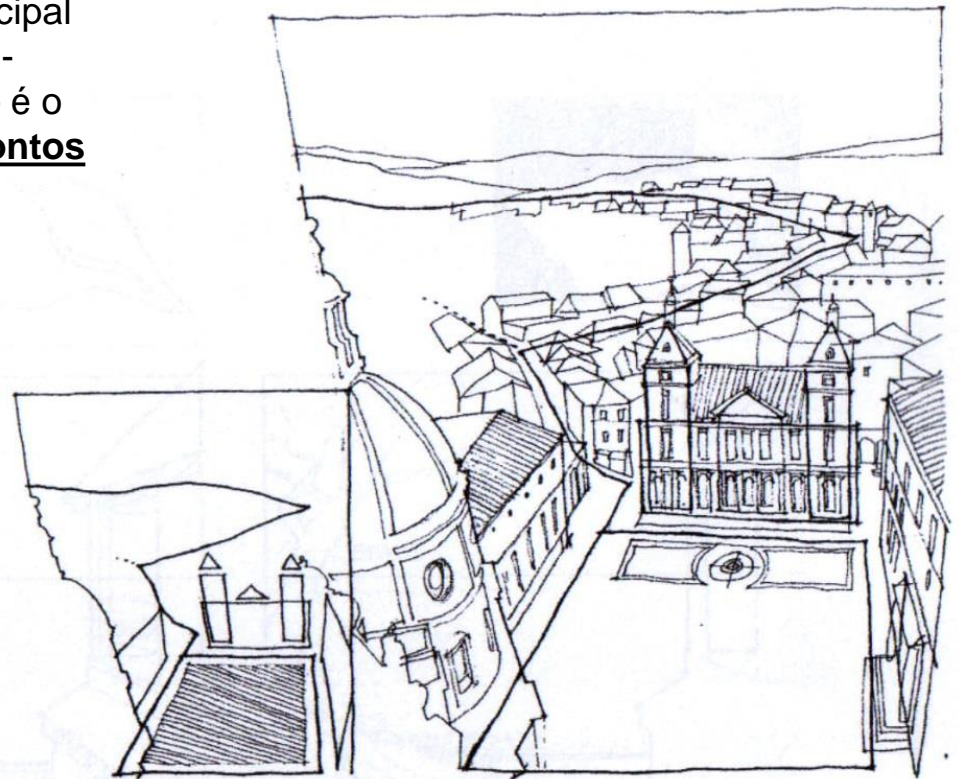
Imagem fotográfica correspondente a **perspectiva de 2 pontos de fuga**. A linha pontilhada fica definida por dois pontos de convergência, ou dois PONTOS DE FUGA. Esta designa-se por LINHA DE FUGA.





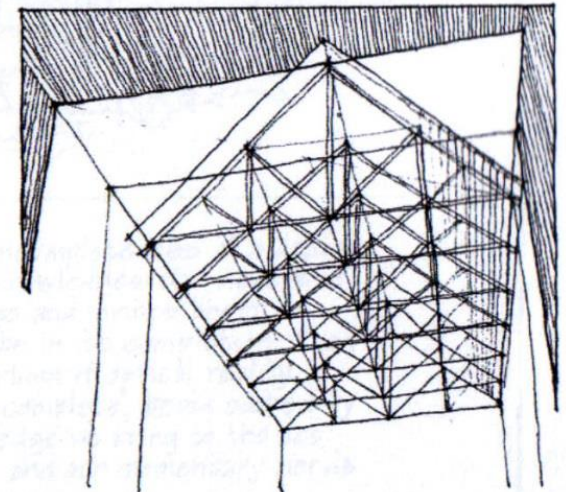
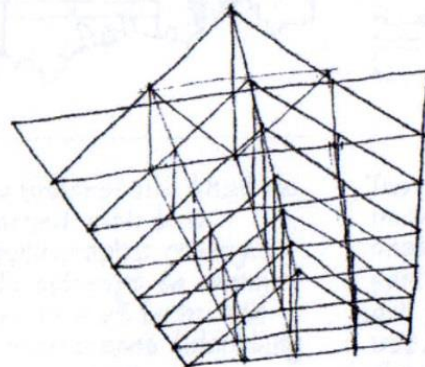
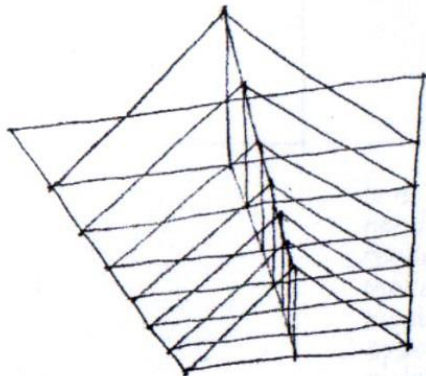
# Análise de desenhos executados à mão levantada.

Quando o observador assume como direcção principal do olhar uma direcção obliqua às três direcções tri-ortogonais estruturantes de uma cena, o resultado é o que se costuma designar por **perspectiva de 3 pontos de fuga**.



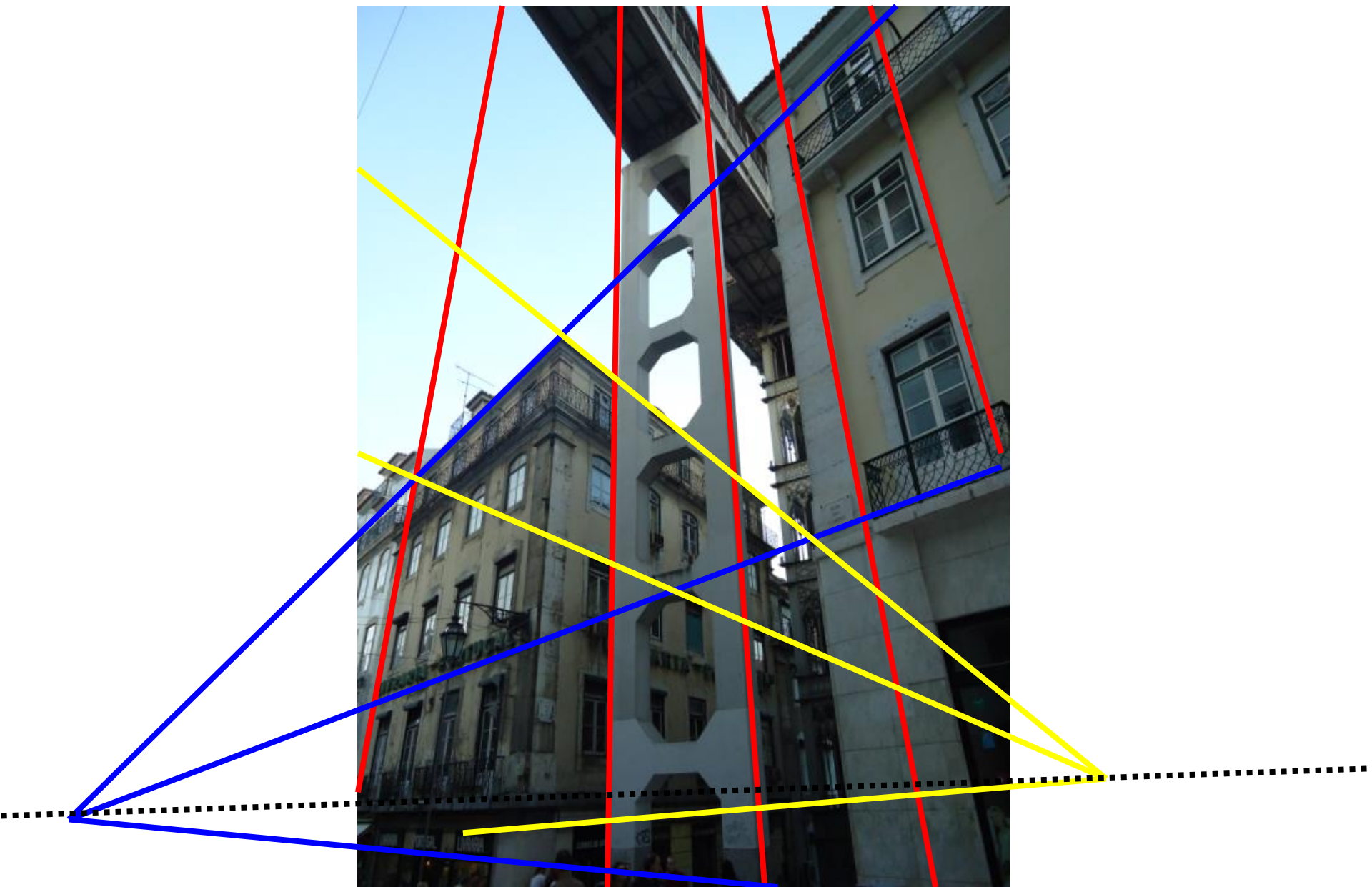
● SPATIAL STRUCTURE

● URBAN STRUCTURE



## Análise de fotografias

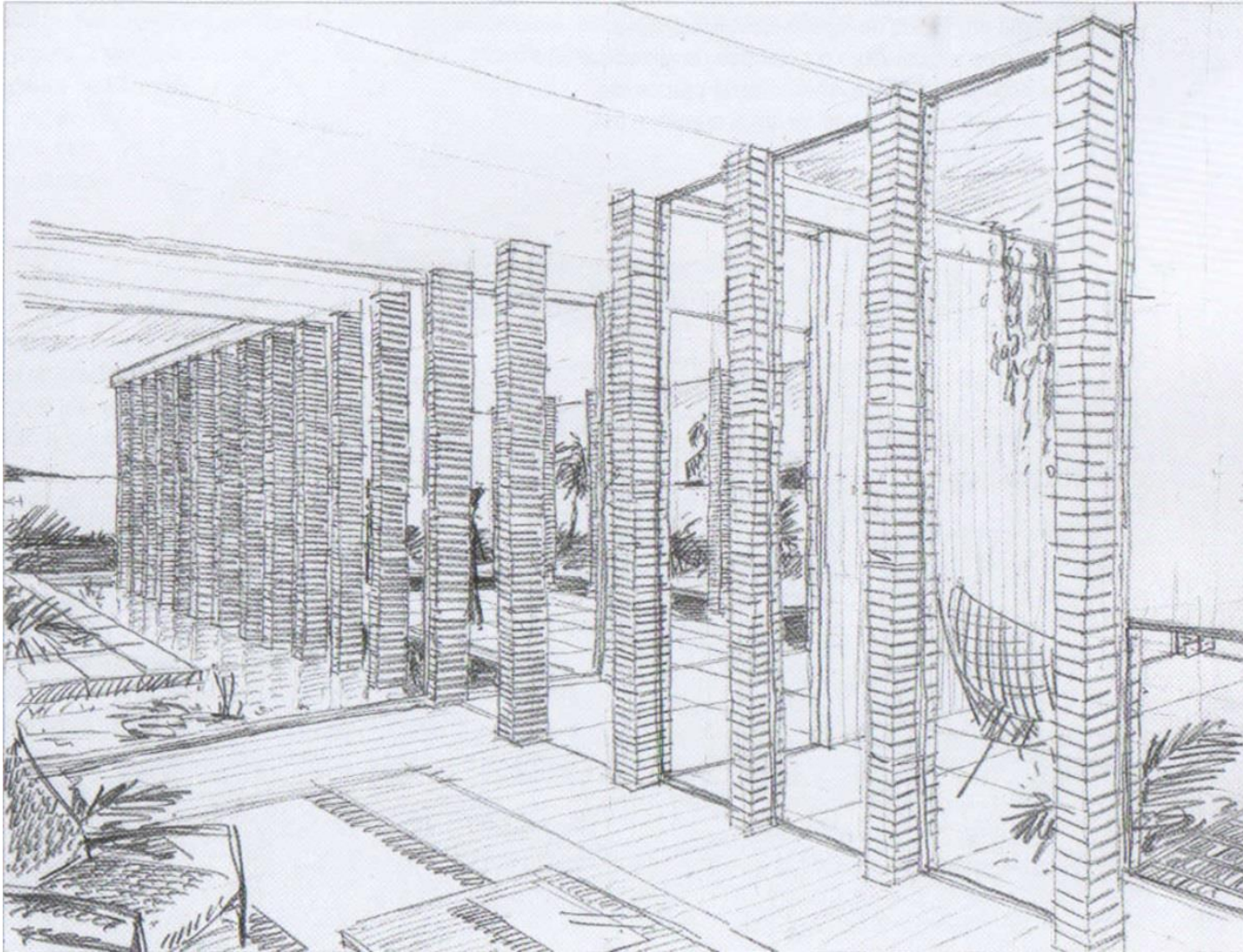
Imagem fotográfica correspondente a **perspectiva de 3 pontos de fuga**. A linha pontilhada fica definida por dois pontos de convergência, ou dois pontos de fuga. Esta designa-se por linha de fuga.





## Análise de desenhos executados à mão levantada.

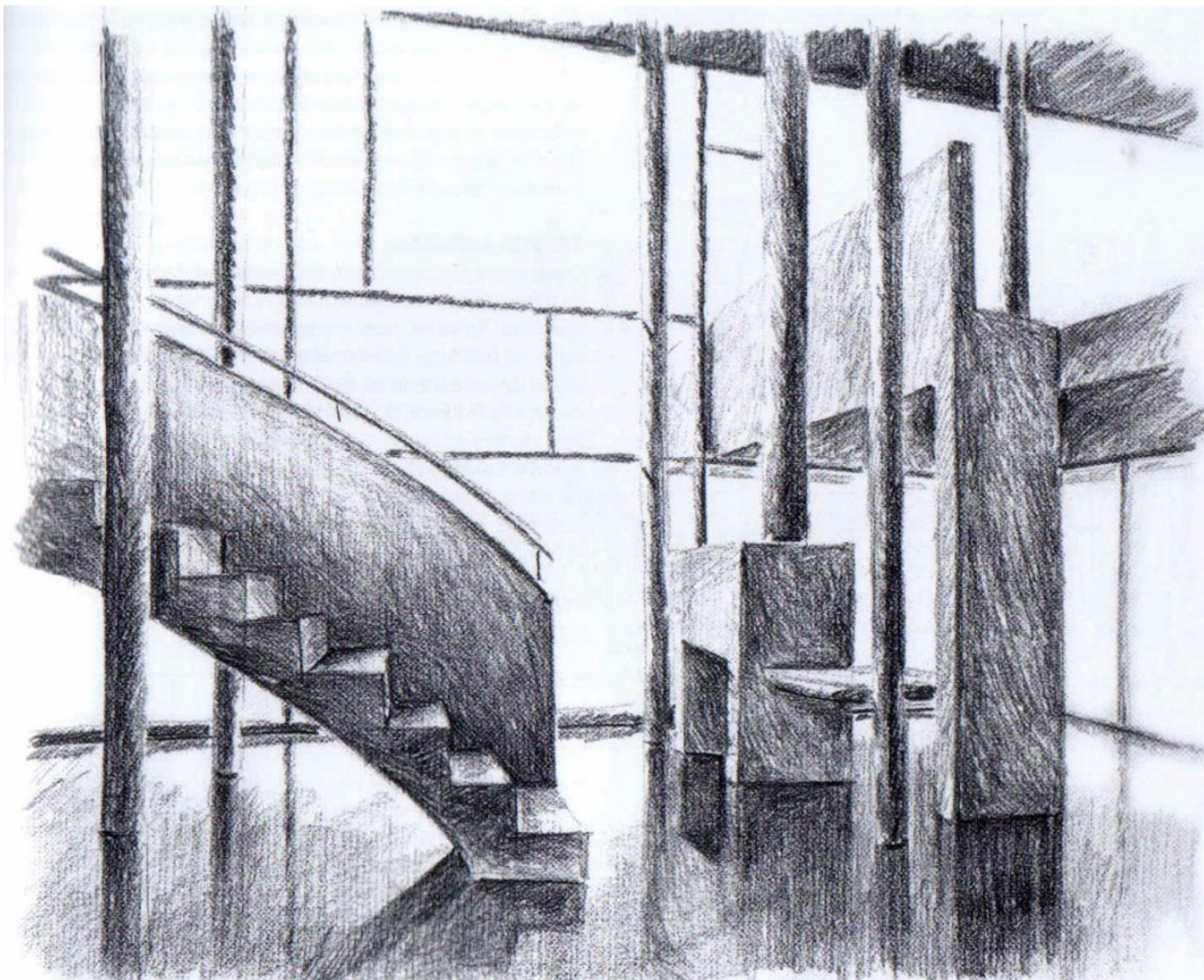
Uma das formas de enriquecer o desenho de perspectiva é através da inclusão de texturas ou através da inclusão dos efeitos de SOMBRA e REFLEXOS. Os reflexos surgem quando se desenharam superfícies com características especulares. Exemplos deste tipo de superfície são os espelhos de água, as superfícies envidraçadas, ou as superfícies polidas.





## Análise de desenhos executados à mão levantada.

A inclusão de sombras e reflexos pode incluir alguma MODELAÇÃO LUMINOSA. Há uma relação de proporcionalidade entre o ângulo de incidência da luz numa superfície e o seu nível de claro-escuro (TEORIA DOS ISOFOTOS). Há ainda efeitos de reflexões múltiplas da luz na proximidade de objectos bem como os efeitos de reflexão atmosférica da luz.



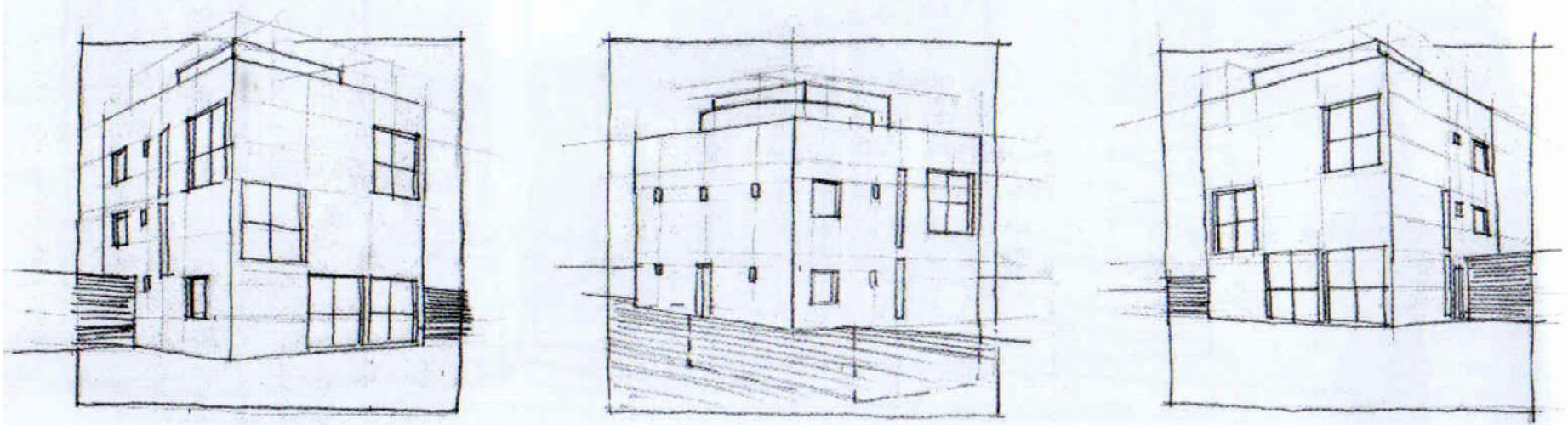
In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4



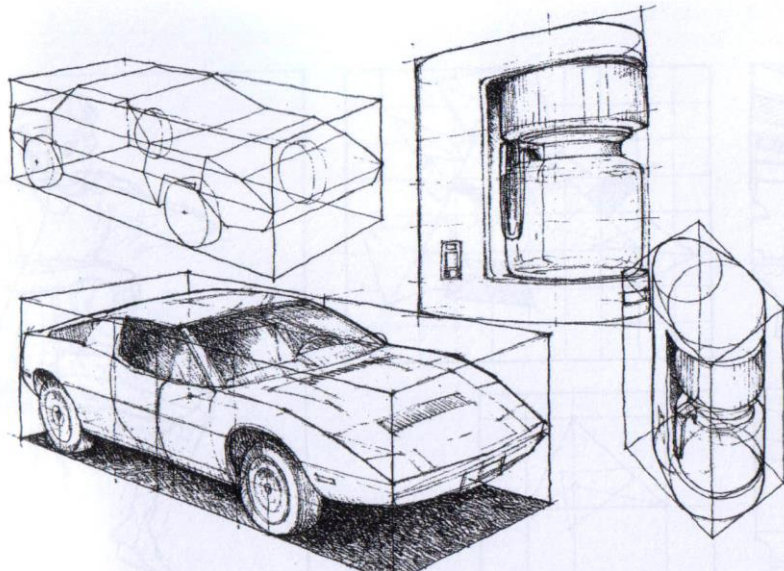
# Análise de desenhos executados à mão levantada.

Tal como na axonometria, o MÉTODO DO PARALELEPÍPEDO ENVOLVENTE, também é uma estratégia eficiente para estruturar a representação de objectos em perspectiva.



In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4



In

CHING F: Drawing – a creative process. 1990. Van Nostrand Reinhold. ISBN 0-442-31818-9

Empiricamente, um **PONTO DE FUGA** é um ponto no desenho (ou numa fotografia) para o qual convergem as representações de uma família de rectas que, no espaço, são paralelas entre si (que partilham uma DIRECÇÃO).

Empiricamente, uma **LINHA DE FUGA** é uma recta no desenho (ou numa fotografia) que contém os pontos de fuga de uma família de direcções de rectas contidas numa ORIENTAÇÃO de planos.



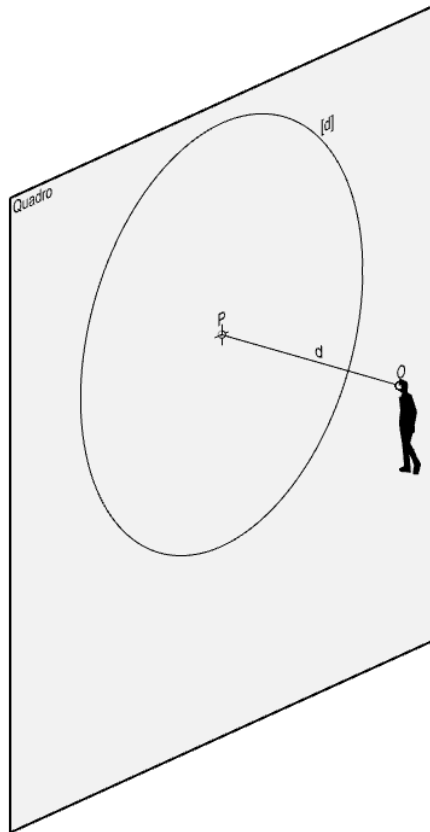
# Bloco P3

Perspectiva linear de quadro plano:

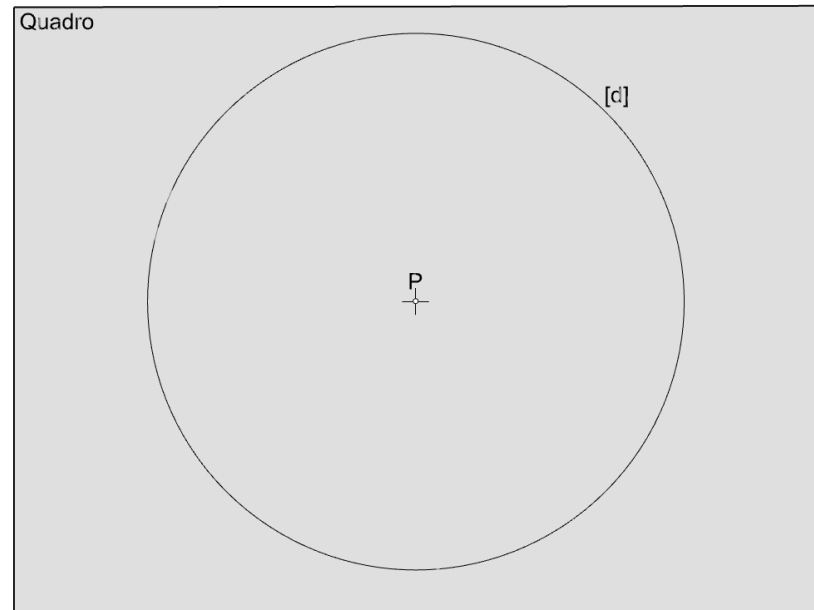
- A definição do perspectógrafo mínimo e completo.
- A noção de recta projectante e plano projectante.
- A perspectiva como secção produzida pelo quadro na pirâmide visual (exemplos com perspectiva de 1, 2 e 3 pontos de fuga)
- A definição geométrica de ponto de fuga e linha de fuga
- A dedução de alguns parâmetros do perspectógrafo a partir de imagens dadas em perspectiva – casos particulares

# A definição do perspectógrafo mínimo

Na sua versão mais elementar o perspectógrafo é constituído por um plano de projecção, designado QUADRO, e por um centro de projecções O, designado OBSERVADOR, colocado a uma distância finita do do quadro designada por DISTÂNCIA PRINCIPAL  $d$ . À projecção ortogonal do ponto O no quadro dá-se a designação de PONTO PRINCIPAL e nota-se por P. Para notar a distância principal no quadro considera-se uma circunferência  $[d]$  designada por CIRCUNFERÊNCIA DE DISTÂNCIA cujo raio é igual à distância principal. Ao sentido OP dá-se a designação de “DIRECÇÃO” PRINCIPAL DO OLHAR. Esta direcção é sempre ortogonal ao quadro.



VISTA EXTERIOR DO QUADRO

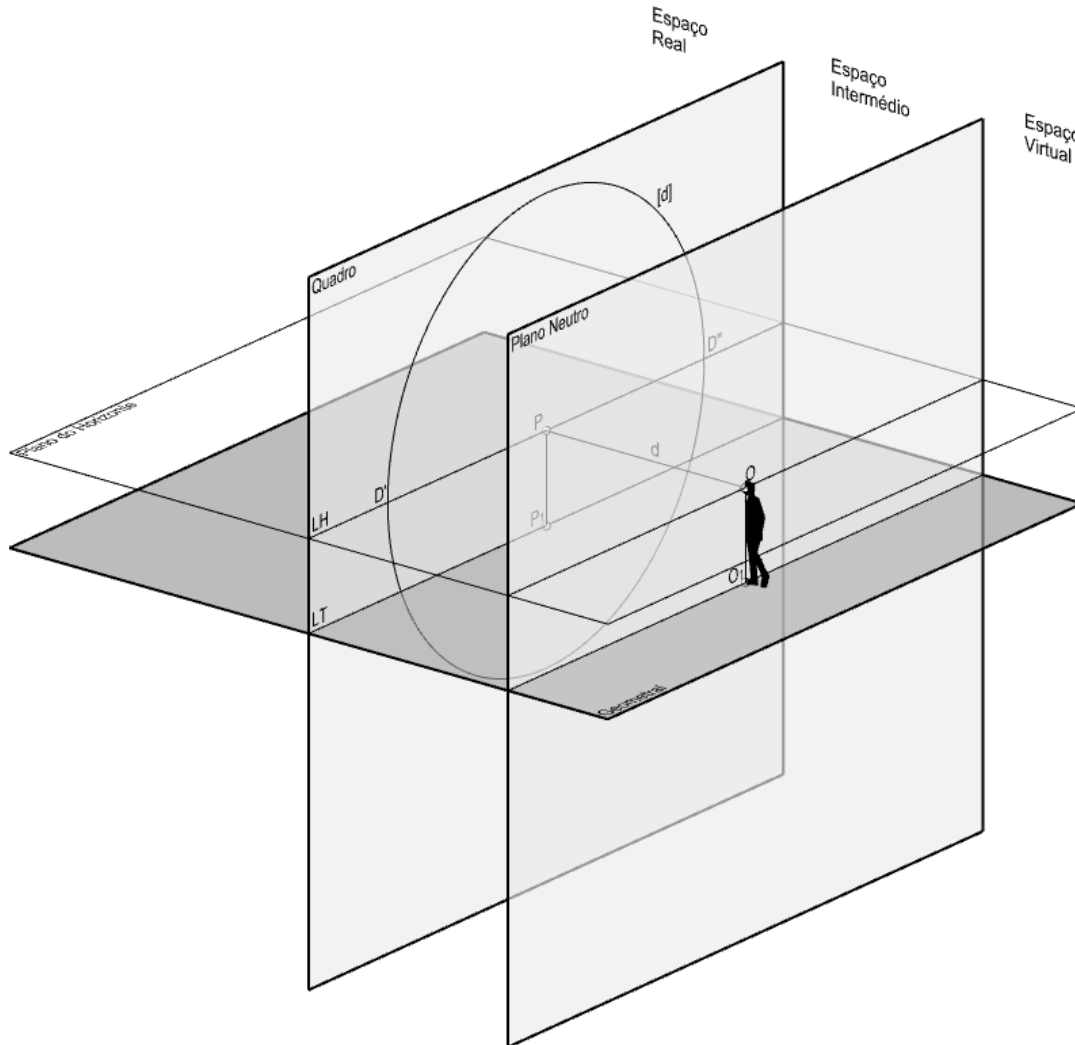


VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O

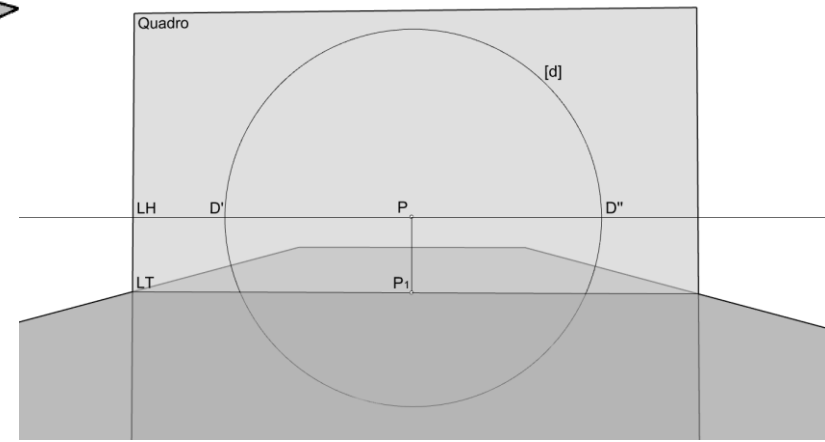


# O perspectógrafo completo

A esta estrutura podem acrescentar o plano horizontal de referência (GEOMETRAL) e o PLANO DO HORIZONTE (plano horizontal passante pelo Observador). A distância entre estes dois planos é reflectida pela distância entre a linha de terra (LT) e a linha do horizonte (LH) e designa-se por altura do Observador –  $h$ . O plano frontal passante pelo observador designa-se PLANO NEUTRO.



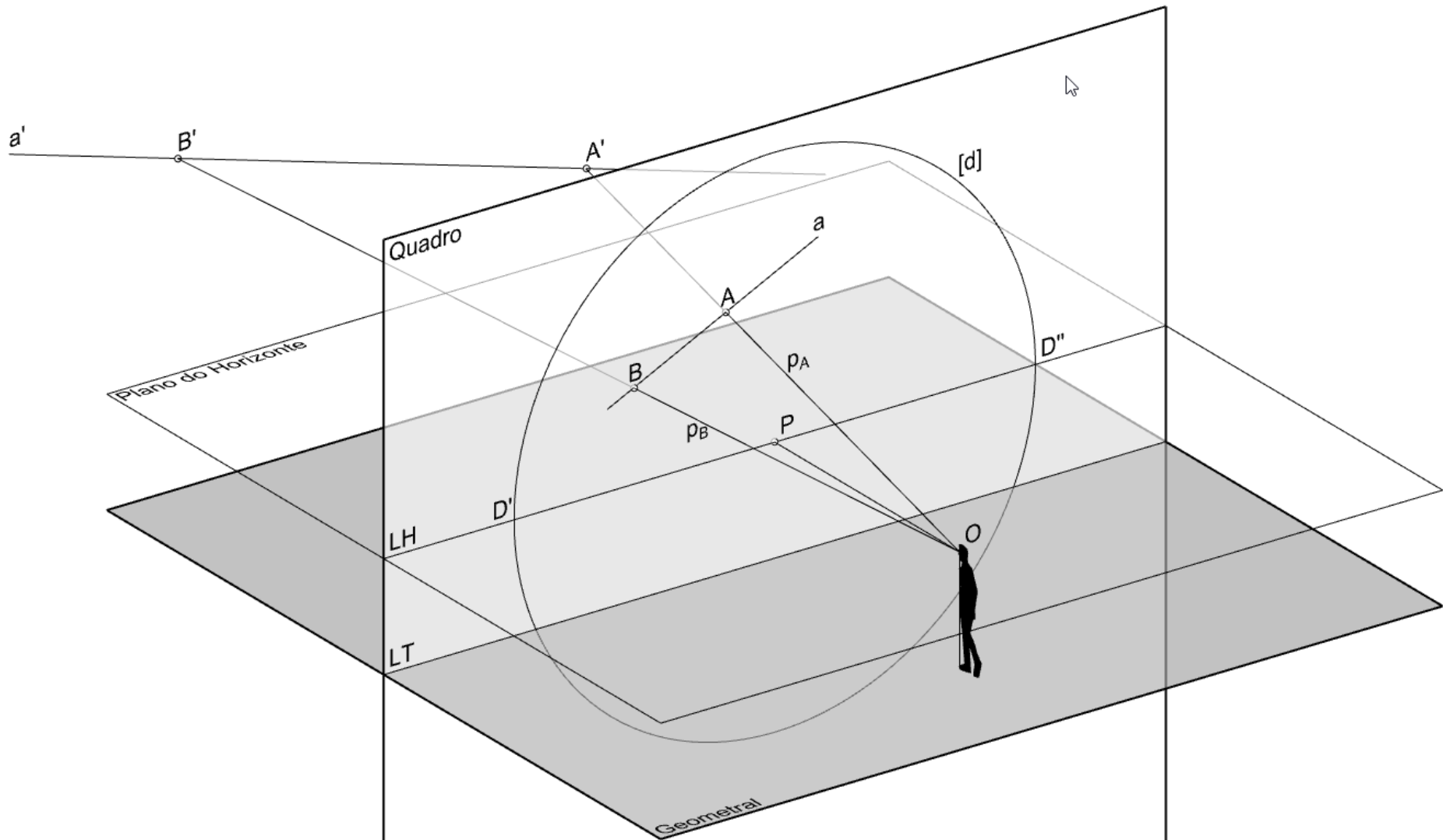
VISTA EXTERIOR DO QUADRO



VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O

## A noção de recta projectante e plano projectante

As rectas  $p_A$  e  $p_B$  são as rectas projectantes dos pontos  $A'$  e  $B'$ , respectivamente.  
O plano  $p_A \cdot p_B$  é o plano projectante do segmento  $[A'B']$ .  
A projecção central  $a$  da recta  $a'$  designa-se perspectiva da recta  $a'$ .

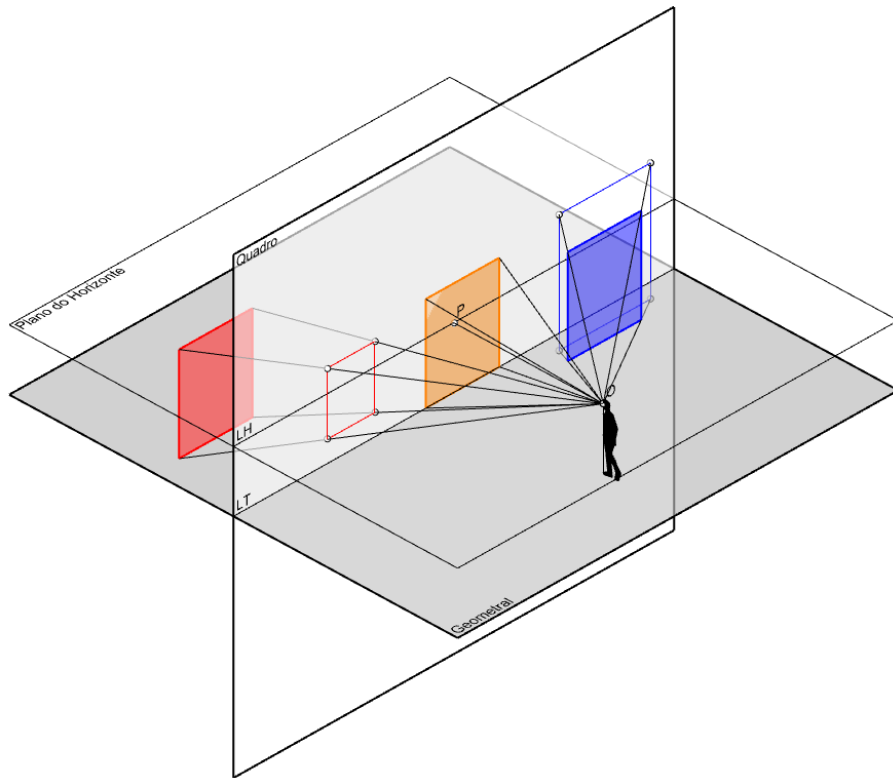




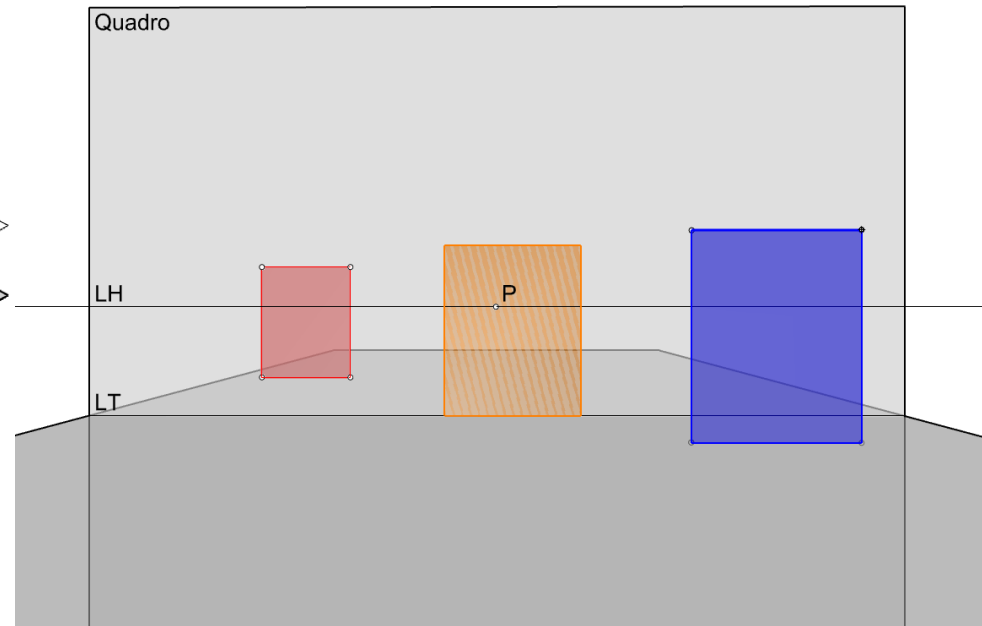
## O quadro como o lugar das verdadeiras grandezas

O rectângulo vermelho encontra-se para lá do quadro (no espaço real) e por isso a sua perspectiva aparece inferior à sua verdadeira grandeza. O rectângulo azul encontra-se para cá do quadro, no espaço intermédio, por isso a sua perspectiva aparece ampliada em relação à sua verdadeira grandeza. O rectângulo laranja está contido no quadro, por isso a sua perspectiva encontra-se em verdadeira grandeza.

Neste exemplo, todos os rectângulos são frontais e têm um lado contido no Geometral.



VISTA EXTERIOR DO QUADRO



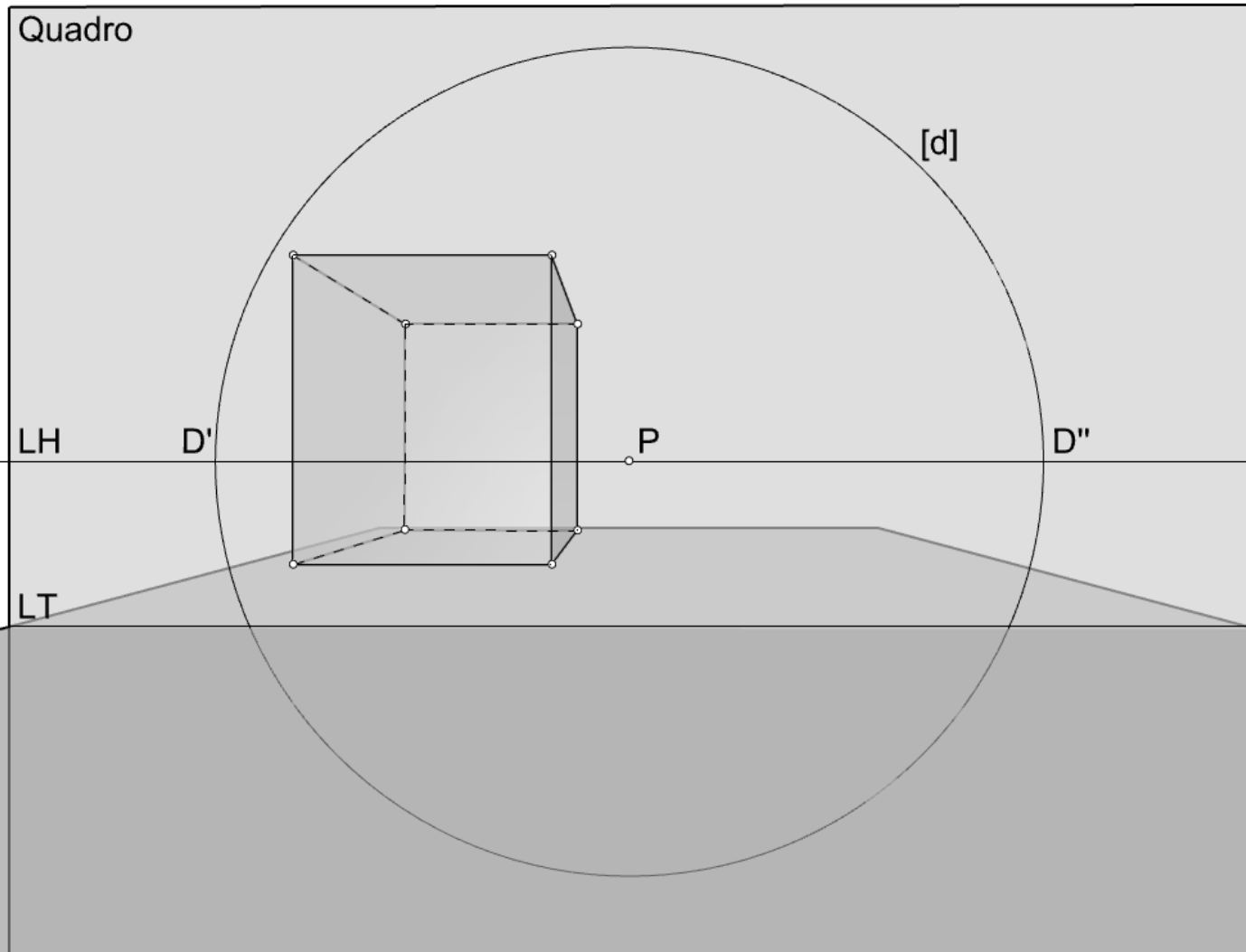
VISTA DO QUADRO A PARTIR DO PONTO O



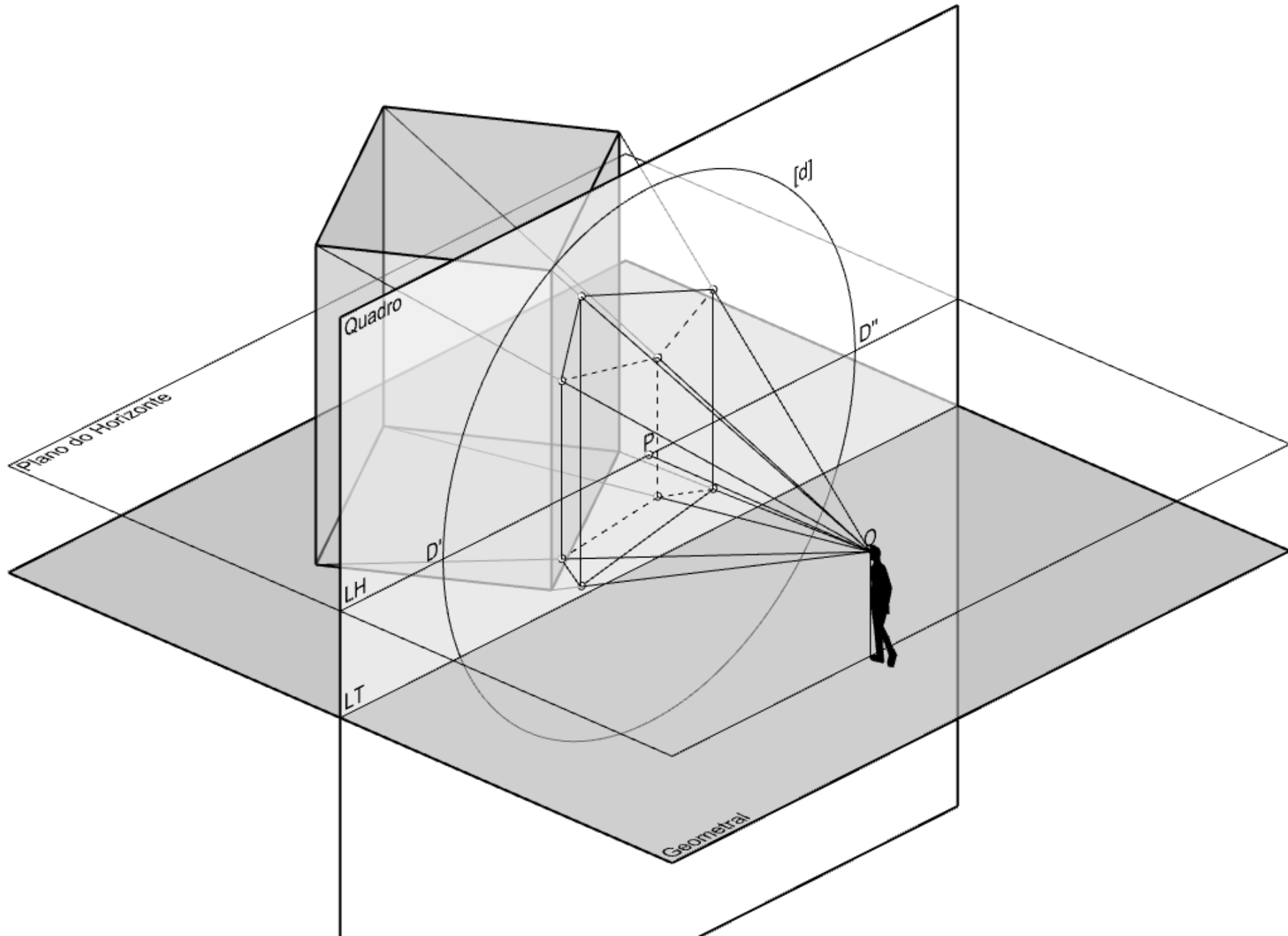


## “1 Ponto de Fuga” (vista a partir do ponto O)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com duas faces paralelas ao quadro, apenas as arestas ortogonais ao quadro apresentam convergência.



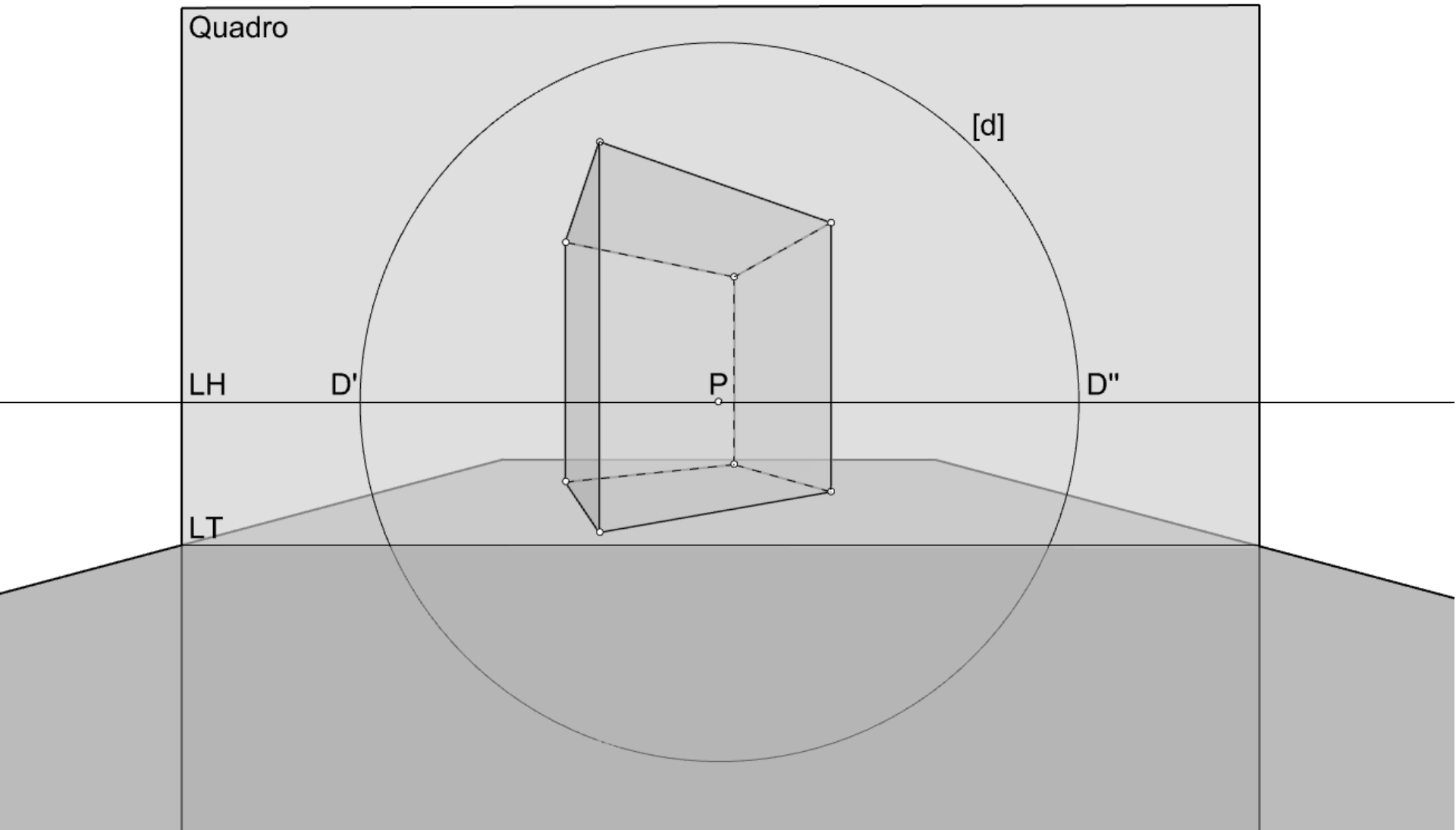
# “2 Pontos de Fuga” (vista exterior)



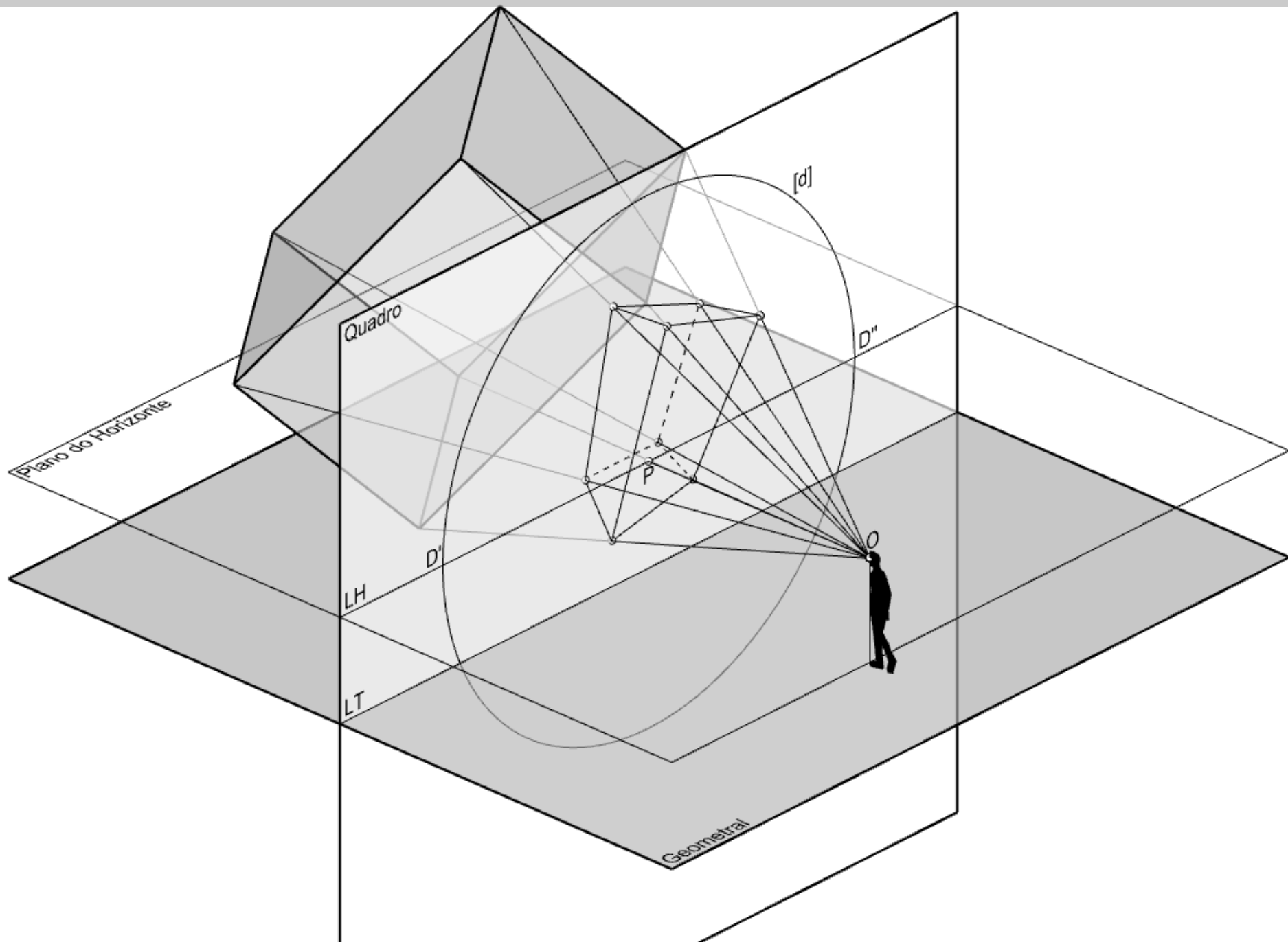


## “2 Pontos de Fuga” (vista a partir do ponto O)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com duas faces ortogonais ao quadro (as que são horizontais), apenas as arestas de nível apresentam convergência.



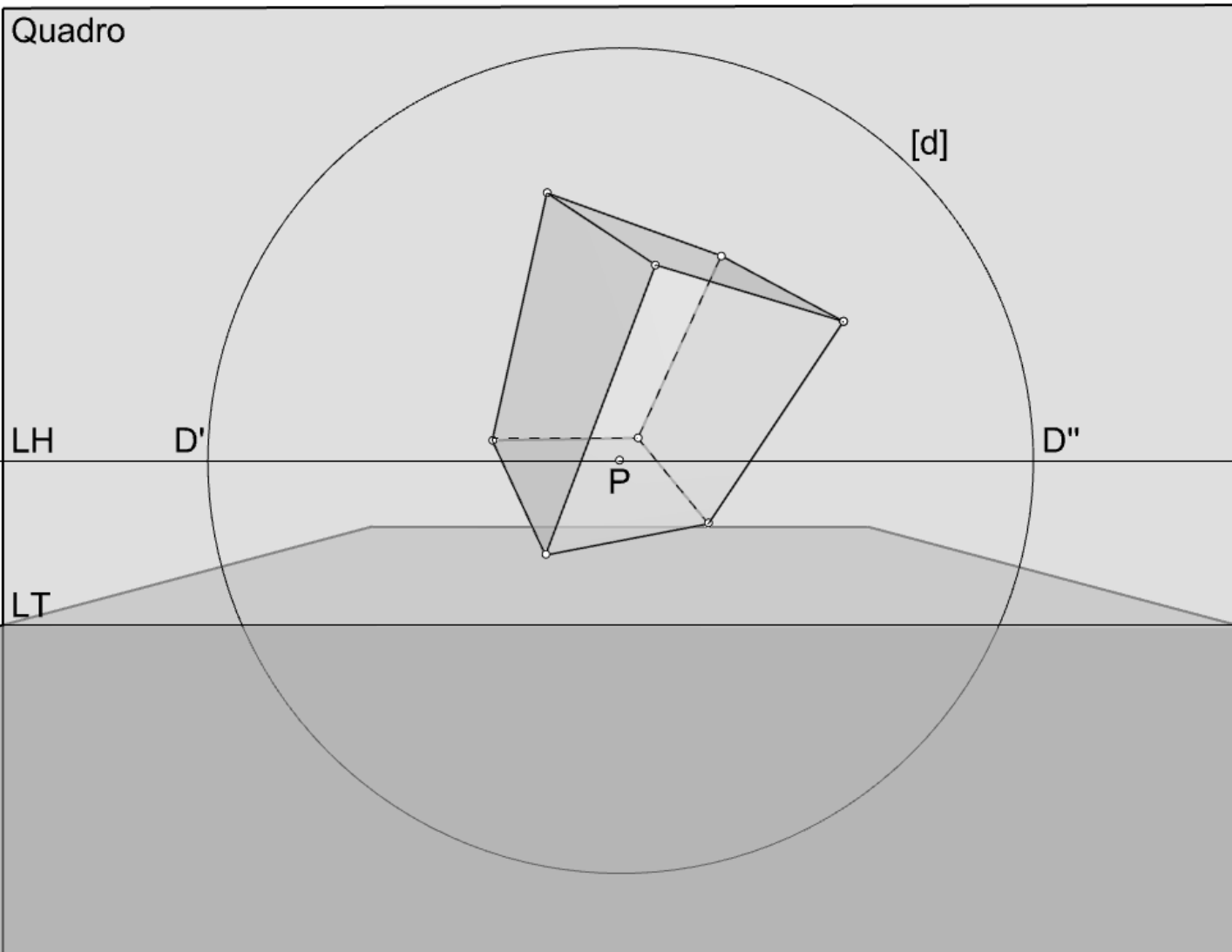
# “3 Pontos de Fuga” (vista exterior)





## “3 Pontos de Fuga” (vista a partir do ponto O)

Pelo facto do paralelepípedo se apresentar com todas as faces e arestas oblíquas ao quadro, todas as arestas apresentam convergência.



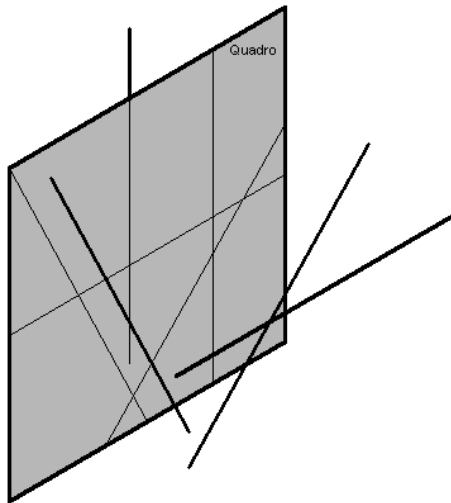
# As direcções das rectas

Se apenas tivermos definido o quadro, por relação a este plano podemos considerar três DIRECÇÕES DE RECTAS:

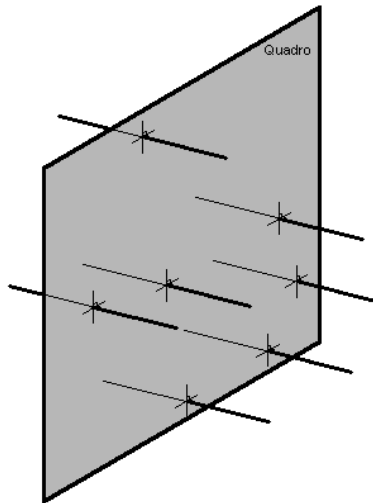
- As rectas paralelas ao quadro.
- As rectas ortogonais ao quadro.
- As rectas oblíquas ao quadro.

Vamos considerar que todas as rectas têm um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito.

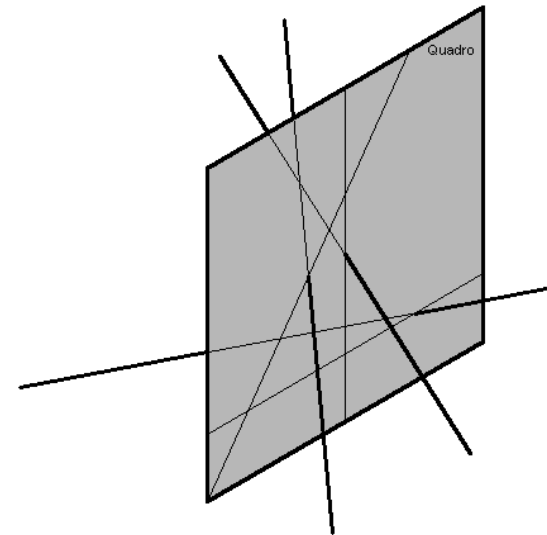
Uma direcção de rectas partilha o mesmo ponto impróprio.



RECTAS PARALELAS AO QUADRO



RECTAS ORTOGONAIS AO QUADRO



RECTAS OBLÍQUAS AO QUADRO

Se considerarmos o perspectógrafo completo, então as direcções das rectas decompõem-se em:

- As rectas paralelas ao quadro (verticais, frontais e fronto-horizontais).
- As rectas ortogonais ao quadro (topo).
- As rectas oblíquas ao quadro (perfil, nível e oblíquas).

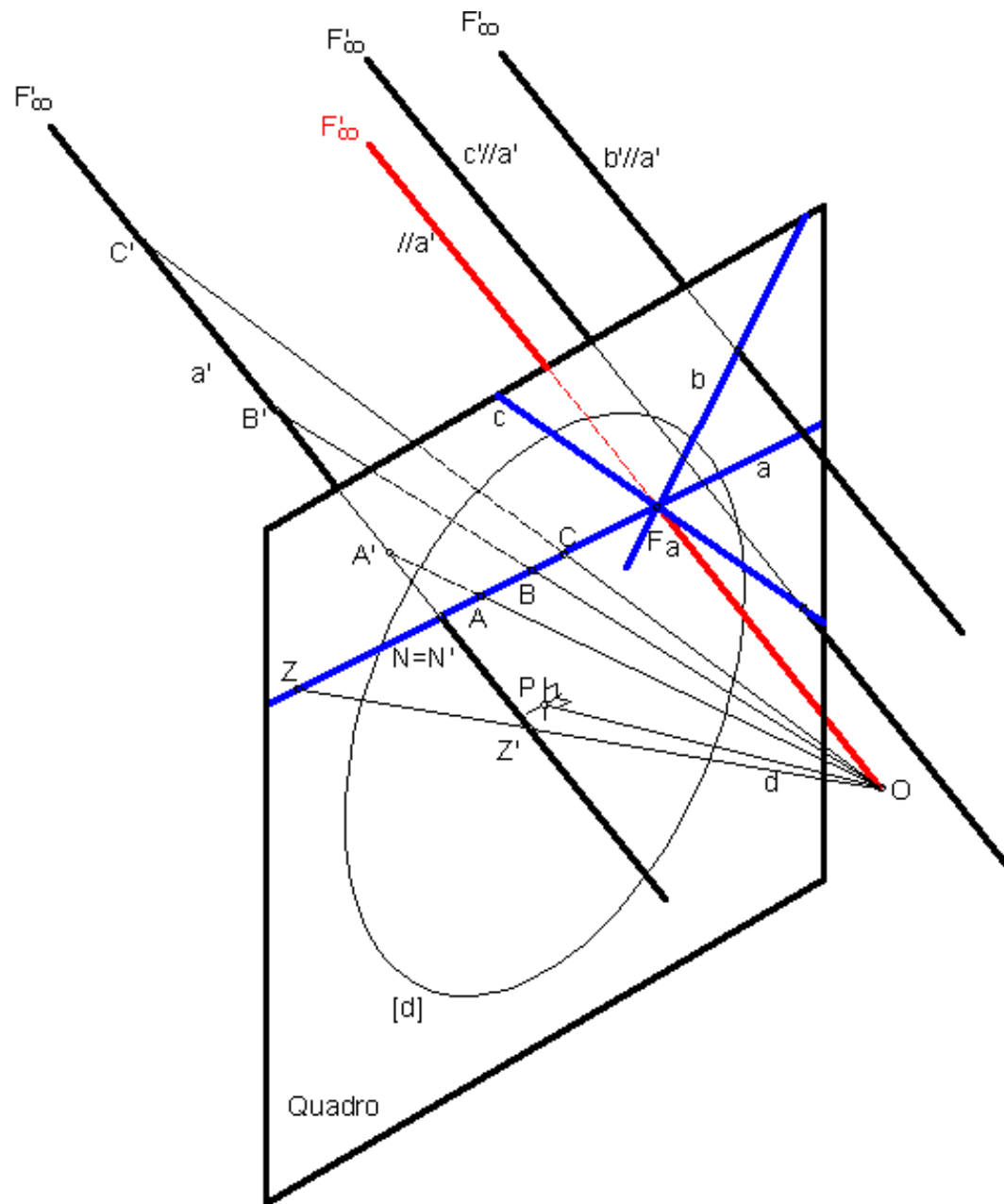


## Definição geométrica de ponto de fuga

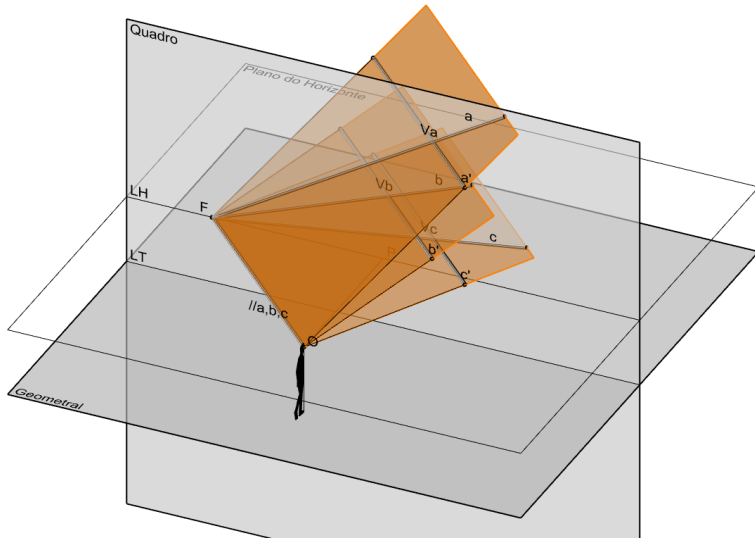
As rectas passantes pelo observador designam-se **RECTAS PROJECTANTES**.  
A perspectiva de uma recta projectante reduz-se a um ponto.

Um **PONTO DE FUGA** de uma direcção **a** dada de rectas é a projecção cónica do ponto impróprio **F<sub>∞</sub>** dessa direcção.  
Dito de outro modo, é o traço da recta projectante **//a'**, com a direcção dada, no quadro.

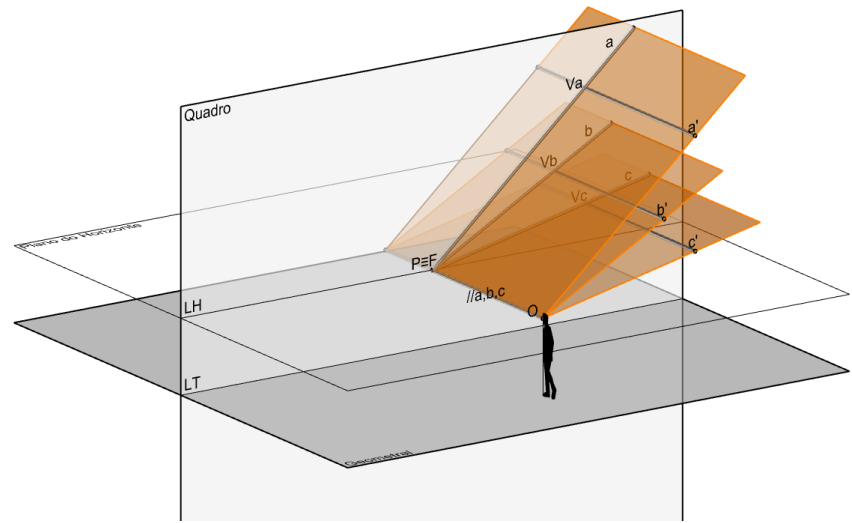
Note que os planos projectantes de uma família de rectas paralelas entre si têm em comum a recta projectante com aquela direcção, por cujo traço no quadro (**PONTO DE FUGA**) passam os traços dos seus planos projectantes (perspectivas das rectas).



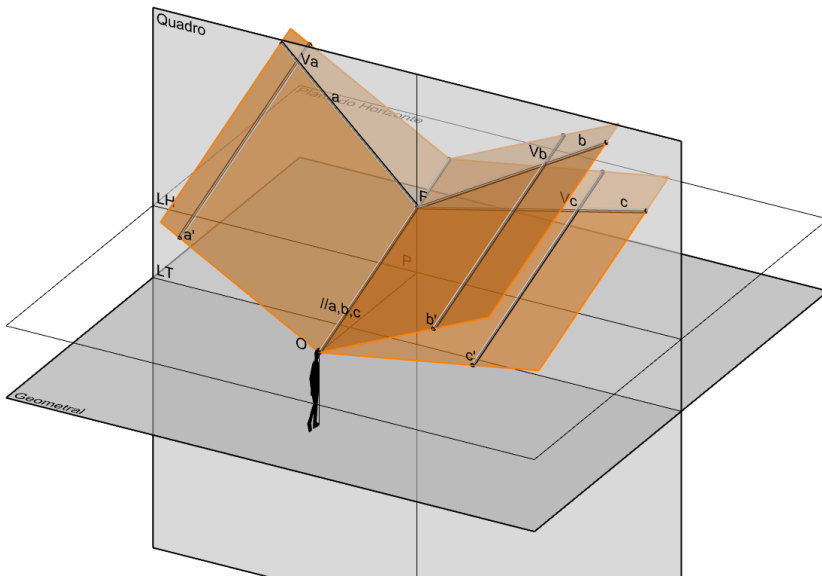
# As direcções das rectas e a localização dos pontos de fuga correspondentes



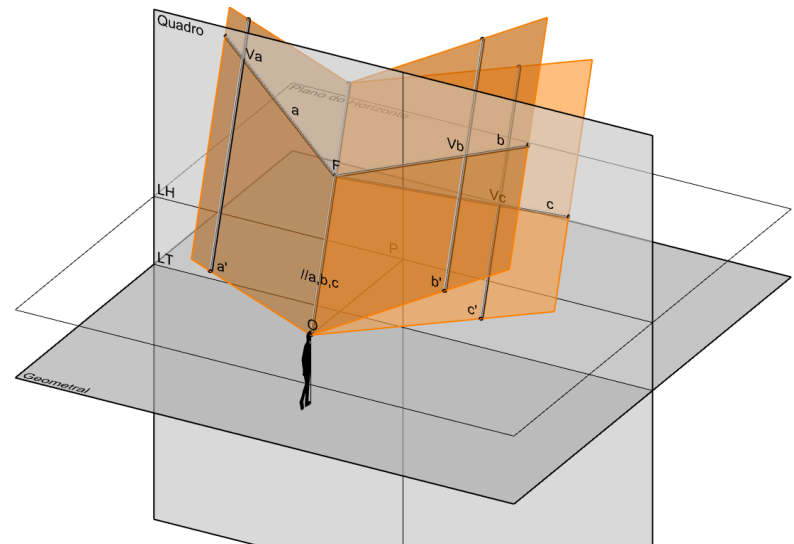
Rectas de Nível  
(Pontos de fuga na LH)



Rectas de Topo  
(Ponto de fuga em P)



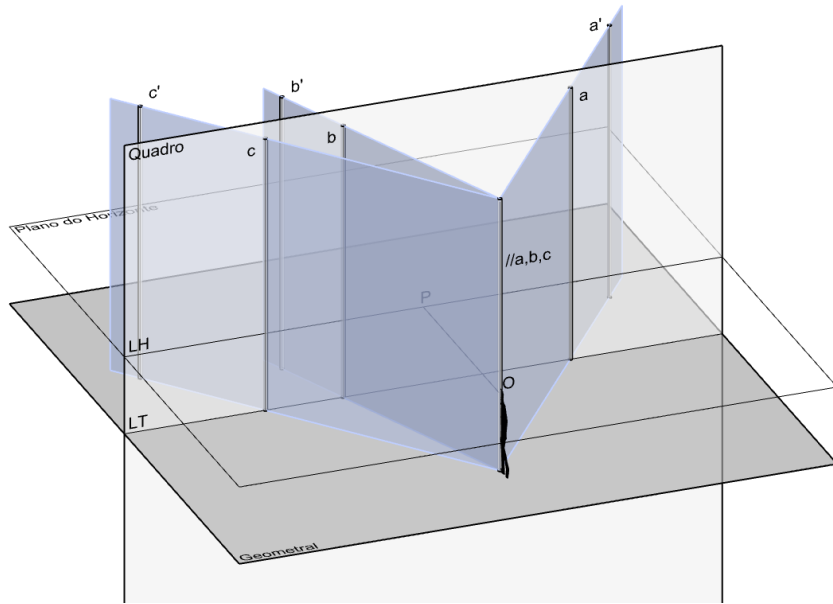
Rectas de Perfil  
(Pontos de fuga na vertical passante por P)



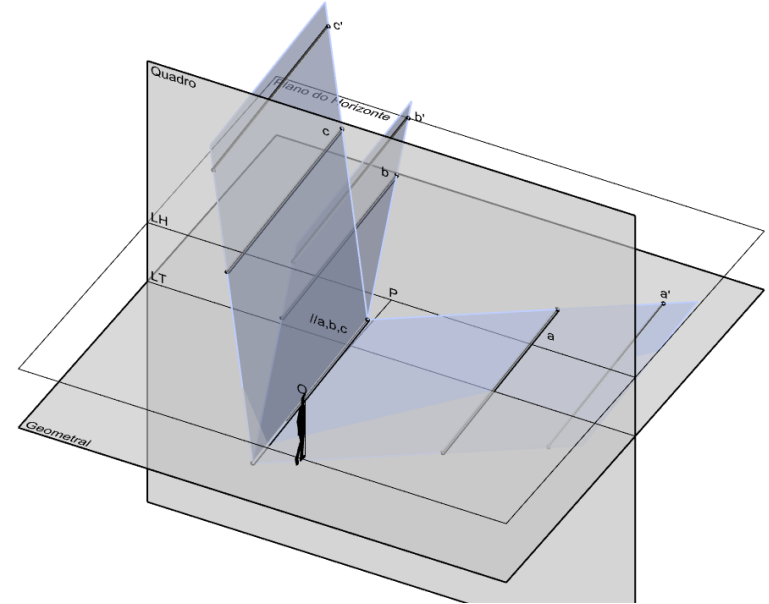
Rectas oblíquas  
(Pontos de fuga exteriores à vertical passante por P e à LH)



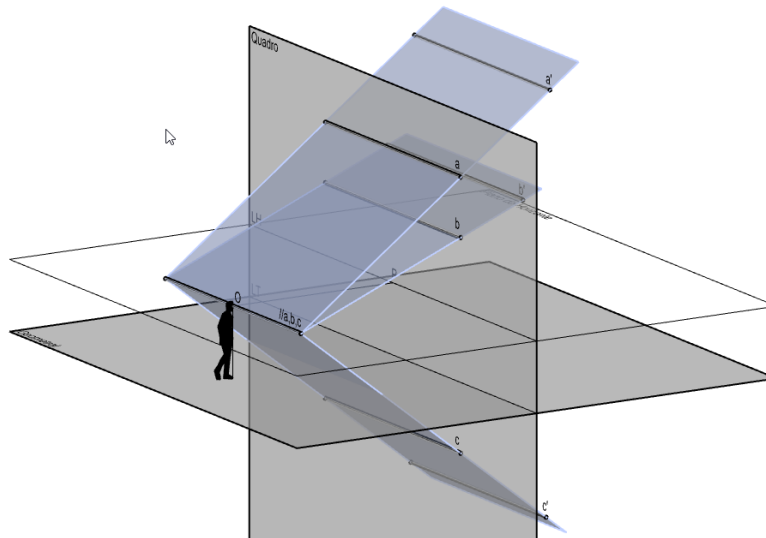
# As rectas paralelas ao quadro não têm pontos de fuga



Rectas Verticais  
(as perspectivas são verticais)



Rectas frontais  
(as perspectivas têm a mesma direcção)



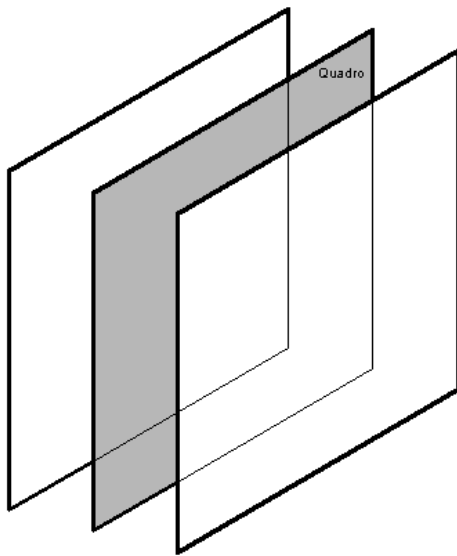
Rectas fronto-horizontais  
(as perspectivas são fronto-horizontais)

# As orientações dos planos

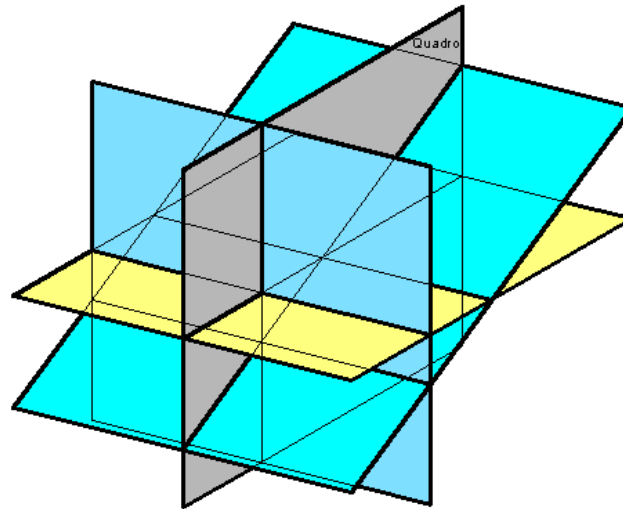
Se apenas tivermos definido o quadro, por relação a este plano podemos considerar três ORIENTAÇÕES DE PLANOS:

- Os planos paralelos ao quadro.
- Os planos ortogonais ao quadro.
- Os planos oblíquos ao quadro.

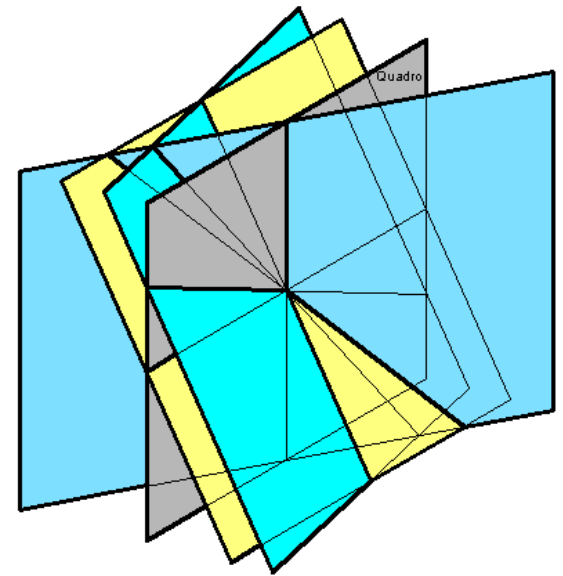
Vamos considerar que todos os planos têm uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito. Uma orientação de planos partilha a mesma recta imprópria.



PLANOS PARALELOS AO QUADRO



PLANOS ORTOGONAIS AO QUADRO



PLANOS OBLÍQUOS AO QUADRO

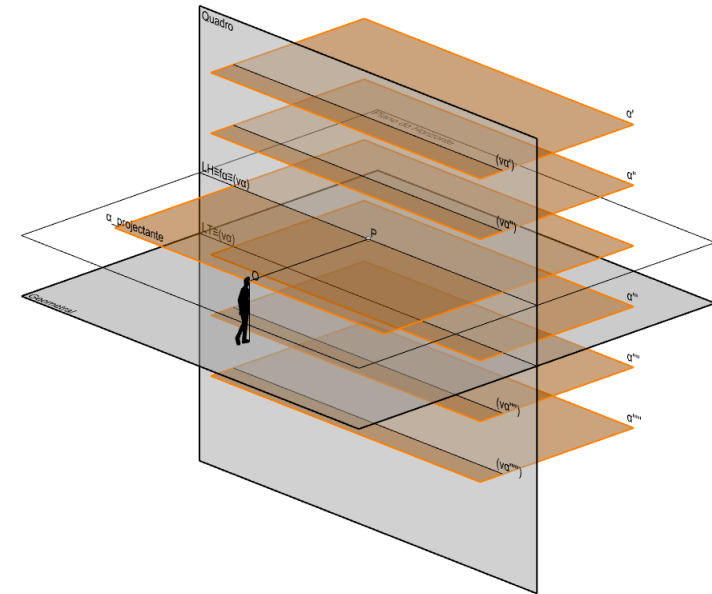
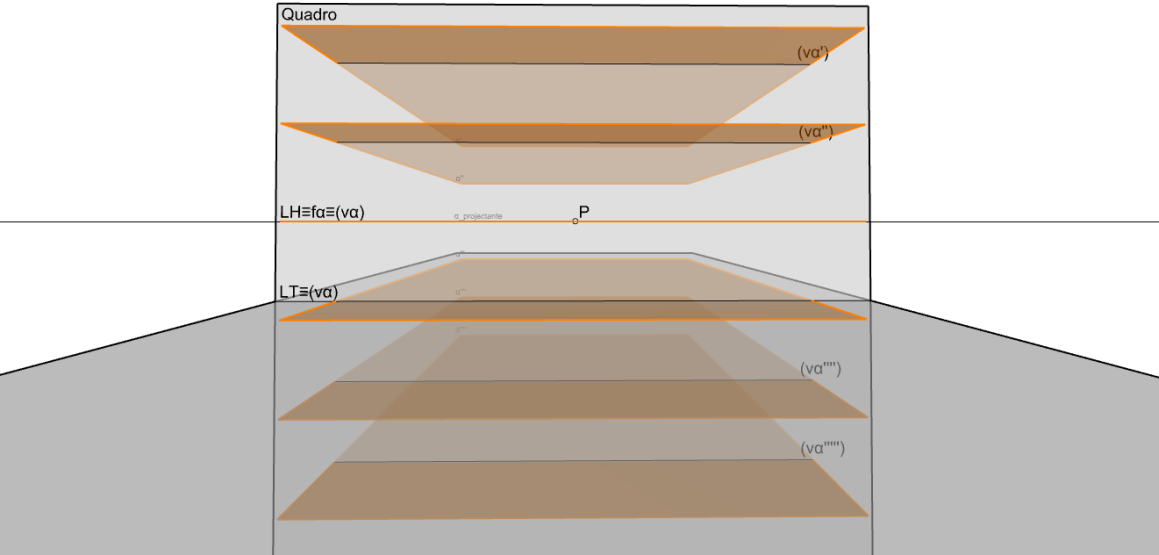
Se considerarmos o perspectógrafo completo, então as orientações de planos decompõem-se em:

- Os planos paralelos ao quadro (frontais).
- Os planos ortogonais ao quadro (perfil, topo e nível).
- Os planos oblíquos ao quadro (rampa, verticais e oblíquos).

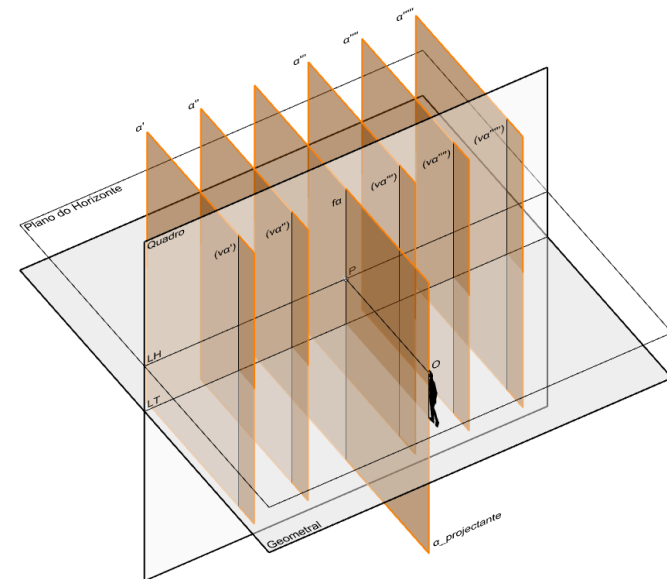
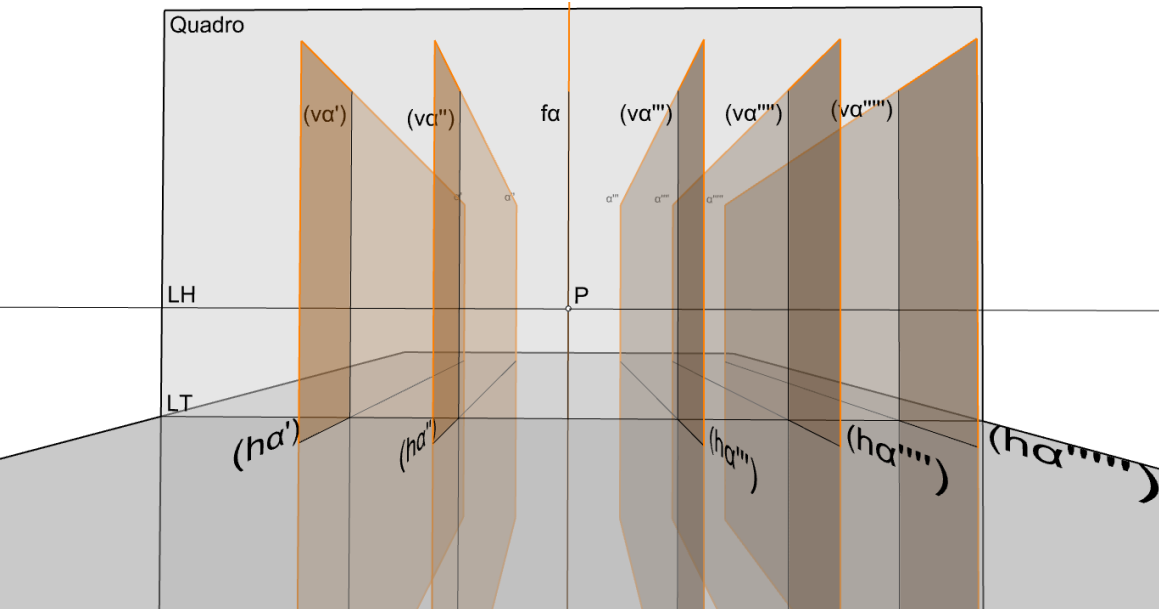




# As orientações dos planos e a localização das linhas de fuga correspondentes

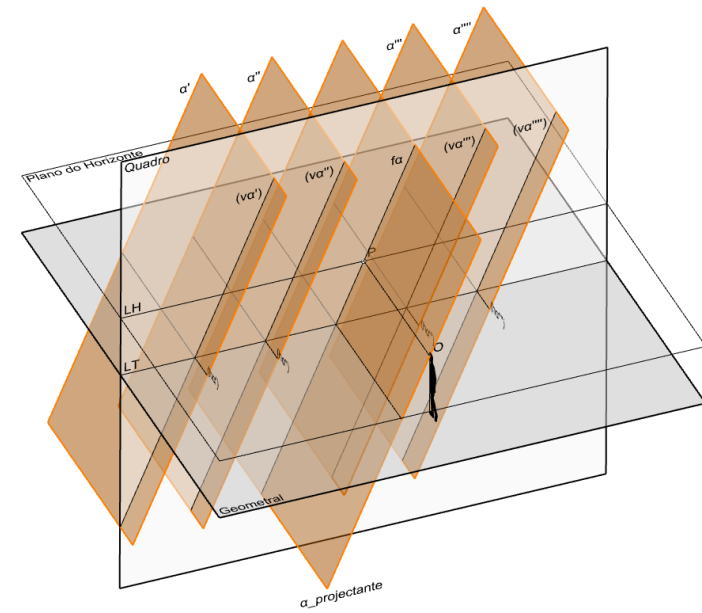
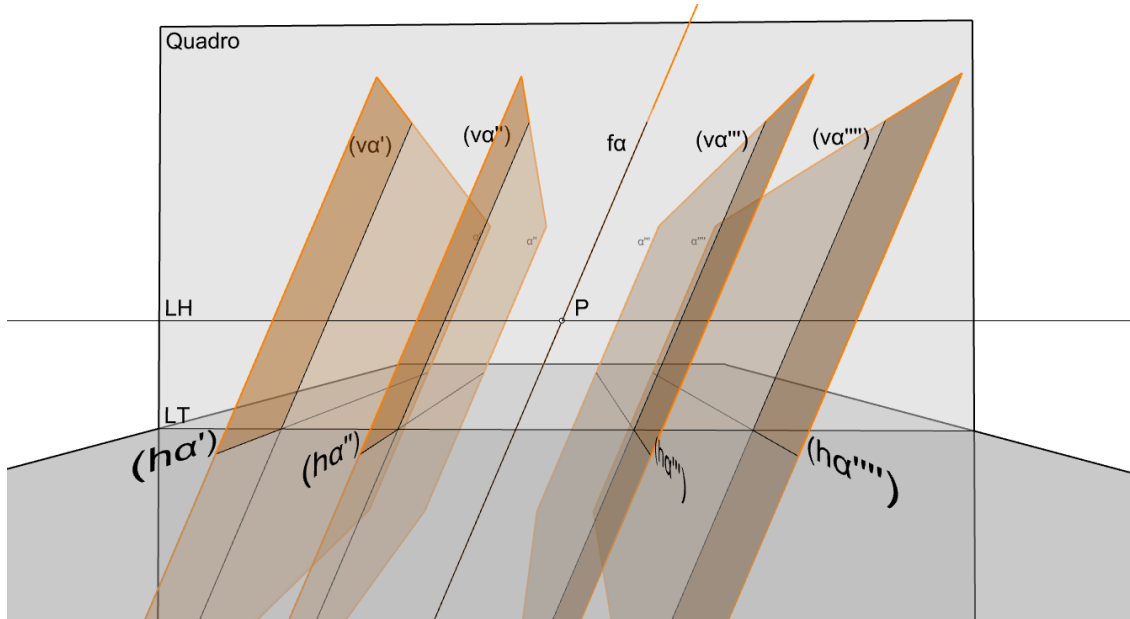


Planos de nível (a linha de fuga coincide com a linha do horizonte)

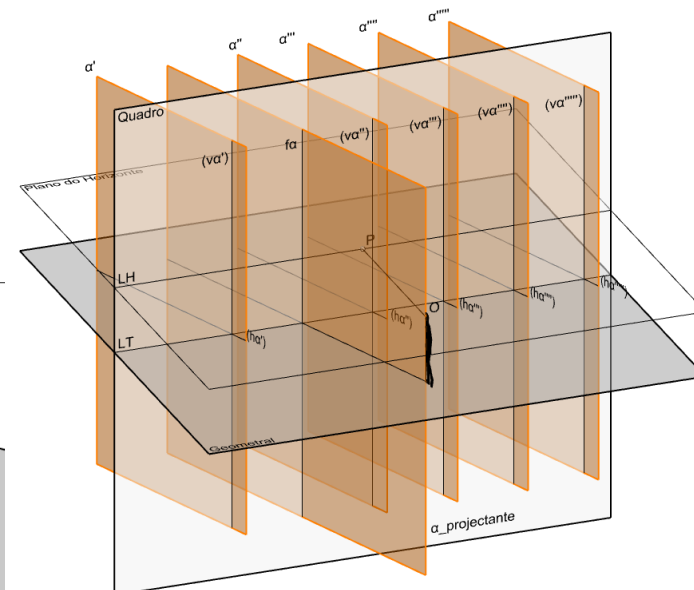
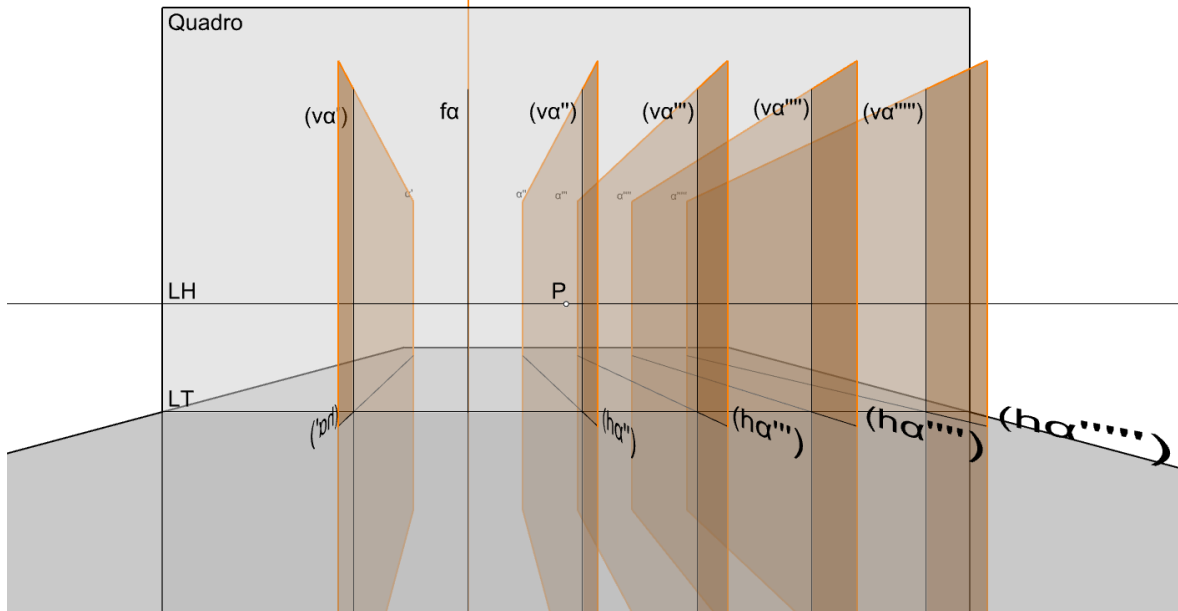


Planos de perfil (a linha de fuga coincide com a vertical passante pelo ponto P)

# As orientações dos planos e a localização das linhas de fuga correspondentes



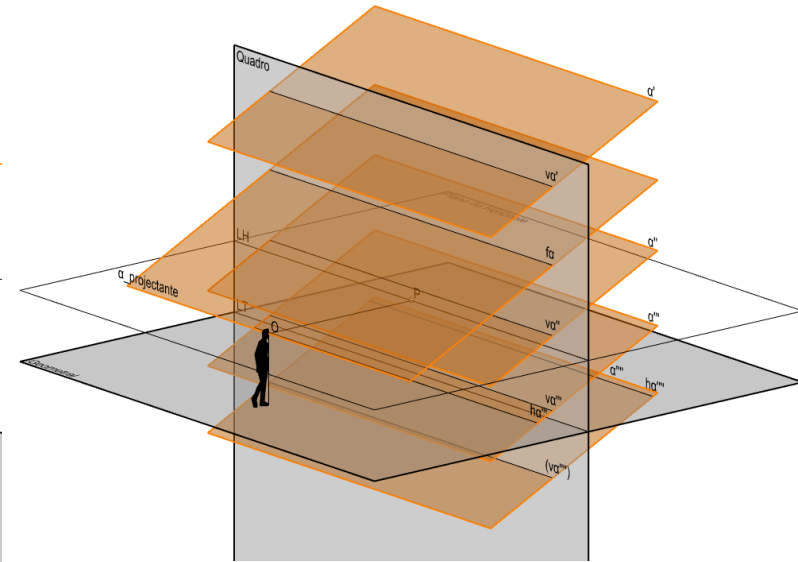
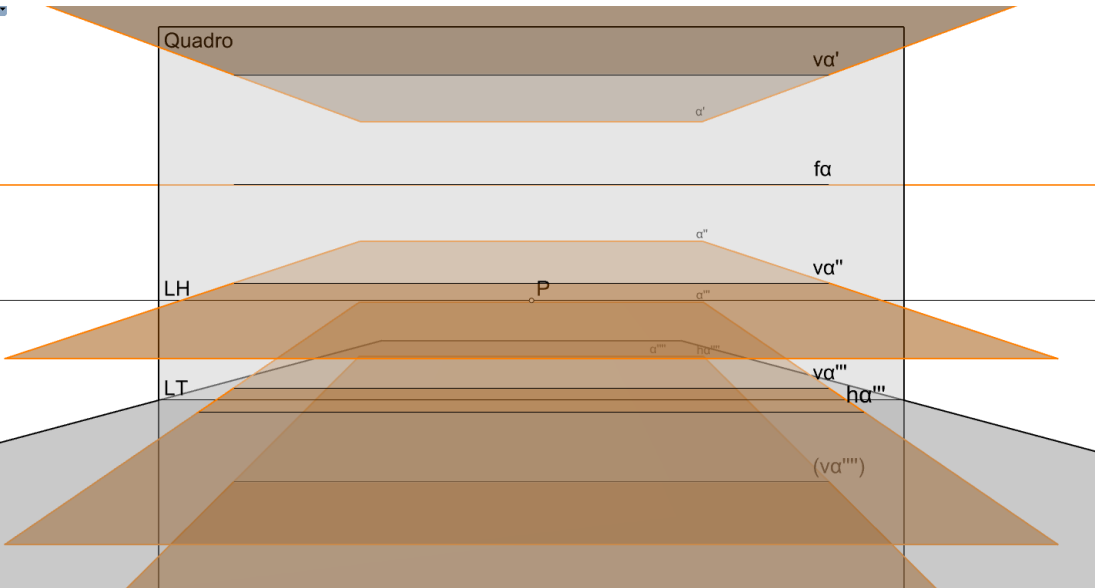
Planos de topo (a linha de fuga têm a direcção frontal do plano)



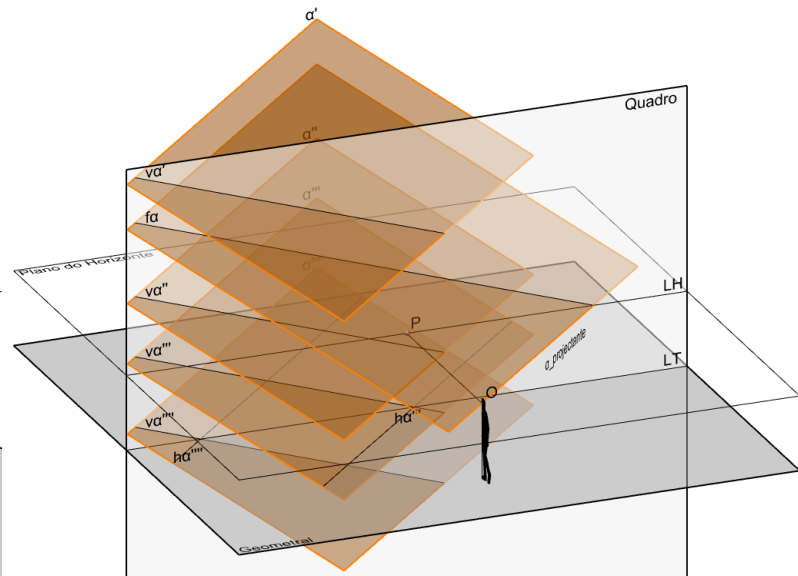
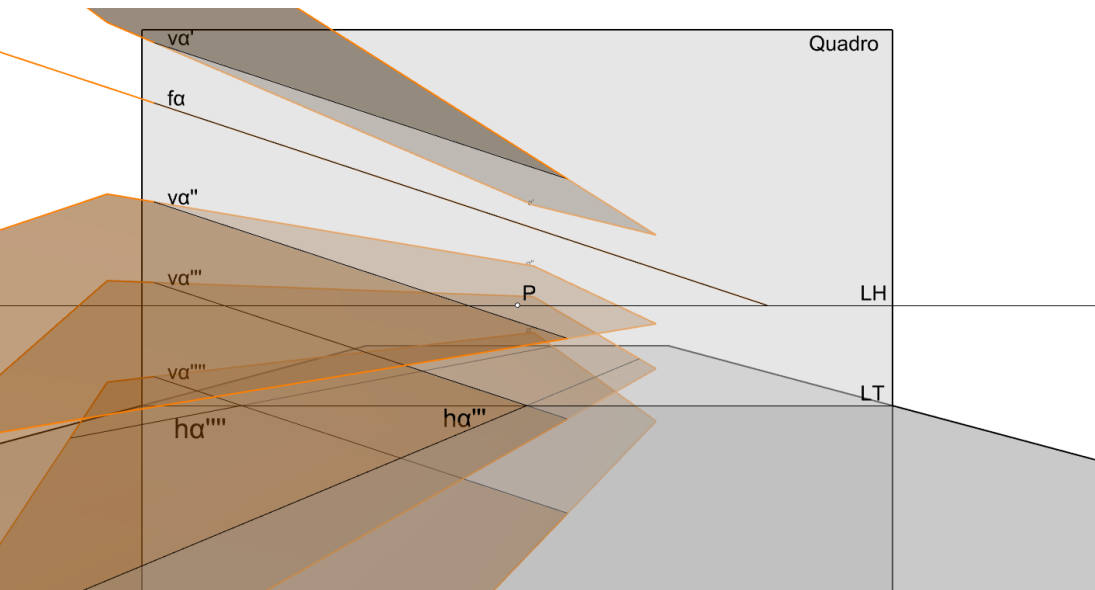
Planos verticais (a linha de fuga é vertical à direita ou esquerda da vertical passante por P)



# As orientações dos planos e a localização das linhas de fuga correspondentes

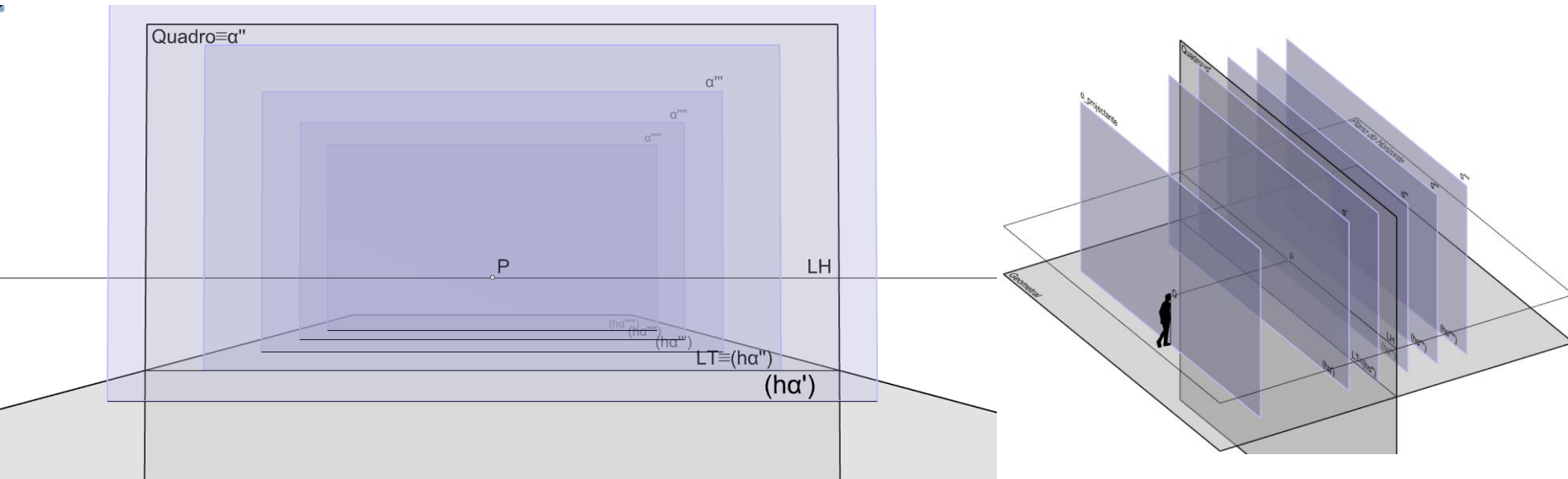


Planos de rampa (a linha de fuga é fronto-horizontal acima ou abaixo da LH)



Planos oblíquos (a linha de fuga é frontal não passante por passante por P)

# As orientações dos planos e a localização das linhas de fuga correspondentes



Planos frontais (não têm linha de fuga)

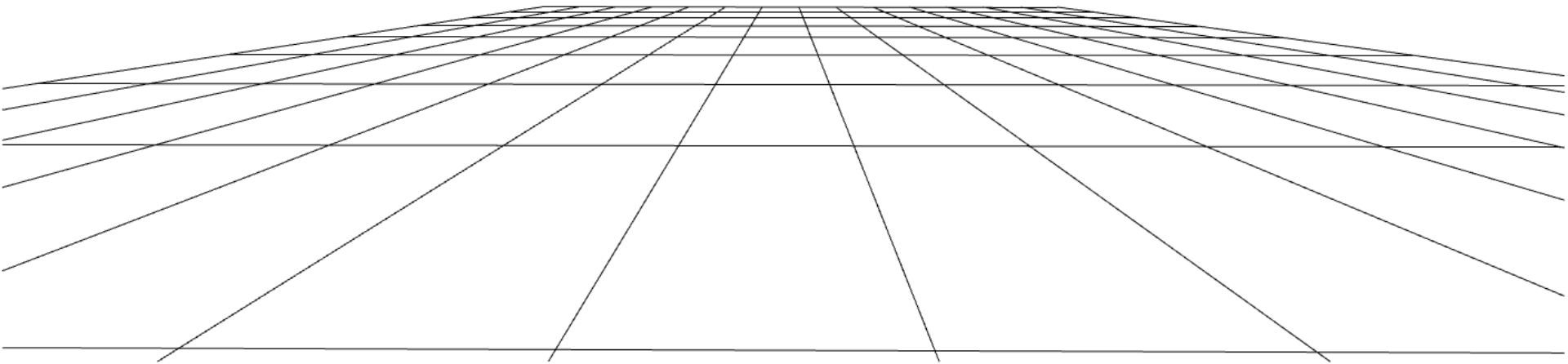
Sendo a linha de fuga, de uma dada orientação de planos, obtida pelo traço frontal do plano projectante com essa dada orientação, é fácil concluir que o traço frontal de qualquer plano, com a orientação dada, será paralelo áquela linha de fuga.

Deve resultar evidente que os pontos de fuga de direcções contidas numa orientação de planos estão contidos na linha de fuga relativa a essa orientação.

Os planos frontais não têm linha de fuga pela razão óbvia que o plano frontal projectante (o plano neutro) não intersecta o quadro (é paralelo ao quadro).

# Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 1 Ponto de Fuga")

Suponha-se que a grelha dada em perspectiva corresponde a uma quadrícula de  $2m \times 2m$  contida no geometral. Determine-se o ponto P, a LH, a LT, a distância do observador ao quadro e a circunferência de distância.

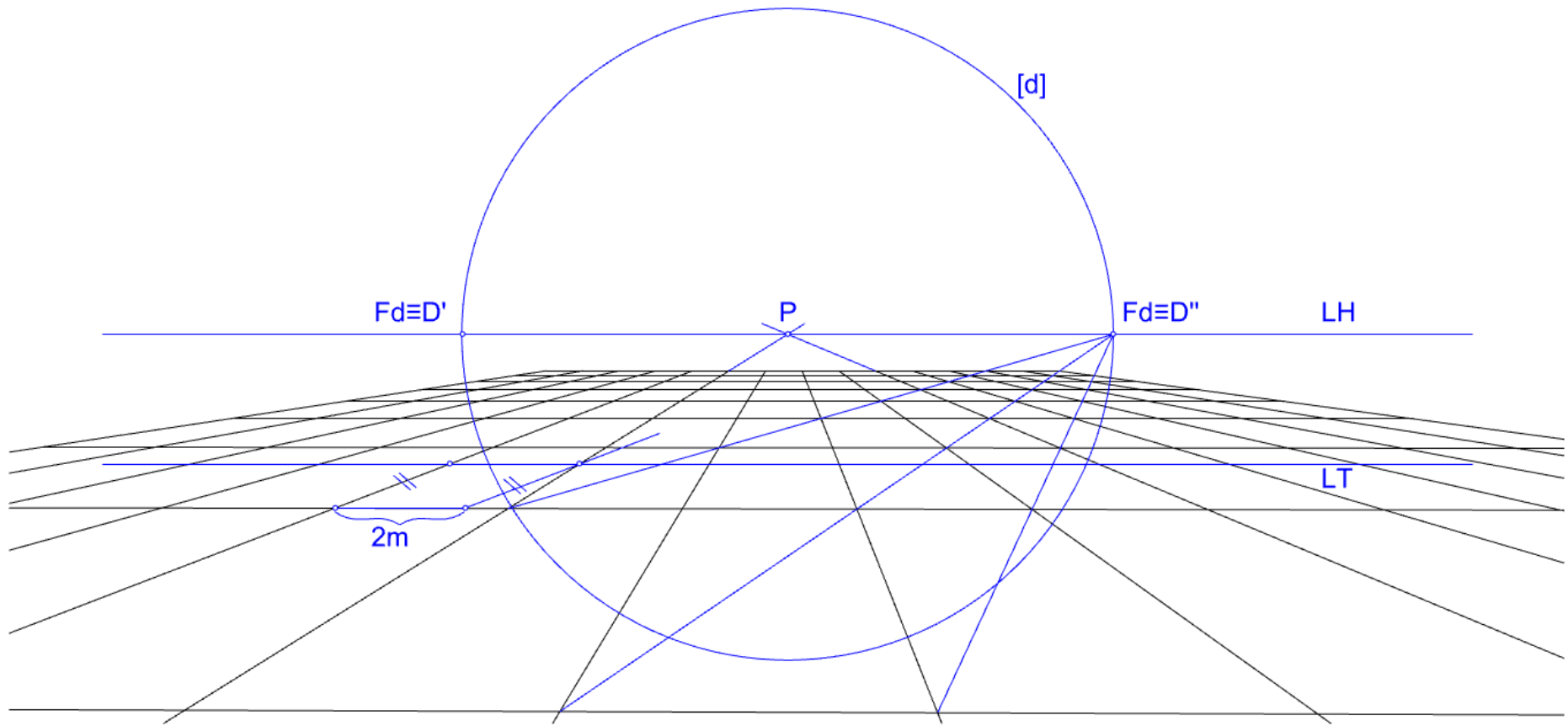


## Resolução:

Como há uma direcção que não apresenta convergência, deverá ser paralela ao quadro. Como se trata de uma quadrícula contida no geometral, então essa direcção é fronto-horizontal e a outra é de topo. Estendendo no desenho as perspectivas das rectas de topo, encontra-se o seu ponto de fuga que coincide com o ponto P. Pelo ponto P conduz-se a LH com a direcção fronto-horizontal. Notando que as diagonais da quadrícula são horizontais, deverão ter ponto de fuga,  $F_d$ , na LH. Como são diagonais de uma quadrícula com direcções de topo e fronto-horizontais, de  $2m \times 2m$ , então a sua direcção faz  $45^\circ$  com o quadro (neste caso considerou-se a direcção a  $45^\circ$  com abertura para a direita). Logo a distância entre P e  $F_d$  corresponde à distância do Observador ao quadro e portanto ao raio da circunferência de distância [d]. Resta determinar a altura do observador. Isto faz-se determinando a LT. Sabendo que o quadro é o lugar geométrico das verdadeiras grandezas, a LT fica determinada ao encontrarmos dois pontos sobre duas rectas de topo consecutivas a  $2m$  um do outro medida sobre uma mesma recta fronto-horizontal (a LT) que os contenha. A altura do observador corresponde à distância entre a LH e a LT. Note-se que isto implica arbitrar uma escala para o quadro. (ver slide seguinte)

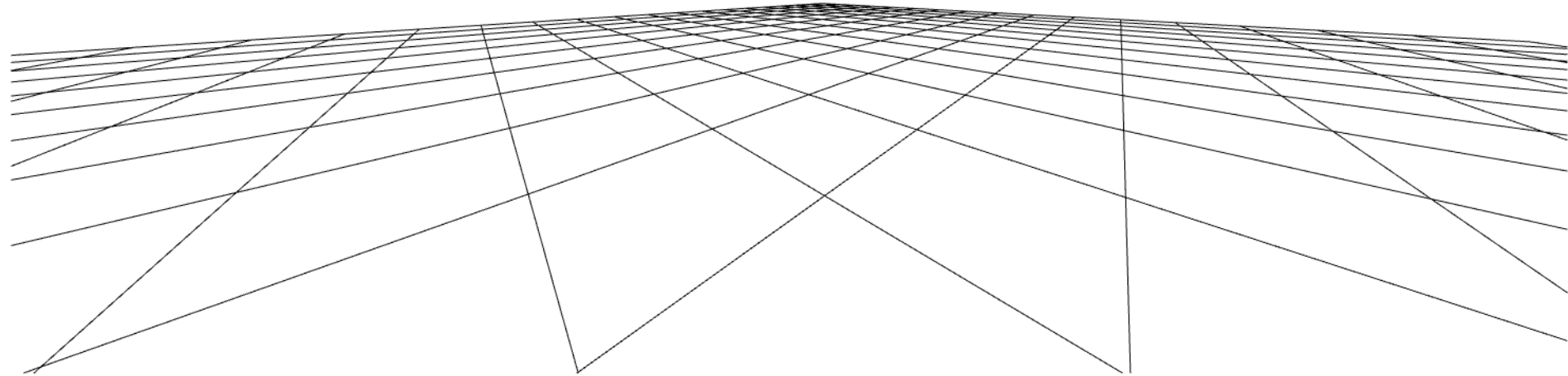


# Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 1 Ponto de Fuga")



## Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 2 Pontos de Fuga" – caso particular)

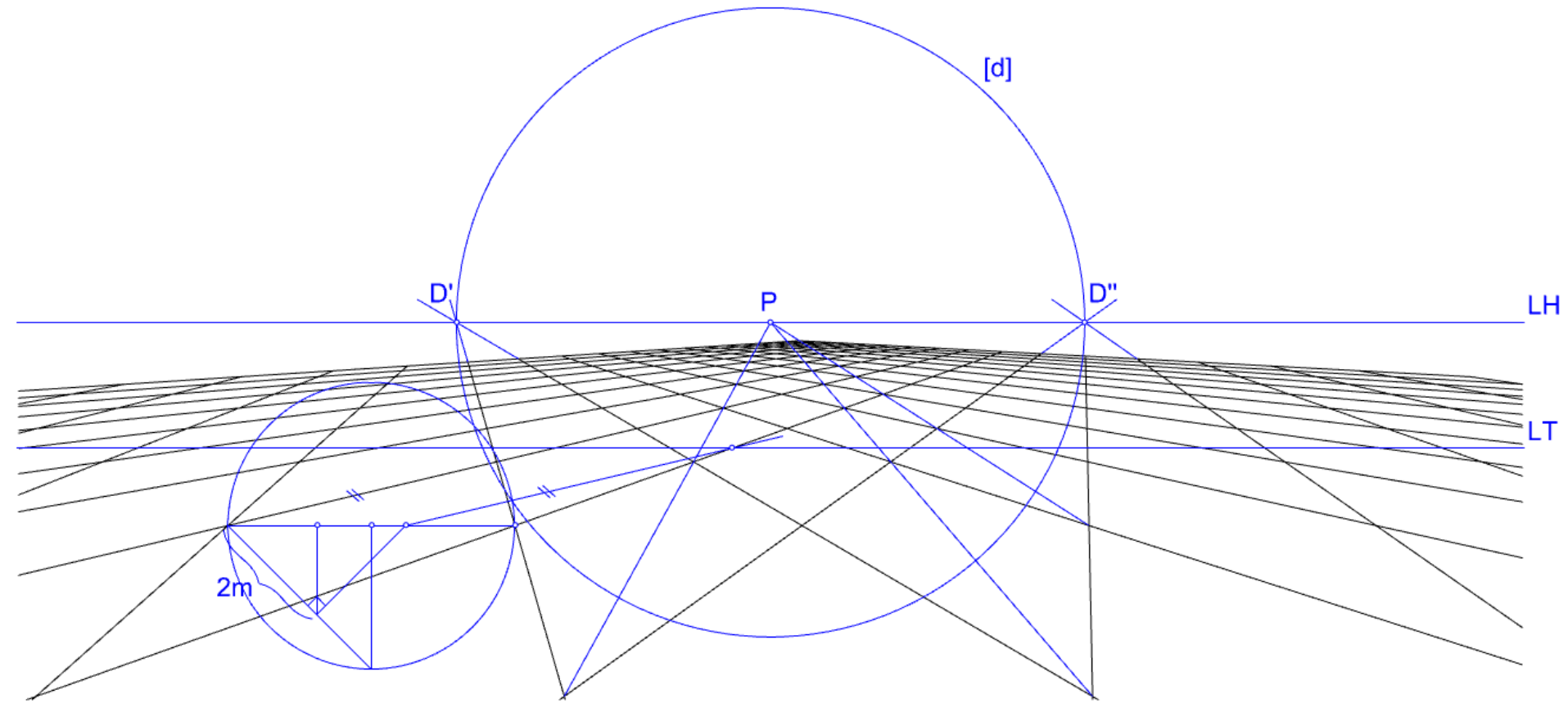
Suponha-se que a grelha dada em perspectiva corresponde a uma quadrícula de  $2m \times 2m$  contida no geometral, com direcções de nível a  $45^\circ$  com o quadro. Determine-se o ponto P, a LH, a LT, a distância do observador ao quadro e a circunferência de distância.



### Resolução:

Neste caso, as direcções diagonais da grelha são de topo e fronto-horizontal. Para determinar o ponto P é suficiente estender duas diagonais convergentes e encontrar a sua intersecção. Para determinar os pontos de fuga das direcções horizontais a  $45^\circ$  com o quadro é suficiente estender rectas da quadrícula até que convirjam nos pontos de fuga correspondentes, D' e D''. A LH deverá passar pelos pontos P, D' e D''. A circunferência [d] terá por centro o ponto P e por diâmetro o segmento [D'D'']. A distância entre o observador e o quadro corresponde ao raio desta circunferência. Resta determinar a altura do observador. Isto faz-se determinando a LT. Sabendo que o quadro é o lugar geométrico das verdadeiras grandezas, a LT fica determinada ao encontrarmos dois pontos sobre duas rectas de topo consecutivas a uma distância um do outro, correspondente ao comprimento da diagonal de um quadrado com 2m de lado, medida sobre uma mesma recta fronto-horizontal (a LT) que os contenha. A altura do observador corresponde à distância entre a LH e a LT. Note-se que isto implica arbitrar uma escala para o quadro. (ver slide seguinte)

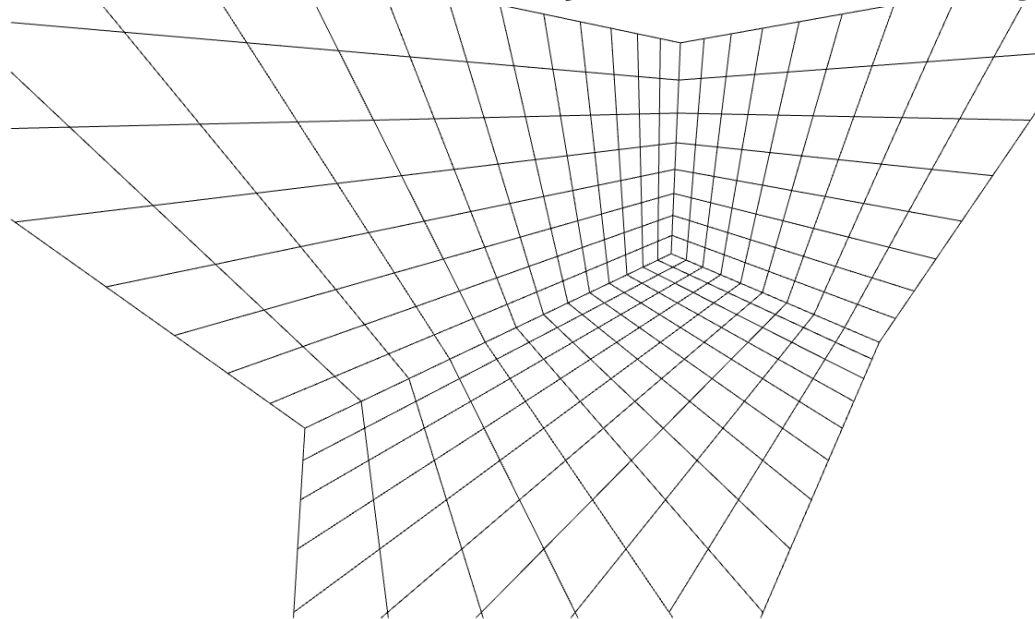
# Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 2 Pontos de Fuga" – caso particular)





## Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 3 Pontos de Fuga" – caso particular)

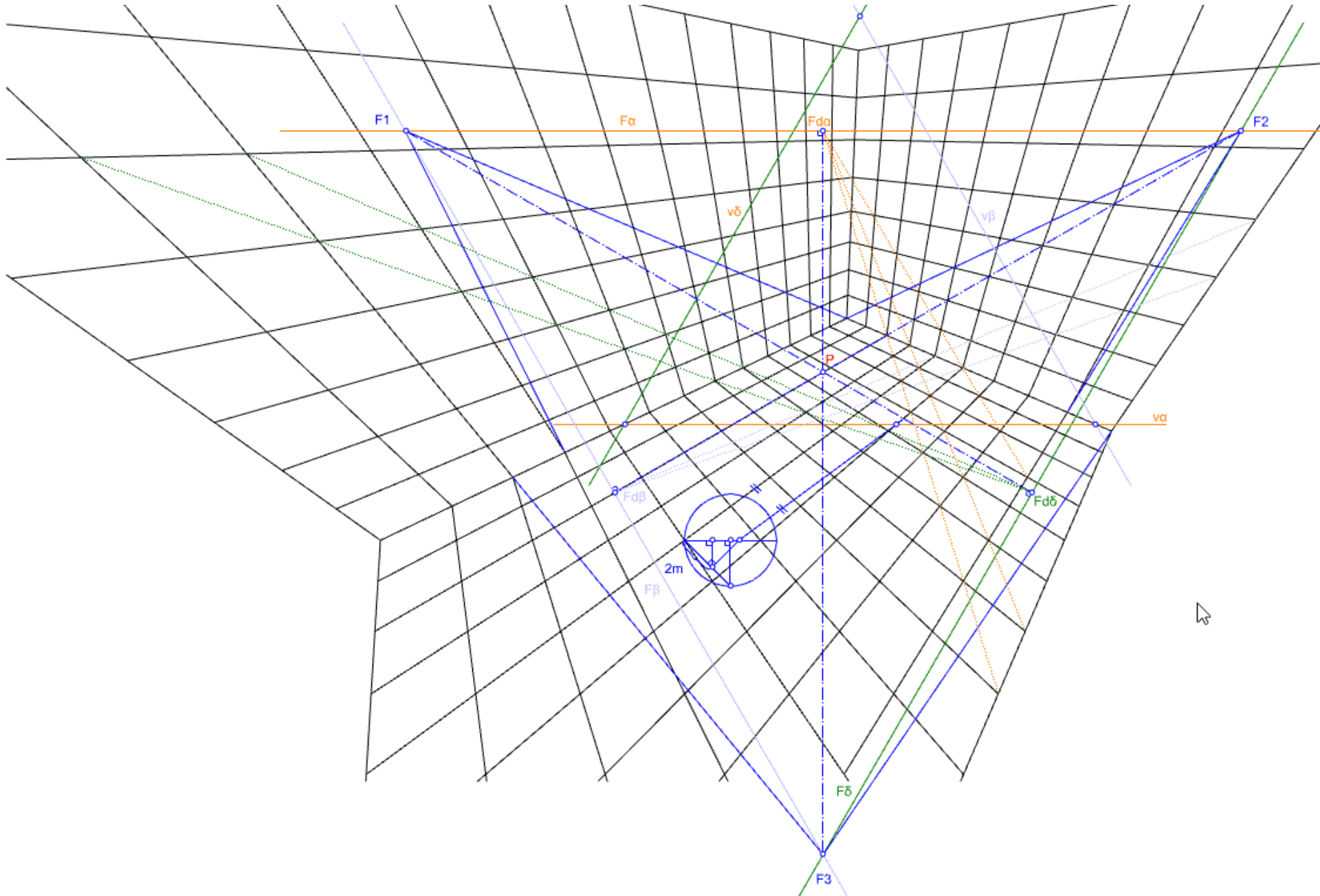
Suponha-se que as grelhas dadas em perspectiva correspondem a quadrículas de  $2m \times 2m$  contidas em planos ortogonais entre si, e igualmente inclinadas em relação ao quadro. Determine-se o ponto P e as intersecções dos planos das grelhas com o quadro.



### Resolução:

Como as três direcções estão igualmente inclinadas em relação ao quadro, os três pontos de fuga formam um triângulo equilátero. Cada ponto de fuga corresponde a uma direcção ortogonal à definida pelos outros dois. As rectas que contêm os lados do triângulo definem as linhas de fuga das três orientações de planos. O ponto P fica determinado pelo ortocentro do triângulo definido pelos pontos de fuga. Para cada orientação de planos, a quadrícula correspondente tem uma direcção diagonal paralela ao quadro (frontal) e outra inclinada em relação ao quadro (com ponto de fuga entre vértices do triângulo coincidente com o pé da perpendicular conduzida pelo outro vértice do triângulo). Para determinar a intersecção dos planos com o quadro segue-se um procedimento idêntico ao descrito no caso anterior. Note-se que os traços frontais dos planos são paralelos à linha de fuga correspondente. (ver slide seguinte)

# Dedução dos parâmetros da perspectiva a partir de imagens dadas em perspectiva ("Perspectiva de 3 Pontos de Fuga" – caso particular)



# Bloco P4

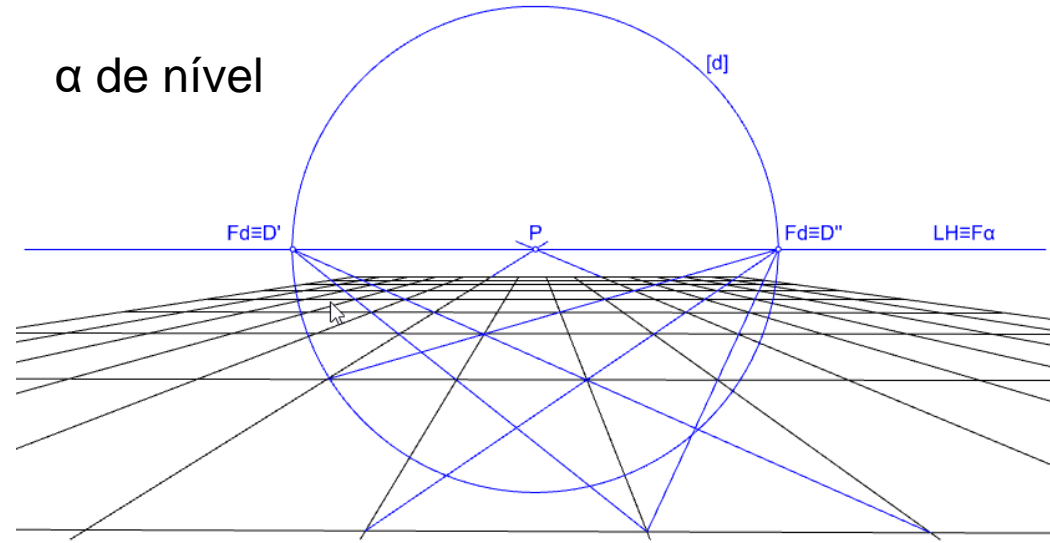
Perspectiva linear de quadro plano:

- A construção da perspectiva dados alguns parâmetros do perspectógrafo – casos particulares (generalização da perspectiva de 1 ponto de fuga às orientações de topo de perfil; generalização da perspectiva de 2 pontos de fuga às orientações de topo de perfil; generalização da perspectiva de 3 pontos de fuga aos pares: i) orientação vertical/direcção ortogonal de nível, ii) orientação de rampa/direcção ortogonal de perfil, iii) orientação oblíqua/direcção ortogonal oblíqua)
- A circunferência de distância como o lugar geométrico dos pontos de fuga das direcções a  $45^\circ$  com o quadro.
- Circunferências de centro P como lugar geométrico de pontos de fuga de direcções igualmente inclinadas em relação ao quadro

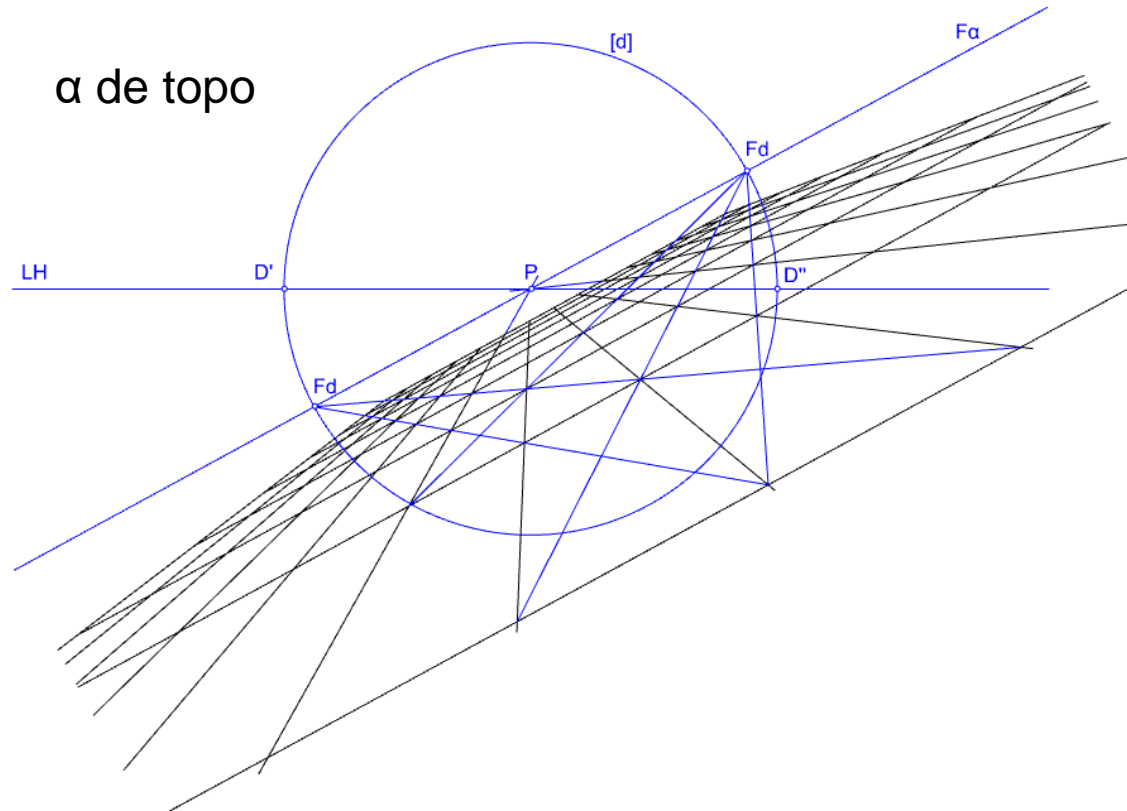


# Generalização (“Perspectivas de 1 Ponto de Fuga” – caso particular)

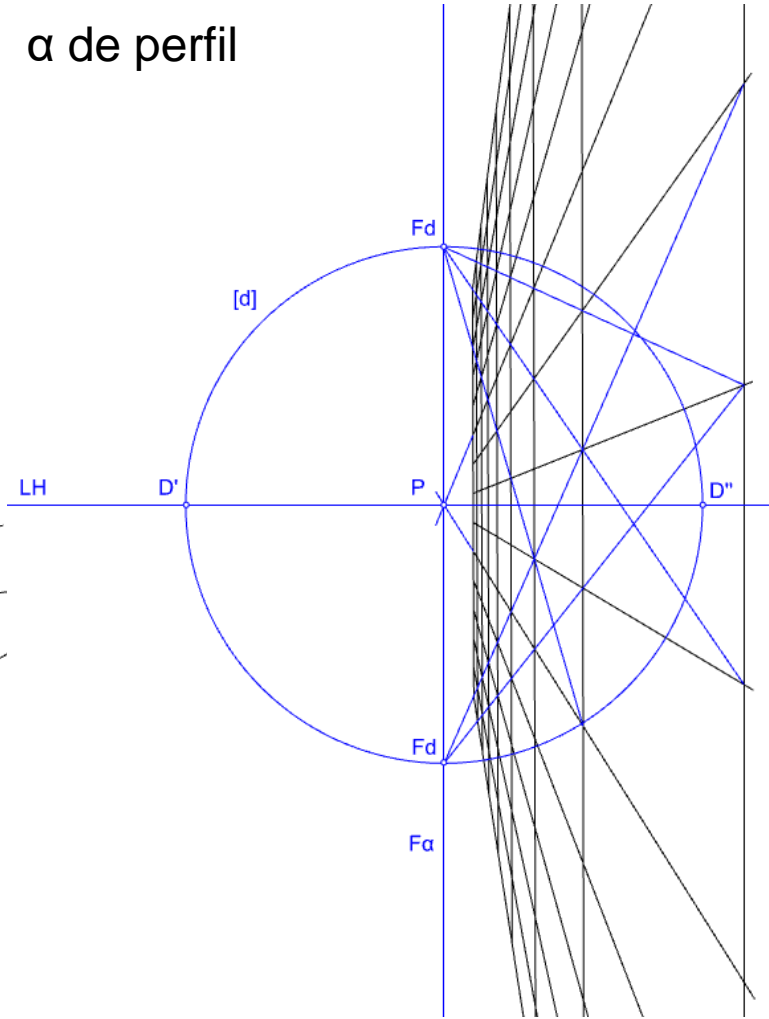
$\alpha$  de nível



$\alpha$  de topo

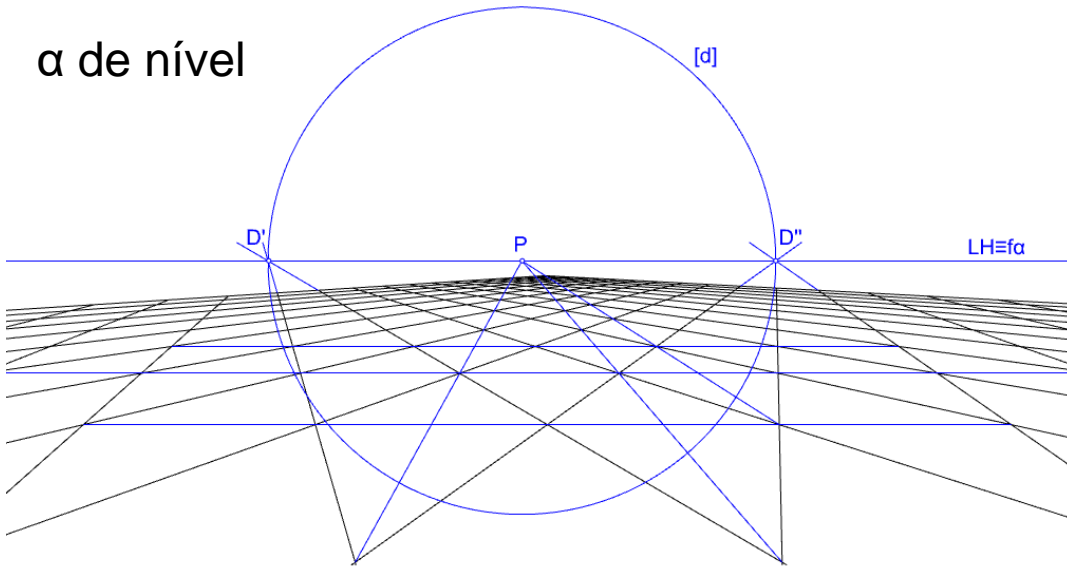


$\alpha$  de perfil

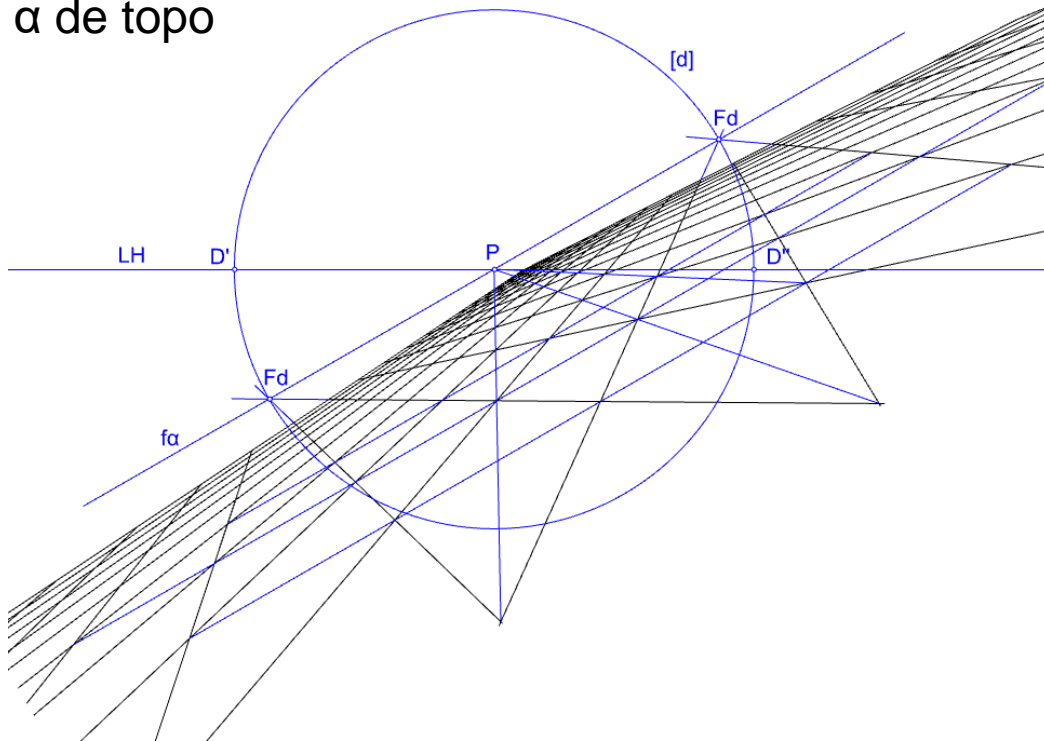


# Generalização (“Perspectivas de 2 Pontos de Fuga” – caso particular)

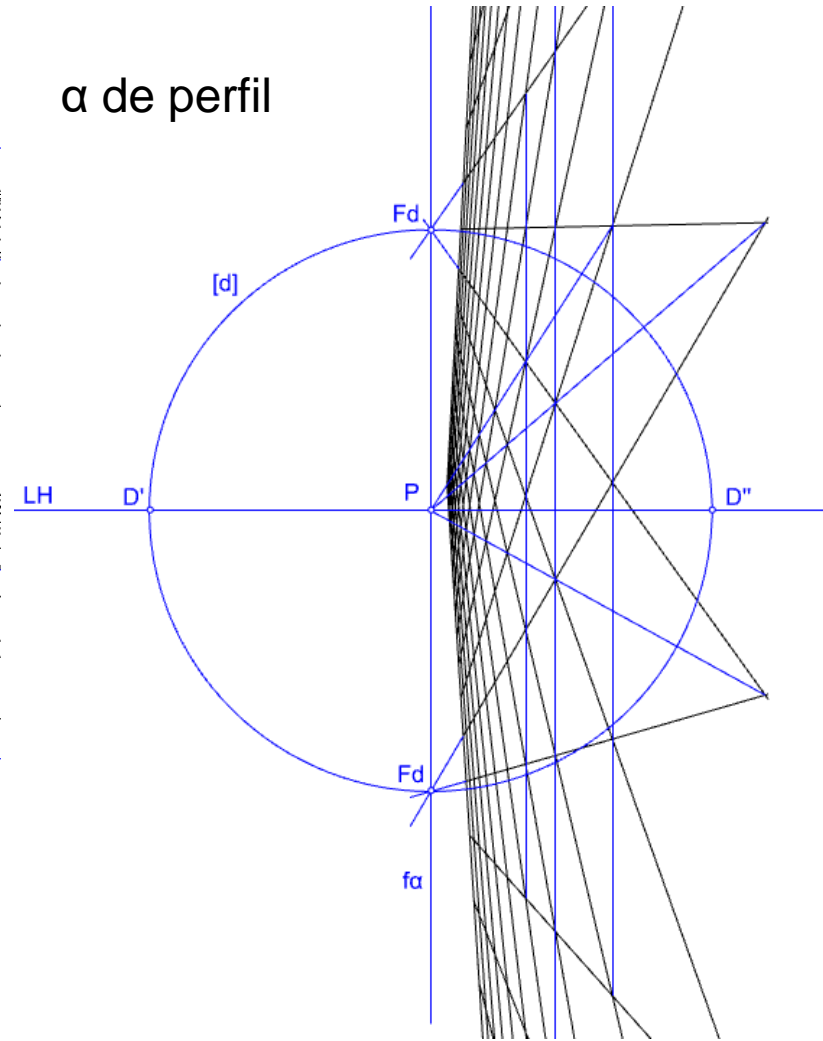
$\alpha$  de nível



$\alpha$  de topo



$\alpha$  de perfil





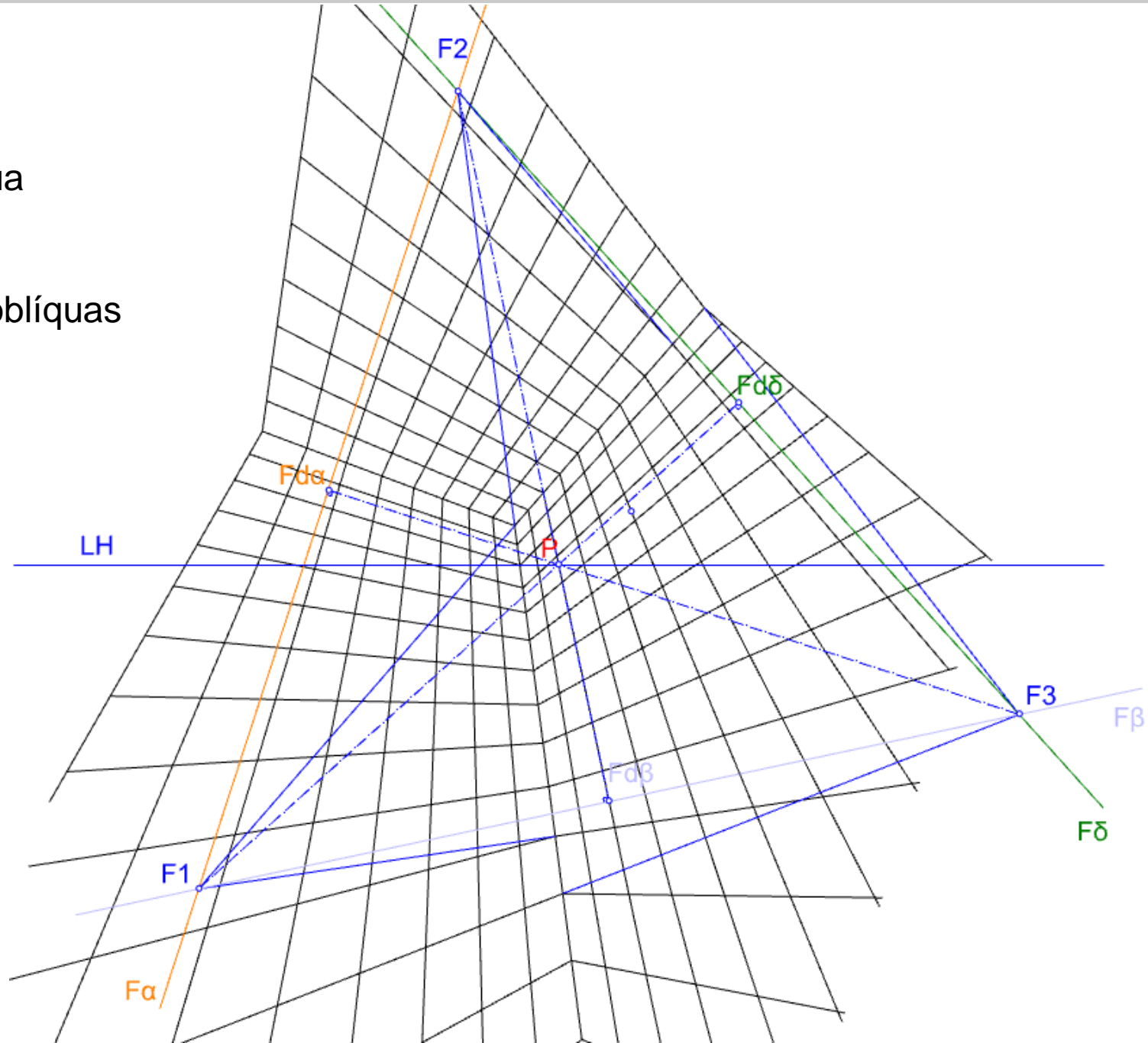




# Generalização (“Perspectivas de 3 Pontos de Fuga” – caso particular)

$\alpha$  oblíqua  
Direcção 3 oblíqua

$\beta$  e  $\delta$  oblíquas  
Direcções 1 e 2 oblíquas



# Bloco P5

Perspectiva linear de quadro plano:

- A caracterização das direcções e orientações (ascendentes; descendentes; abertura para a direita; abertura para a esquerda)
- A extracção de todos os parâmetros do perspectógrafo em imagens de perspectiva correspondentes a “perspectivas de 2 pontos de fuga”.
- Controlo direcciona em “perspectivas de 2 pontos de fuga”



## A caracterização das direcções e das orientações.

Pontos de fuga situados acima da Linha do Horizonte dizem-se de direcções ASCENDENTES.

Pontos de fuga situados abaixo da Linha do Horizonte dizem-se de direcções DESCENDENTES.

Pontos de fuga situados à direita do ponto P correspondem a direcções COM ABERTURA PARA A DIREITA relativamente ao quadro.

Pontos de fuga situados à esquerda do ponto P correspondem a direcções COM ABERTURA PARA A ESQUERDA relativamente ao quadro.

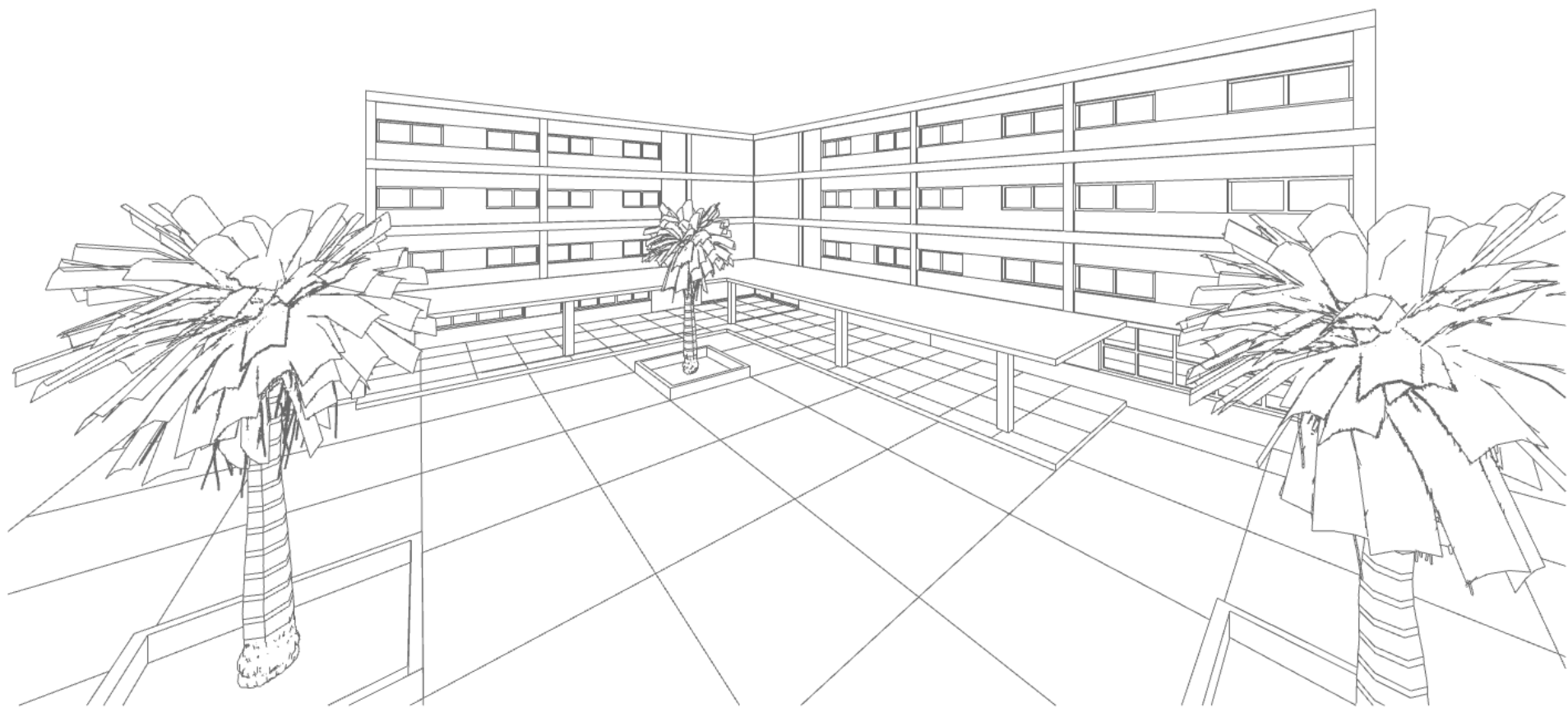
Fica o plano do quadro dividido em 4 quadrantes definidos pela Linha do Horizonte e pela vertical passante pelo ponto P. Cada quadrante corresponde a uma combinação possível entre ASCENDENTE ou DESCENDENTE e COM ABERTURA PARA A DIREITA ou COM ABERTURA PARA A ESQUERDA.

Deste modo as direcções das rectas podem ser inequivocamente definidas.

As orientações assumem a caracterização da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO (direcção ortogonal à direcção frontal do plano). Por exemplo, se a direcção de maior inclinação for ascendente com abertura para a direita, também o é a orientação.

## Extracção dos parâmetros do perspectógrafo através do rebatimento de planos projectantes (exemplo em “Perspectiva de 2 pontos de fuga”).

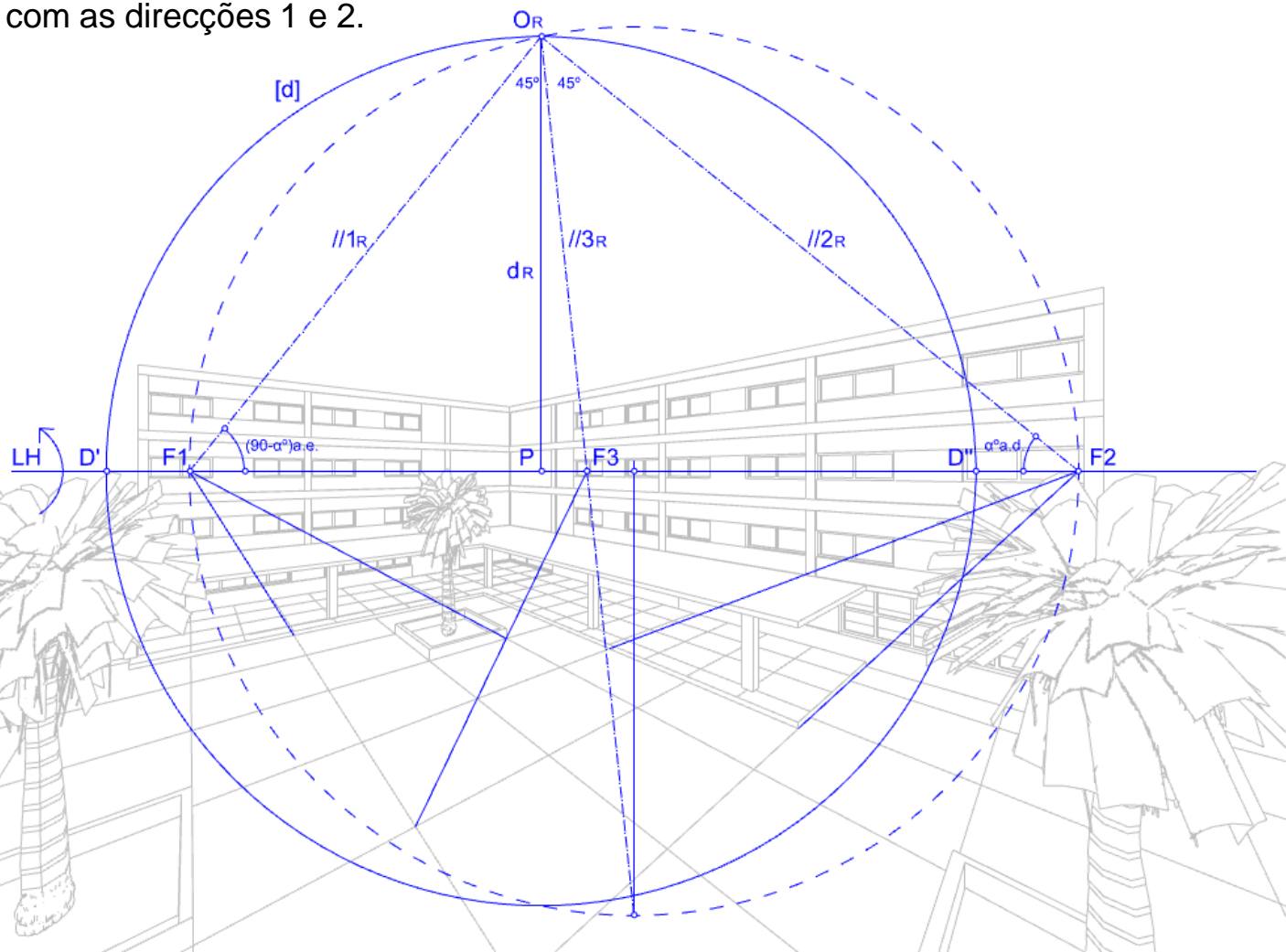
Para que se possam extrair todos os elementos do perspectógrafo a partir de uma imagem dada em perspectiva, é necessário ter algum conhecimento acerca da cena representada. Neste caso é dada a informação de que a quadrícula da grelha quadriculada do pátio exterior mede 4mx4m. Também se dá a informação de que as três principais direcções são ortogonais entre si sendo duas delas de nível.



# Extracção dos parâmetros do perspectógrafo através do rebatimento de planos projectantes (exemplo em “Perspectiva de 2 pontos de fuga”).

A resolução passa por determinar os pontos de fuga  $F_1$  e  $F_2$  que se sabe corresponderem a direcções horizontais ortogonais entre si. Estes dois pontos definem a LH. Algures sobre a LH deveremos ter o ponto  $P$  bem como os pontos  $D'$  e  $D''$ . Sabendo que as direcções 1 e 2 são ortogonais entre si, o ponto  $O$  deverá estar contido numa circunferência de diâmetro  $[D'D'']$  contida no plano do horizonte. A sua representação no desenho faz-se por meio do rebatimento do plano do horizonte para o quadro em torno da LH. A direcção 3 deverá ser horizontal a  $45^\circ$  com as direcções 1 e 2.

Logo a determinação do ponto  $O_R$  deverá satisfazer a condição de que as projectantes (rebatidas) com as direcções 1, 2 e 3 estejam entre si de acordo com as inclinações referidas. A construção efectuada baseia-se na conhecida relação entre o ângulo inscrito e ângulo ao centro numa circunferência. Determinado o ponto  $O_R$ , é imediata a determinação da distância  $d$ , do ponto  $P$ , da circunferência de distância  $[d]$  e dos pontos  $D'$  e  $D''$ .



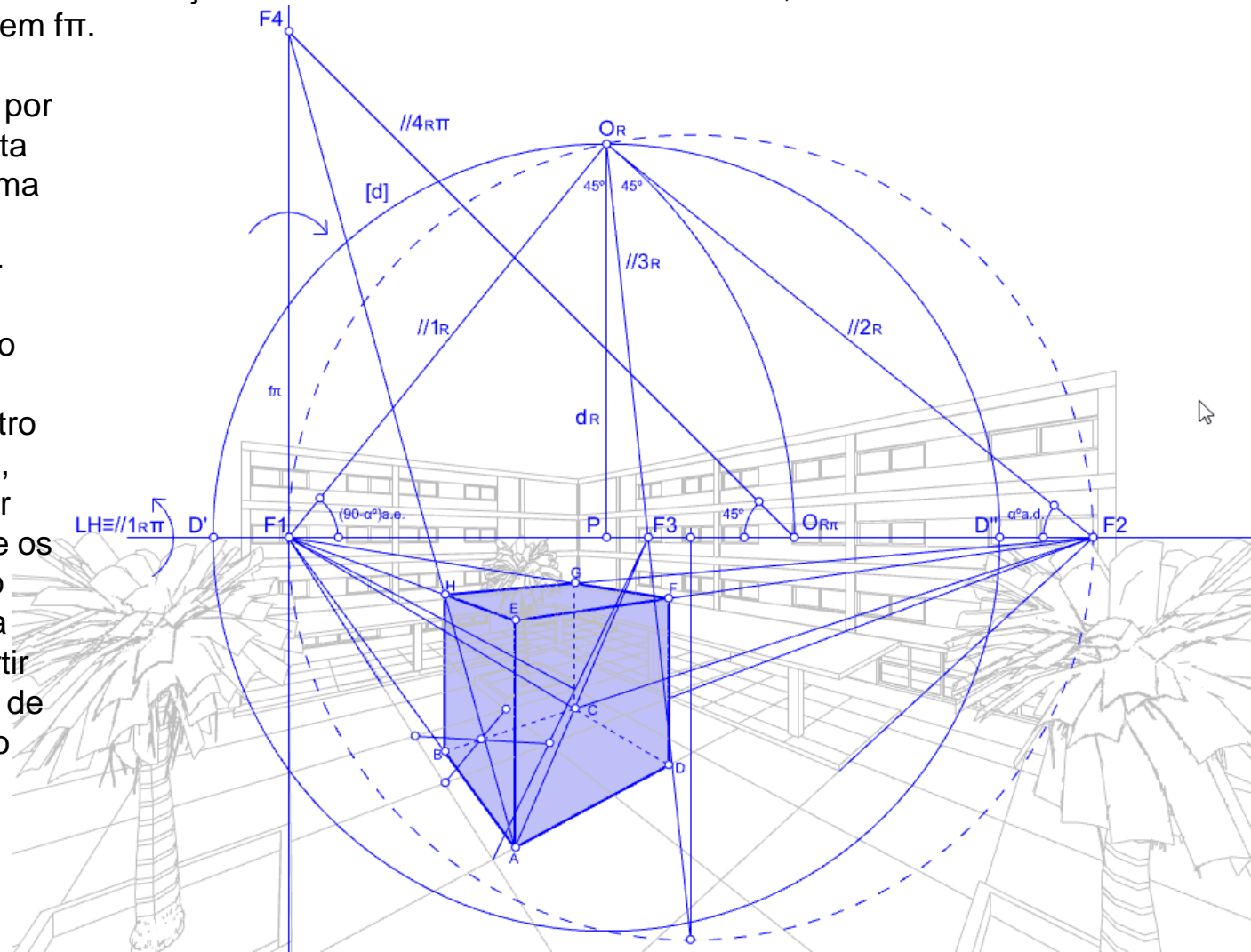


# Acrescentar cubos (exemplo em “Perspectiva de 2 pontos de fuga”).

Se pretendermos acrescentar perspectivas de cubos com arestas de direcções 1, 2 e verticais, será necessário determinar o ponto de fuga de uma nova direcção (dígamos 4), por exemplo, oblíqua a 45 com a direcção 1 e contida na orientação vertical  $\pi$  que contém a direcção 1. A linha de fuga  $f\pi$ , vertical, passará pelo ponto F1 e servirá de charneira ao rebatimento do observador O para o quadro de modo a poder-se conduzir, rebatida, a projectante com a direcção 4 a 45° com a LH (note-se que por acção do rebatimento em torno de  $f\pi$ , a projectante com direcção 1 rebatida fica coincidente com a LH, ficando assim determinado o ponto de fuga F4 contido em  $f\pi$ .

Para desenhar um cubo qualquer, começa-se então por arbitrar uma recta A.F1 aresta (neste caso, como temos uma informação métrica sobre a quadrícula podemos referir-nos a uma medida para a aresta do cubo, por exemplo 6m) com direcção 1. Sobre esta, e determinando o centro de um quadrado de 4mx4m, obtemos o vértice B. A partir desse momento, utilizam-se os pontos F2, F3 para fechar o quadrado [ABCD] e F4 para determinar o ponto H. A partir daqui utilizam-se os pontos de fuga F1 e F2 para finalizar o cubo.

Note-se a utilização das diagonais de um quadrado como meio de o subdividir.





# Extracção dos parâmetros do perspectógrafo através do rebatimento de planos projectantes (exemplo em “Perspectiva de 1 ponto de fuga”).

Para que se possam extrair todos os elementos do perspectógrafo a partir de uma imagem dada em perspectiva, é necessário ter algum conhecimento acerca da cena representada. Neste caso é dada a informação de que a quadrícula da grelha quadriculada do pátio exterior mede 4mx4m. Também se dá a informação de que as três principais direcções são ortogonais entre si sendo uma de topo, outra fronto-horizontal, e outra vertical. Neste caso a determinação dos parâmetros do perspectógrafo não acrescenta nada ao referido no bloco P3. Mas acrescente-se agora a questão de adicionar cubos com 4m de aresta, com faces horizontais e verticais a  $30^{\circ}_d$  e  $60^{\circ}_e$ .



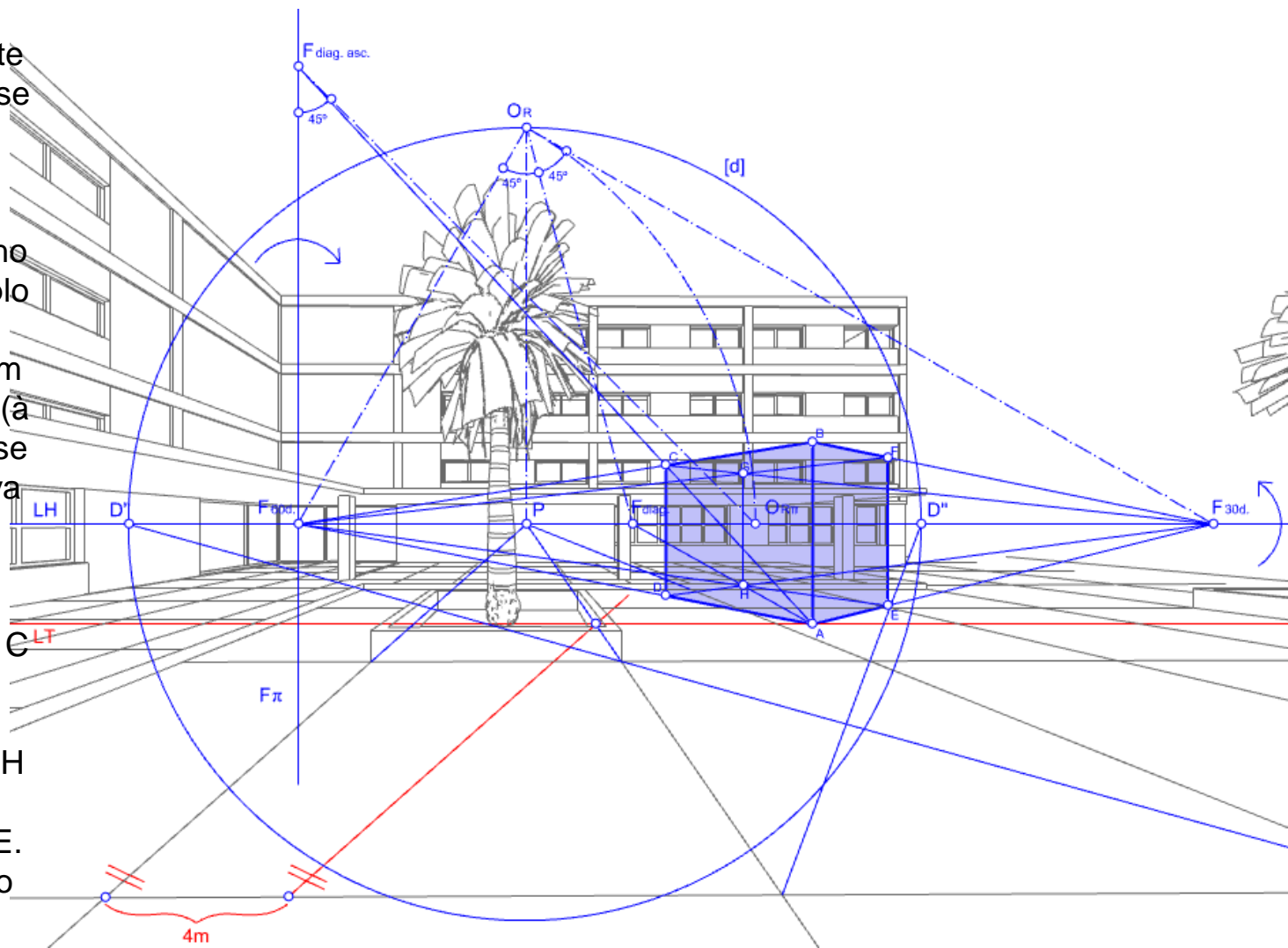


# Extracção dos parâmetros do perspectógrafo através do rebatimento de planos projectantes (exemplo em “Perspectiva de 1 ponto de fuga”).

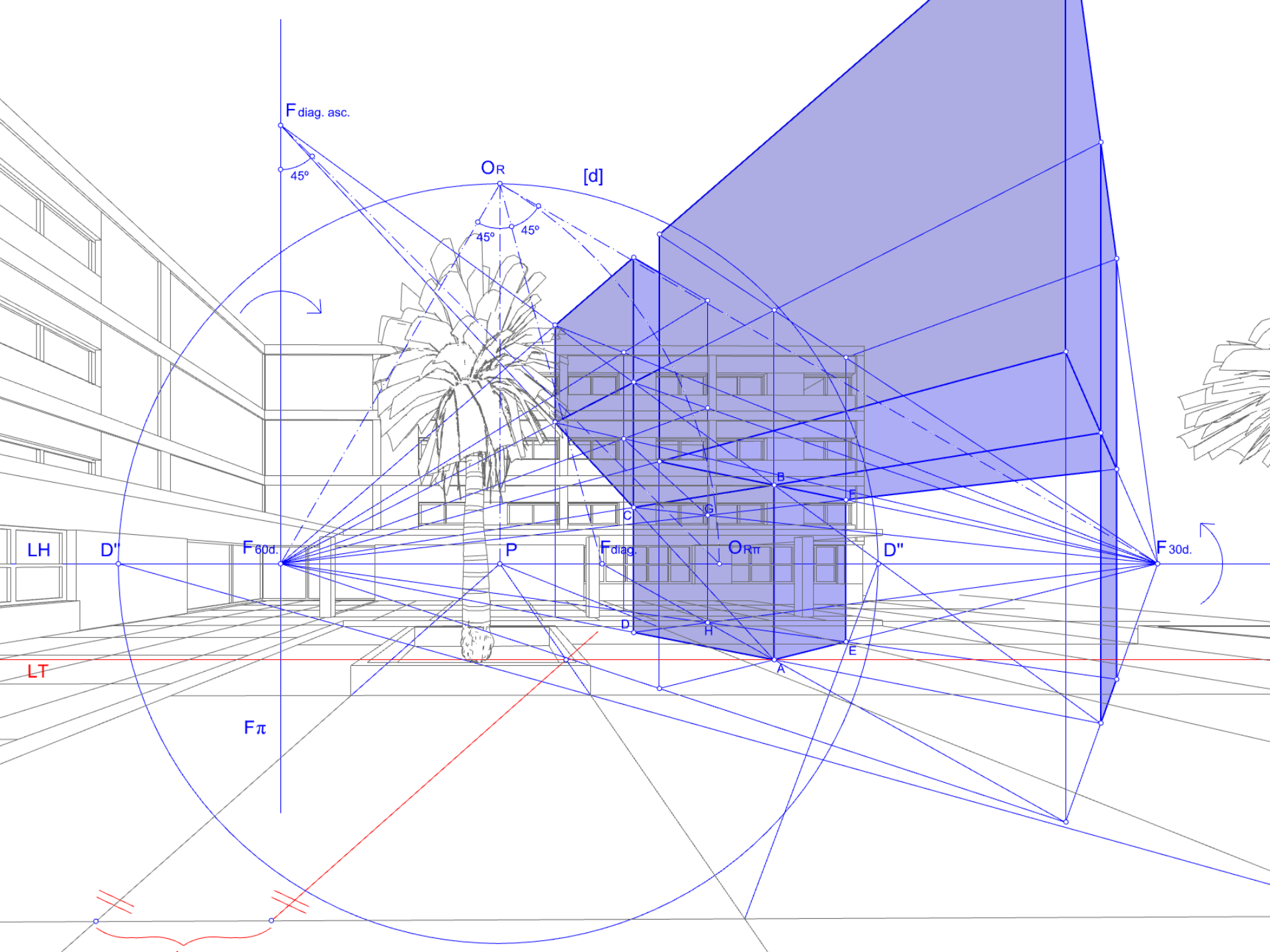
Para representar os cubos pretendidos é necessário determinar os pontos de fuga necessários, o que poderá ser feito seguindo, de forma inversa, o exemplo anterior (já que no exercício anterior parte-se da perspectiva para a obtenção dos pontos de fuga). Assim, começa-se por considerar o rebatimento do plano do horizonte de modo a poder construir os pontos de fuga  $F_{30^{\circ}_d}$ ,  $F_{60^{\circ}_e}$  e  $F_{diag}$ , todos na LH.

De seguida conduz-se, por exemplo,  $\pi$  passante por  $F_{60^{\circ}_e}$  sobre a qual se determina  $F_{diag.asc.}$  por meio do rebatimento do observador em torno de  $\pi$ . Para iniciar o desenho de um cubo, por exemplo com uma aresta vertical no quadro, conduz-se um segmento  $[AB]$  com 4m (à escala) a partir do qual se desenvolve a perspectiva do cubo.

Desenha-se  $A.F_{60^{\circ}_e}$  e  $B.F_{60^{\circ}_e}$ . Conduz-se  $A.F_{diag.asc.}$  determinando  $C$  pela qual se conduz a vertical  $C.D$ . Conduz-se  $D.F_{30^{\circ}_d}$  determinando  $H$  em  $A.F_{diag}$ . Conduz-se  $H.F_{60^{\circ}_e}$  determinando  $E$ . e o resto segue de modo idêntico.









# Bloco P6

Perspectiva linear de quadro plano:

- Generalização do controlo direccional
- Perpendicularidade
- Direcção de maior inclinação

# O lugar geométrico dos pontos de fuga dada a inclinação com o quadro

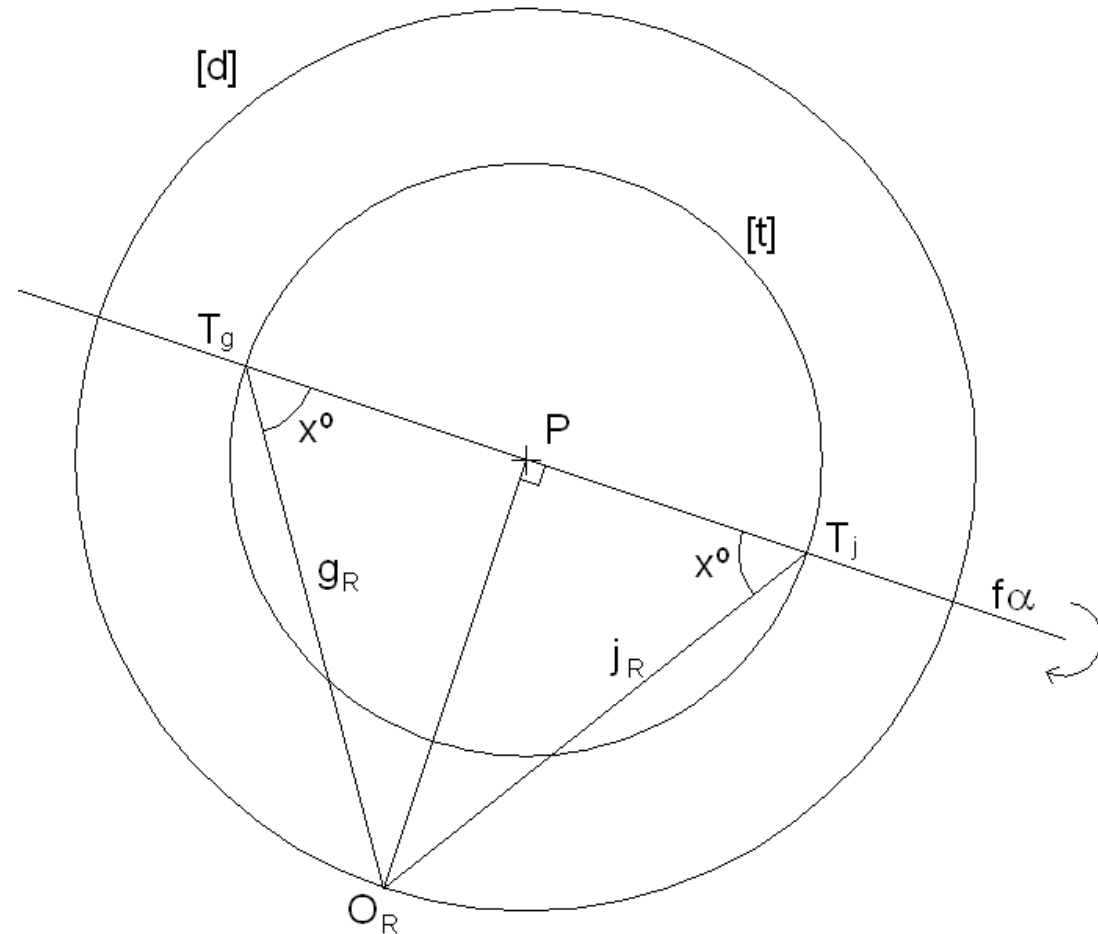
O lugar geométrico dos pontos de fuga das direcções de rectas a  $45^\circ$  com o quadro é a circunferência de distância inteira [d].

O lugar geométrico dos pontos de fuga das direcções de rectas a  $x^\circ$  com o quadro é o traço [t] (no quadro), de uma superfície cónica de revolução cujas geratrizes fazem  $x^\circ$  com o quadro.

Para determinar esse traço (de forma circunferencial) é necessário rebater um plano ( $\alpha$ ) projectante, qualquer, ortogonal ao quadro. Esse plano intersecta a referida superfície cónica segundo duas geratrizes, g e j, a  $x^\circ$  com o quadro. O traço da superfície cónica tem centro em P e diâmetro definido pelos traços das geratrizes,  $T_g$  e  $T_j$ . Estes são pontos de fuga de direcções a  $x^\circ$  com o quadro contidas na orientação  $\alpha$ .

O ponto principal P é o ponto de fuga das rectas ortogonais ao quadro.

Rectas paralelas ao quadro não têm ponto de fuga próprio, isto é, têm ponto de fuga impróprio. Por essa razão as perspectivas de uma família de rectas paralelas entre si e ao quadro é uma feixe de rectas paralelas entre si (no quadro). E as perspectivas destas rectas mantêm a proporção.



# O lugar geométrico dos pontos de fuga - exemplos

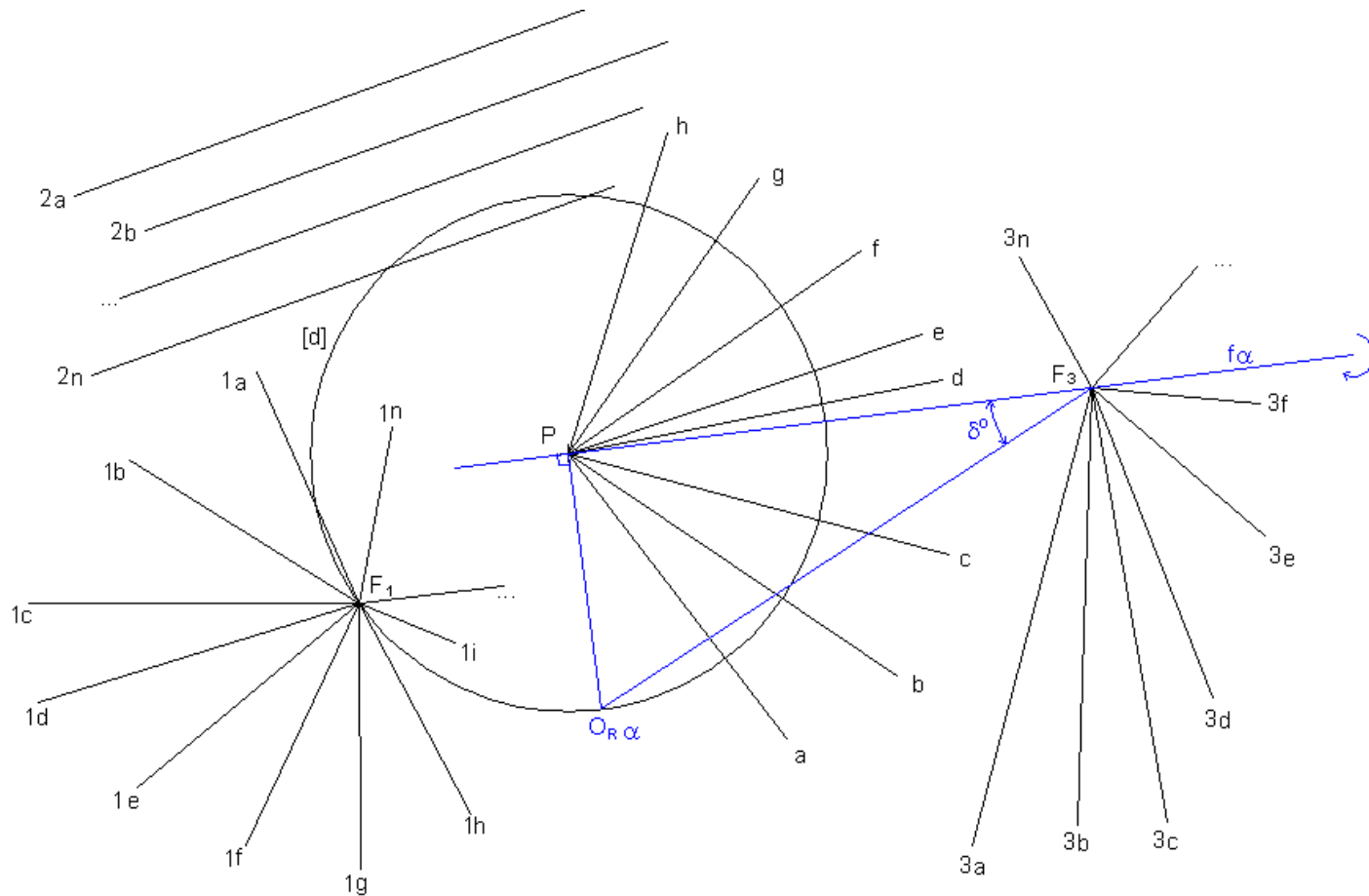
O feixe de rectas 1a, 1b, ..., 1n convergentes em  $F_1$  é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas entre si e a  $45^\circ$  com o quadro.

O feixe de rectas a, b, ..., n convergentes em P é a perspectiva de uma feixe de rectas perpendiculares ao quadro.

O feixe de rectas 2a, 2b, ..., 2n é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas ao quadro.

O feixe de rectas 3a, 3b, ..., 3n convergentes em  $F_3$  é a perspectiva de um feixe de rectas paralelas entre si e a  $\delta^\circ$  com o quadro. Note que a inclinação das rectas com o quadro é determinada através do rebatimento do plano projectante  $\alpha$  ortogonal ao quadro passante pela projectante a  $\delta^\circ$  com o quadro de traço frontal em  $F_3$ .

A charneira deste rebatimento é a recta  $f\alpha$ .





# O lugar geométrico das linhas de fuga dada a inclinação

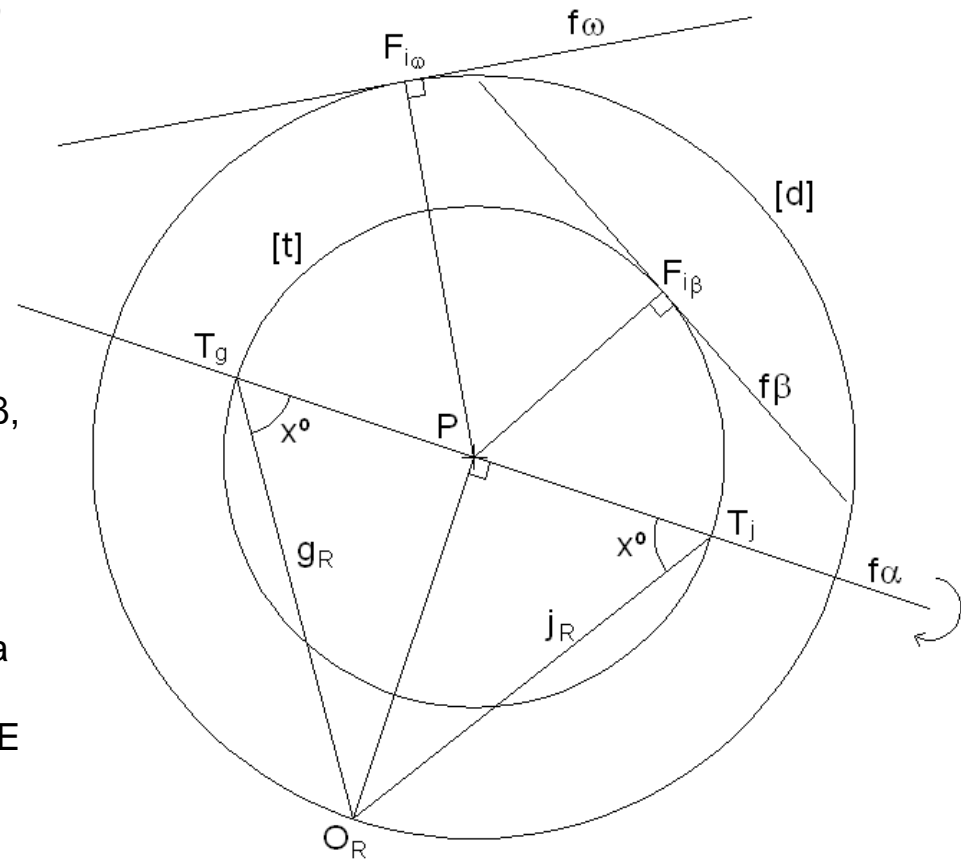
O lugar geométrico das linhas de fuga das orientações de planos a  $45^\circ$  com o quadro é dado pelas rectas tangentes à circunferência de distância inteira [d].

Na figura,  $f_\omega$  é uma linha de fuga de uma orientação a  $45^\circ$  com o quadro. O ponto de tangência,  $F_{i\omega}$ , é o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação  $\omega$ .

O lugar geométrico das linhas de fuga das orientações de planos a  $x^\circ$  com o quadro é dado pelas rectas tangentes ao traço [t] (no quadro) de uma superfície cónica de revolução cujas geratrizes fazem  $x^\circ$  com o quadro. Na figura,  $f_\beta$  é uma linha de fuga de uma orientação a  $x^\circ$  com o quadro. O ponto de tangência,  $F_{i\beta}$ , é o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação  $\beta$ .

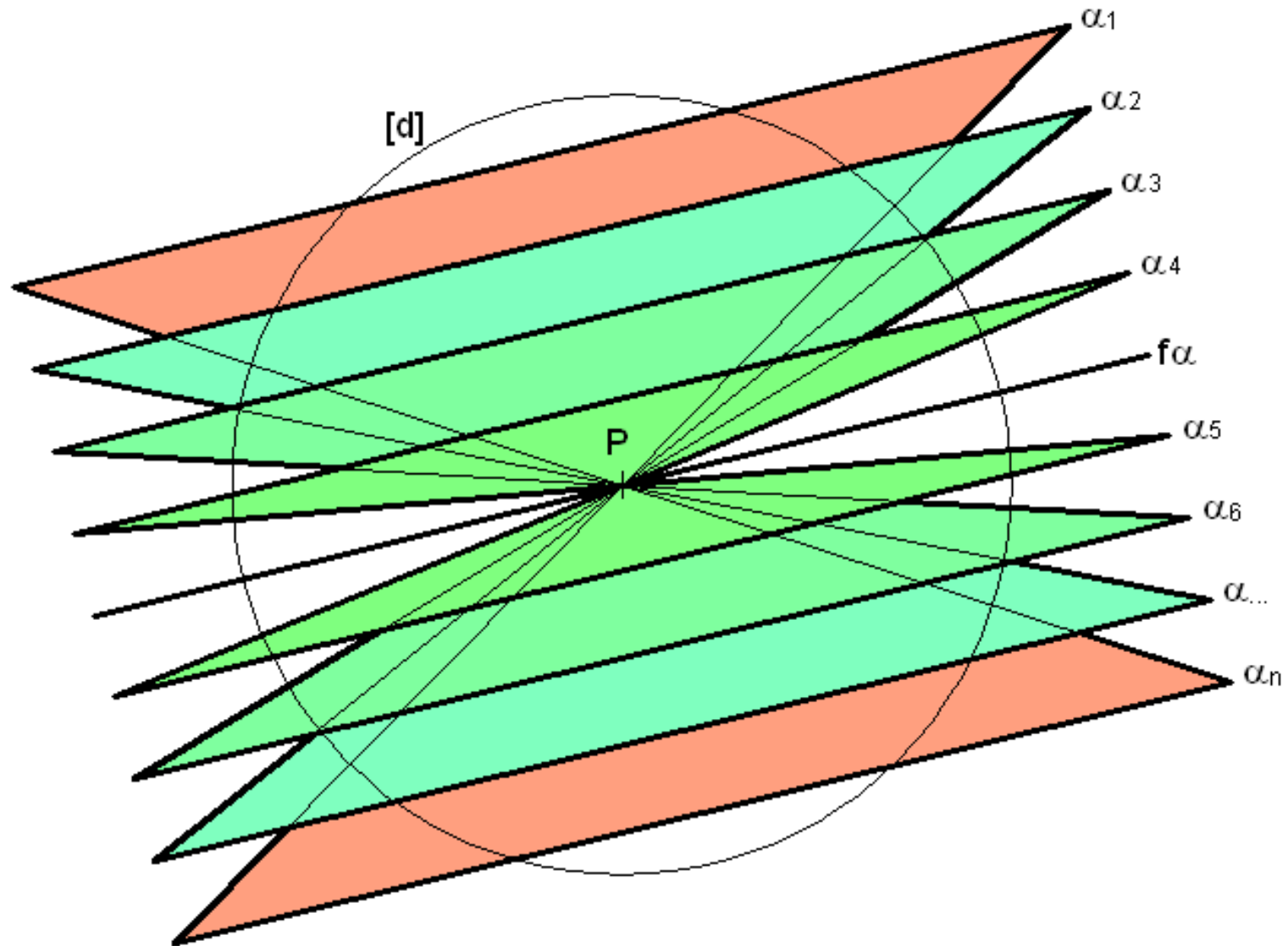
As linhas de fuga dos planos ortogonais ao quadro passam todas pelo ponto principal P. Na figura,  $f_\alpha$  é uma linha de fuga de uma orientação ortogonal ao quadro. O ponto P coincide com o ponto de fuga da DIRECÇÃO DE MAIOR INCLINAÇÃO da orientação  $\alpha$ .

Os planos paralelos ao quadro não têm linha de fuga própria, isto é, têm linha de fuga imprópria. Por essa razão, FIGURAS CONTIDAS EM PLANOS PARALELOS AO QUADRO MANTÊM AS PROPORÇÕES NA PERSPECTIVA. Se colocadas no quadro mantêm a VERDADEIRA GRANDEZA.



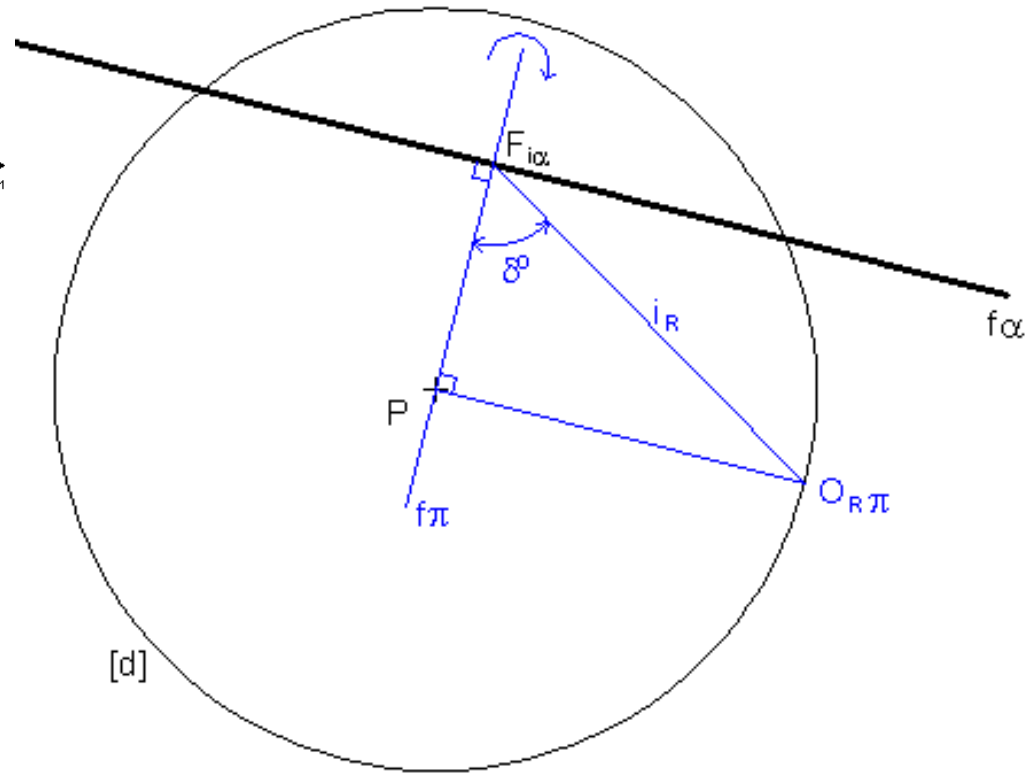
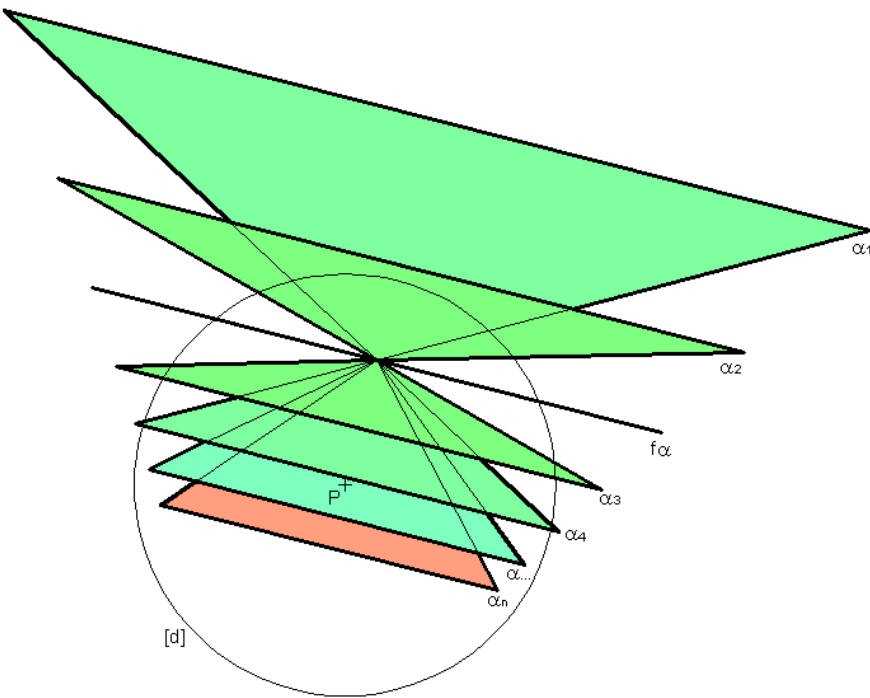
## O lugar geométrico das linhas de fuga - exemplos

Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos ortogonais ao quadro (cada plano é delimitado por um segmento frontal e duas semi-rectas de perpendiculares ao quadro). O plano projectante é aquele cuja perspectiva se reduz a uma recta, a recta  $f\alpha$ .



# O lugar geométrico das linhas de fuga - exemplos

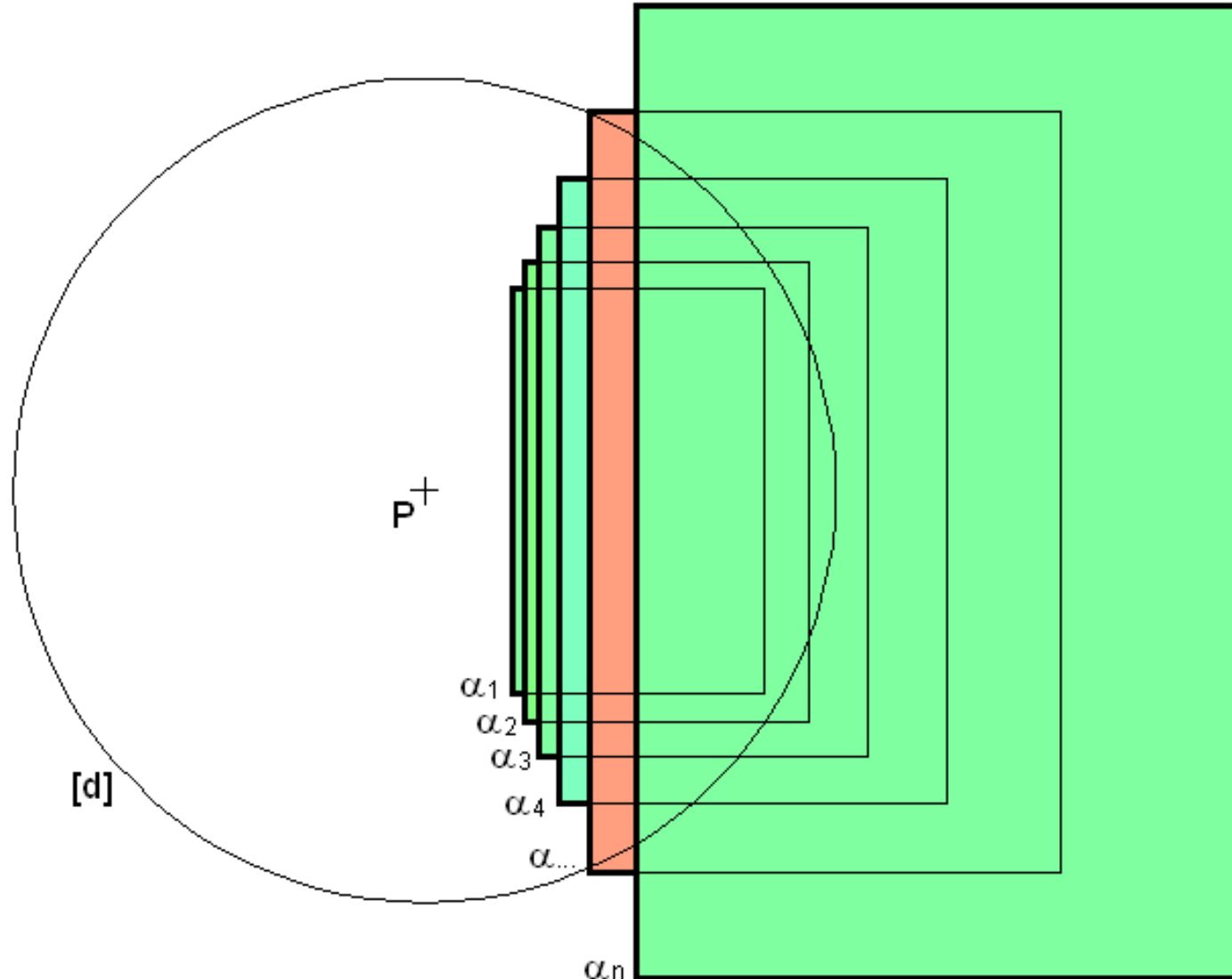
Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos oblíquos ao quadro (cada plano é delimitado por um segmento frontal e duas semi-rectas de maior inclinação). O plano projectante é aquele cuja perspectiva se reduz a uma recta, a recta  $f\alpha$ . A inclinação destes planos com o quadro,  $\delta^\circ$ , pode ser determinada através do rebatimento do plano projectante,  $\pi$ , ortogonal ao quadro passante pela projectante de maior inclinação,  $i$ , da orientação  $\alpha$ , de ponto de fuga  $F_{i\alpha}$ .





## O lugar geométrico das linhas de fuga - exemplos

Esta figura representa a perspectiva de um feixe de planos (cada plano é delimitado por um rectângulo) paralelos ao quadro. Note que neste caso o plano projectante não tem representação no quadro uma vez que lhe é paralelo. Dito de outro modo, planos paralelos ao quadro não têm linha de fuga.





# Determinação de pontos de fuga dadas as direcções

Graficamente esta operação implica o rebatimento do plano projectante  $//\omega$  em torno da recta  $f\omega$ . Nesta operação, como  $\omega$  é ortogonal ao quadro, o ponto  $O$  fica rebatido na intersecção da circunferência de distância inteira  $[d]$  com a perpendicular a  $f\omega$  conduzida pelo ponto  $P$ . Note que esta perpendicular contém a projecção ortogonal (no quadro) do arco do rebatimento do ponto  $O$ . É por  $O_R$  que se conduzem as projectantes (rebatidas) que permitem determinar os pontos de fuga das várias direcções.

A figura auxiliar permite relacionar entre si as direcções e deve ser sempre considerada como estratégia para o entendimento da relação dessas direcções entre si e com o quadro.

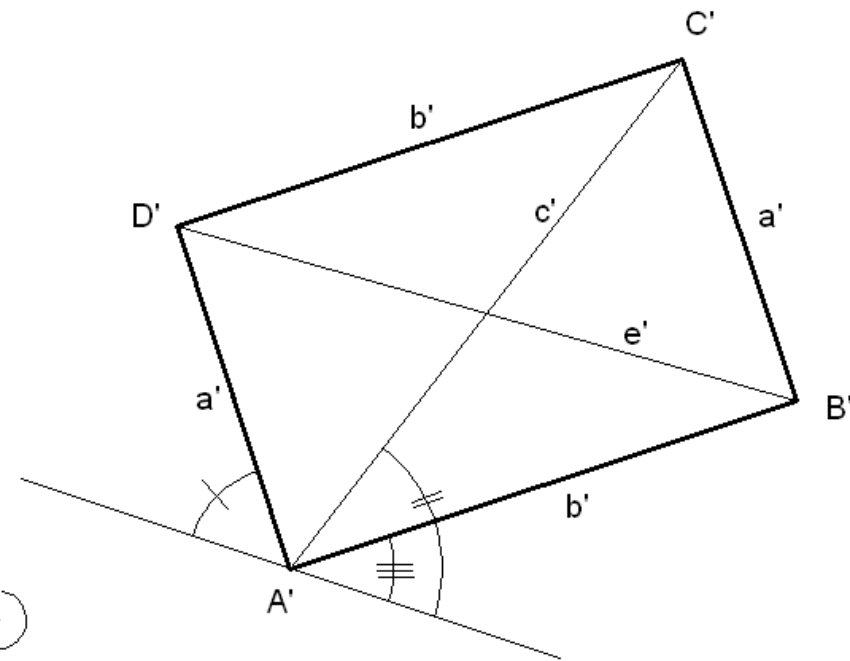
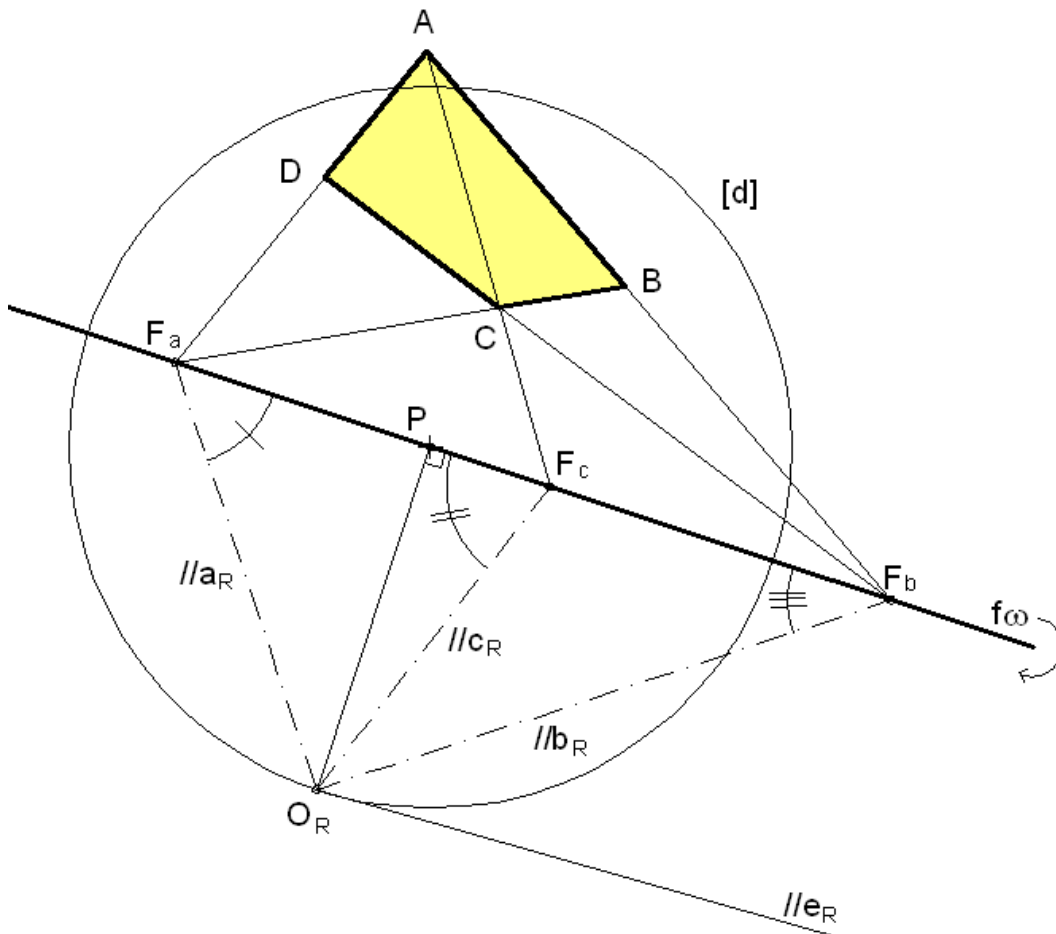
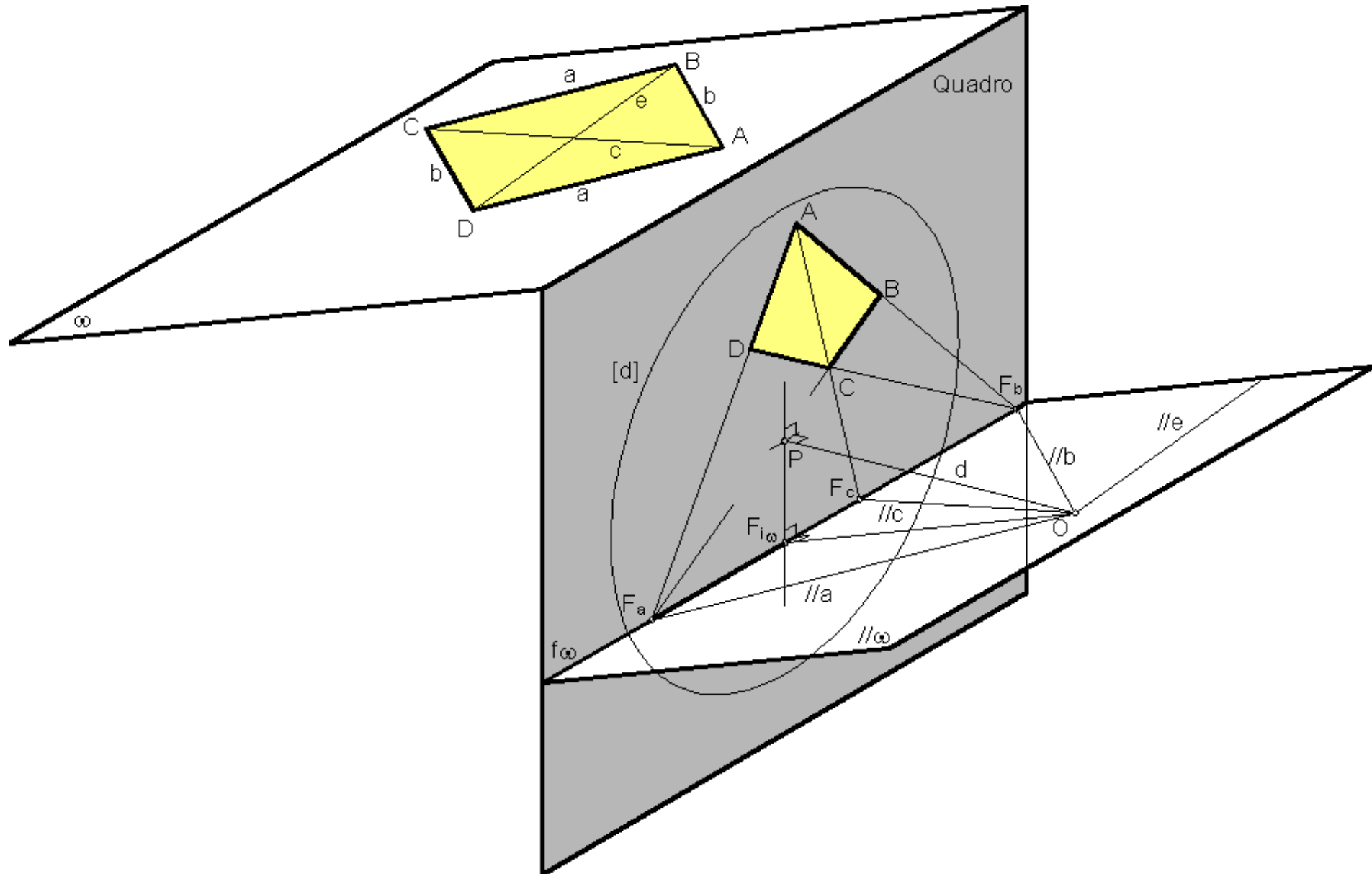


FIGURA AUXILIAR



# Determinação de pontos de fuga dadas as direcções

O mesmo tipo de lógica é aplicável quando as figuras têm orientação OBLÍQUA ao quadro.





# PERPENDICULARIDADE: Ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação

O ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação  $\omega$  de planos determina-se através do traço (no quadro) da recta projectante perpendicular ao plano projectante com a orientação dada.

Note que o ponto de fuga da direcção ortogonal aos planos paralelos ao quadro é o ponto P.

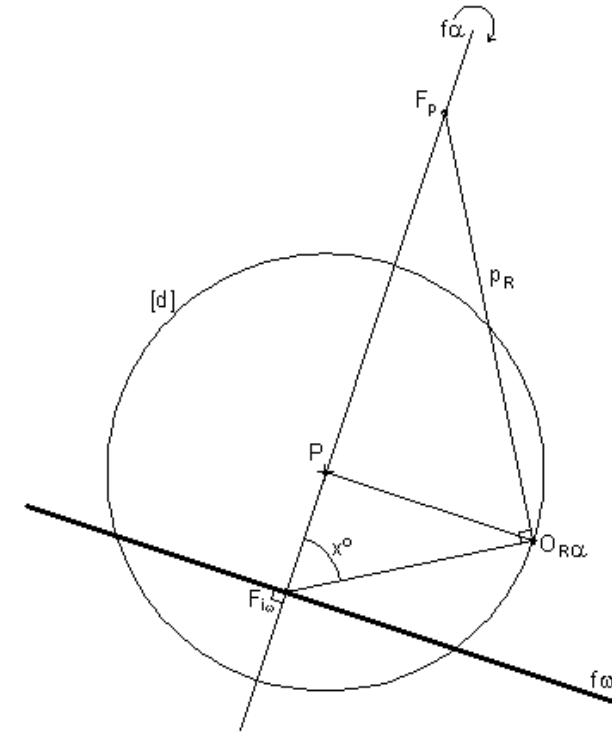
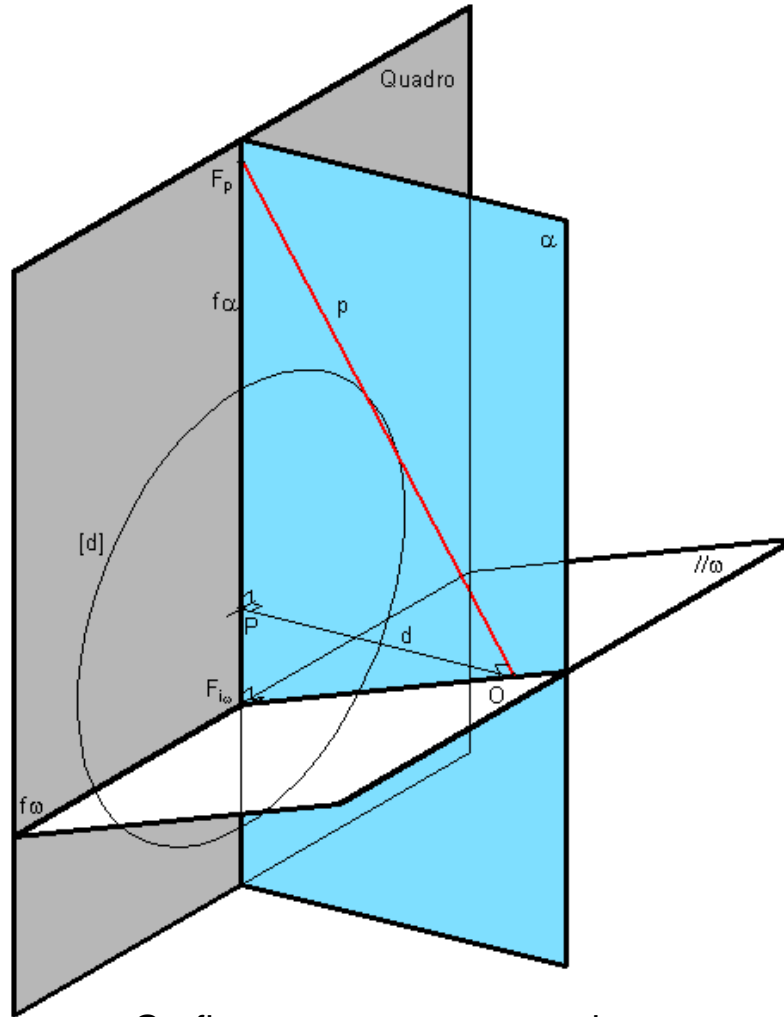
Note ainda que planos ortogonais ao quadro são ortogonais a direcções paralelas ao quadro, de onde não exista ponto de fuga próprio. Para uma orientação definida por uma linha de fuga, fica automaticamente definida a direcção ortogonal (é ortogonal à linha de fuga).

Graficamente, no caso geral, esta operação implica o rebatimento de um plano projectante  $\alpha$  em torno do seu traço no quadro,  $f_\alpha$ . Note-se que este plano contém a recta projectante  $p$  perpendicular ao plano projectante  $//\omega$ . Essa recta projectante  $p$  é perpendicular ao segmento  $[OF_{i\omega}]$ .

Sobre a recta  $f_\alpha$  determina-se o traço da projectante  $p$ , isto é, o ponto de fuga  $F_p$  da direcção ortogonal à orientação  $\omega$ .

# PERPENDICULARIDADE: Ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação

O ponto de fuga de uma direcção ortogonal a uma orientação  $\omega$  de planos determina-se através do traço (no quadro) da recta projectante perpendicular ao plano projectante com a orientação dada. Note que o ponto de fuga da direcção ortogonal aos planos paralelos ao quadro é o ponto P. Note ainda que planos ortogonais ao quadro são ortogonais a direcções paralelas ao quadro, de onde não exista ponto de fuga próprio. Para uma orientação definida por uma linha de fuga, fica automaticamente definida a direcção ortogonal (é ortogonal à linha de fuga).



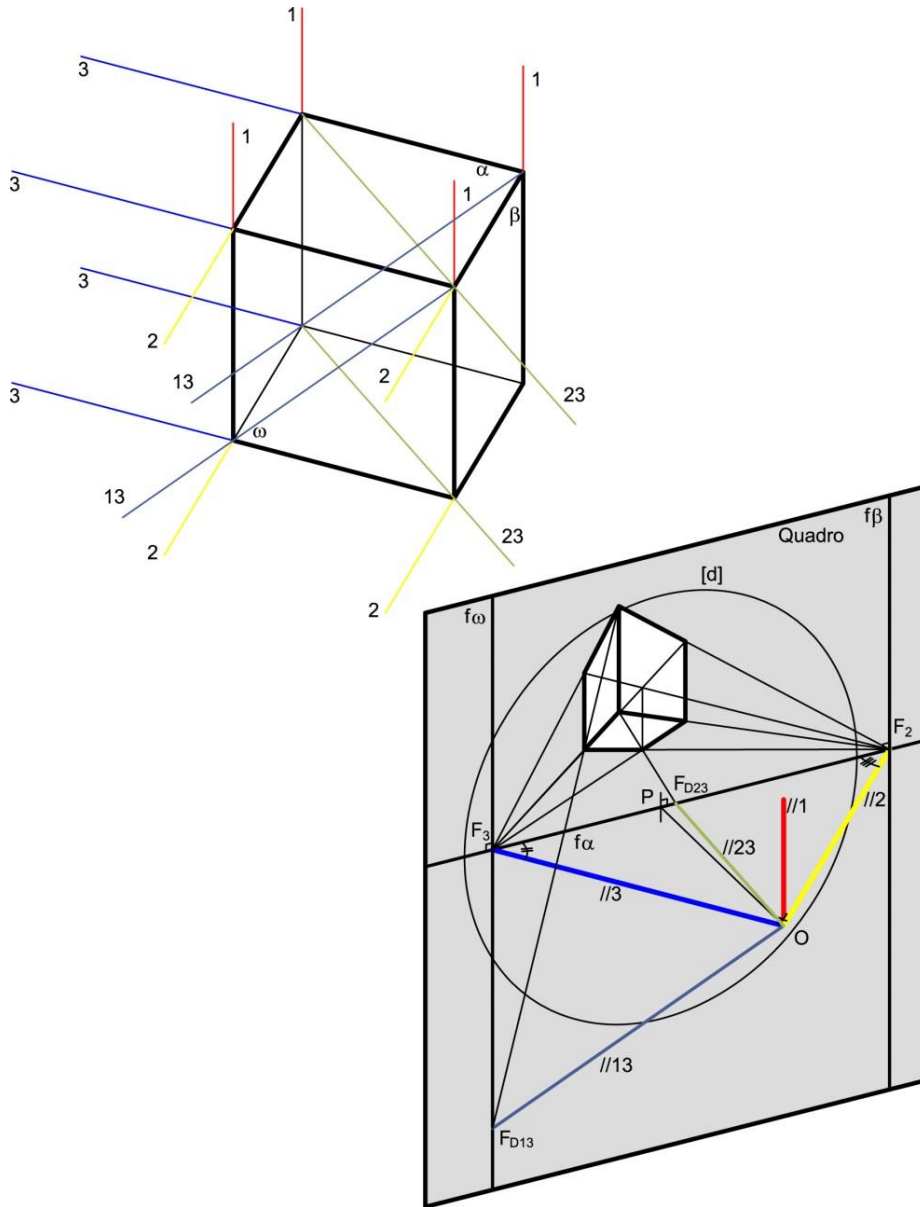
Graficamente, no caso geral, esta operação implica o rebatimento de um plano projectante  $\alpha$  em torno do seu traço no quadro,  $f_\alpha$ . Note-se que este plano contém a recta projectante  $p$  perpendicular ao plano projectante  $//\omega$ . Essa recta projectante  $p$  é perpendicular ao segmento  $[OF_\omega]$ .

Sobre a recta  $f_\alpha$  determina-se o traço da projectante  $p$ , isto é, o ponto de fuga  $F_p$  da direcção ortogonal à orientação  $\omega$ .

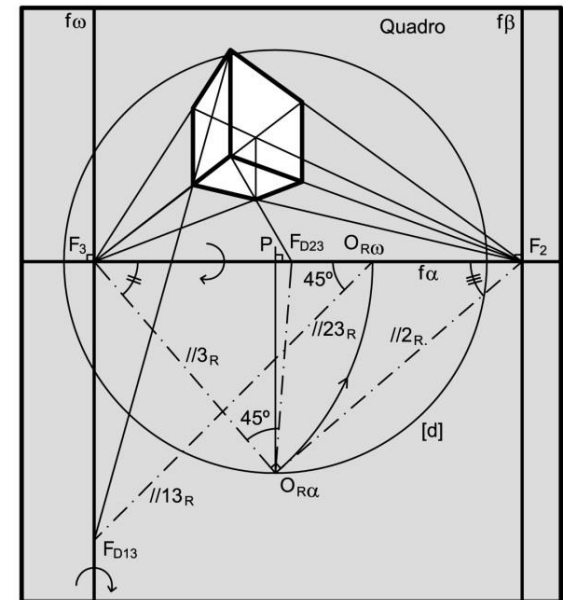




# CUBOS: Desenho de matrizes espaciais tri-ortogonais cúbicas

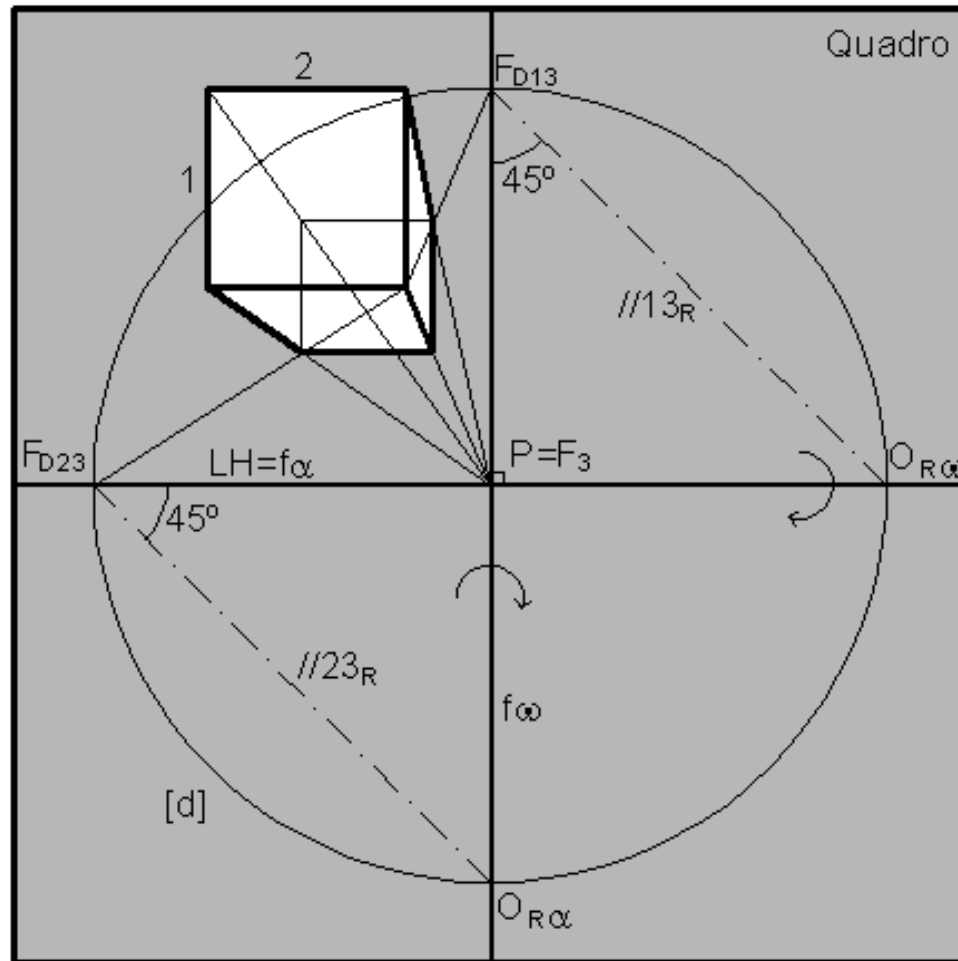


A "PERSPECTIVA DE 2 PONTOS DE FUGA".





# CUBOS: “Perspectiva de 1 ponto de fuga” – taxonomia



$F_{D23}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A 45° (ABERTURA PARA A ESQUERDA) COM O QUADRO

$F_{D13}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A 45° (ASCENDENTE) COM O QUADRO

$P=F_3$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)

AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO VERTICAIS

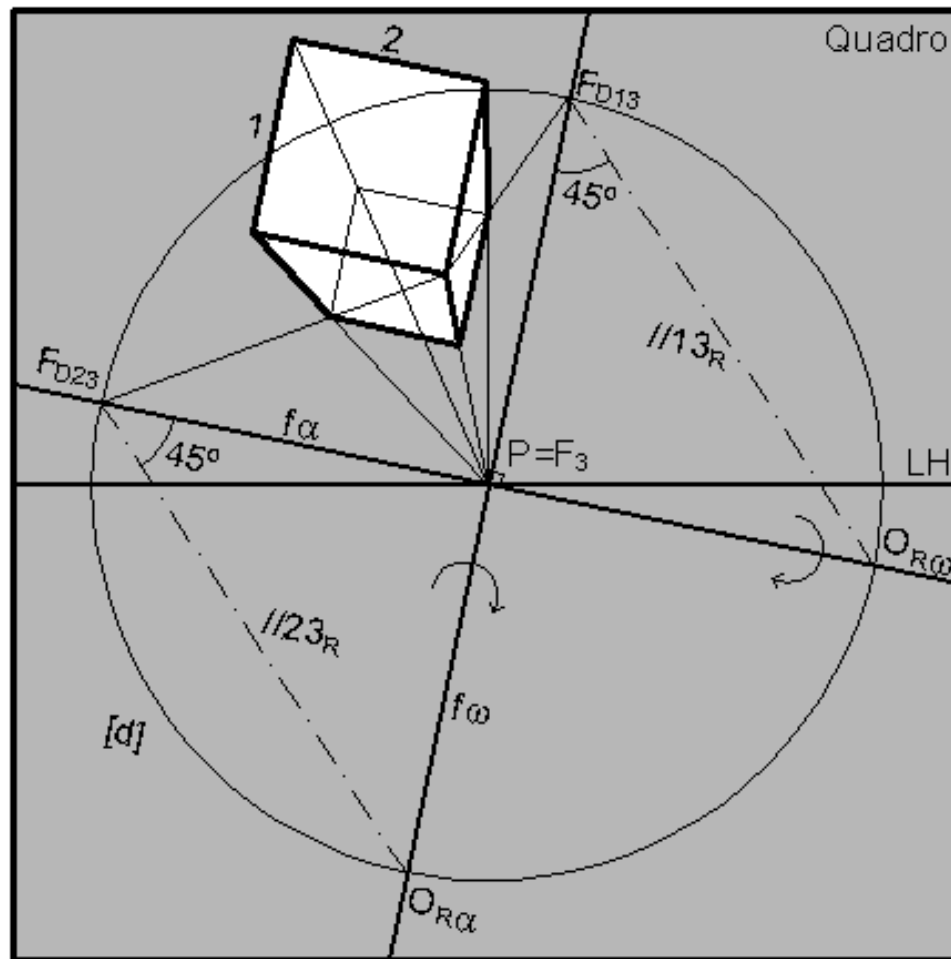
AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO FRONTO-HORIZONTAIS

$LH=f_\alpha$  LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO HORIZONTAL

$f_\omega$  LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO PERFIL

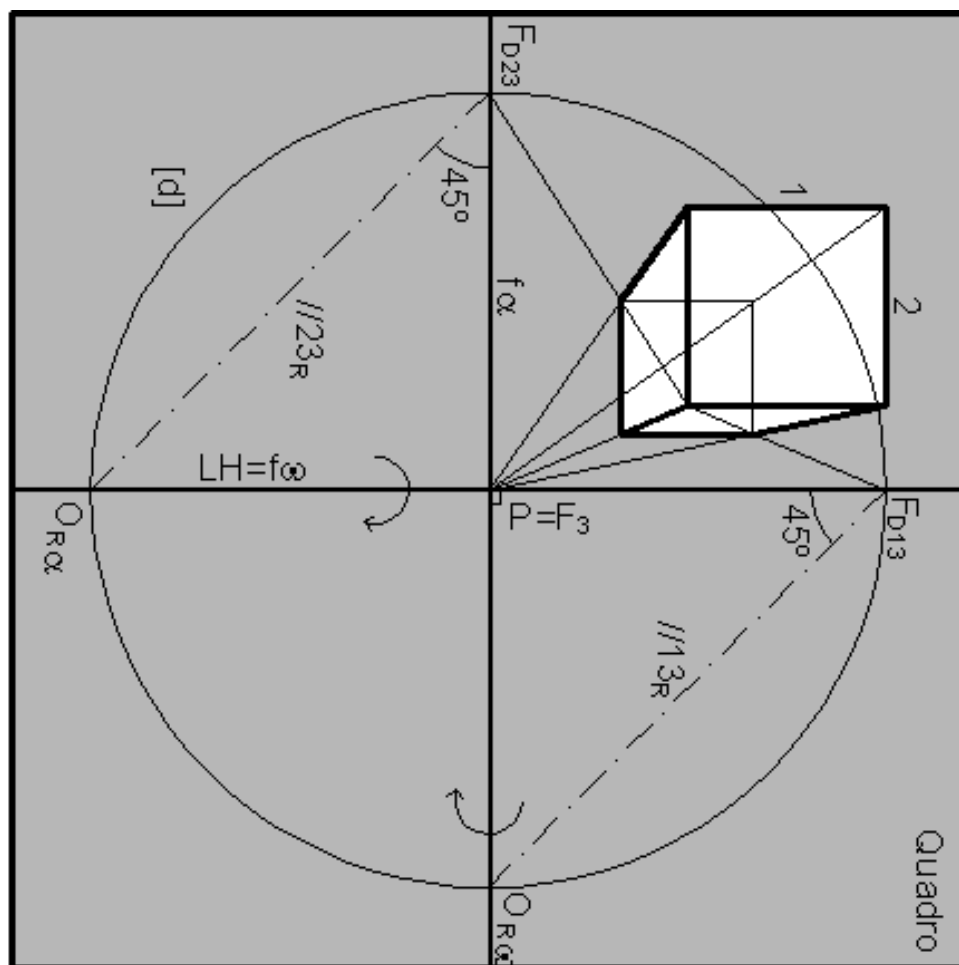


# CUBOS: “Perspectiva de 1 ponto de fuga” – taxonomia



- $F_{D23}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45° COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_{D13}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45° COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $P=F_3$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)
- AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $f_\alpha$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $f_\omega$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA A DIREITA)

# CUBOS: “Perspectiva de 1 ponto de fuga” – taxonomia



$F_{D23}$

PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL A 45° (ASCENDENTE) COM O QUADRO

$F_{D13}$

PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL A 45° (ABERTURA PARA A DIREITA) COM O QUADRO

$P=F_3$

PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO ORTOGONAL AO QUADRO (DE TOPO)

AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTO-HORIZONTAIS

AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 2 SÃO VERTICAIS

$LH=f_0$

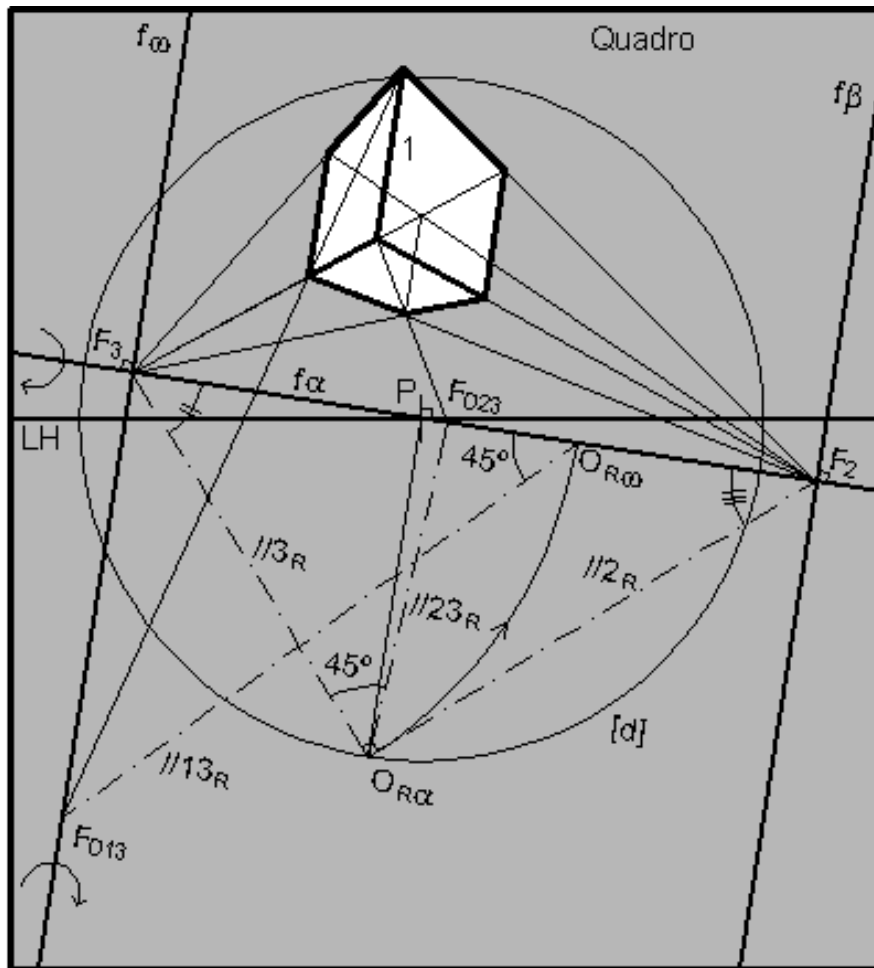
LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO HORIZONTAL

$f_\alpha$

LINHA DE FUGA DA ORIENTAÇÃO DE PERFIL



# CUBOS: “Perspectiva de 2 pontos de fuga” – taxonomia

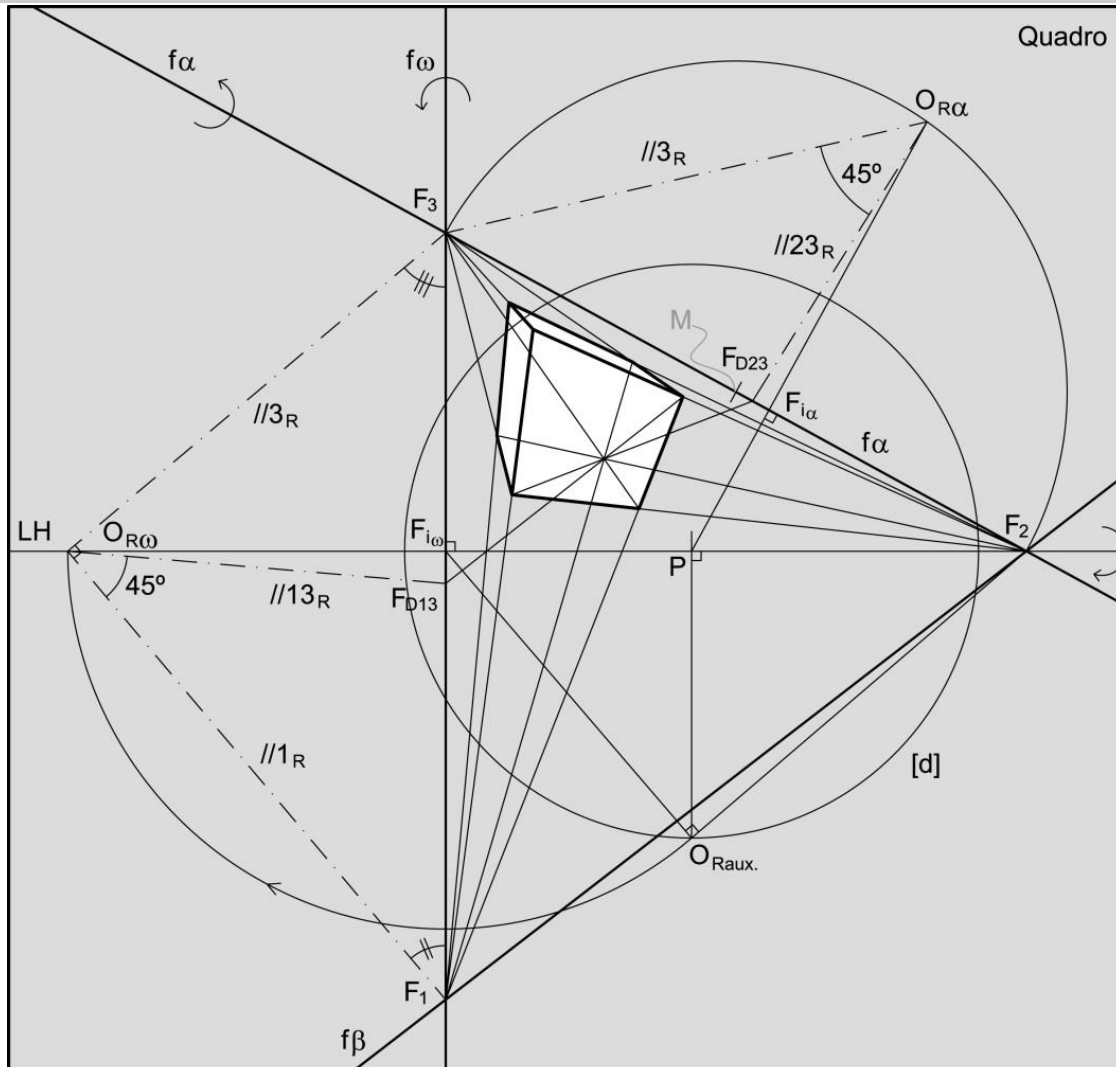


- $F_{D23}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A  $45^\circ$  COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)  
 $F_{D13}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A  $45^\circ$  COM A ORIENTAÇÃO  $\alpha$  (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)  
 $F_3$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A  $\omega$  COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)  
 $F_2$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A  $\beta$  COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)  
 AS RECTAS COM A DIRECÇÃO 1 SÃO FRONTAIS (COM ABERTURA PARA A DIREITA)  
 $f_\alpha$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE TOPO (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)  
 $f_\omega$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA A  $\omega$  COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)  
 $f_\beta$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA A  $\beta$  COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)



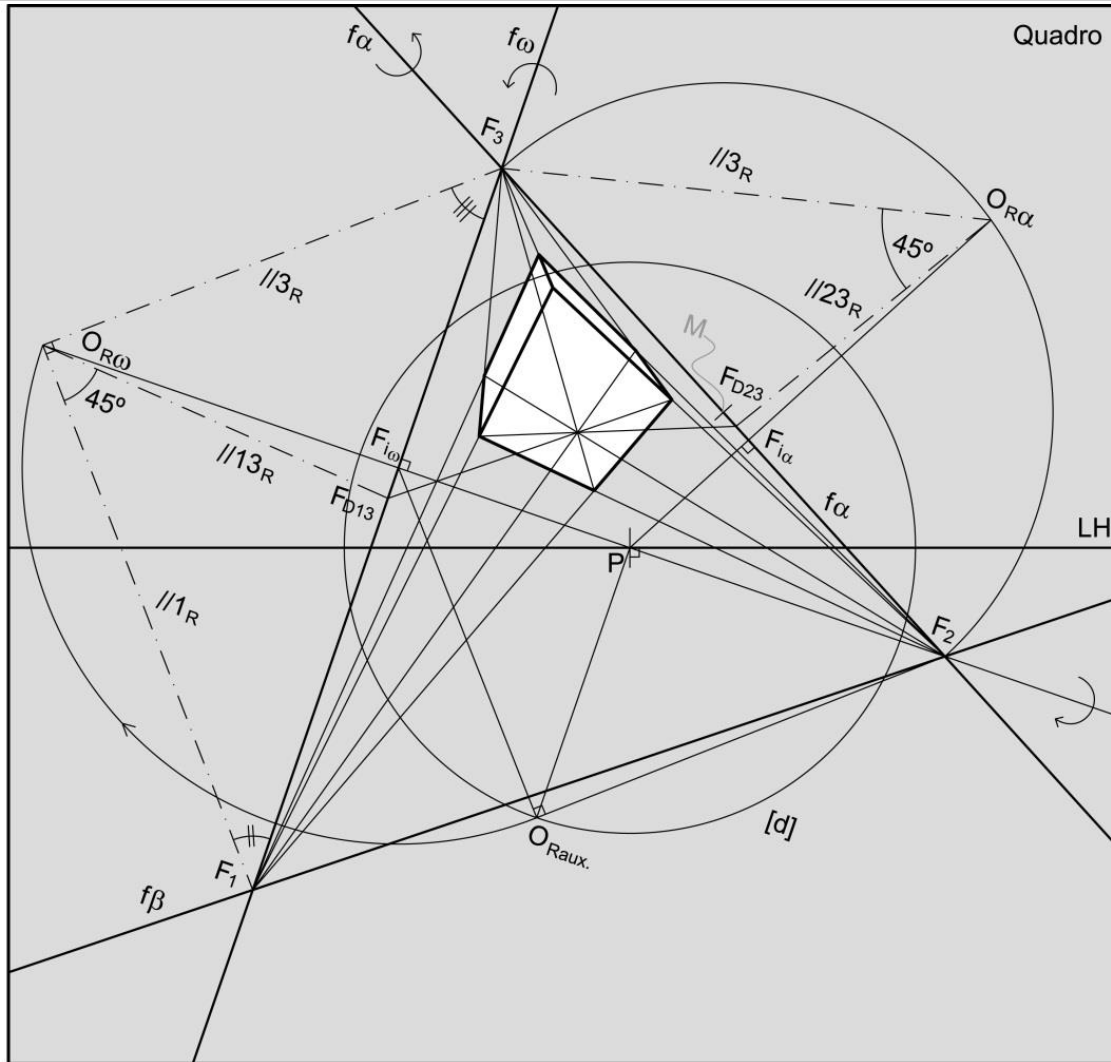


# CUBOS: “Perspectiva de 3 pontos de fuga” – taxonomia



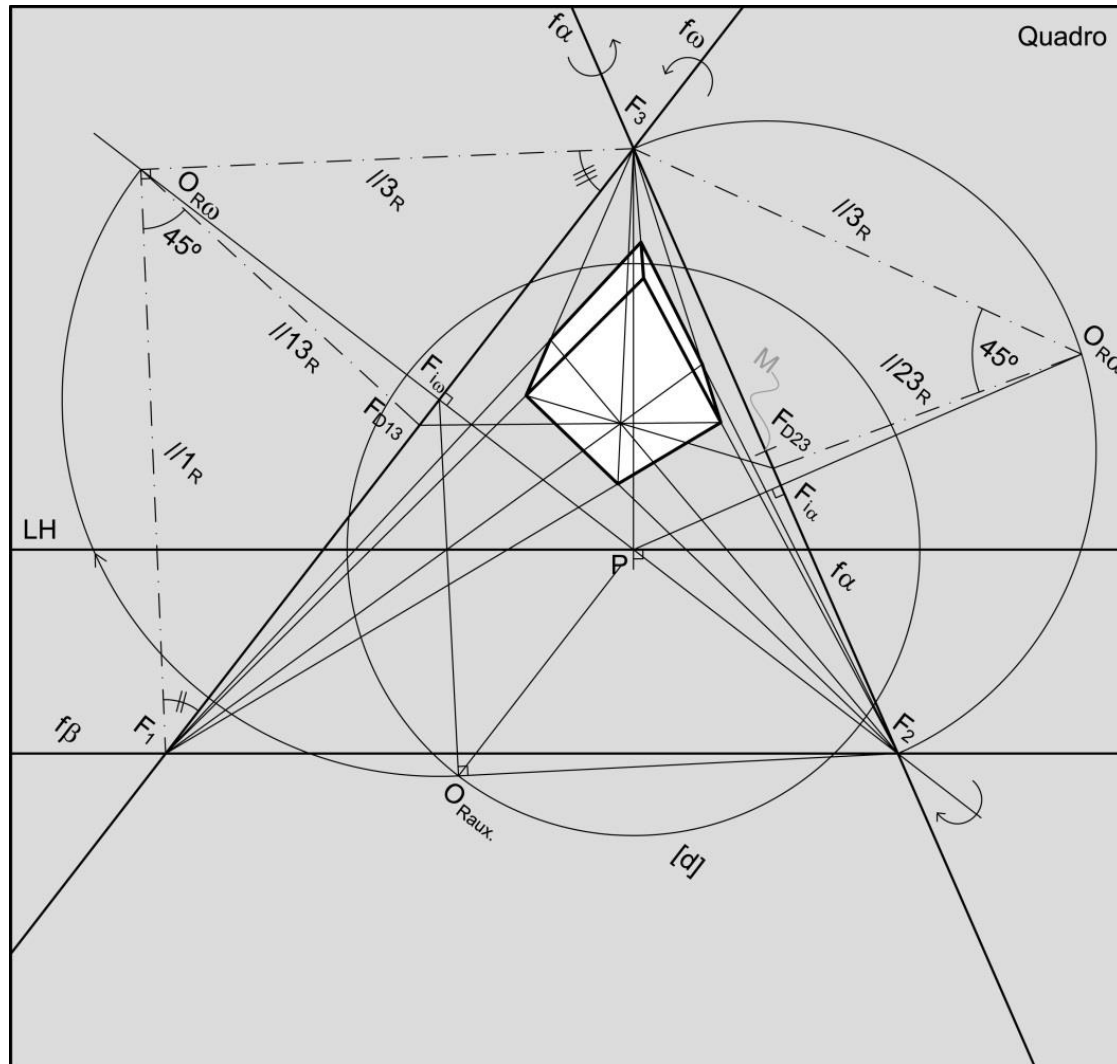
- $F_{D23}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45° COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $F_{D13}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45° COM A ORIENTAÇÃO  $\alpha$  (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_3$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA COM O QUADRO (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_1$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_2$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE NÍVEL (COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $f_\alpha$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $f_\omega$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO VERTICAL (COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $f_\beta$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

# CUBOS: “Perspectiva de 3 pontos de fuga” – taxonomia



$F_{D23}$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45° COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$F_{D13}$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45° COM A ORIENTAÇÃO $\alpha$ (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$F_3$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$F_1$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$F_2$	PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$f_\alpha$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
$f_\omega$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
$f_\beta$	LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)

# CUBOS: “Perspectiva de 3 pontos de fuga” – taxonomia

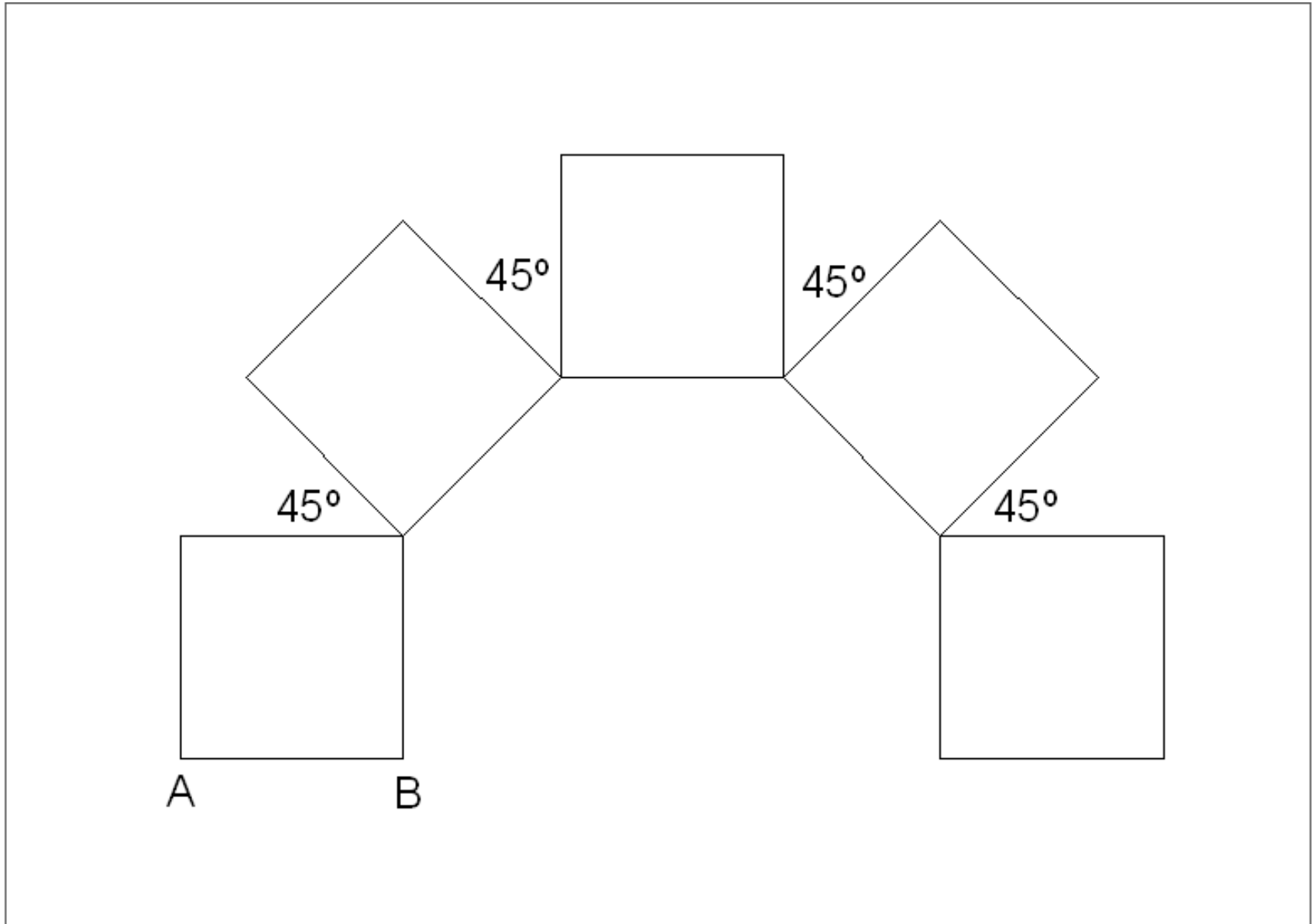


- $F_{D23}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE OBLÍQUA A 45° COM AS DIRECÇÕES 2 E 3 (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $F_{D13}$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA A 45° COM A ORIENTAÇÃO  $\alpha$ . (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_3$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO DE PERFIL (ASCENDENTE)
- $F_1$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $F_2$  PONTO DE FUGA DE DIRECÇÃO OBLÍQUA COM O QUADRO (DESCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $f_\alpha$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A DIREITA)
- $f_\omega$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO OBLÍQUA (ASCENDENTE COM ABERTURA PARA A ESQUERDA)
- $f_\beta$  LINHA DE FUGA DE ORIENTAÇÃO DE RAMPA (DESCENDENTE)



# EXERCÍCIO 6.1

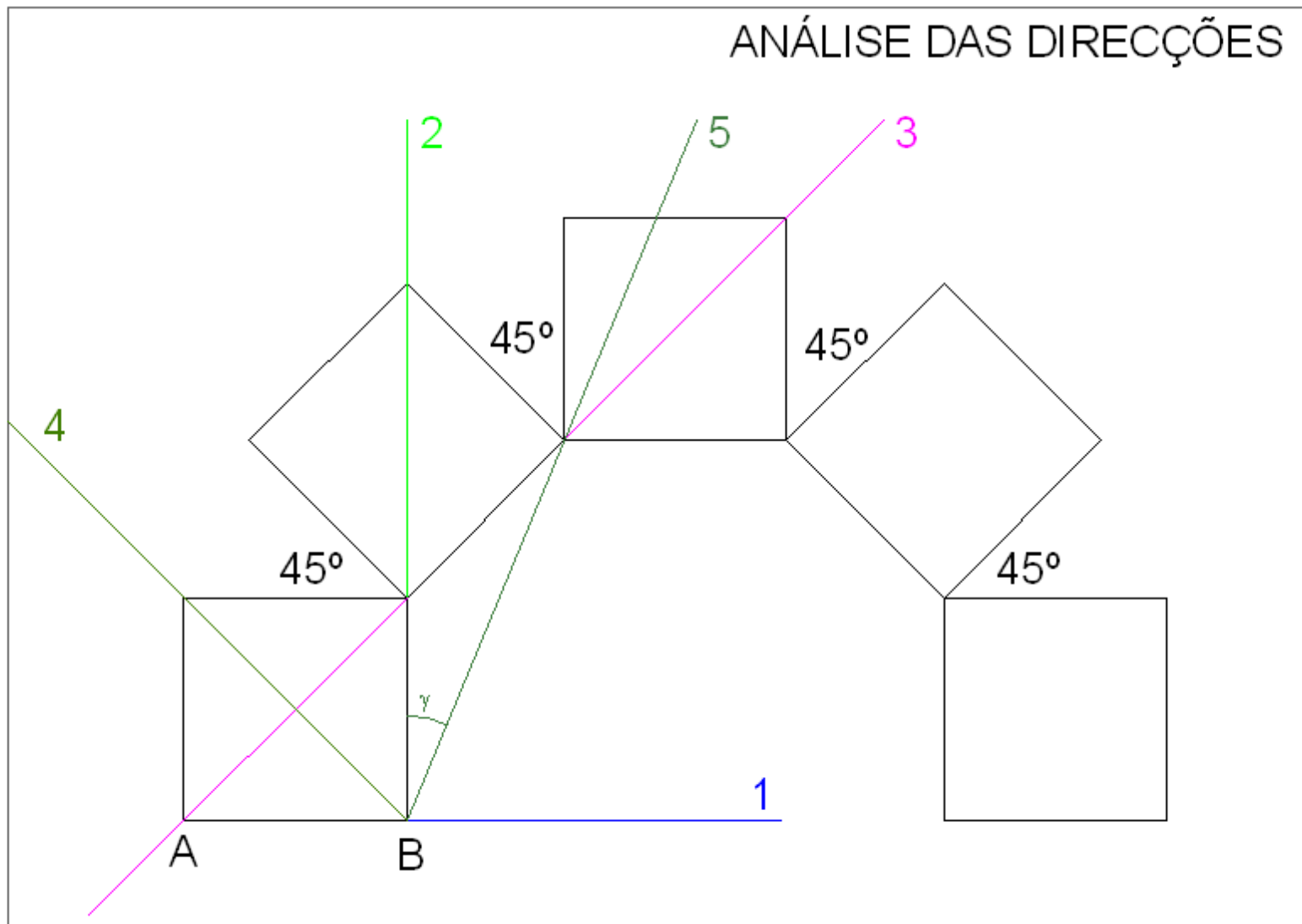
Considere a figura seguinte composta por quadrados rodados a  $45^\circ$  uns relativamente aos outros. Note os pontos de referência A e B.



# EXERCÍCIO 6.1

A figura anterior será considerada como projecção de cubos ou de prismas regulares (com altura dupla da largura da base) a representar em perspectiva.

O primeiro passo dessa representação é o entendimento da relação entre as direcções que podem ser encontradas na figura. O desenho seguinte traduz essa análise.



# EXERCÍCIO 6.1.1

## Problema.

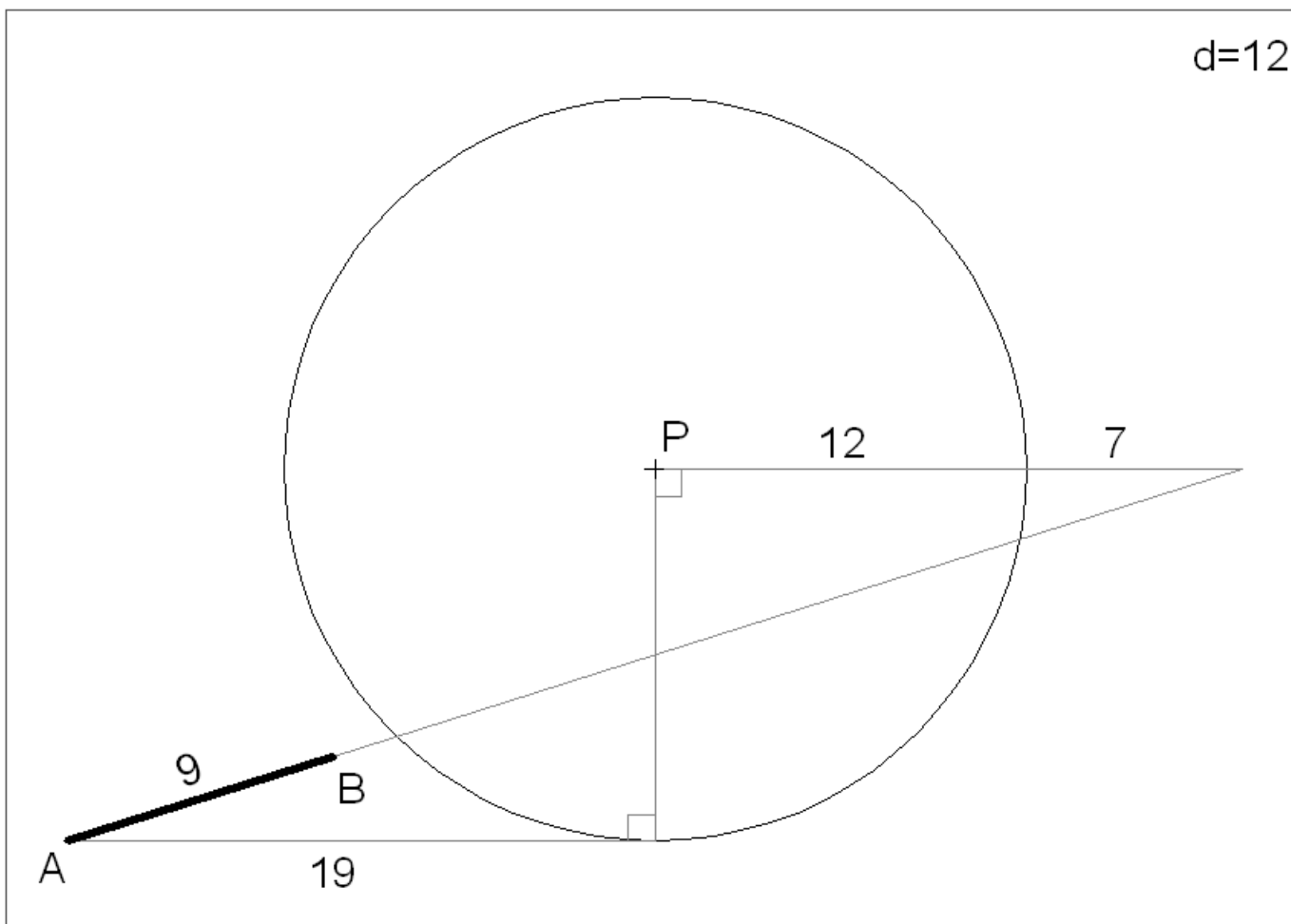
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.

O segmento  $[AB]$  é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.

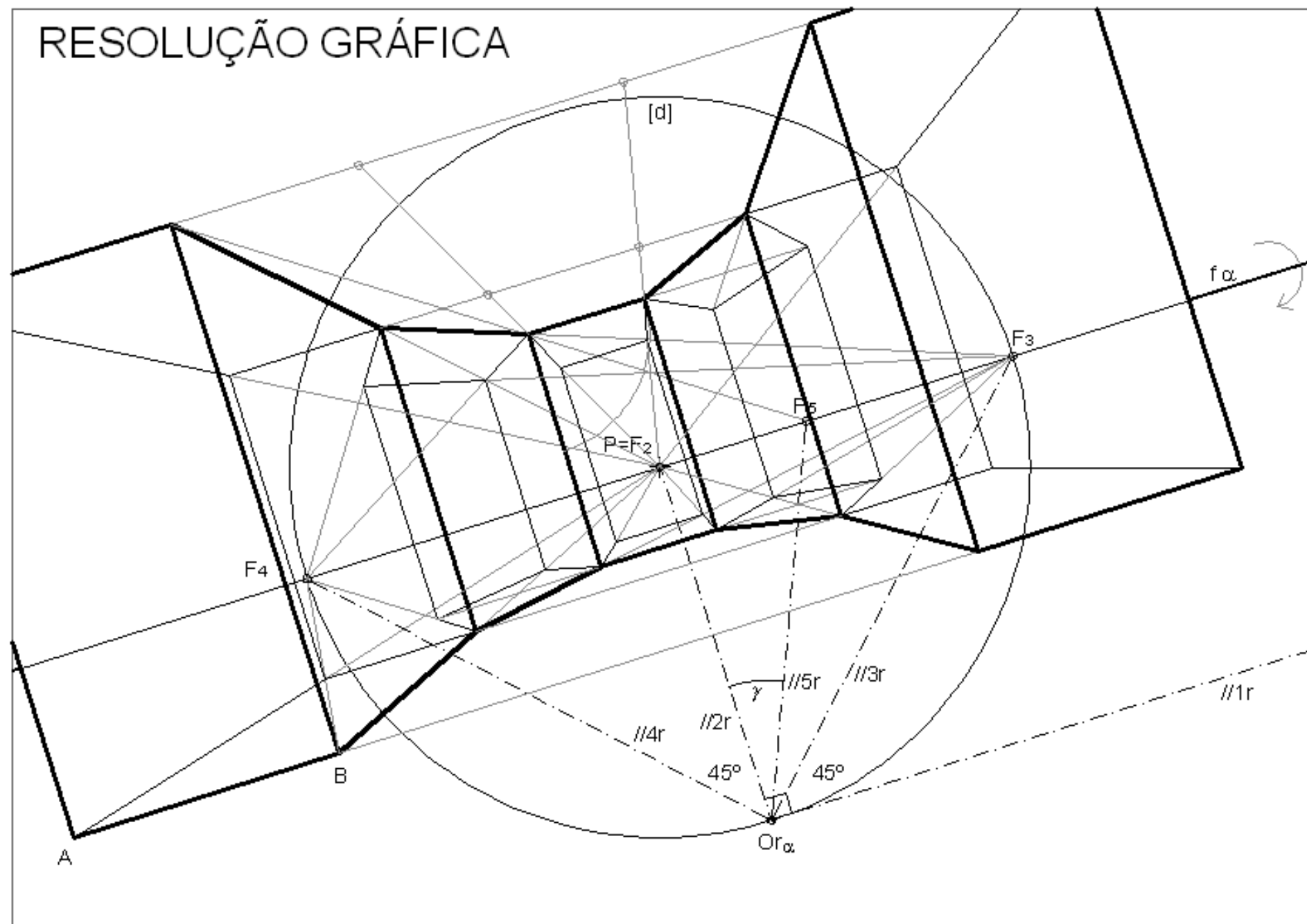
O segmento  $[AB]$  é a perspectiva de um segmento paralelo ao quadro. E os quadrados são bases de prismas orientadas ortogonalmente ao quadro.

A altura dos prismas é o dobro da largura da base.

Represente a perspectiva dos prismas considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.

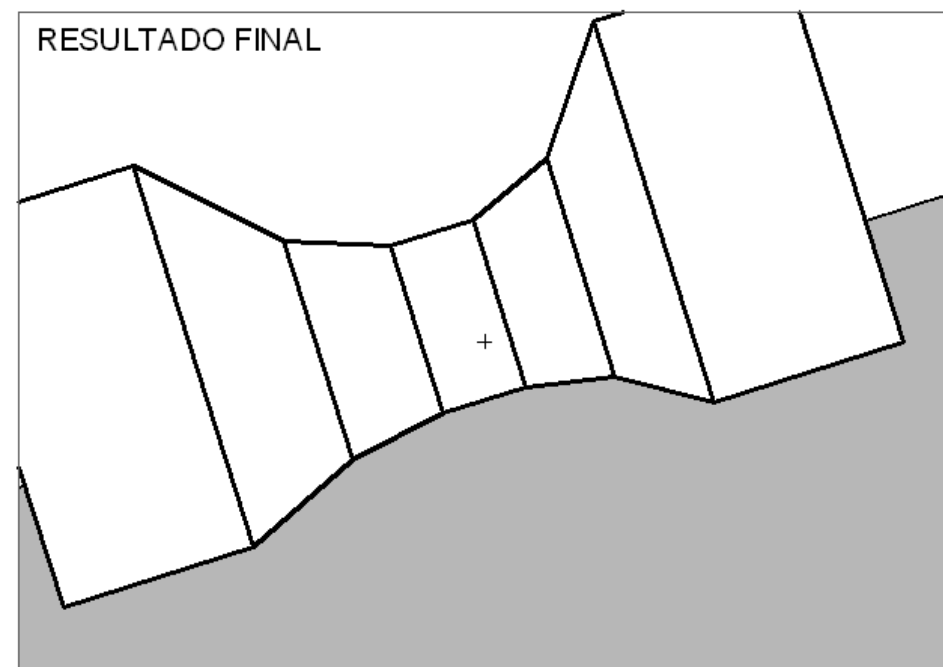
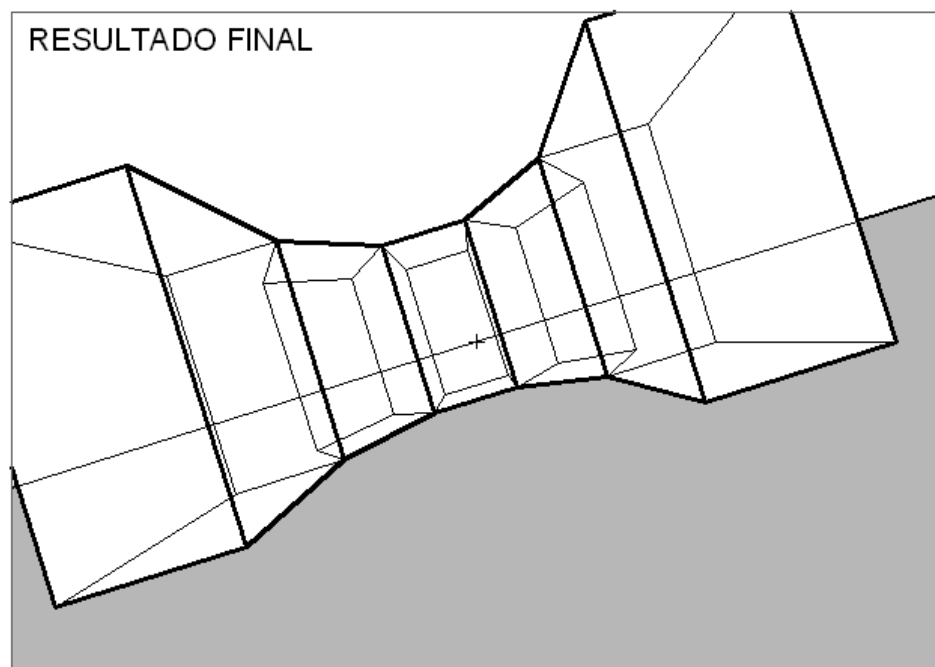


# RESOLUÇÃO GRÁFICA





# EXERCÍCIO 6.1.1



# EXERCÍCIO 6.1.2

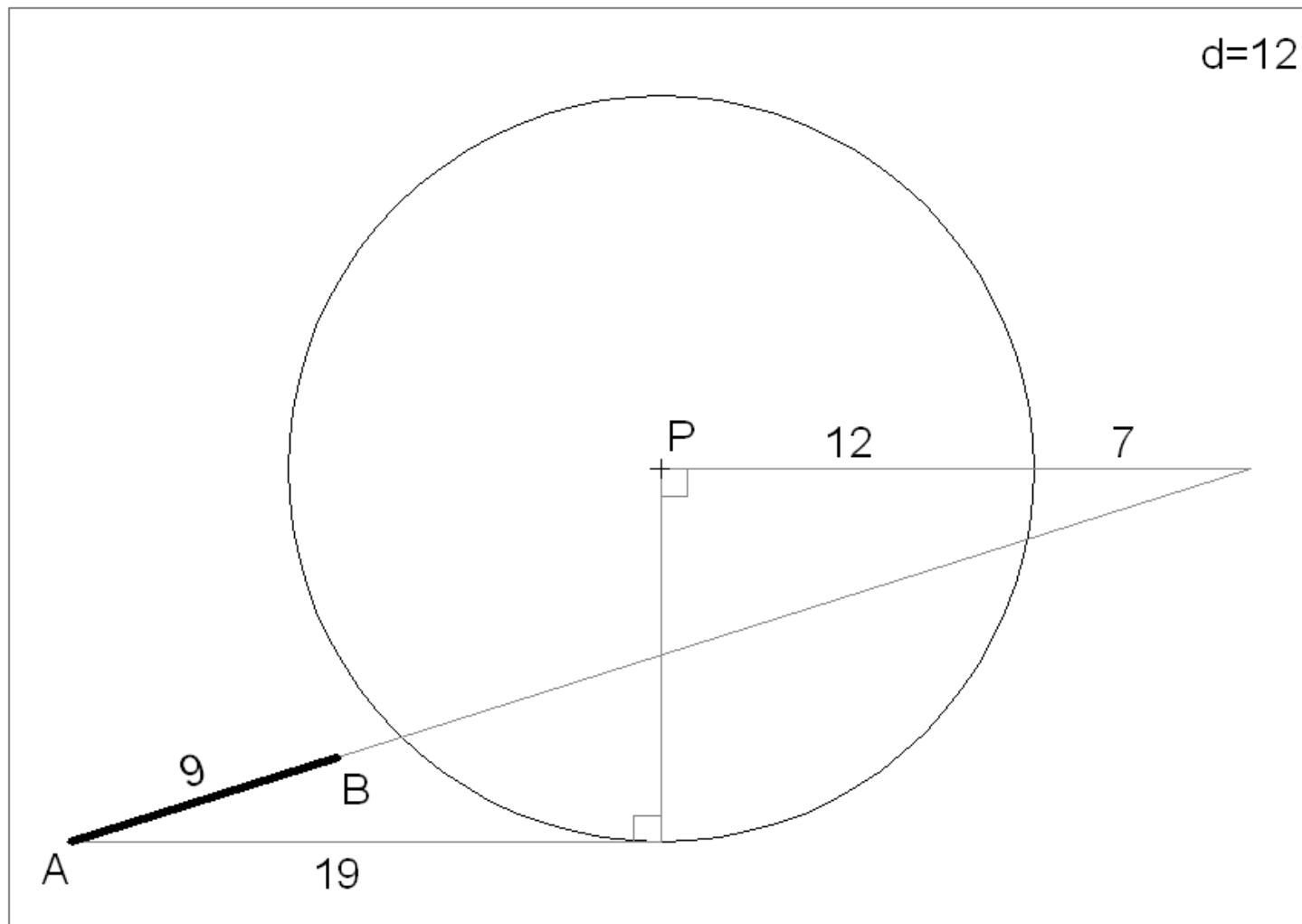
## Problema.

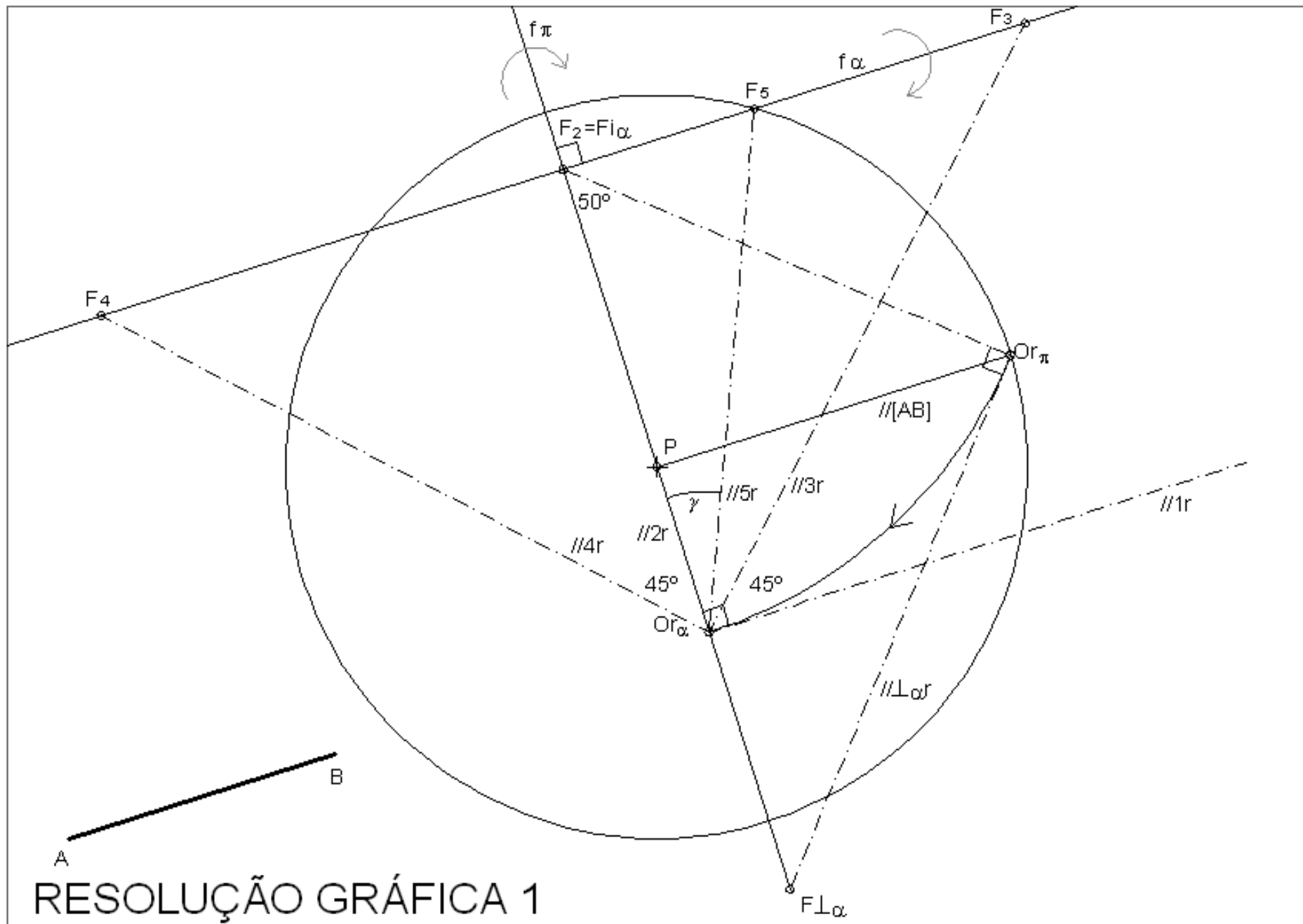
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.

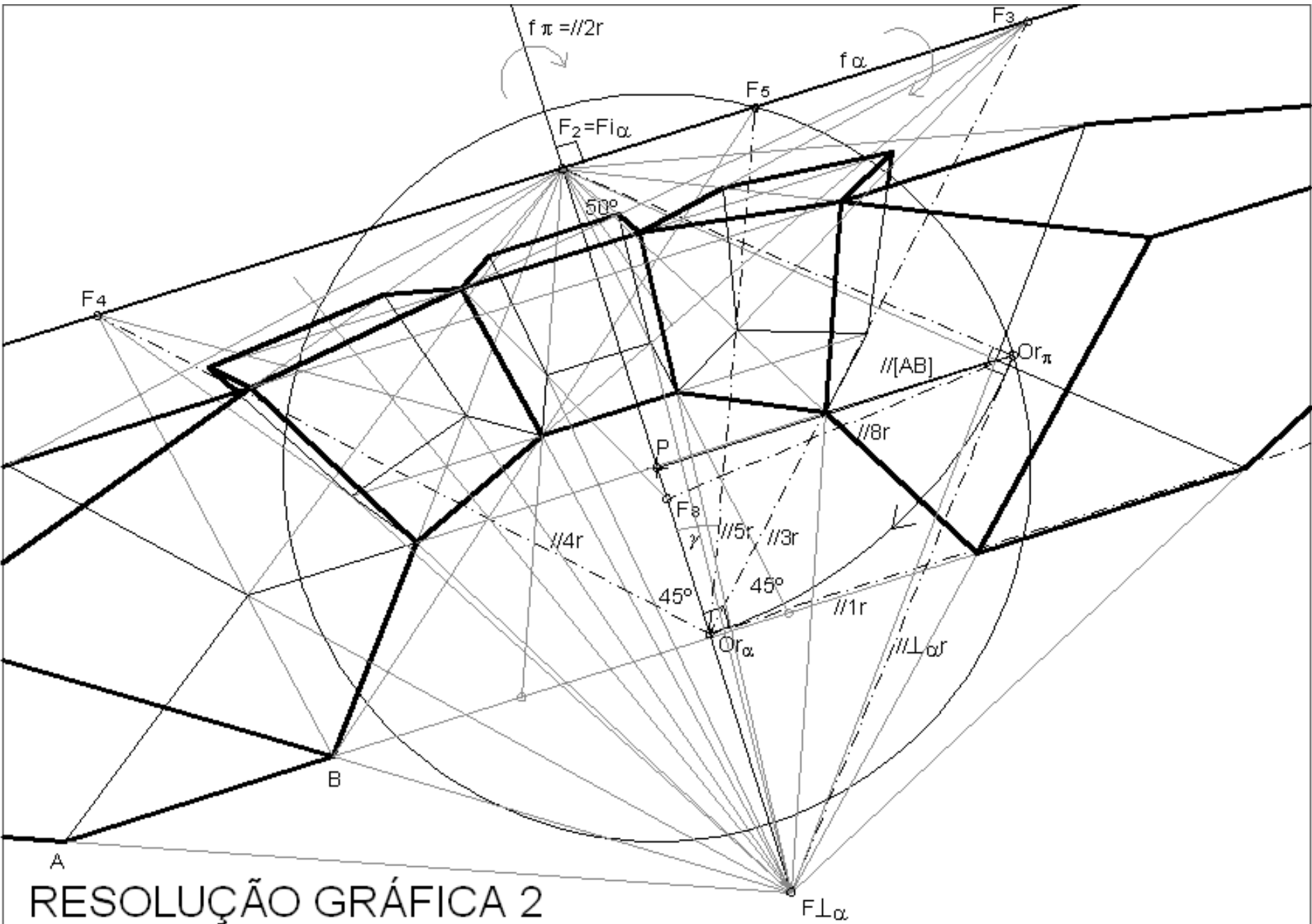
O segmento  $[AB]$  é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.

O segmento  $[AB]$  é a perspectiva de um segmento paralelo ao quadro. E os quadrados são bases de cubos orientadas a  $50^\circ$  (ascendente) com o quadro..

Represente a perspectiva dos cubos considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.



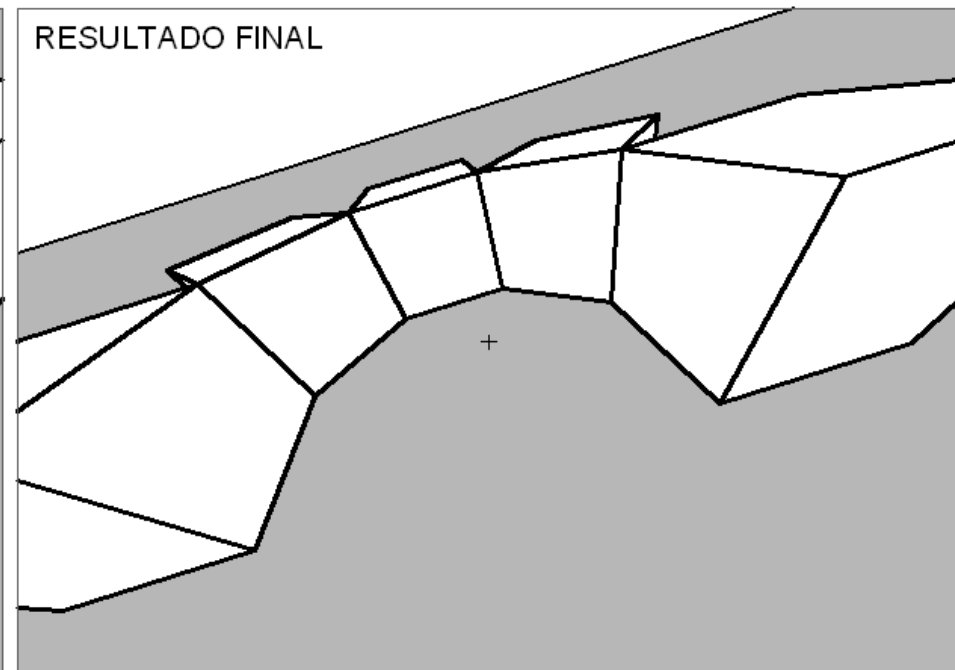
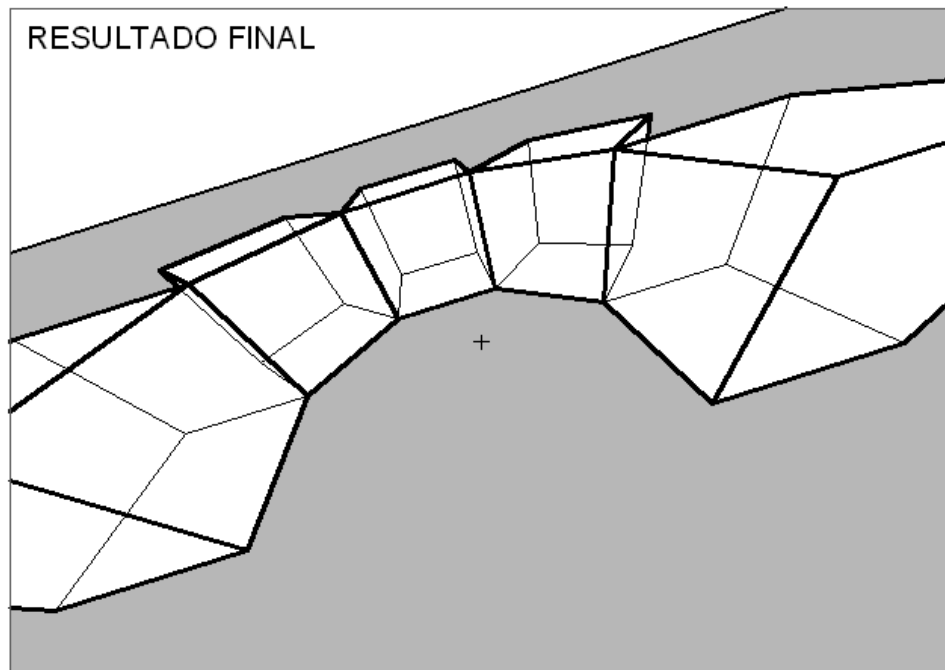




RESOLUÇÃO GRÁFICA 2

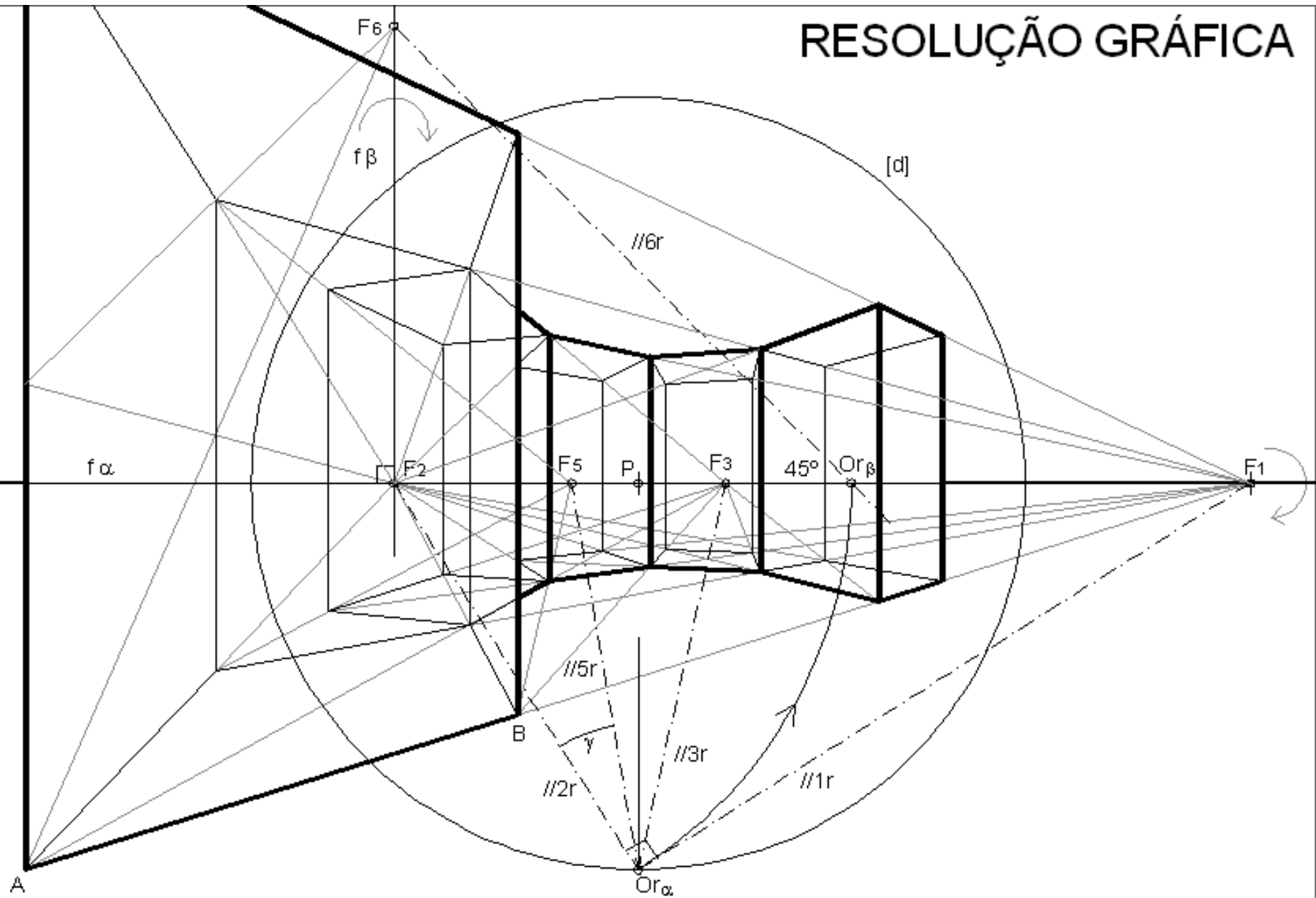


# EXERCÍCIO 6.1.2

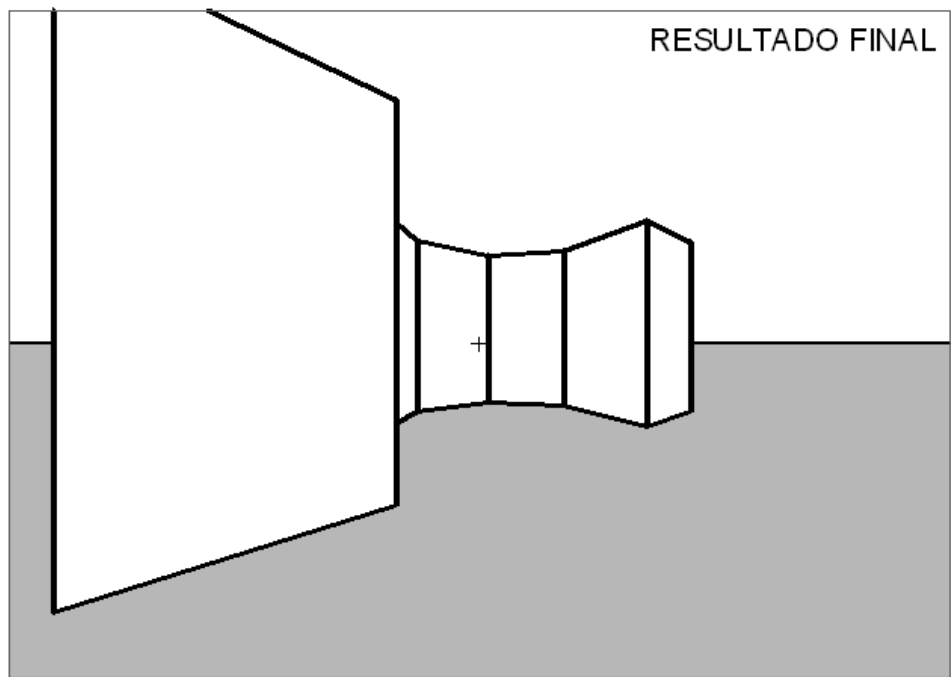
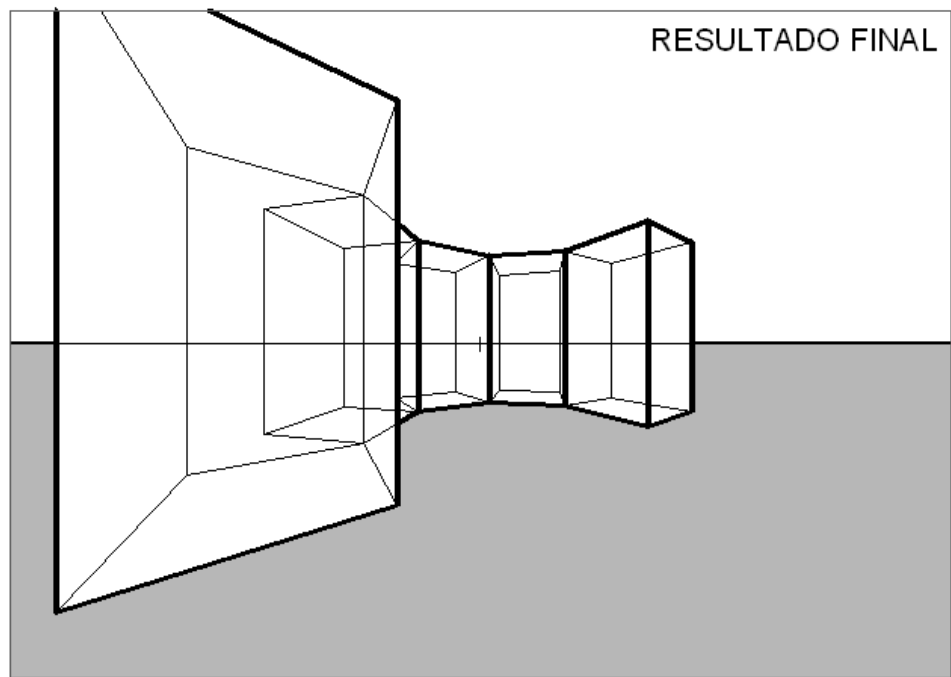




# RESOLUÇÃO GRÁFICA



# EXERCÍCIO 6.1.3





# EXERCÍCIO 6.1.4

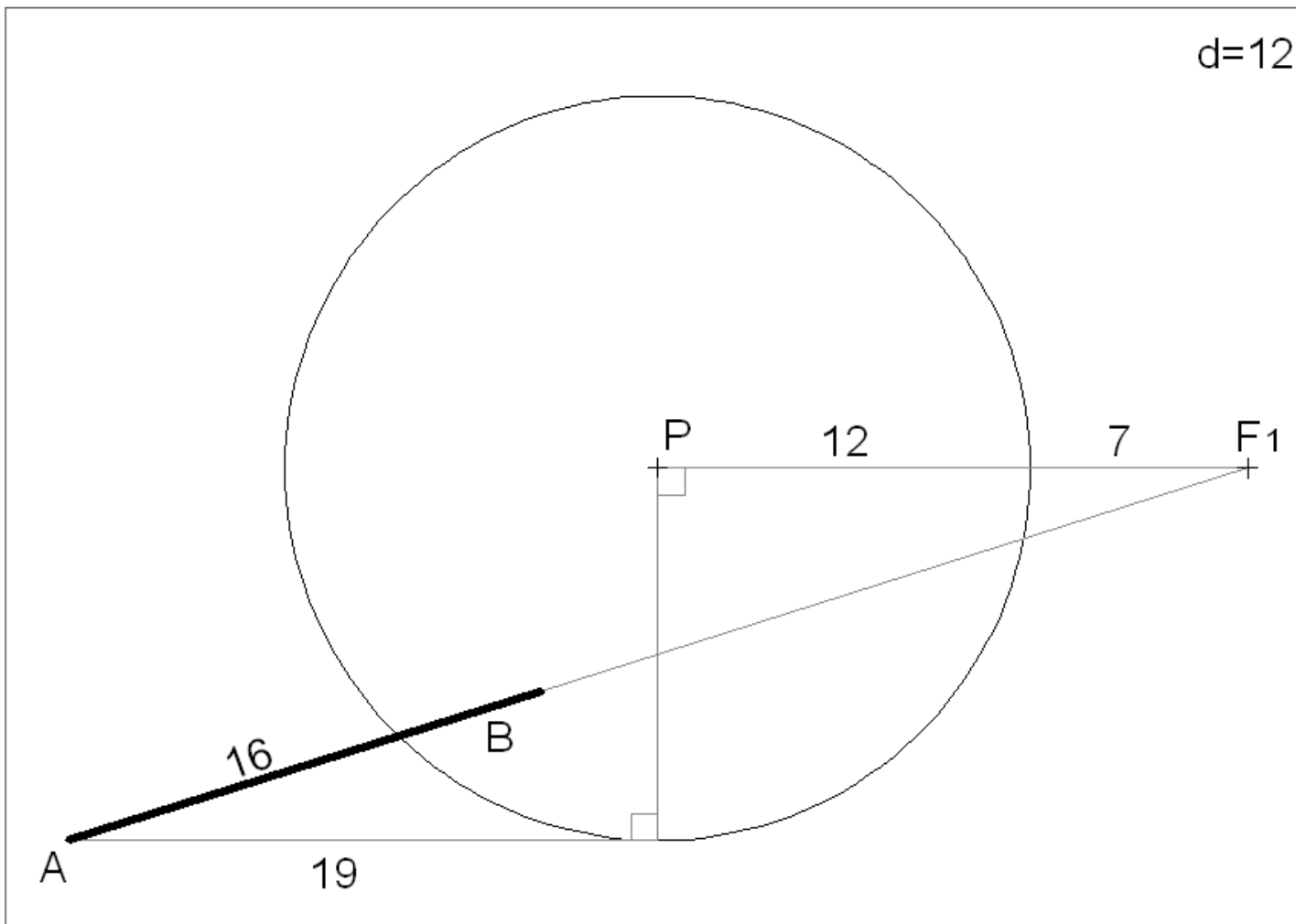
## Problema.

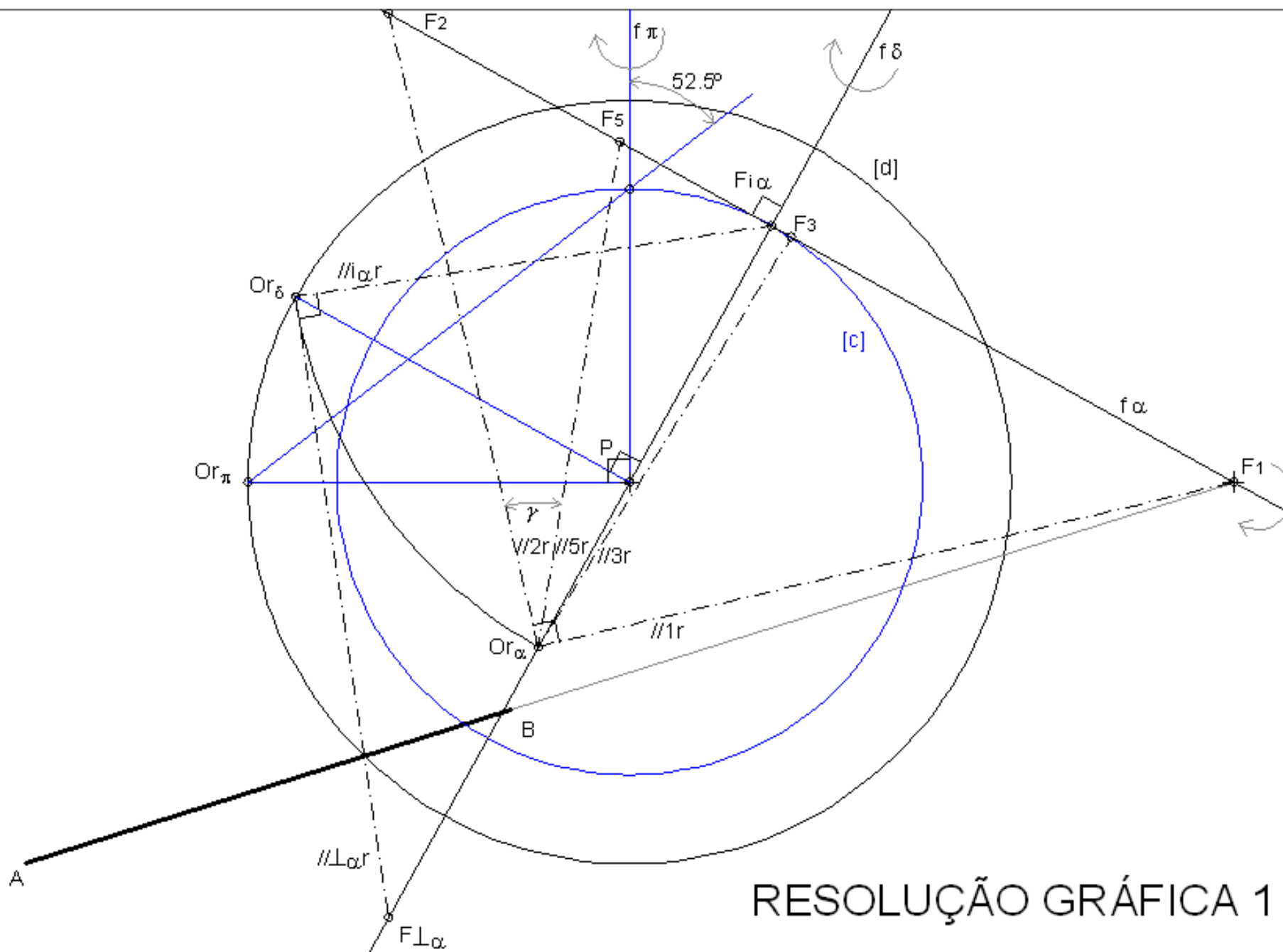
Transponha os dados da figura seguinte para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o cm. As medidas servem para transpor os dados para a folha A3.

O segmento  $[AB]$  é a perspectiva dos pontos de referência A e B atrás mencionados.

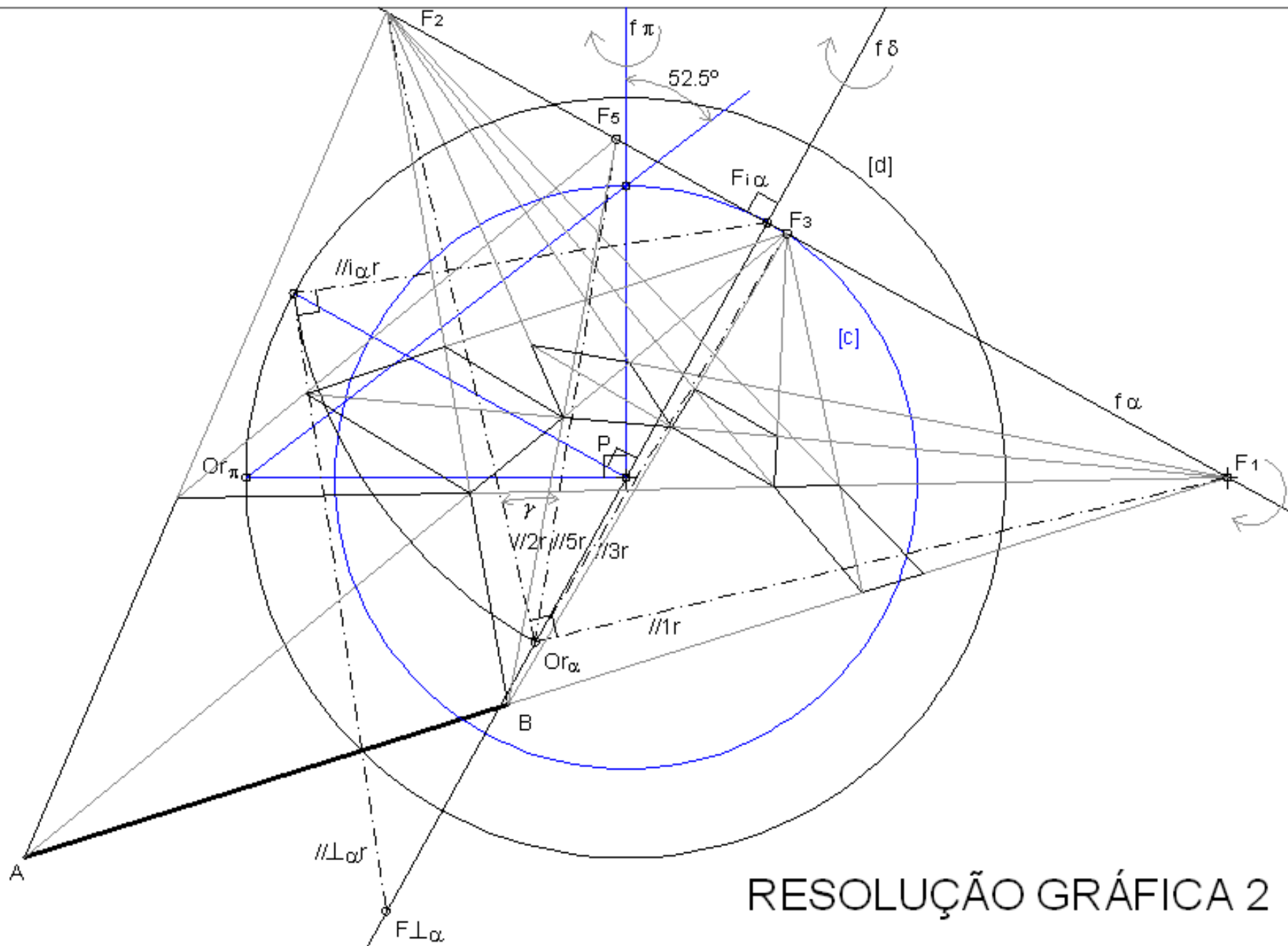
O segmento  $[AB]$  é a perspectiva de um segmento oblíquo ao quadro. E os quadrados são bases de cubos orientadas a  $52.5^\circ$  (ascendente) com o quadro.

Represente a perspectiva dos cubos considerando a distância principal igual a 12cm e o ponto P ao centro da folha.





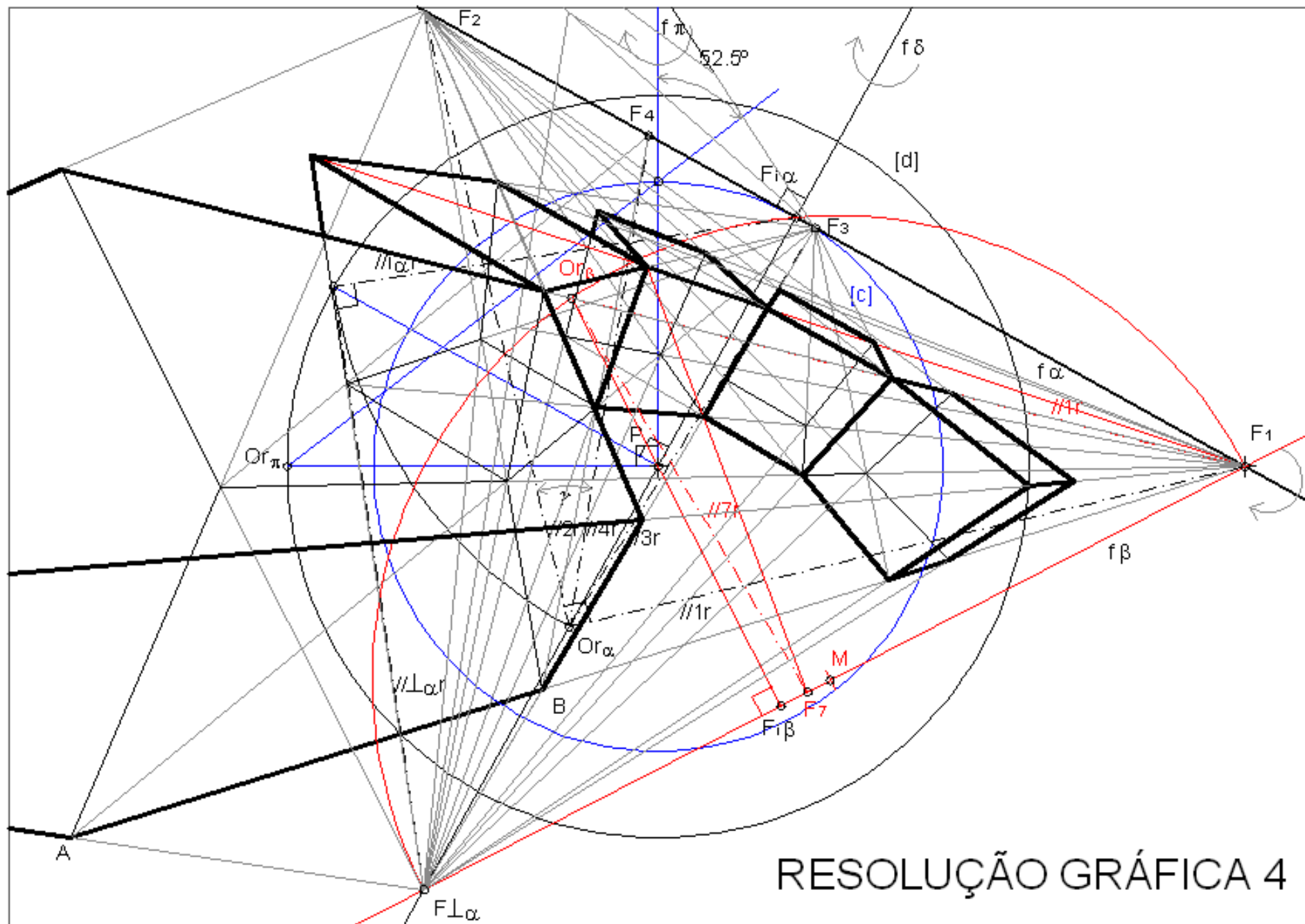
RESOLUÇÃO GRÁFICA 1



RESOLUÇÃO GRÁFICA 2

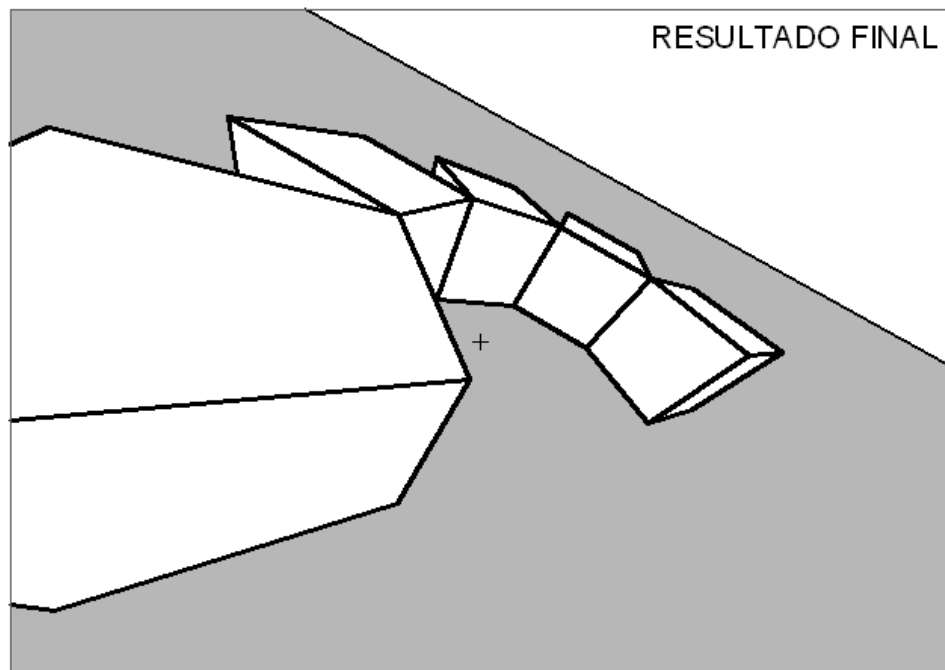
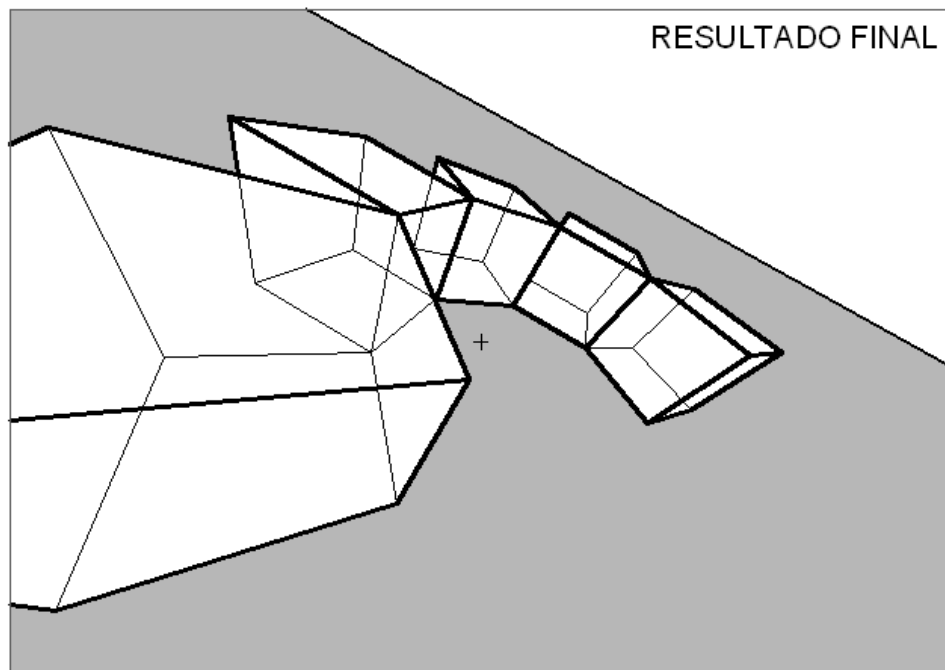






# RESOLUÇÃO GRÁFICA 4

# EXERCÍCIO 1.4



# EXERCÍCIO 6.2

## Problema:

Transponha os dados para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o centímetro (cm).

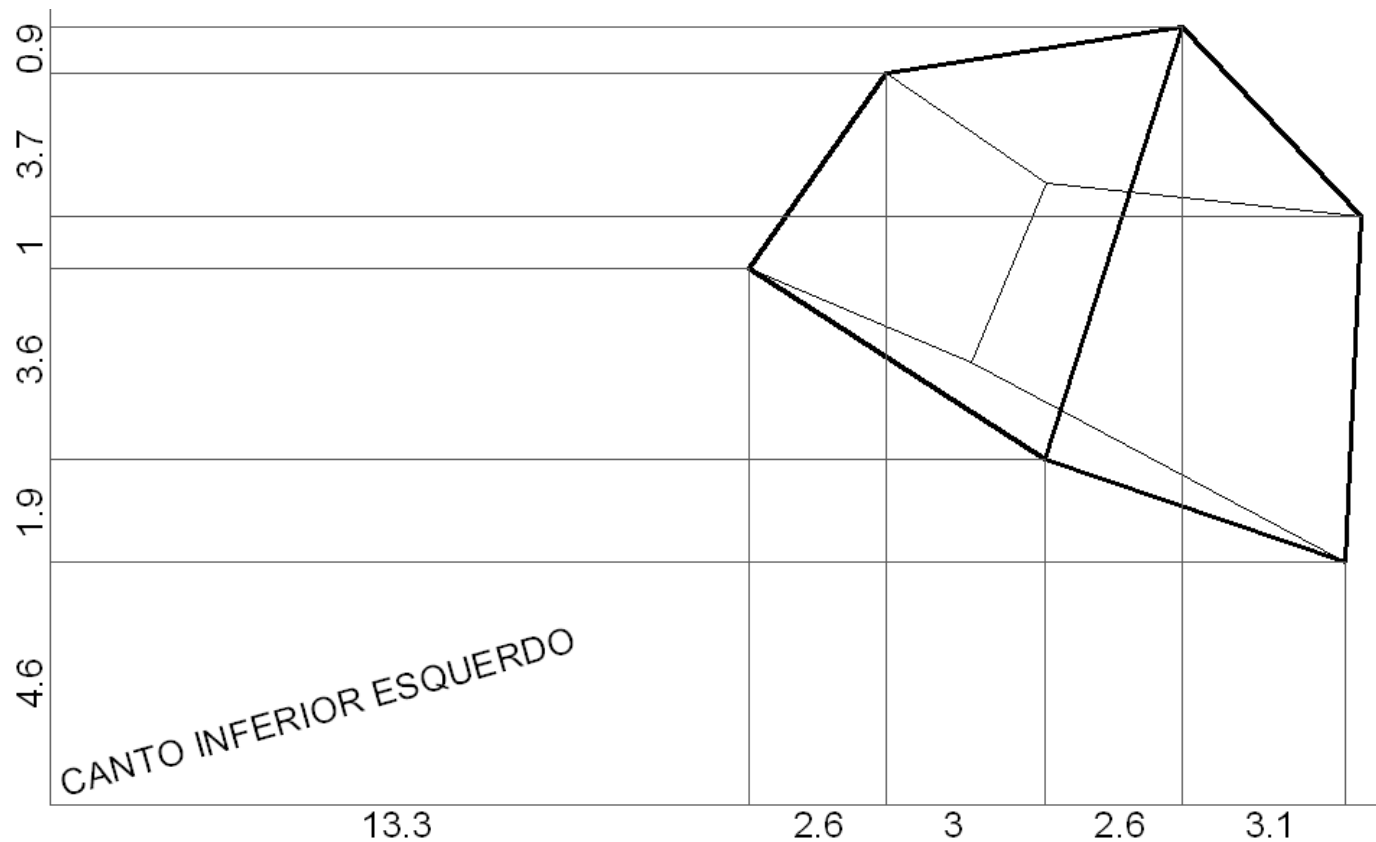
A figura corresponde à perspectiva de um paralelepípedo.

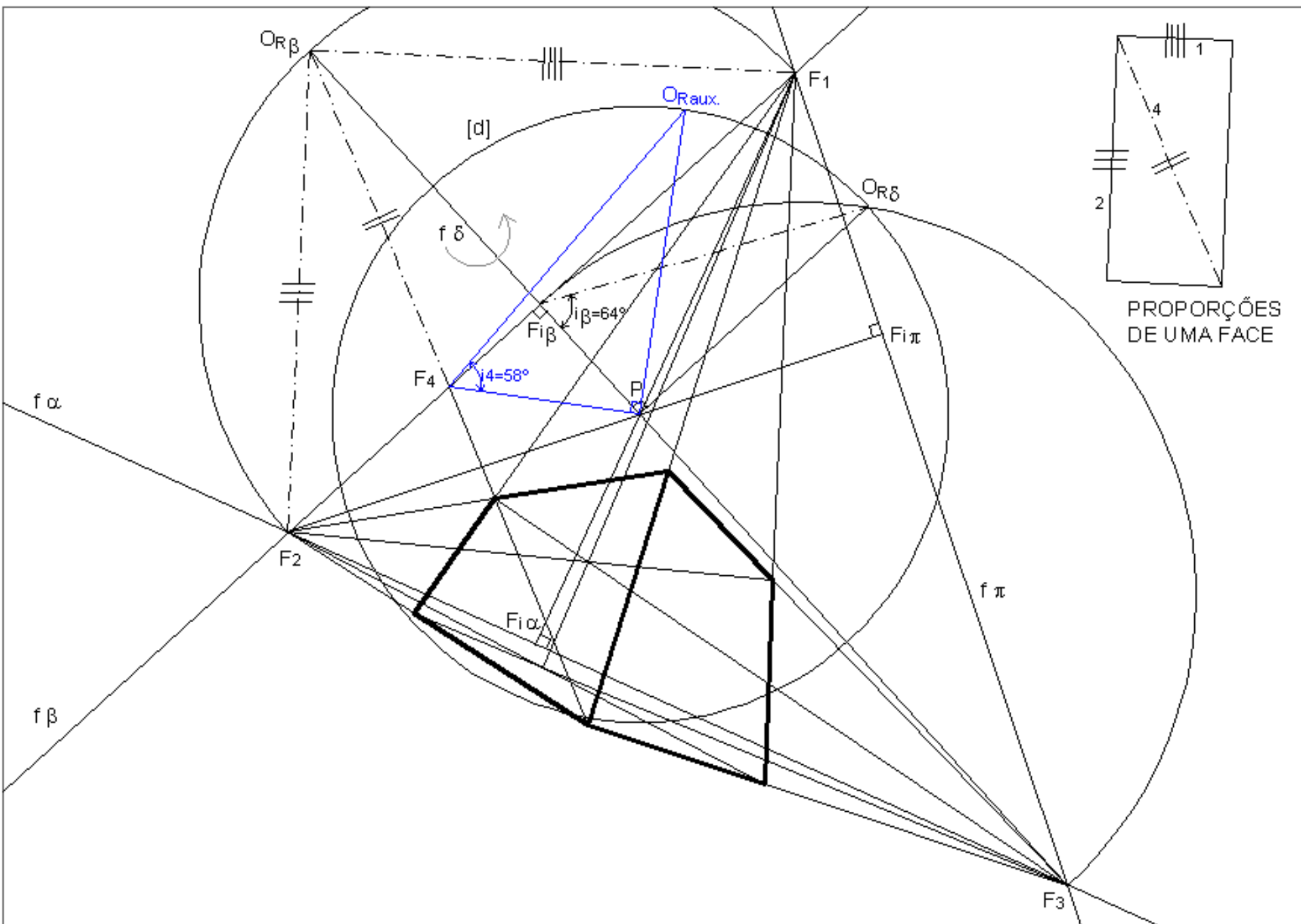
Determine:

- O ponto principal P. (corrigir na vertical: onde está 3.7 deve estar 2.7)
- A distância principal.
- As proporções de uma das faces do paralelepípedo bem como a sua inclinação relativamente ao quadro.
- A inclinação, relativamente ao quadro de uma das diagonais da face referida na alínea anterior.

## Resolução:

Ver figura do slide seguinte.





# EXERCÍCIO 6.3

## Problema:

Transponha os dados para uma folha A3 ao baixo. A unidade é o centímetro (cm).

A figura corresponde à perspectiva de um trapézio. Os lados [AB] e [CD] são frontais medindo o segundo o dobro do primeiro. Os segmentos [BC] e [AD] têm o mesmo comprimento. A distância entre os dois lados frontais é igual ao comprimento do lado frontal maior.

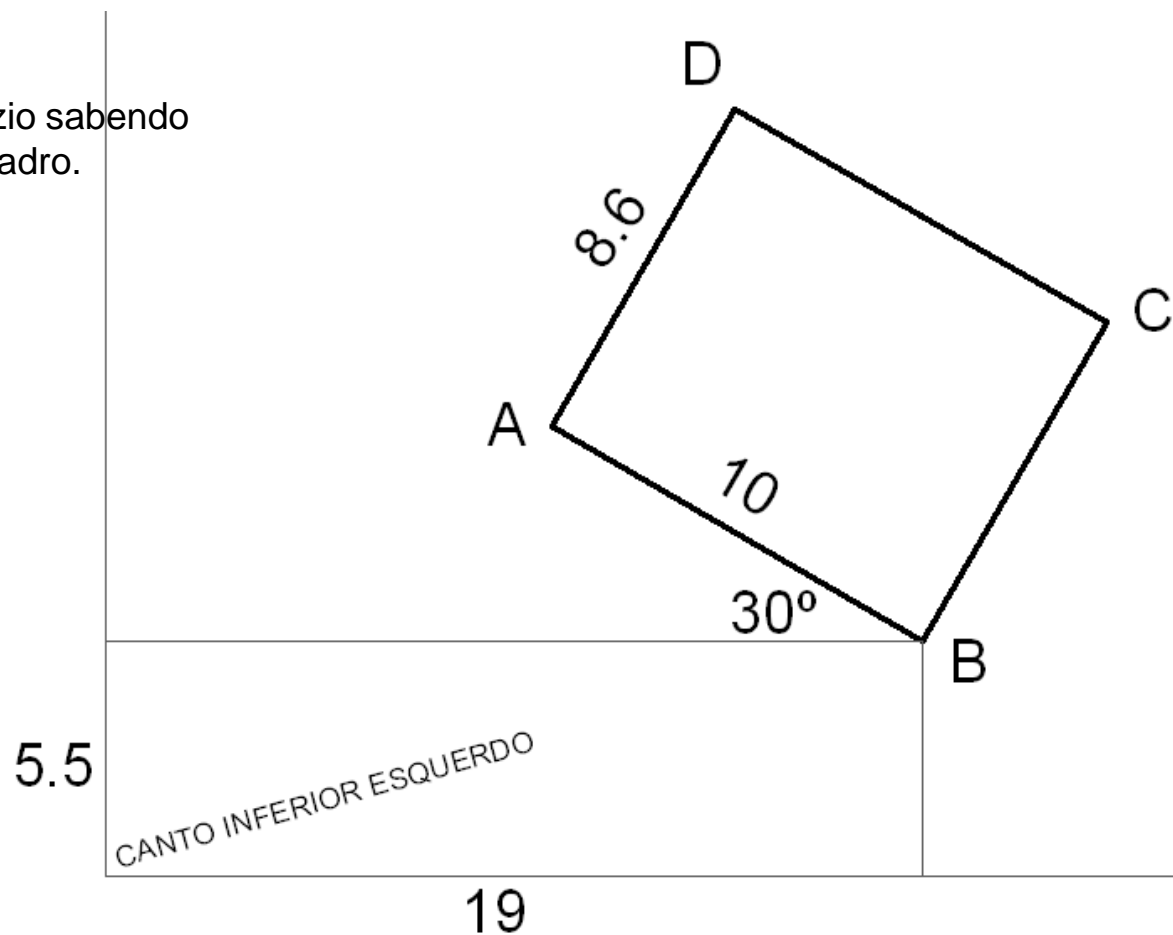
O trapézio está contido num plano a  $60^\circ$  ascendente com o quadro.

Determine:

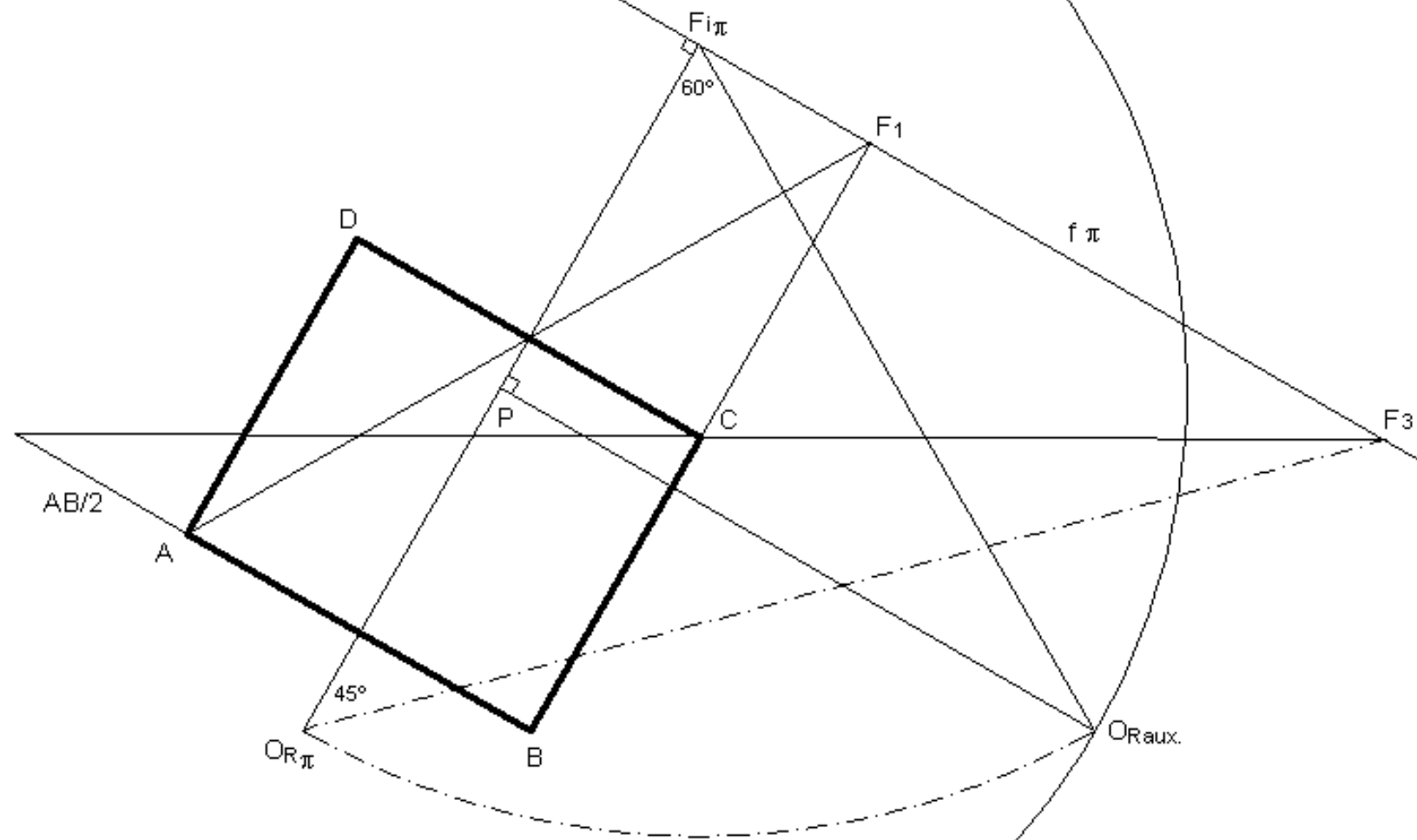
- O ponto principal P.
- A distância principal.
- A verdadeira grandeza do trapézio sabendo que o lado [AB] está contido no quadro.

## Resolução:

Ver figura do slide seguinte.







# Bloco P7

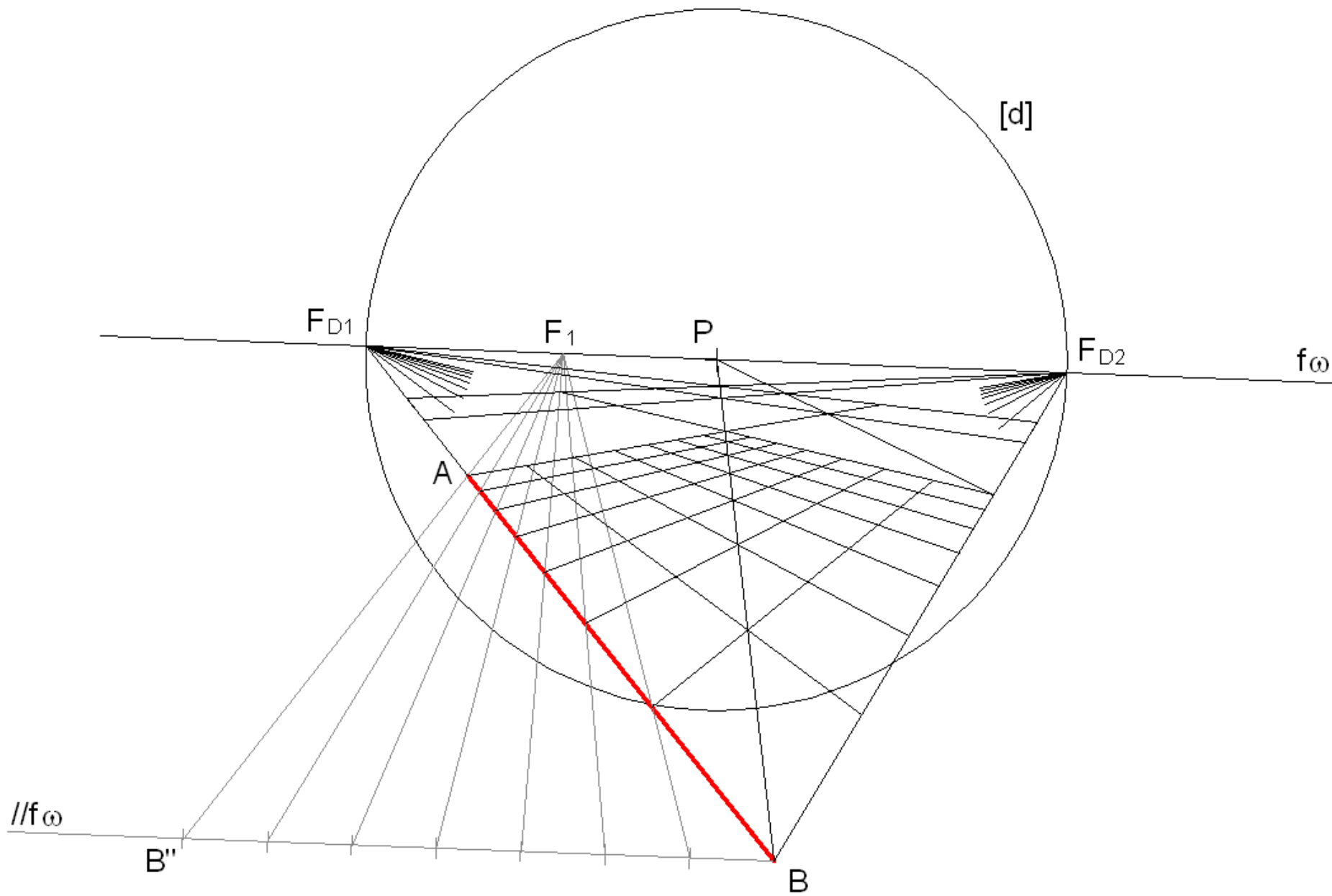
Perspectiva linear de quadro plano:

- Controlo dimensional (teorema de Talles)
- Pontos de fuga de medição
- Controlo posicional (método das coordenadas rectangulares)



## Aplicação ao desenho de grelhas (teorema de Tales)

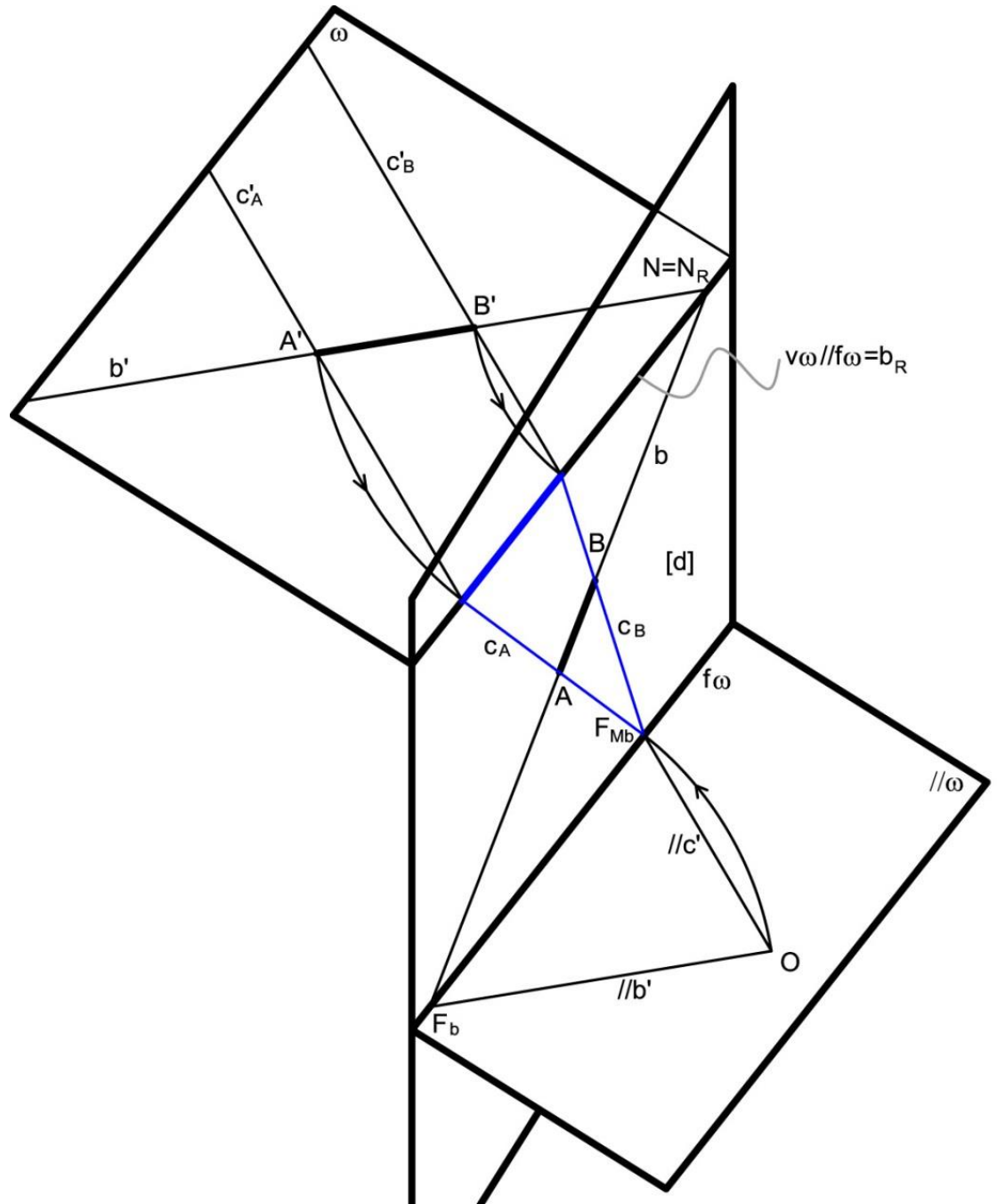
Neste exemplo pretende-se o desenho de uma grelha quadrangular orientada ortogonalmente ao quadro. O Segmento  $[AB]$  corresponde a 7 lados da grelha.



# Pontos de fuga de medição (cordas de arco)

Para determinar a verdadeira grandeza de um segmento de recta [A'B'], conhecido o ponto de nascença da recta b que o contém, o procedimento consiste em:

- 1) Conduzir um plano  $\omega$  qualquer pela recta b.
- 2) Considerar a rotação da recta b no plano  $\omega$  em torno do ponto de nascença da recta, N. Nesta operação a recta  $b_R$  fica coincidente com o traço frontal do plano,  $v\omega$ . Os pontos A' e B' descrevem arcos de rotação com centro em N cujas cordas,  $c'_A$  e  $c'_B$ , são paralelas entre si.
- 3) Pelo ponto O conduz-se a recta projectante com a direcção das cordas,  $//c'$ .
- 4) O traço frontal da recta  $//c'$ , o ponto  $F_{Mb}$ , é o PONTO DE FUGA DE MEDIÇÃO da direcção b ou PONTO DE FUGA DAS CORDAS DE ARCO DE ROTAÇÃO da direcção b.
- 5) Determinado o ponto  $F_{Mb}$  podem conduzir-se as perspectivas das cordas de arco que nos permitem determinar a verdadeira grandeza do segmento [A'B'] (a azul na figura).







# Controlo da posição

O GEOMETRAL é um plano paralelo ao plano do horizonte. A distância entre o geometral e o plano do horizonte designa-se por ALTURA DO OBSERVADOR.

O geometral intersecta o quadro segundo uma recta passante designada por LINHA DE TERRA (LT). A altura do observador também é dada pela distância entre a linha do horizonte e a linha de terra.

O geometral é o plano em que se marcam as projecções horizontais das figuras. É também o plano que determina as ALTURAS POSITIVAS (acima do geometral) e as ALTURAS NEGATIVAS (abaixo do geometral).

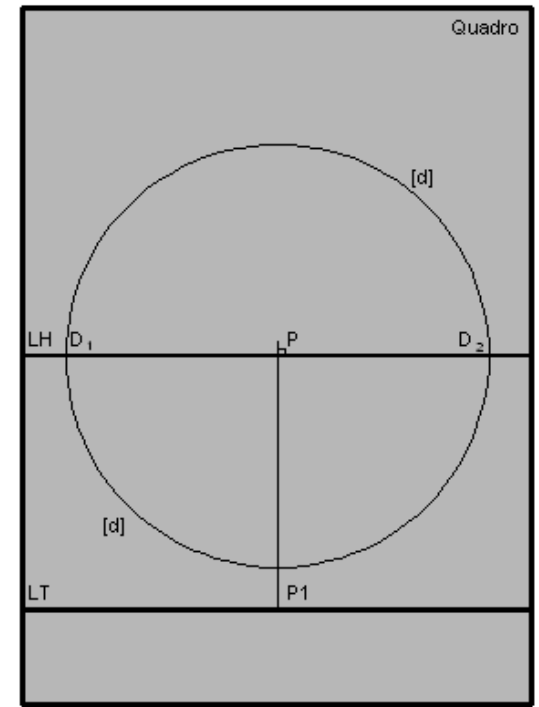
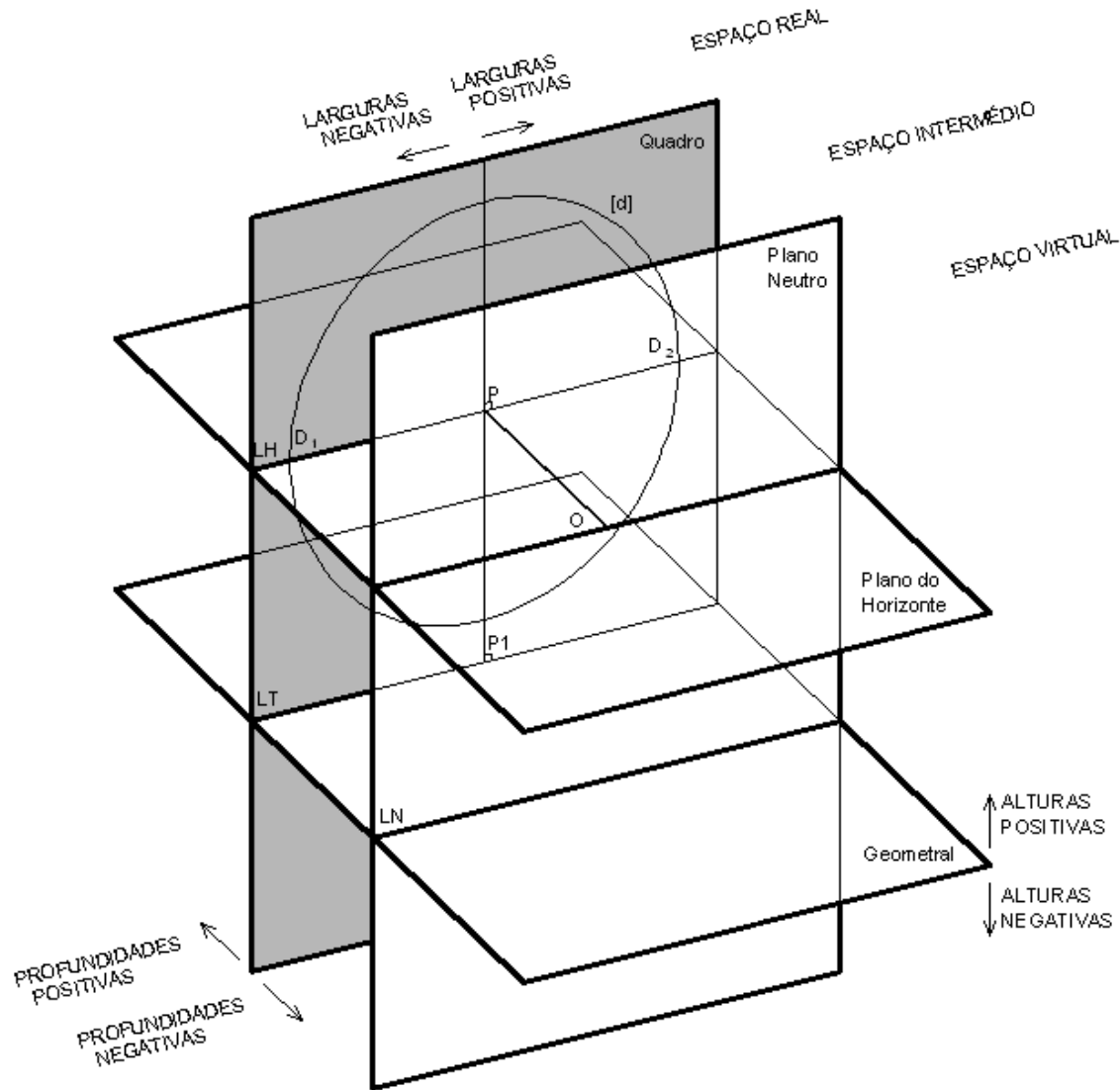
Acresce ainda a noção de LARGURA POSITIVA (à direita do ponto P) e de LARGURA NEGATIVA (à esquerda do ponto P).

Fica assim definido um SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS em que um ponto  $A(a;l;p)$  fica definido pela Altura, Largura e Profundidade (por esta ordem).

Com o perspectógrafo completo fica completa a possibilidade do CONTROLO DA POSIÇÃO e da DIMENSÃO através da marcação de coordenadas. Note-se que já controlávamos estes parâmetros a partir do momento em que estabelecemos a relação das figuras com o quadro (através dos pontos de nascerça das rectas ou dos traços frontais dos planos). O que se acrescenta é a possibilidade da marcação das projecções horizontais (nem sempre necessárias para a resolução dos problemas) das figuras.

No slide seguinte ilustra-se o perspectógrafo completo.

# O perspectógrafo completo e a definição de um sistema de coordenadas





# Bloco P8

Perspectiva linear de quadro plano:

- Traços de rectas e planos
- Secções
- Rebatimentos de planos



# Traços de planos e intersecções.

Completado o perspectógrafo (com a inclusão do geometral) e abordada a questão da marcação de pontos por coordenadas torna-se agora possível fazer o estudo do alfabeto do ponto, da recta e do plano numa abordagem mais clássica da geometria descritiva, bem como tratar de todos os problemas de intersecções e métricos.

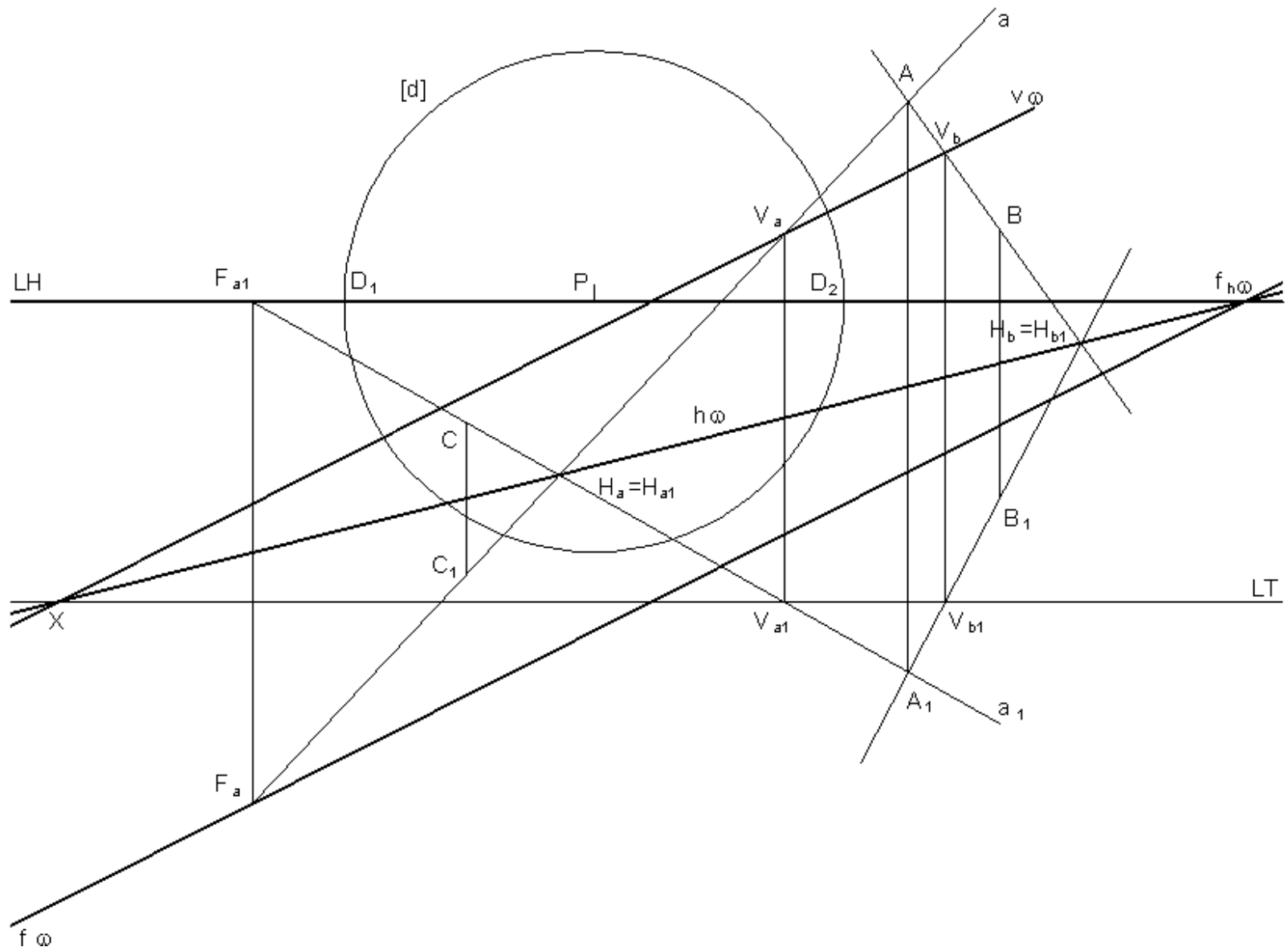
Não trataremos esta questão de forma exhaustiva.

Damos porém dois exemplos a comentar na aula.

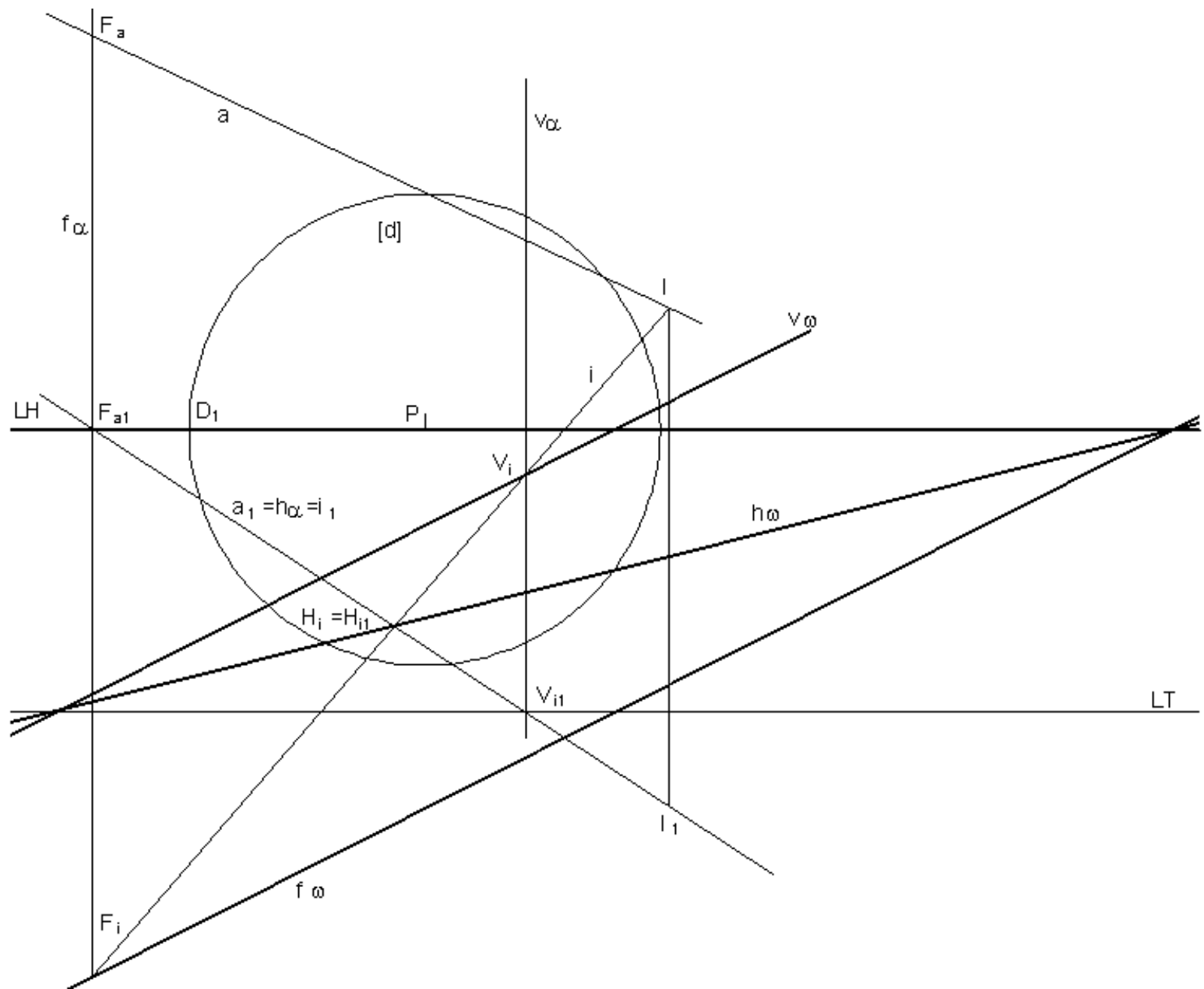
No primeiro exemplo determinaremos os traços (frontal e horizontal) e a linha de fuga de um plano definido por três pontos, A, B e C.

No segundo exemplo determinaremos o ponto de intersecção de uma recta ( $a$ ) com um plano ( $\omega$ ) dados os seus traços e linha de fuga. Note que o traço frontal de um plano é sempre paralelo à linha de fuga e que o traço horizontal do plano é a sua recta de altura 0, tendo em comum com o traço frontal um ponto da linha de terra e tendo a sua perspectiva ponto de fuga na intersecção da linha de fuga do plano com a linha do horizonte.

# Determinação dos traços de um plano



# Intersecção de uma recta com um plano



## Traços de rectas e planos; a noção de profundidade

Ao ponto de intersecção de uma recta com o quadro dá-se o nome de PUNTO DE NASCENÇA da recta ou TRAÇO FRONTAL DA RECTA e nota-se por N com índice designativo da recta.

À recta de intersecção de um plano com o quadro dá-se o nome de TRAÇO FRONTAL DO PLANO e nota-se por v com índice designativo do plano.

Relembra-se que figuras contidas no quadro apresentam-se em verdadeira grandeza (à parte da escala do desenho) e que figuras contidas em planos frontais mantêm as proporções na perspectiva (à parte de uma redução se tiverem PROFUNDIDADE POSITIVA (“para lá” do quadro) ou ampliação se tiverem uma PROFUNDIDADE NEGATIVA (“para cá” do quadro, entre este e o observador).

Definida a relação de uma figura com o quadro (através de pontos de nascença de rectas ou de traços frontais de planos) torna-se possível o CONTROLO DIMENSIONAL e POSICIONAL da figura. Até este momento a representação de uma figura era apenas feita através do CONTROLO DIRECCIONAL o que deixava a posição e dimensão indeterminadas.

Note que figuras situadas “atrás” do observador também têm projecção cónica no quadro, embora invertida. Esta projecção pode ser considerada por vezes com traço auxiliar.

Figuras contidas no plano frontal passante pelo observador (PLANO NEUTRO) não têm perspectiva, ou dito de outro modo, têm perspectiva imprópria. Note que para estas figuras as rectas projectantes estão contidas no plano neutro, e por isso são paralelas ao quadro.

Ao espaço com profundidade positiva dá-se o nome de ESPAÇO REAL.

Ao espaço entre o quadro e o plano neutro dá-se o nome de ESPAÇO INTERMÉDIO.

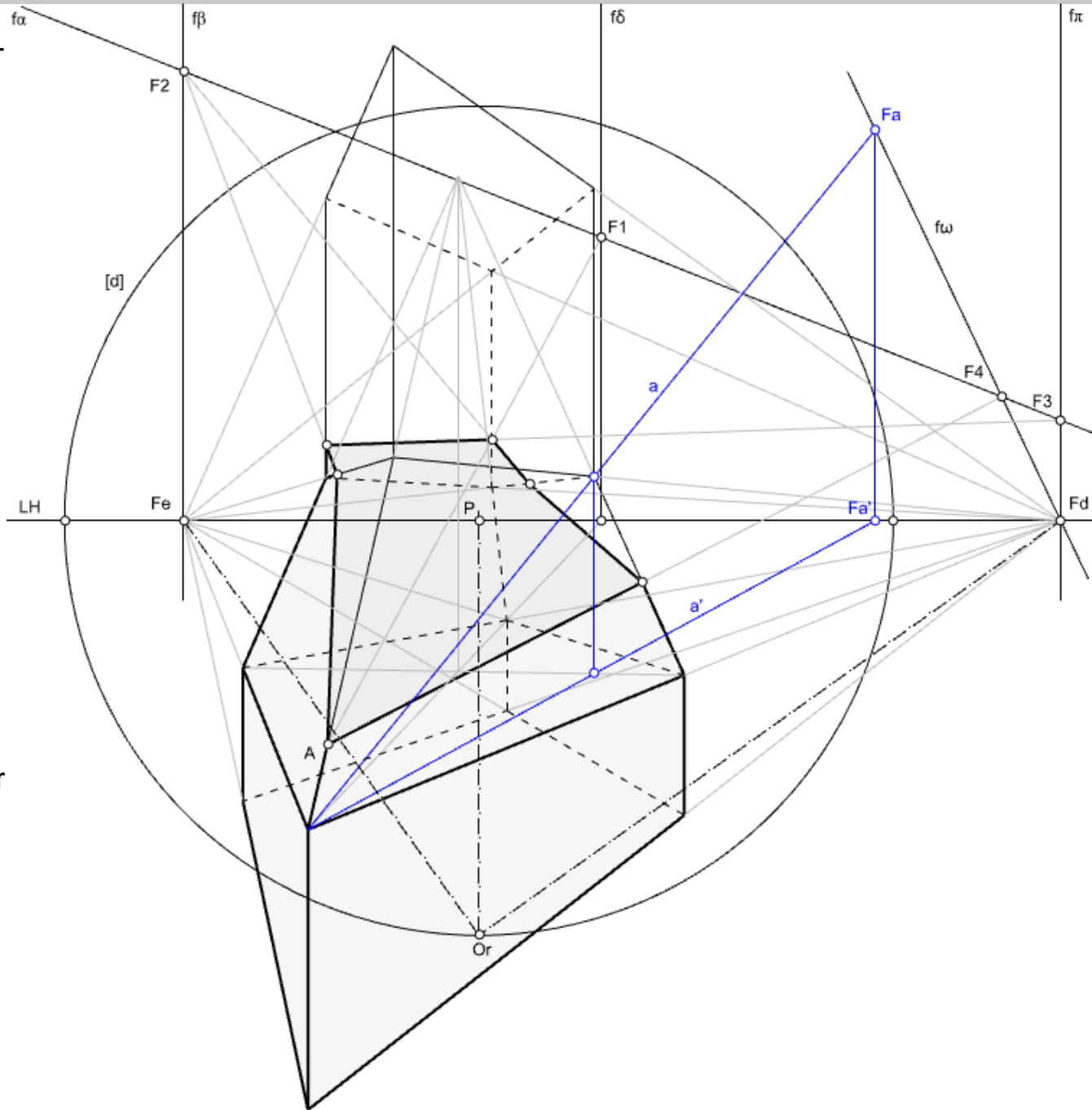
Ao espaço situado “atrás” do observador, dá-se o nome de ESPAÇO VIRTUAL.





# Secções

No próximo exemplo, pretende-se a secção produzida num sólido composto por um plano  $\alpha$ , de que é conhecida a orientação, passante por um ponto A de uma aresta do sólido. A aresta que contém o vértice A corresponde a uma parte do volume que se pode considerar composta por um tronco de pirâmide. Neste caso, começou por considerar-se o plano vertical passante por A e pela aresta oposta cuja linha de fuga é  $f\delta$ . Na intersecção entre  $f\delta$  e  $f\alpha$  determina-se F1. Na recta A.F1 determina-se o primeiro ponto da secção. Por esse ponto conduzem-se rectas com direcção 2 e 3. Para determinar a intersecção entre  $\alpha$  e  $\omega$  (plano da face trapezoidal à direita de A), determinou-se a linha de fuga  $f\omega$  passante pelos pontos de fuga Fd e Fa (sendo a uma recta do plano  $\omega$ ).



# Bloco P9

Perspectiva linear:  
- Rebatimentos.



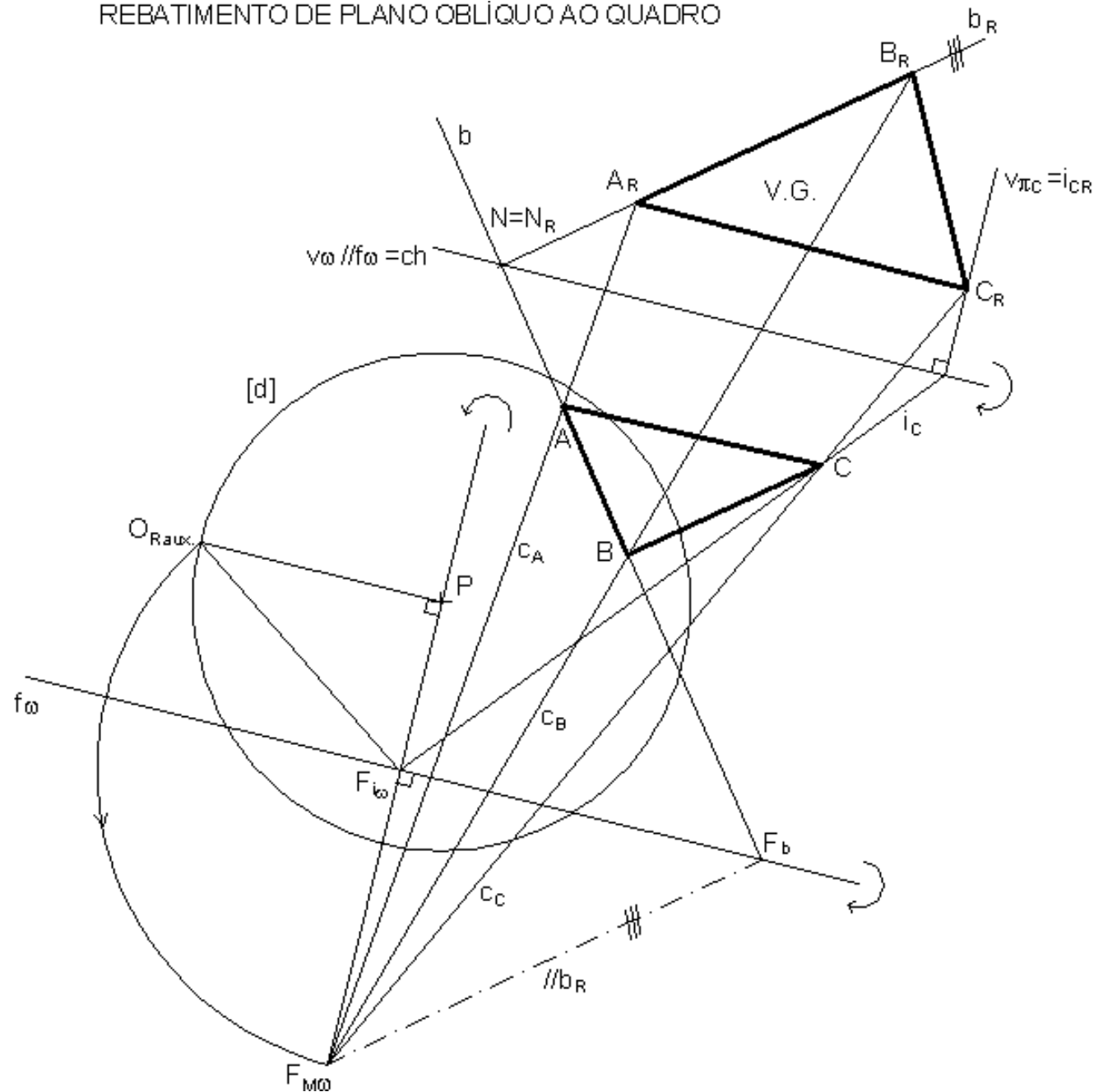


# Rebatimento de planos oblíquos ao quadro

## REBATIMENTO DE PLANO OBLÍQUO AO QUADRO

A determinação do ponto de fuga de medição do rebatimento do plano  $\omega$ , o ponto  $F_{M\omega}$  não é mais que a determinação do observador rebatido para o quadro em torno da linha de fuga  $f\omega$ . Este traçado é idêntico ao que já utilizámos para definir pontos de fuga de direcções contidas em orientações conhecidas.

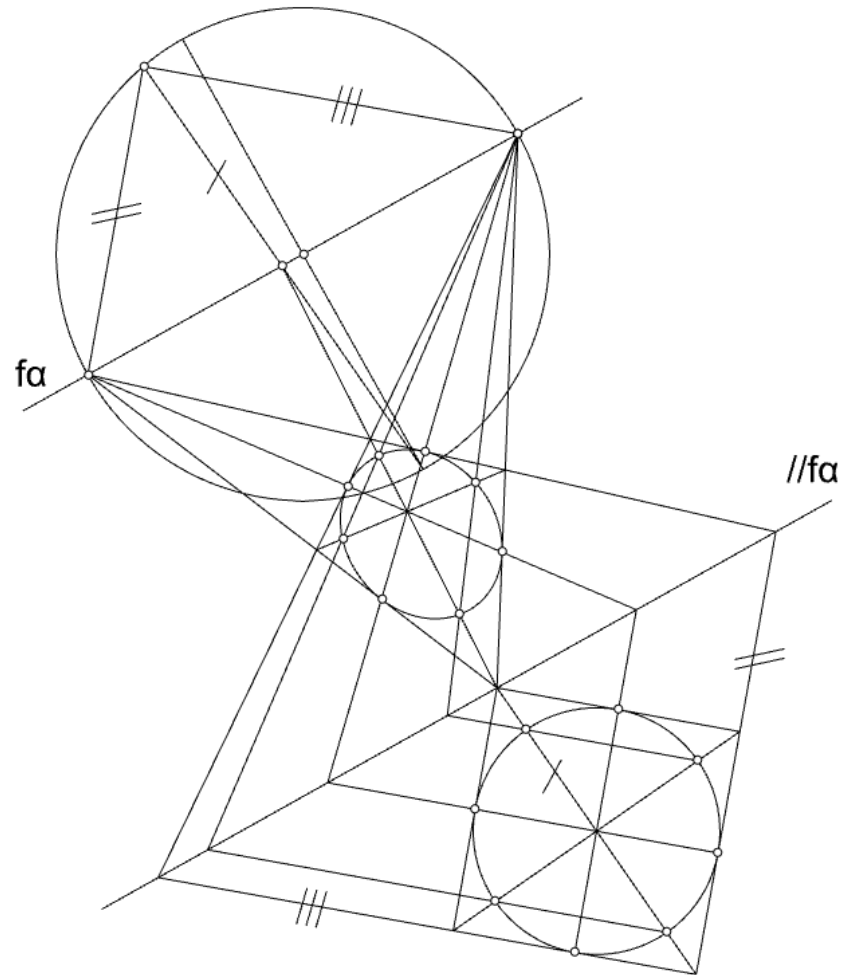
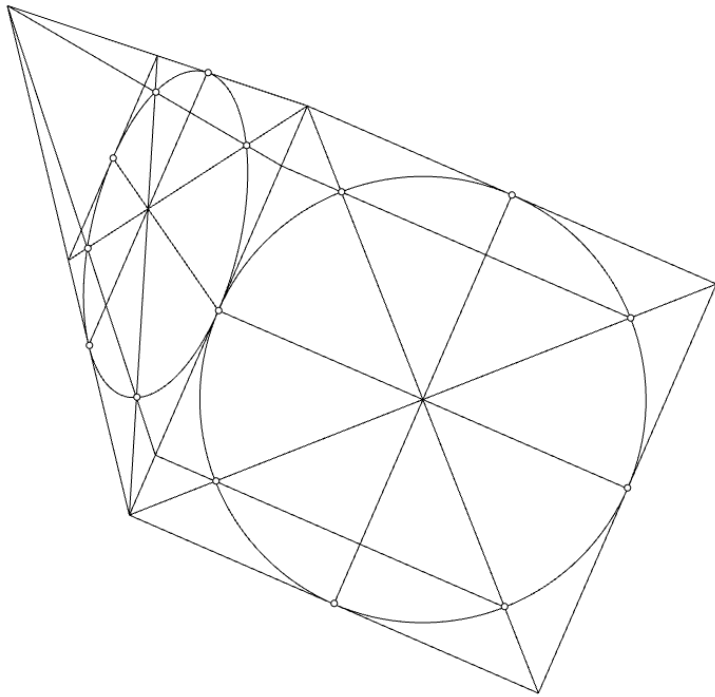
Note que para além de ser possível tirar partido dos pontos contidos na charneira do rebatimento, como é o caso do ponto  $N$ , também é possível tirar partido do conhecimento da direcção. Note que a recta  $b_R$  é paralela à recta  $//b_R$ .





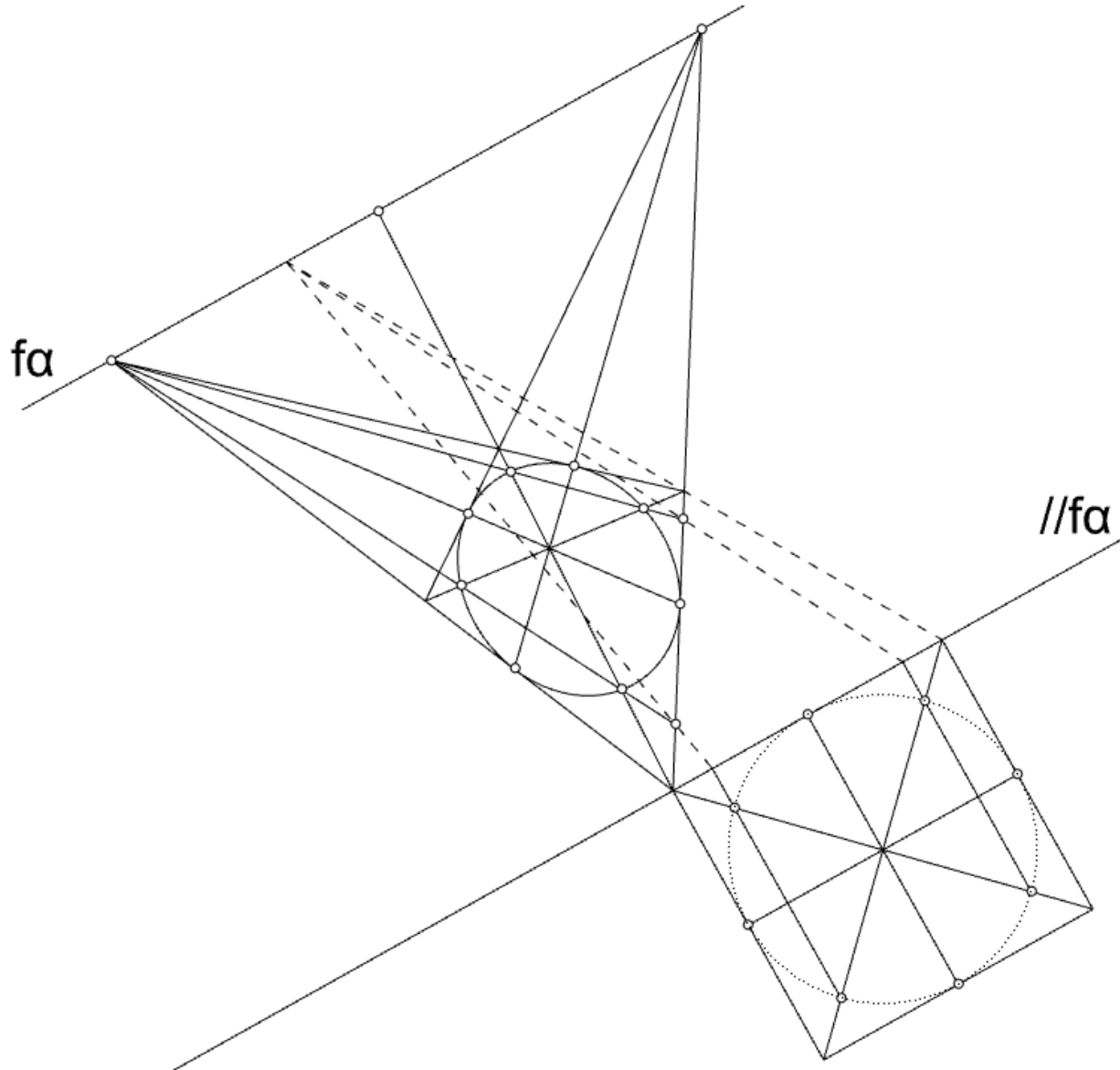
## Desenho de curvas (circunferência) através do rebatimento

A representação da circunferência em perspectiva poderá dá origem à representação de uma linha cônica (circunferência, elipse, parábola ou hipérbole). A forma mais simples de resolver a sua representação corresponde a considerar um quadrado circunscrito. Por meio de uma homologia (de que o rebatimento, em termos gráficos, é caso particular) determina-se um conjunto de pontos que permitirão desenhar uma aproximação à curva). Nas figuras seguinte sumarizam-se os caso em que o quadrado circunscrito apresenta dois lados paralelos ao quadro (esquerda) e o caso em que isso não acontece (direita).



## Desenho de curvas (circunferência) através do rebatimento

Porém, a resolução deste segundo caso pode ser resolvida de forma muito mais simples se fizermos uso do teorema de Tales. Note-se que para desenhar a perspectiva não é necessário conhecer a verdadeira grandeza da circunferência. Neste caso não estamos a efectuar nenhum rebatimento.

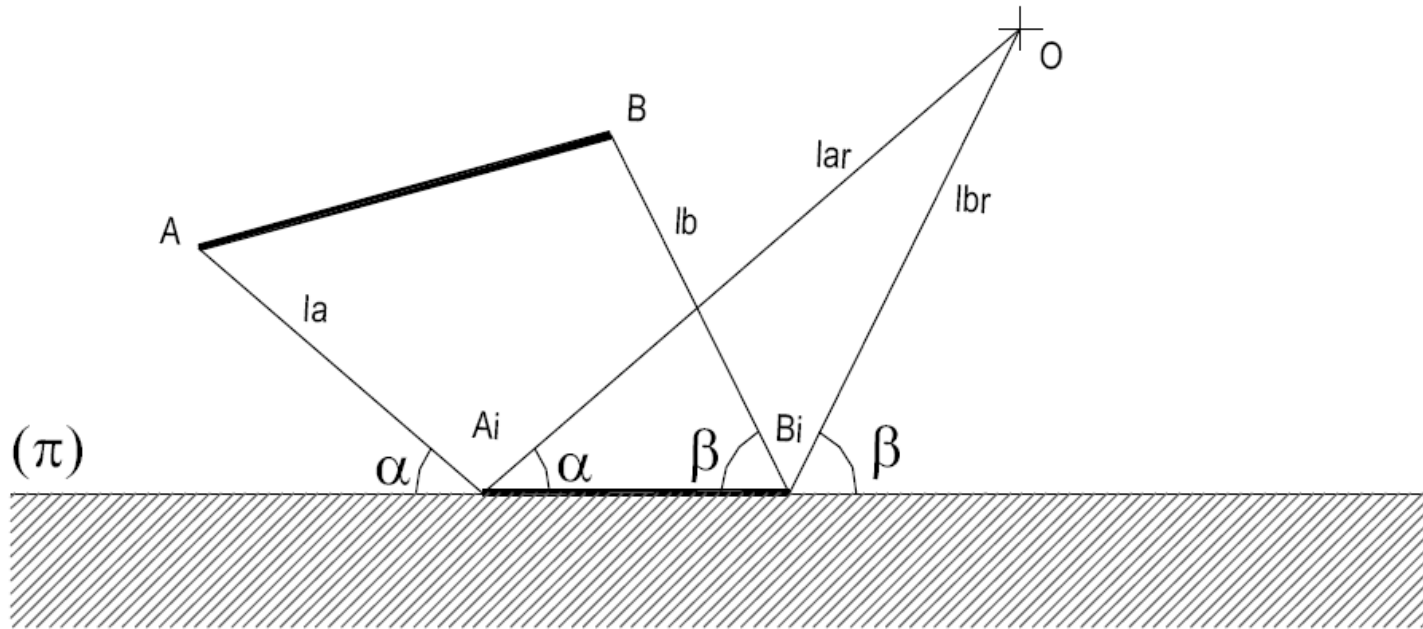


# Bloco P10

Perspectiva linear:  
- Reflexos.

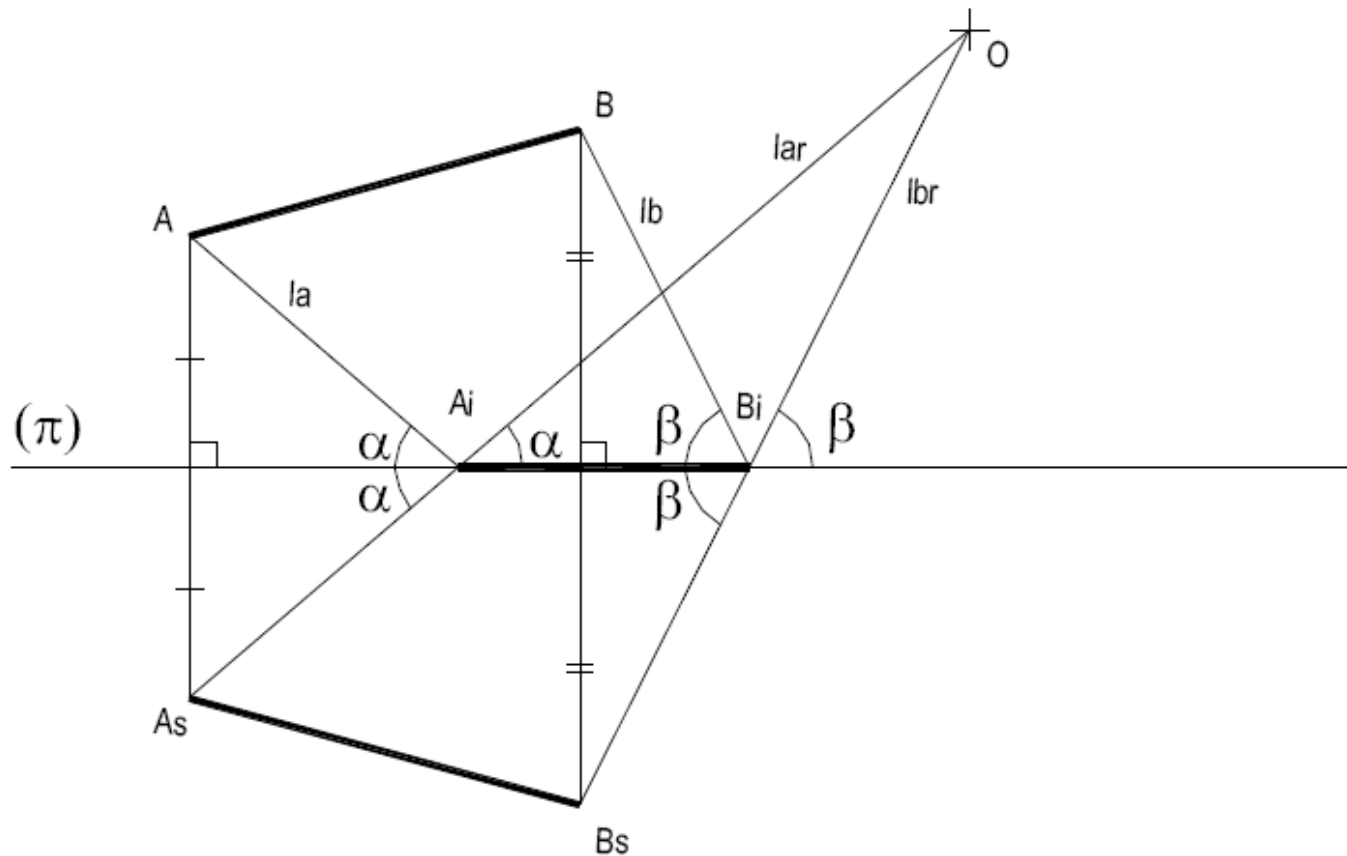
# Reflexos

REFLEXO de um objecto é a imagem desse objecto observada, por um Observador (O) numa superfície reflectora ( $\pi$ ). Essa imagem resulta da reflexão, por parte da superfície, dos raios de luz que emanam do objecto. Pela lei da reflexão, a luz é reflectida com ângulo igual ao ângulo de incidência.



# Reflexos

Se a superfície reflectora for PLANA então, os raios de luz reflectida coincidem com os raios de luz que emanam de um objecto simétrico do primeiro relativamente à superfície reflectora (fora esta transparente).



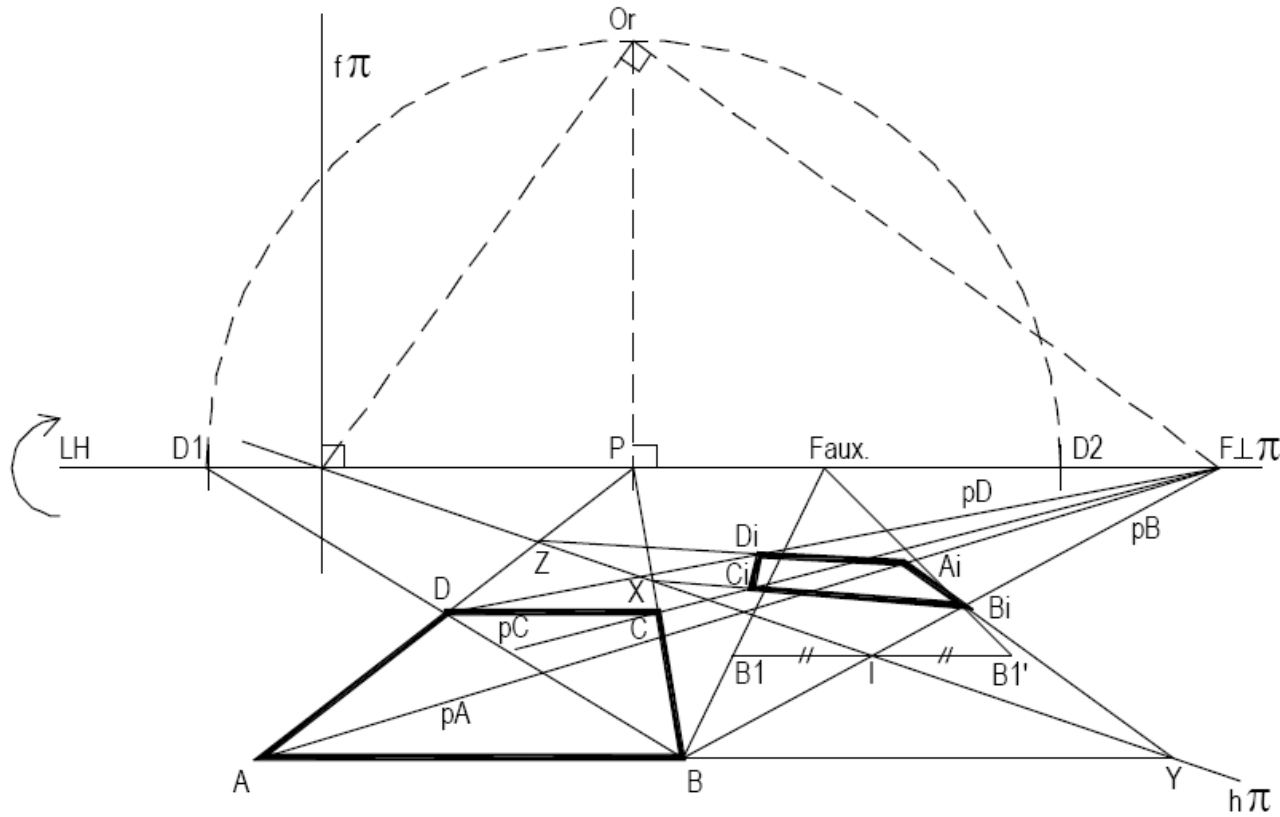
Na prática, em perspectiva (e não só), determinar o reflexo de um objecto, produzido por um espelho plano, consiste em determinar o objecto simétrico relativamente ao plano do espelho. A sua perspectiva coincide com a perspectiva do reflexo.

Sigamos o seguinte exemplo:



# Reflexos

Neste exemplo pretende-se a determinação do reflexo, do quadrado  $[ABCD]$  contido no geometral, produzido pelo espelho vertical  $\pi$ .



# Reflexos

Como determinar o reflexo do quadrado consiste, na prática, em determinar um quadrado simétrico do quadrado dado, relativamente ao plano do espelho vamos:

- conduzir, por cada vértice do quadrado, rectas perpendiculares ao espelho.
- determinar a intersecção das rectas com o espelho, isto é, determinar os segmentos que medem a distância dos vértices ao plano do espelho.
- determinar os pontos simétricos dos vértices do quadrado, sobre as perpendiculares ao espelho previamente conduzidas.

No caso concreto, começamos por determinar o ponto  $F \perp \pi$  (ponto de fuga das rectas perpendiculares ao espelho; note-se que sendo  $\pi$  vertical, as rectas perpendiculares a  $\pi$  são horizontais).

De seguida conduzimos por  $B$  a recta  $pB$  (perpendicular ao espelho) e determinamos o ponto  $I$  (ponto de intersecção de  $pB$  com  $\pi$ ; note-se que  $I$  pertence a  $h\pi$  apenas porque  $B$  e  $pB$  pertencem ao geometral).

Para duplicar a distância  $AI$  (note-se que esta operação não pode ser efectuada directamente dado que  $AI$  não é paralelo ao quadro) conduzimos por  $I$  uma recta fronto-horizontal na qual projectamos (com uma direcção auxiliar de nível qualquer; neste caso é obrigatório considerar uma direcção de nível dado ser uma operação que se efectua no geometral) o ponto  $B$ , determinando  $BI$ . Sobre a recta determinamos  $BI'$ , simétrico de  $BI$  relativamente a  $I$  e, com a mesma direcção com que efectuamos a projecção de  $B$ , determinando  $B_1$ , projectamos agora  $BI'$  sobre  $pB$  determinando  $B_1$ . Note-se que, por serem semelhantes os triângulos  $[BBI]$  e  $[BI'B_1I]$  e por serem iguais  $BII$  e  $IBI'$ , são também iguais  $BI$  e  $IB_1$ , logo  $B_1$  é o simétrico de  $B$  relativamente a  $\pi$ .

Para os restantes pontos, conduzimos as rectas perpendiculares ao plano do espelho.

Mas vamos agora notar que um ponto que pertence ao espelho tem reflexo coincidente consigo próprio.

Consideramos a recta  $BC$  e o seu ponto  $X$ , de intersecção com  $\pi$ . A recta simétrica de  $BC$  passa por  $X$  e por  $B_1$ . Na intersecção desta recta com  $pC$  determinamos  $C_1$ .

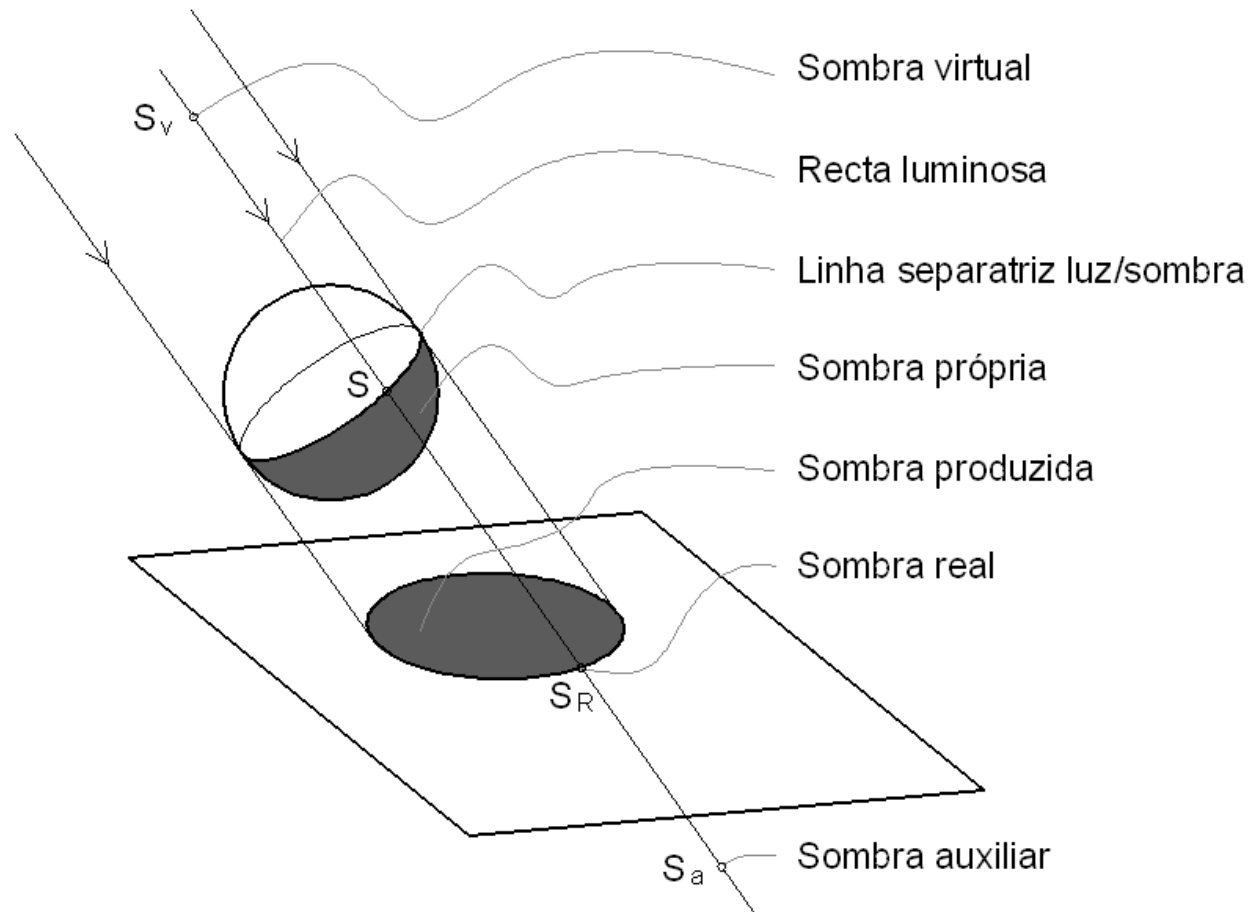
Consideramos a recta  $AB$  e o seu ponto  $Y$ , de intersecção com  $\pi$ . A recta simétrica de  $AC$  passa por  $Y$  e por  $B_1$ . Na intersecção desta recta com  $pA$  determinamos  $A_1$ .

Consideramos a recta  $AD$  e o seu ponto  $Z$ , de intersecção com  $\pi$ . A recta simétrica de  $AD$  passa por  $Z$  e por  $A_1$ . Na intersecção desta recta com  $pD$  determinamos  $D_1$ .

# Bloco P11

Perspectiva linear:  
- Estudo das sombras.

# Estudo das sombras



Se o objecto produzir sombra sobre si próprio acresce ainda a **SOMBRA AUTO-PRODUZIDA**. O foco luminoso pode ser próprio ou impróprio. Se for impróprio todas as rectas luminosas são paralelas entre si e fala-se de direcção luminosa.

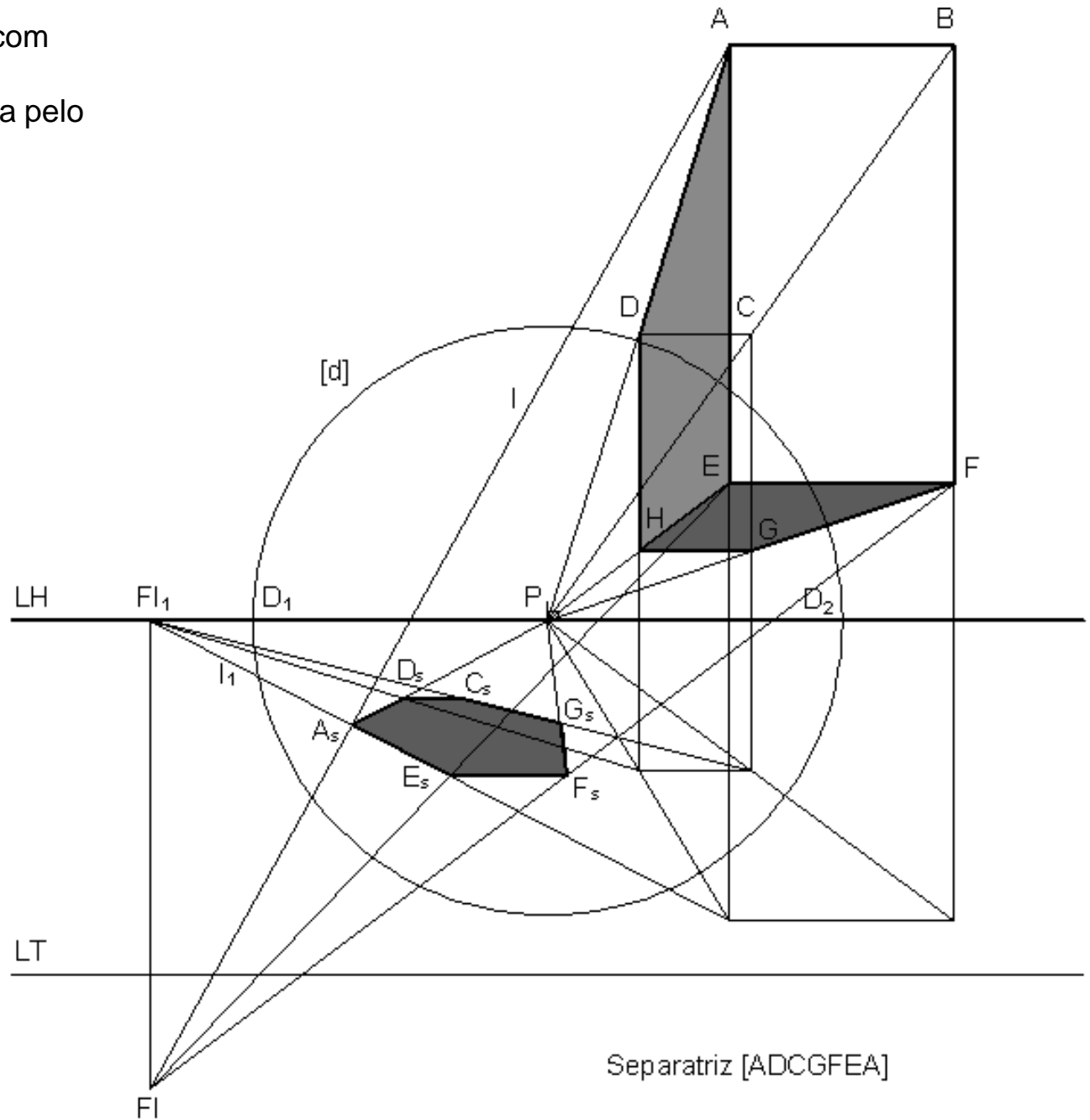
Embora este tópico incida sobre a perspectiva e a axonometria, ilustraremos o estudo das sombras apenas com alguns exemplos em perspectiva, a comentar na aula, deixando para as aulas práticas a resolução de exercícios relativos à axonometria.





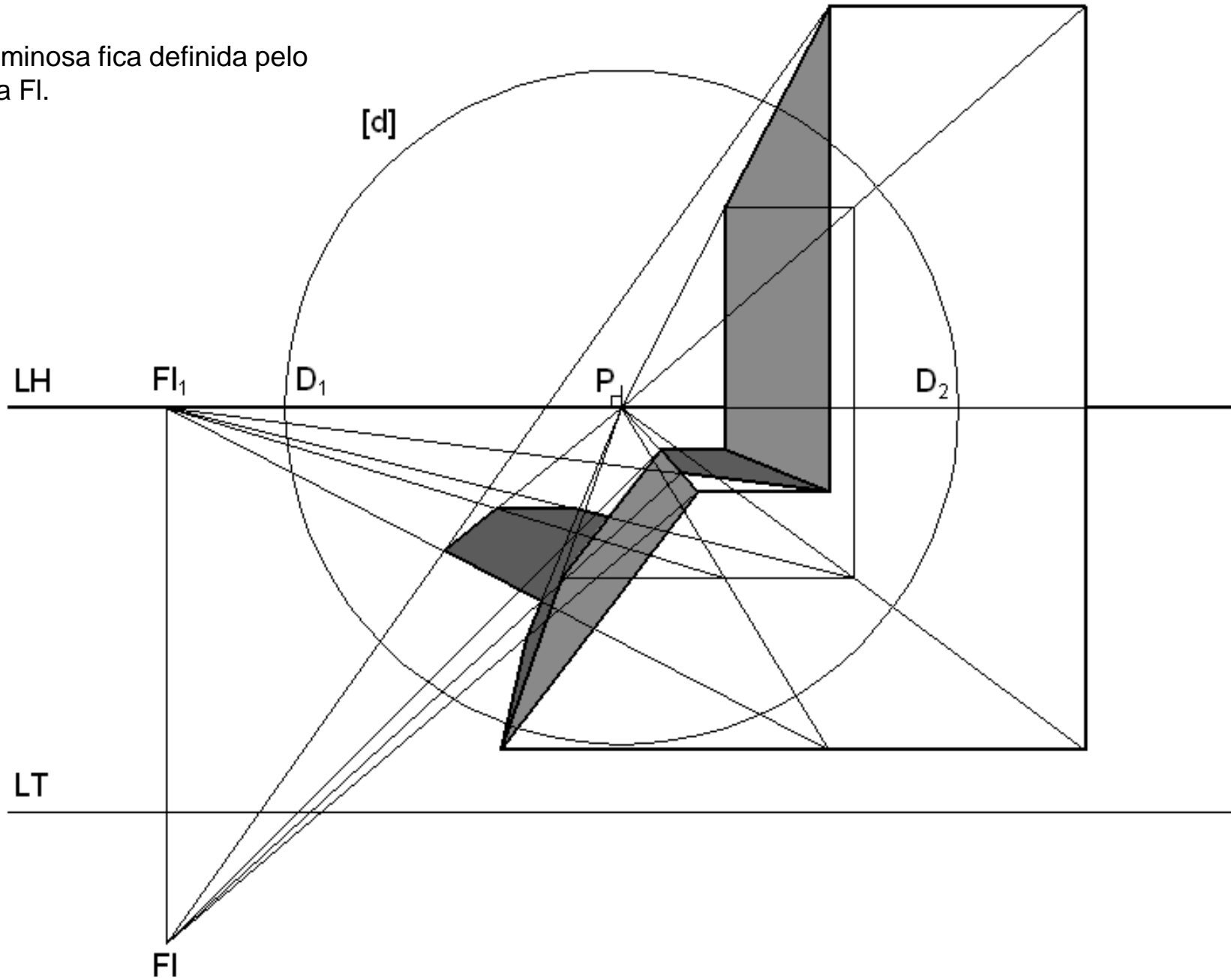
# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um paralelepípedo com base paralela ao geometral.  
A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.



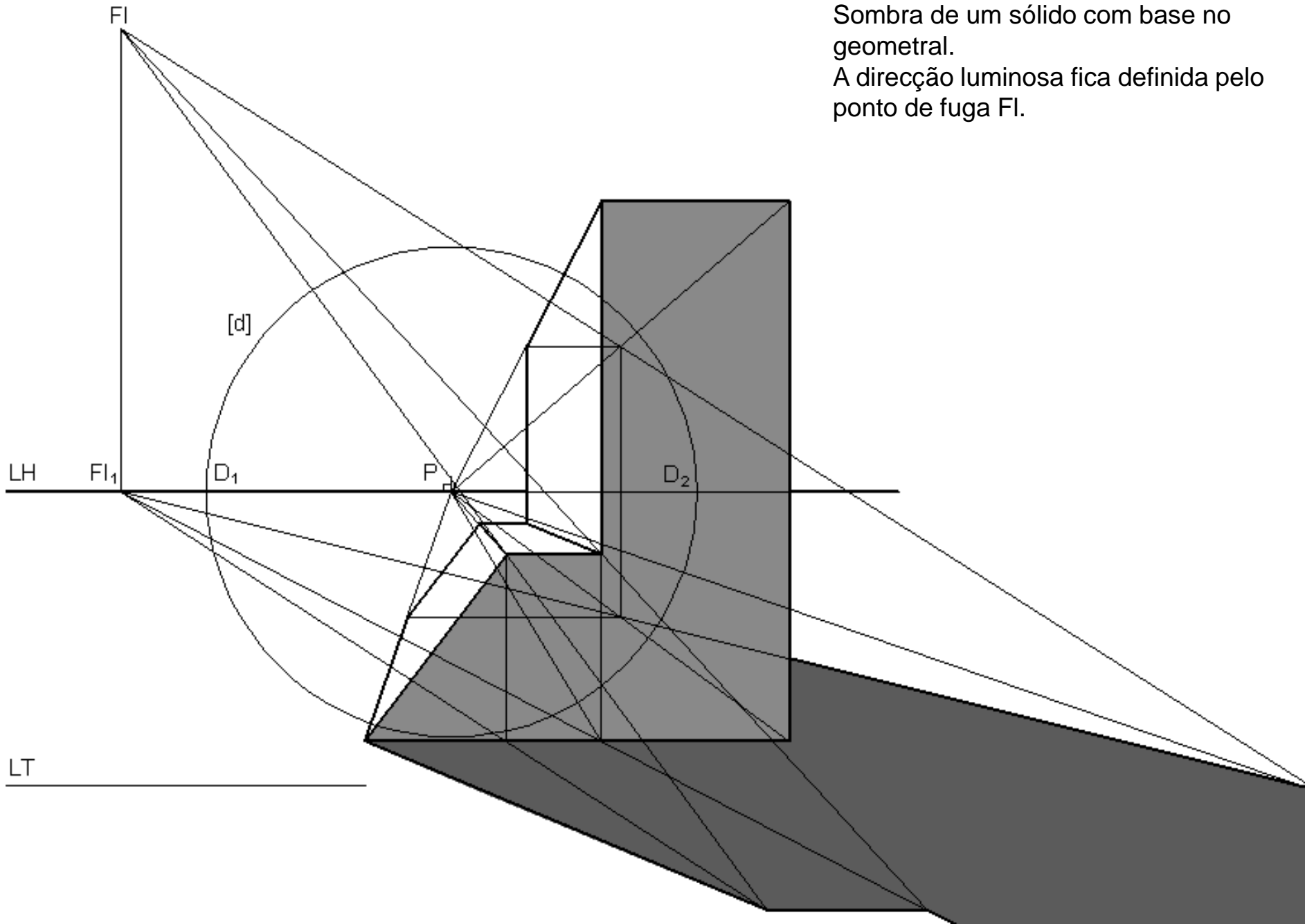
# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um sólido com base no geometral.  
A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.



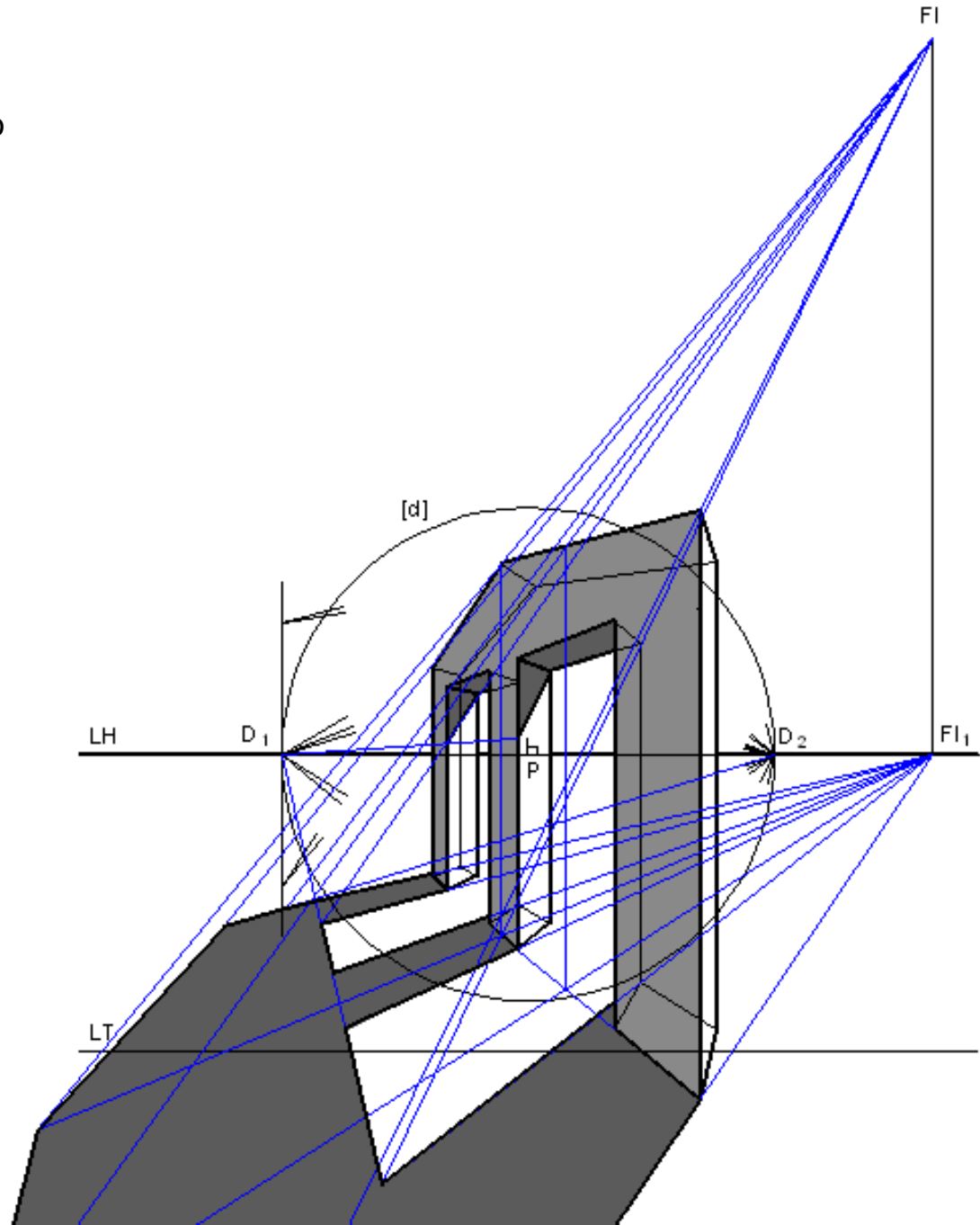
# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um sólido com base no geometral.  
A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.



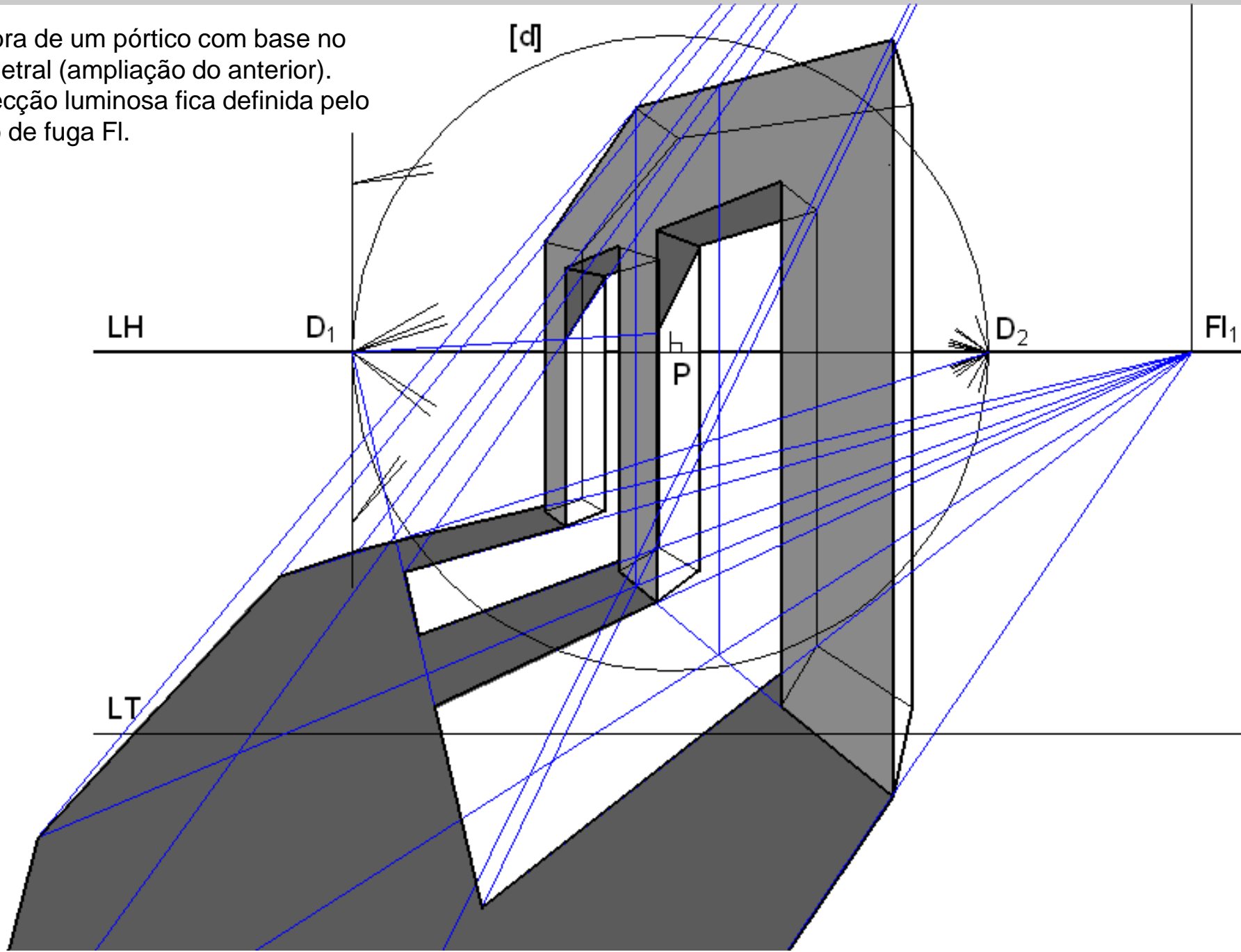
# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um pórtico com base no geometral.  
A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.



# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um pórtico com base no geometral (ampliação do anterior).  
A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.

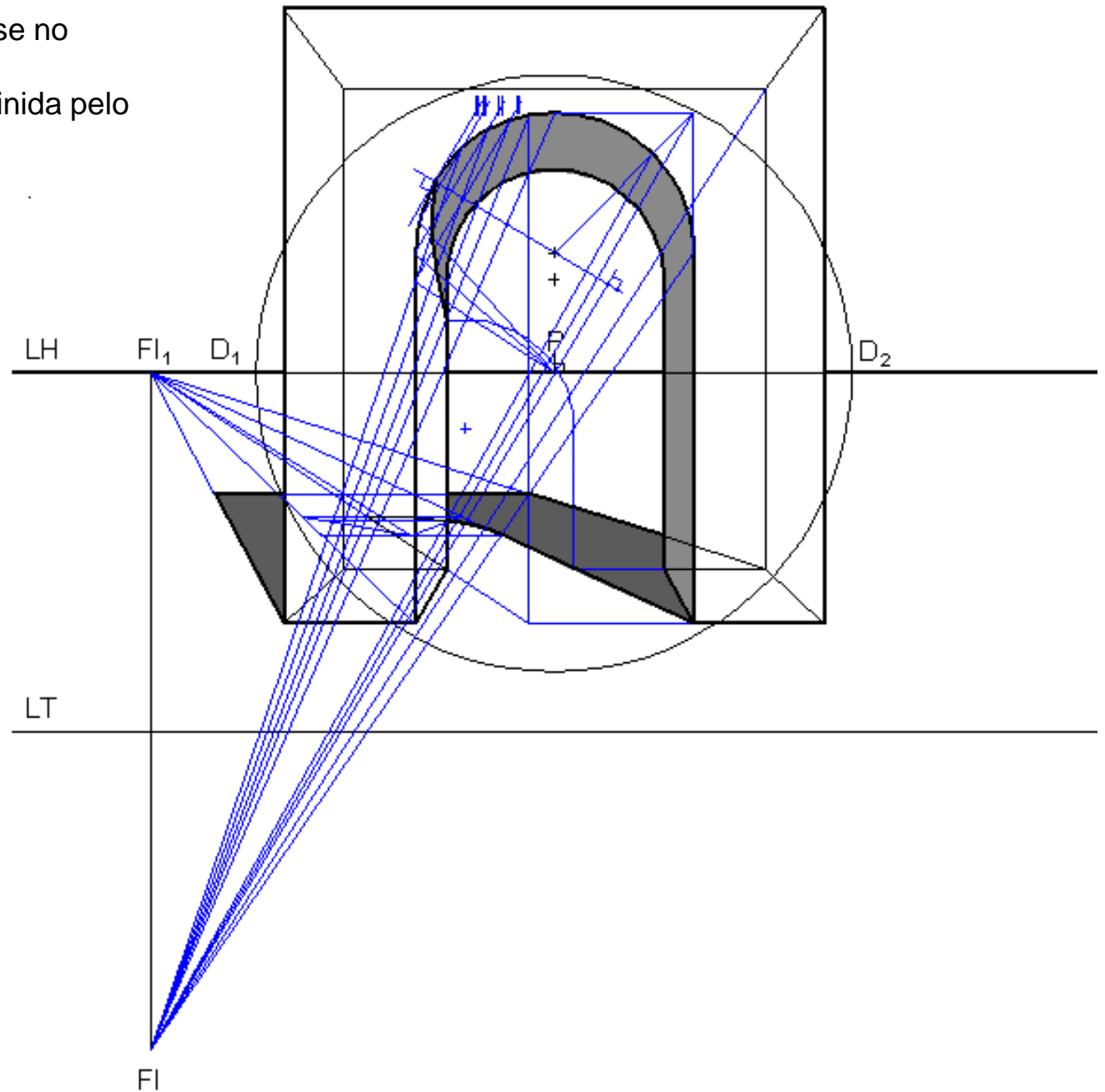




# Estudo das sombras - exemplos

Sombra de um arco com base no geometral.

A direcção luminosa fica definida pelo ponto de fuga FI.





# EXERCÍCIO

## Problema:

Numa folha A3 ao baixo com P ao centro, considere um perspectógrafo em que  $d=12$  e  $h=2$ .

A unidade é o metro (m). Considere a escala 1/100 para o plano do quadro.

Observe a figura dada abaixo.

O objecto estrutura-se através da adição de cubos com 2m de lado.

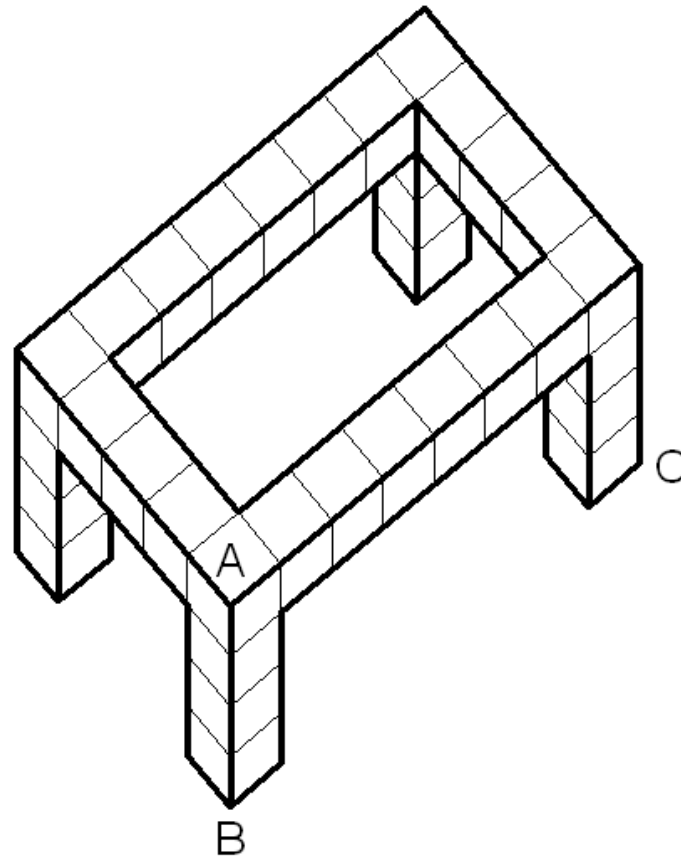
O segmento [AB] é vertical (coloque-o algures no espaço intermédio à esquerda do Observador).

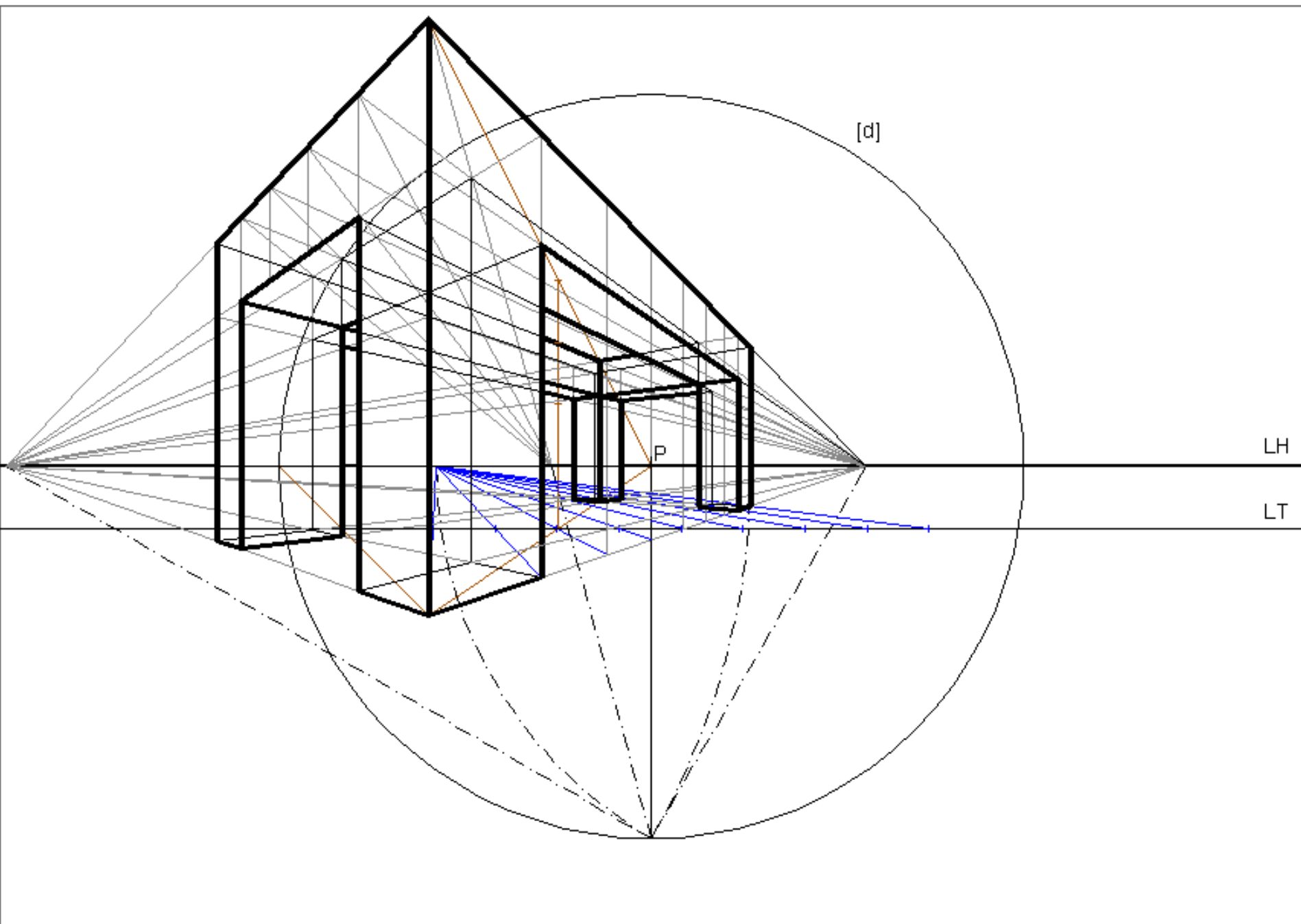
O segmento [BC] é horizontal com altura 0. Está inclinado a  $60^\circ$  com o quadro (abertura para a direita)

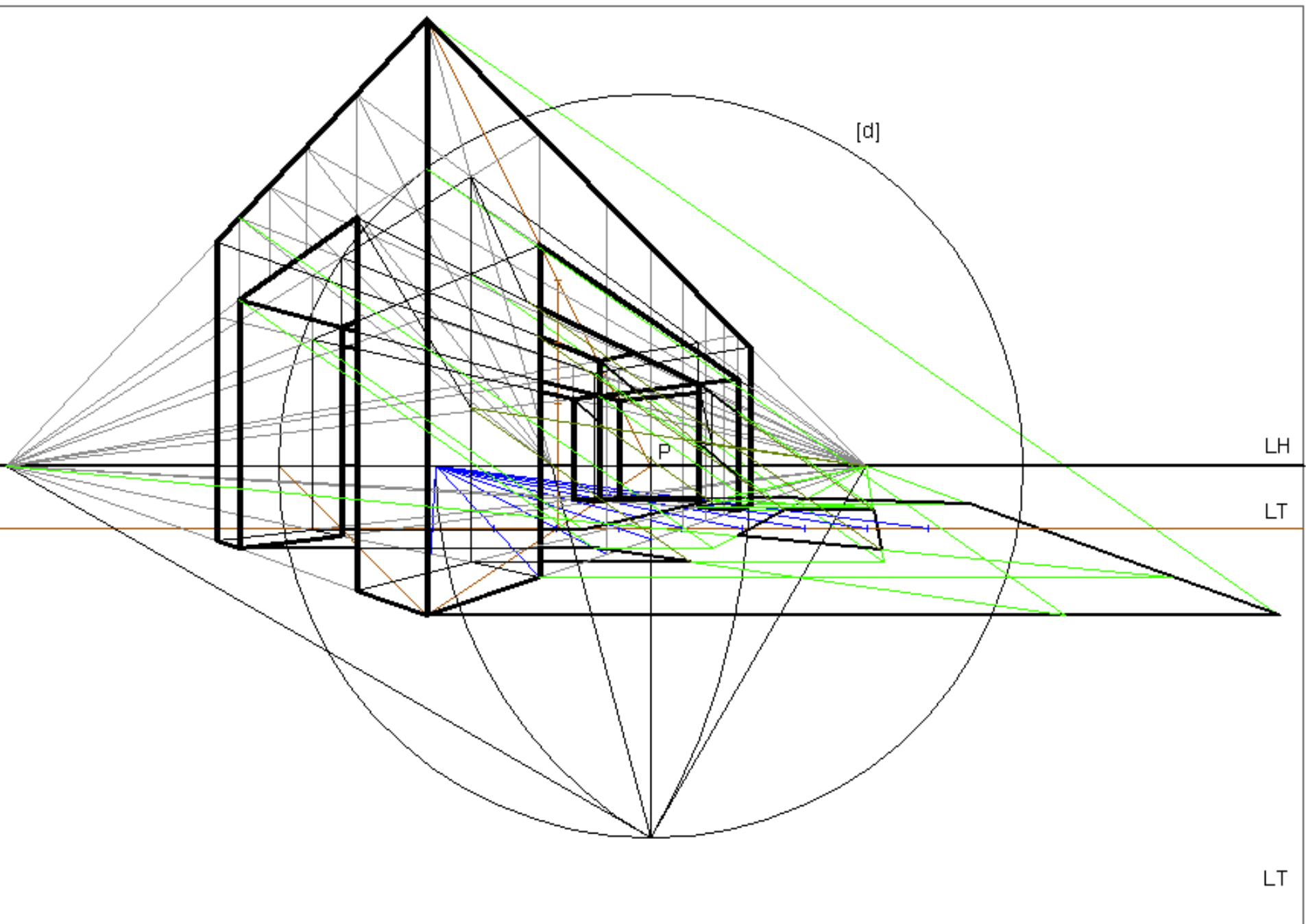
Determine a perspectiva e a sombra do objecto dado na figura considerando uma direcção luminosa frontal a  $35^\circ$  com o geometral (abertura para a esquerda).

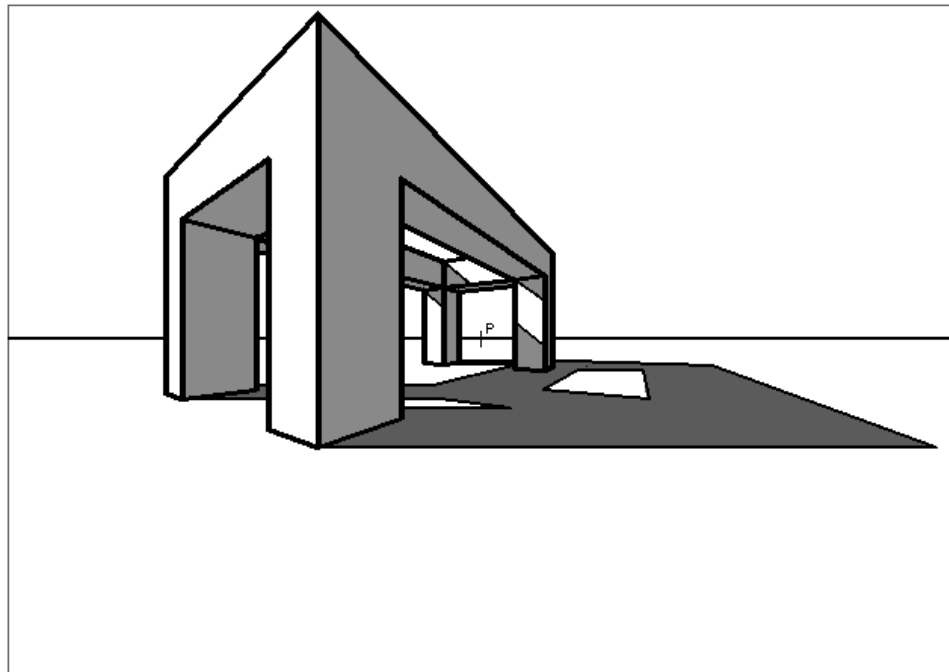
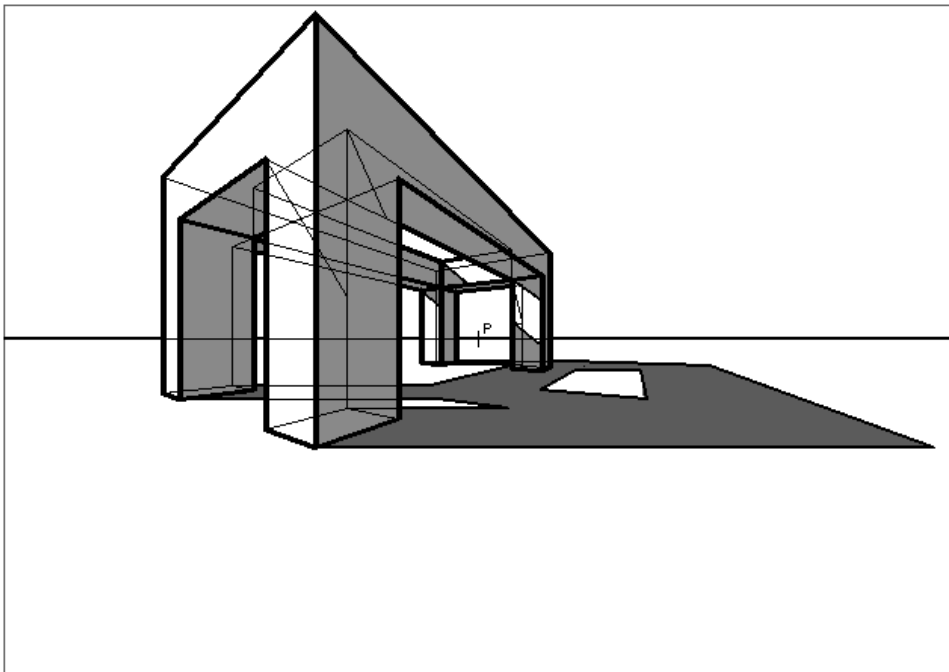
## Resolução:

Ver figuras dos slides seguintes.











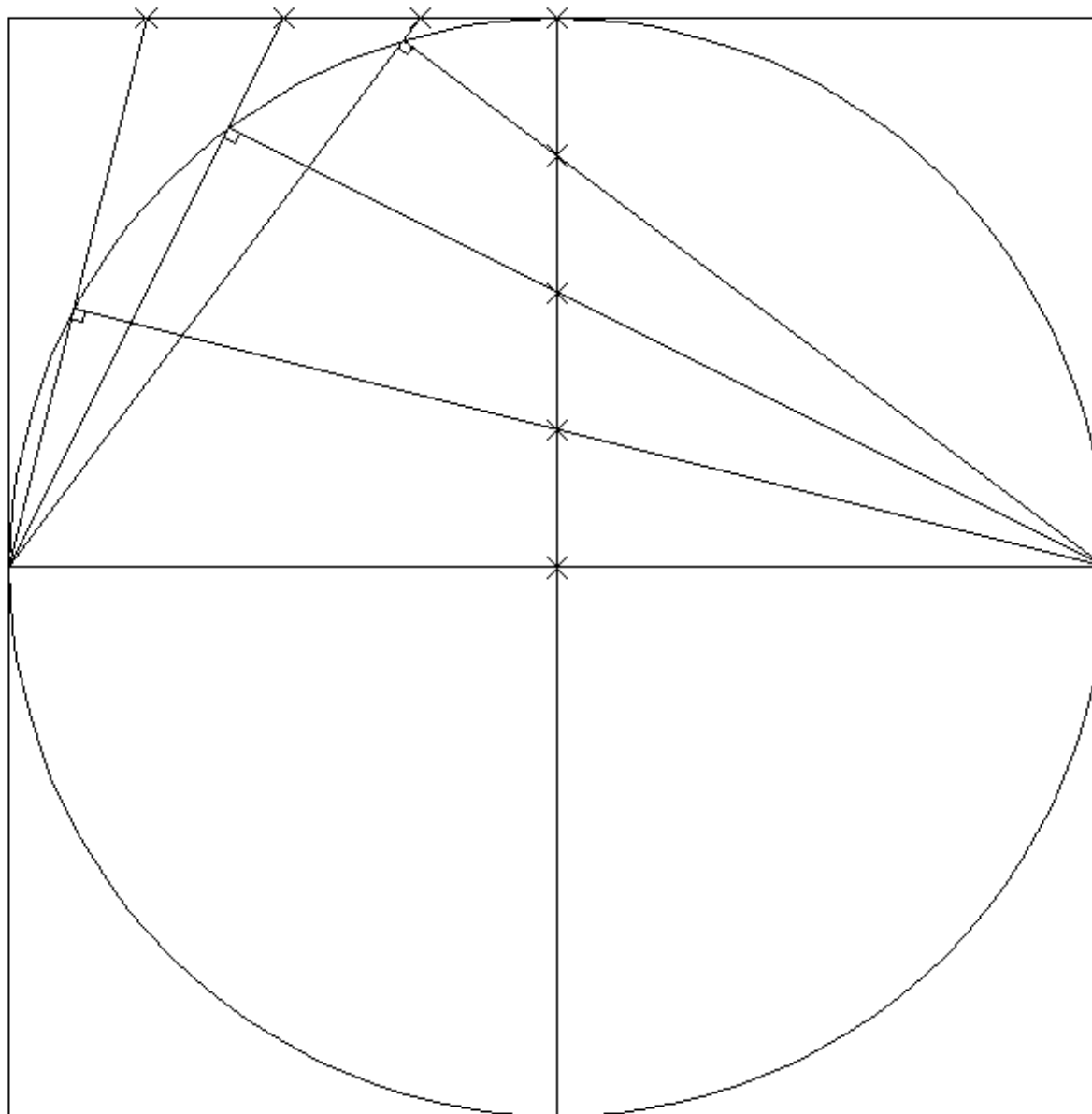
# Bloco P12

Perspectiva linear de quadro plano:

- Outros métodos para o desenho de curvas

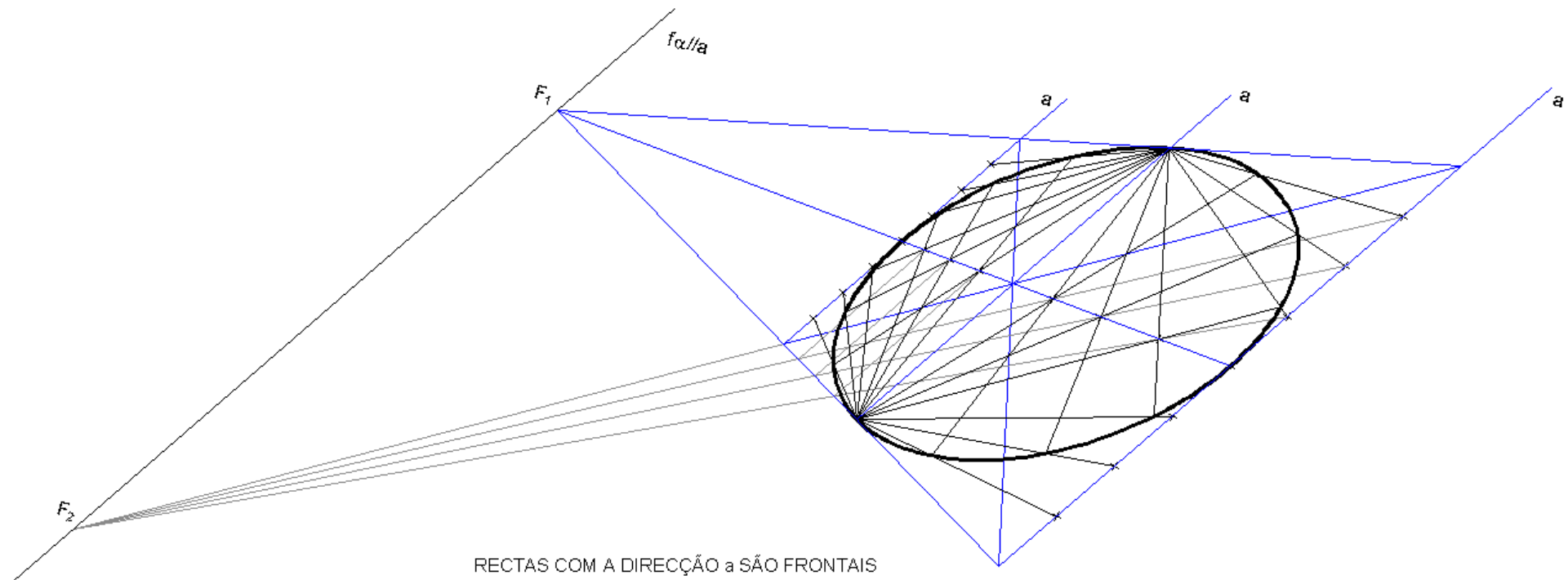
## Método 1 para o desenho da perspectiva de círculos

Um dos métodos para o desenho da perspectiva de círculos considera a propriedade da inscrição de ângulos rectos em semi-circunferências como se ilustra na figura.



# Método 1 para o desenho da perspectiva de círculos

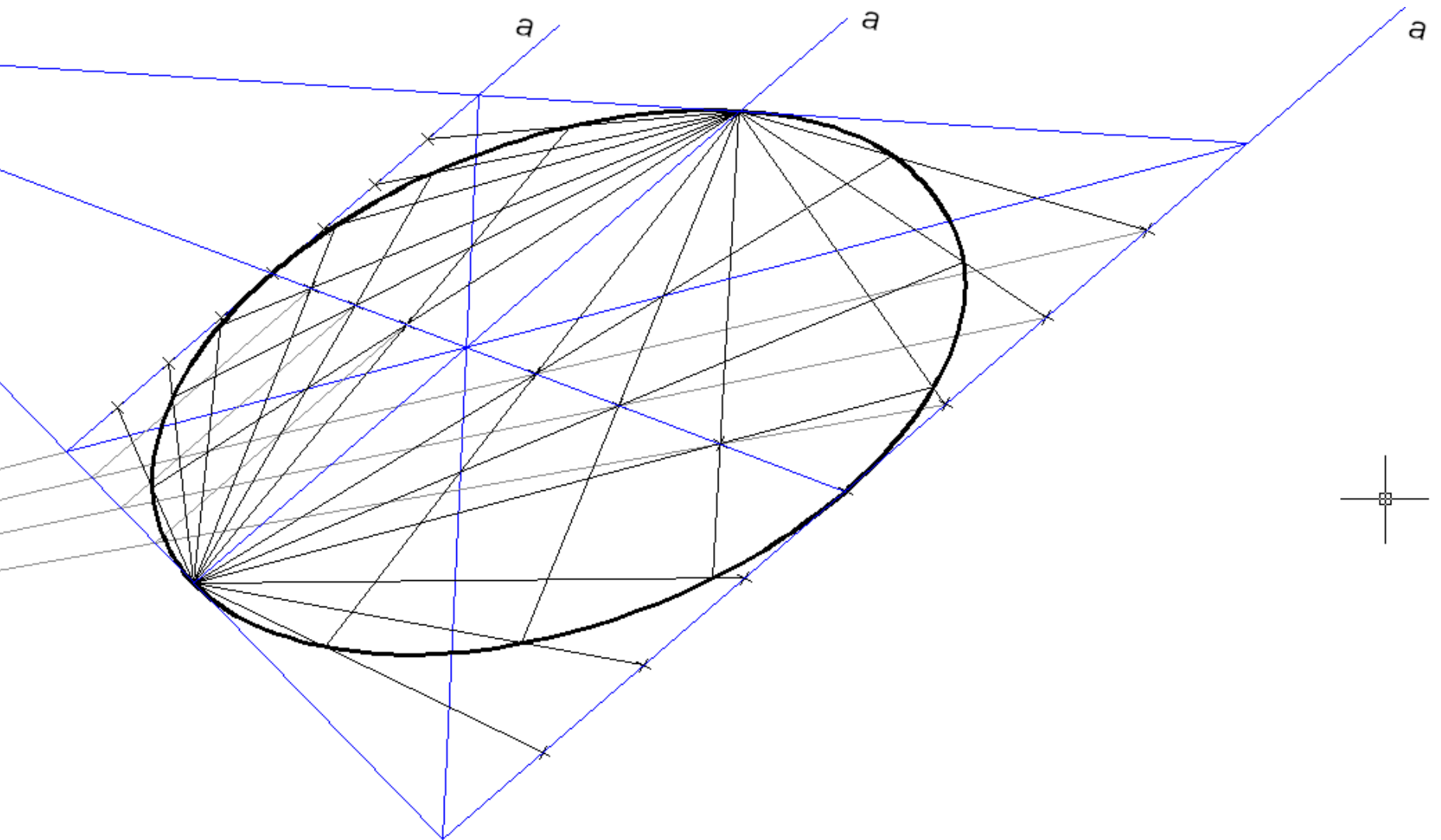
O procedimento consiste em transpor aquele traçado para a perspectiva.



RECTAS COM A DIRECÇÃO a SÃO FRONTAIS  
NESTAS RECTAS AS DIVISÕES SÃO DIRECTAS

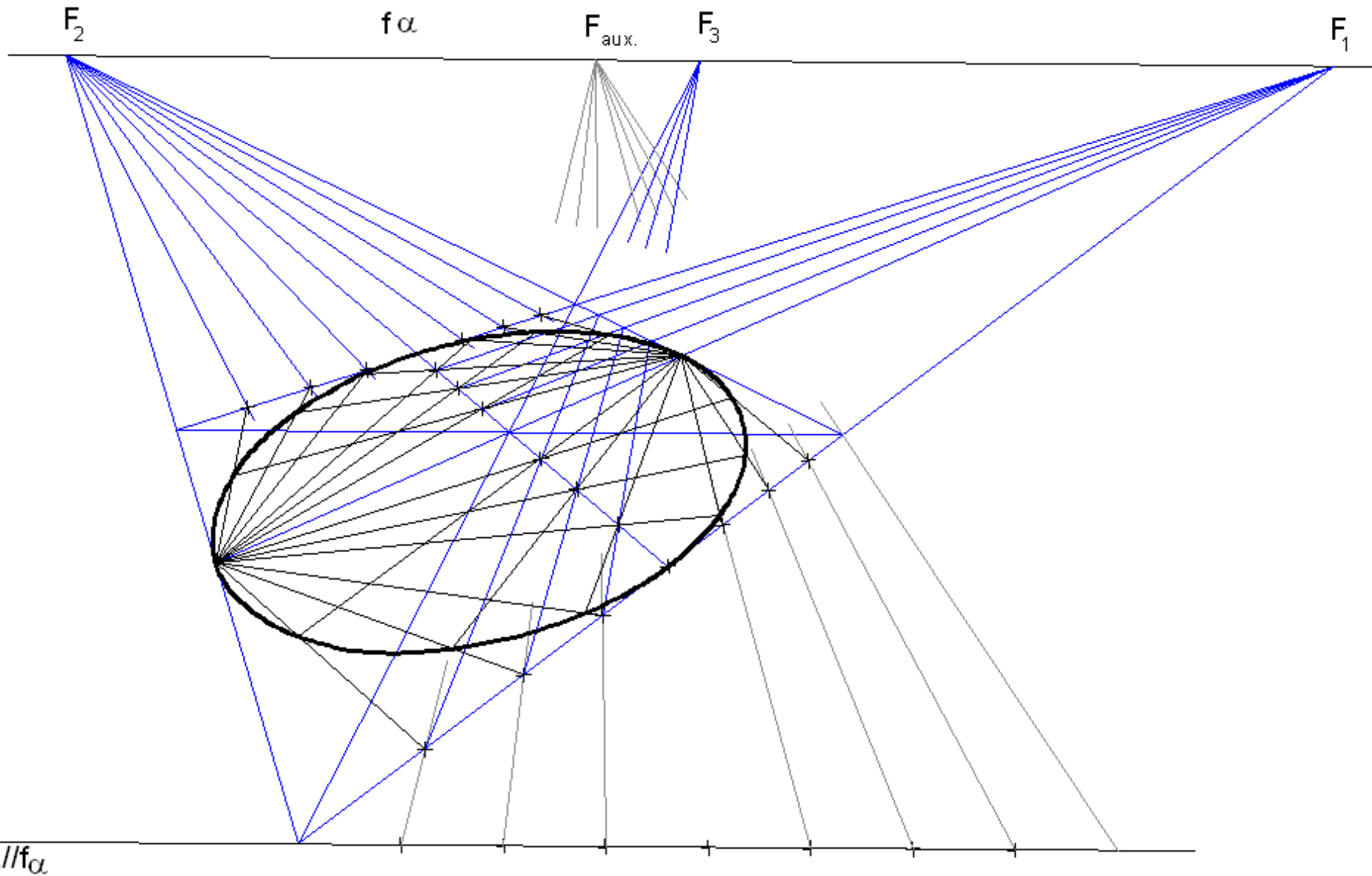
# Método para o desenho da perspectiva de círculos

O procedimento consiste em transpor aquele traçado para a perspectiva (ampliação).



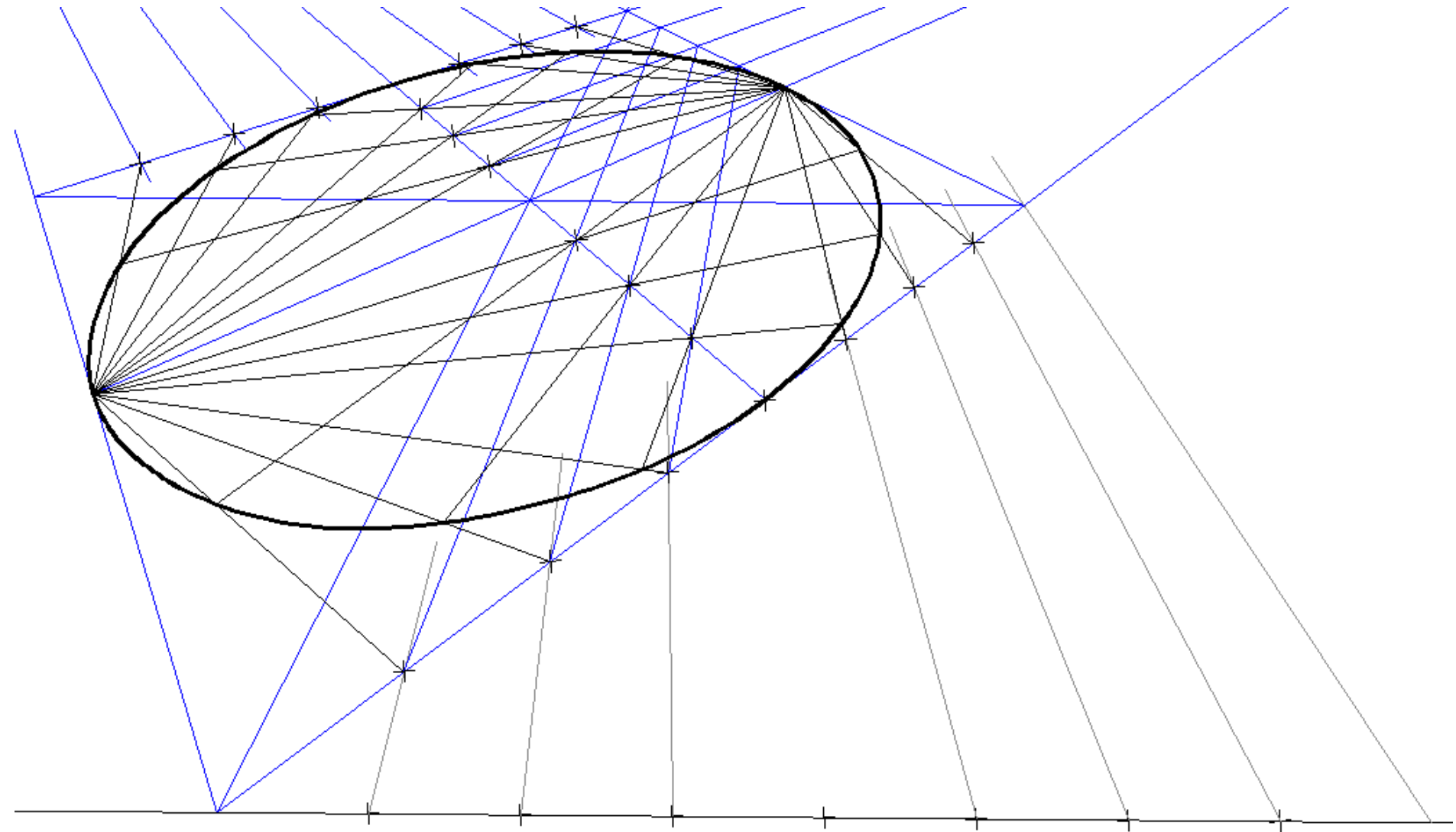
# Método 1 para o desenho da perspectiva de círculos

O procedimento consiste em transpor aquele traçado para a perspectiva.



## Método 1 para o desenho da perspectiva de círculos

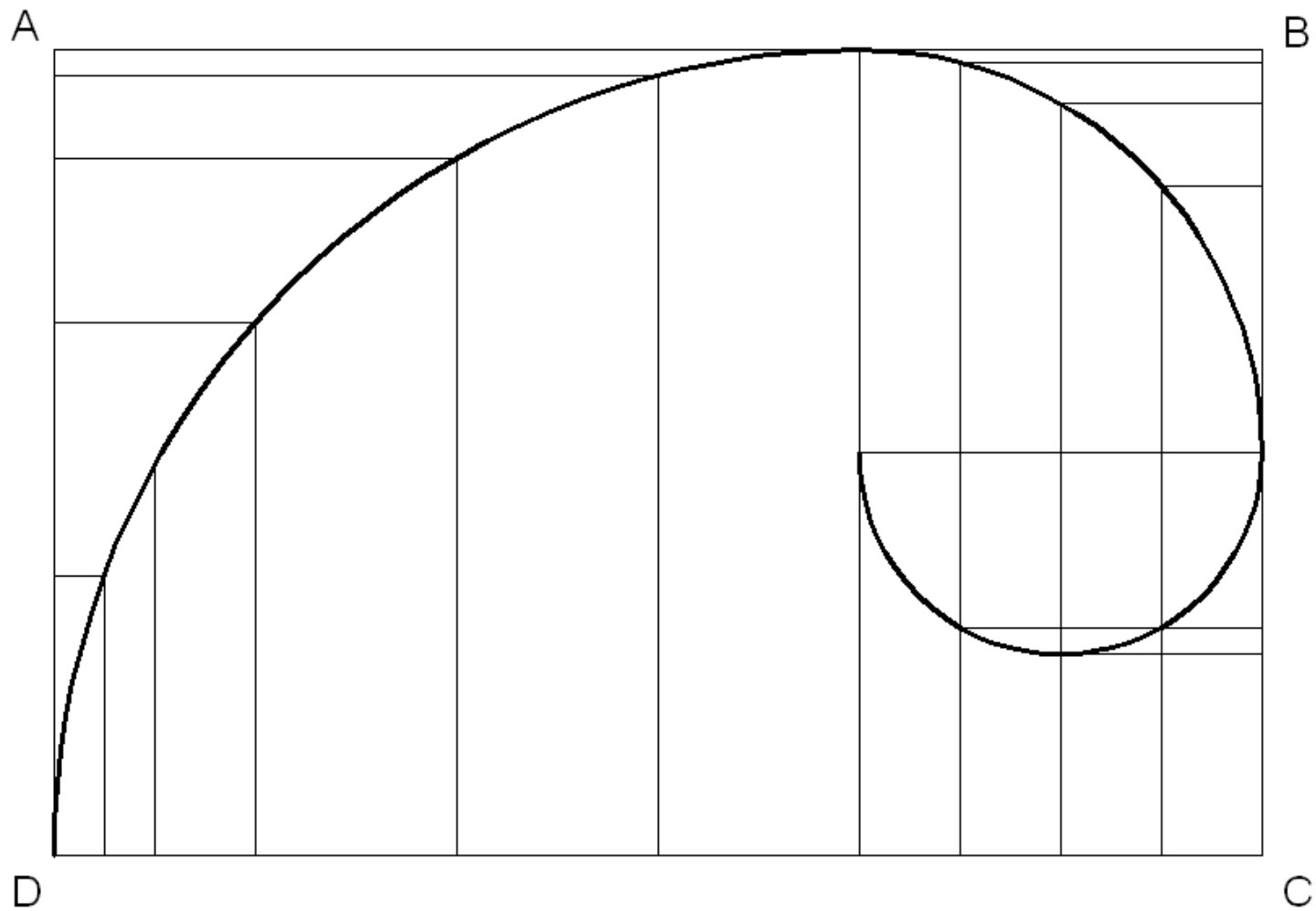
O procedimento consiste em transpor aquele traçado para a perspectiva (ampliação).





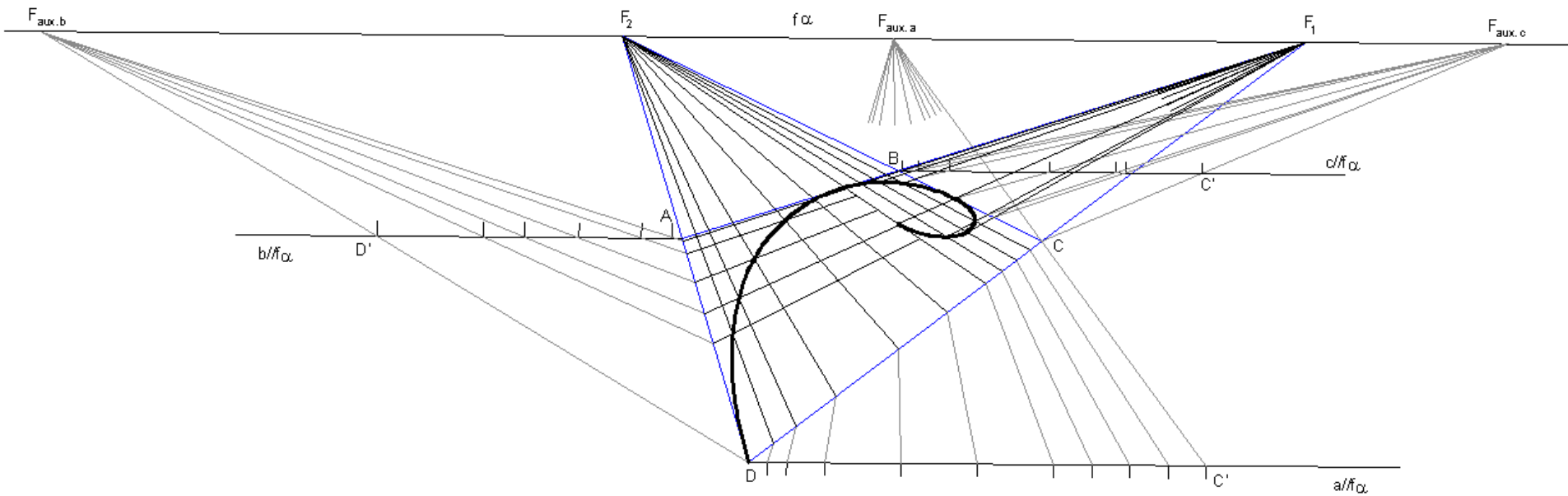
## Método 2 para o desenho da perspectiva de curvas

O procedimento consiste em enquadrar a linha numa grelha representando pontos dessa grelha em perspectiva.



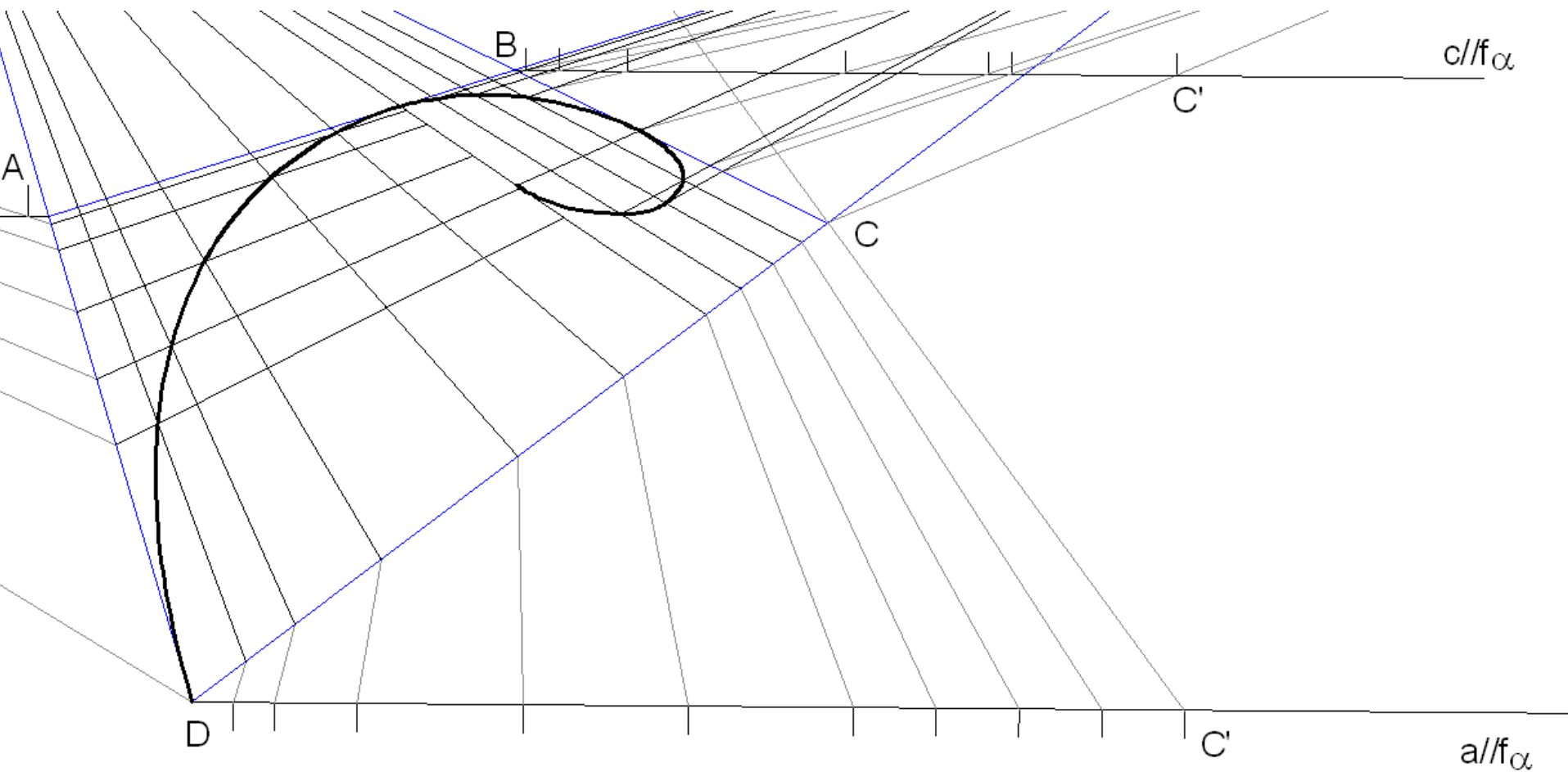
# Método 2 para o desenho da perspectiva de curvas

O procedimento consiste em enquadrar a linha numa grelha representando pontos dessa grelha em perspectiva.



## Método 2 para o desenho da perspectiva de curvas

O procedimento consiste em enquadrar a linha numa grelha representando pontos dessa grelha em perspectiva (ampliação).



# AXONOMETRIA

# Bloco A1

Introdução ao estudo da axonometria: apontamento histórico e prático.

Exemplos de representações proto-axonométricas na pintura Ocidental.



**Fig. 1** – Representação proto-axonométrica (fragmento de cerâmica do séc. IV a.c.)



**Fig. 2** – Representação proto-axonométrica (Fresco na Igreja de *Santa Croce*, Florença, Itália, sec. XIII/XIV)



Exemplos de representações proto-axonométricas na pintura oriental.



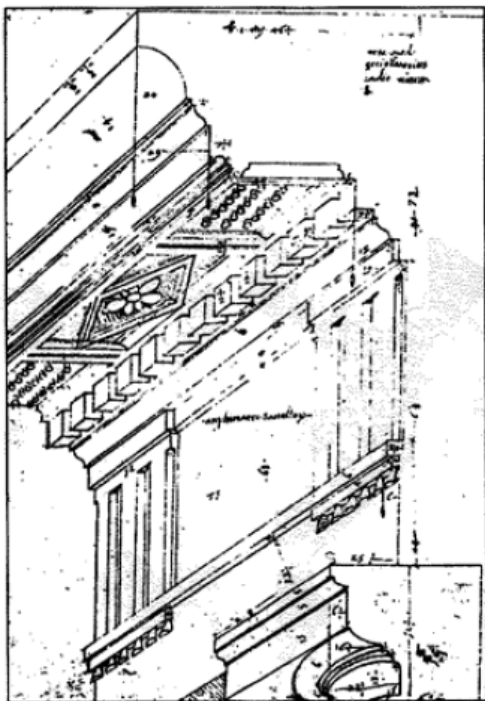
**Fig. 3** – Quadro “Han XiZai dá um banquete” do pintor chinês Gu HongZhong (séc. X.)



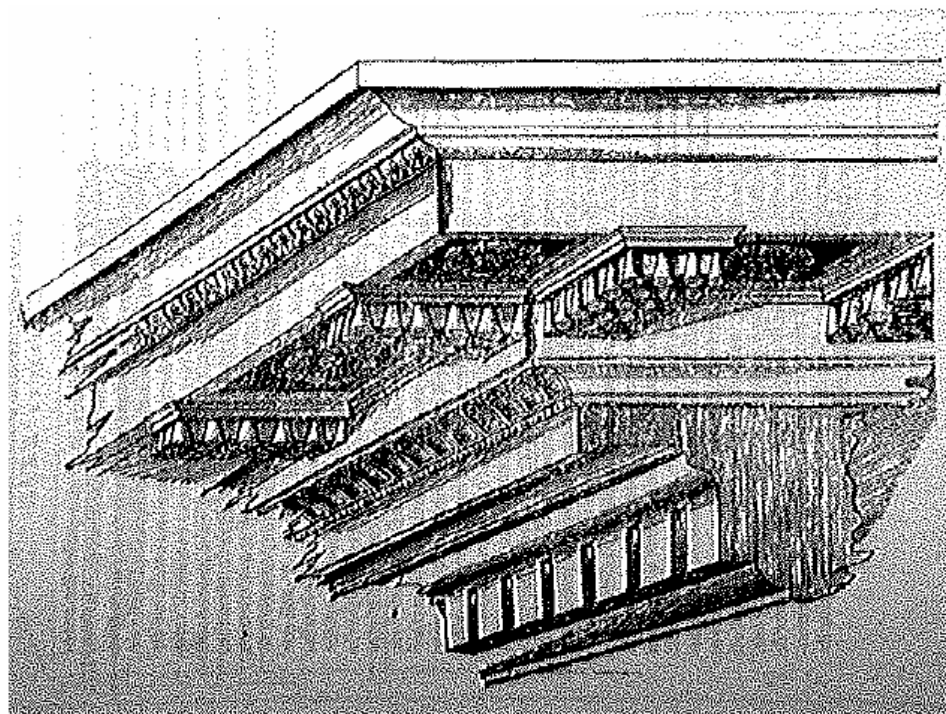
**Fig. 4** – Quadro do pintor japonês Utagawa Yoshikazu (sec. XIX)

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações axonométricas em tratados de Arquitectura civil.



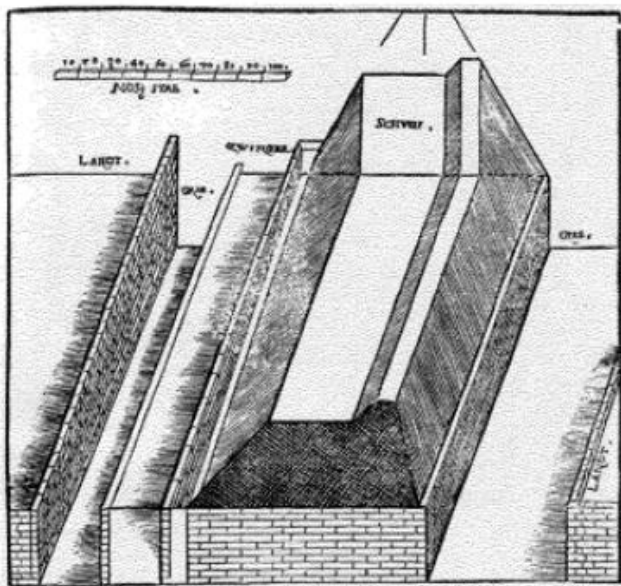
**Fig. 5** – Figura do *Codex Coner* (tratado de arquitectura do séc. XVI.)



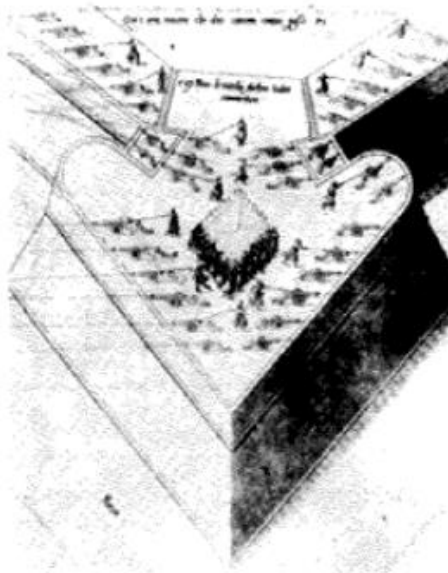
**Fig. 6** – Figura do tratado *Architecture* do arquitecto Philibert de l'Orme (tratado de arquitectura do séc. XVI.)

# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações axonométricas em tratados de arquitectura militar.



**Fig. 7** – Figura de *Della Fortificazione delle Citá* de Girolamo Maggi e Jacomo Castrioto, Veneza (tratado de arquitectura militar do séc. XVI.)

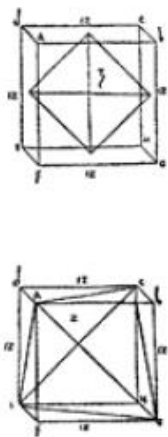


**Fig. 8** – Figura do tratado *On Military archithecture* de F. de Marchi, Brescia (tratado de arquitectura militar do séc. XVI.)

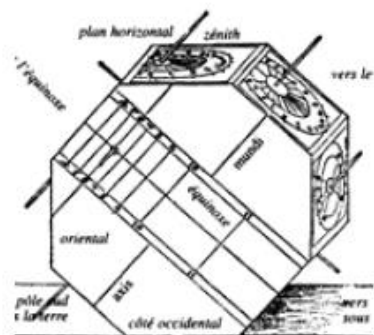


**Fig. 9** – Figura do tratado *Des Fortifications et artifices de architecture et perspective* de J. Perret de Chamberry (tratado de arquitectura do séc. XVII.)

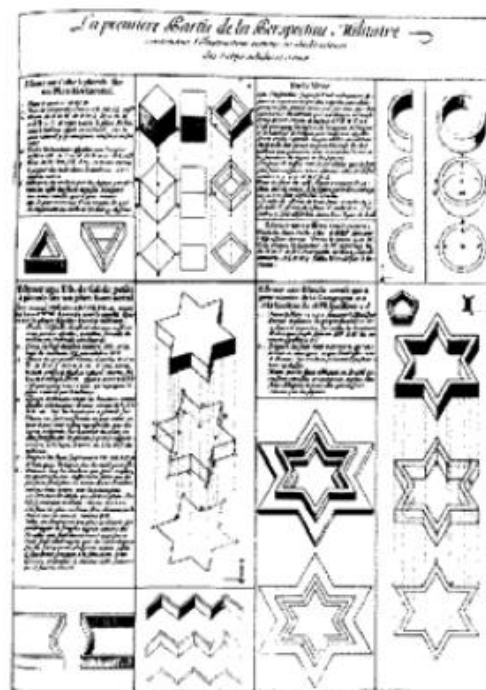
Exemplos de representações axonométricas em tratados de geometria e matemática.



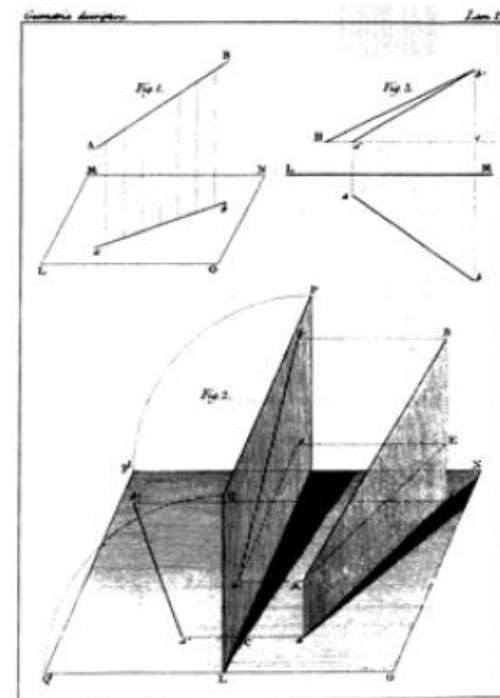
**Fig. 10** – Figura do tratado *Divina Proportione* de Luca Pacioli (Veneza 1509).



**Fig. 11** – Figura do tratado *Underweysung Der Messung* (1525).



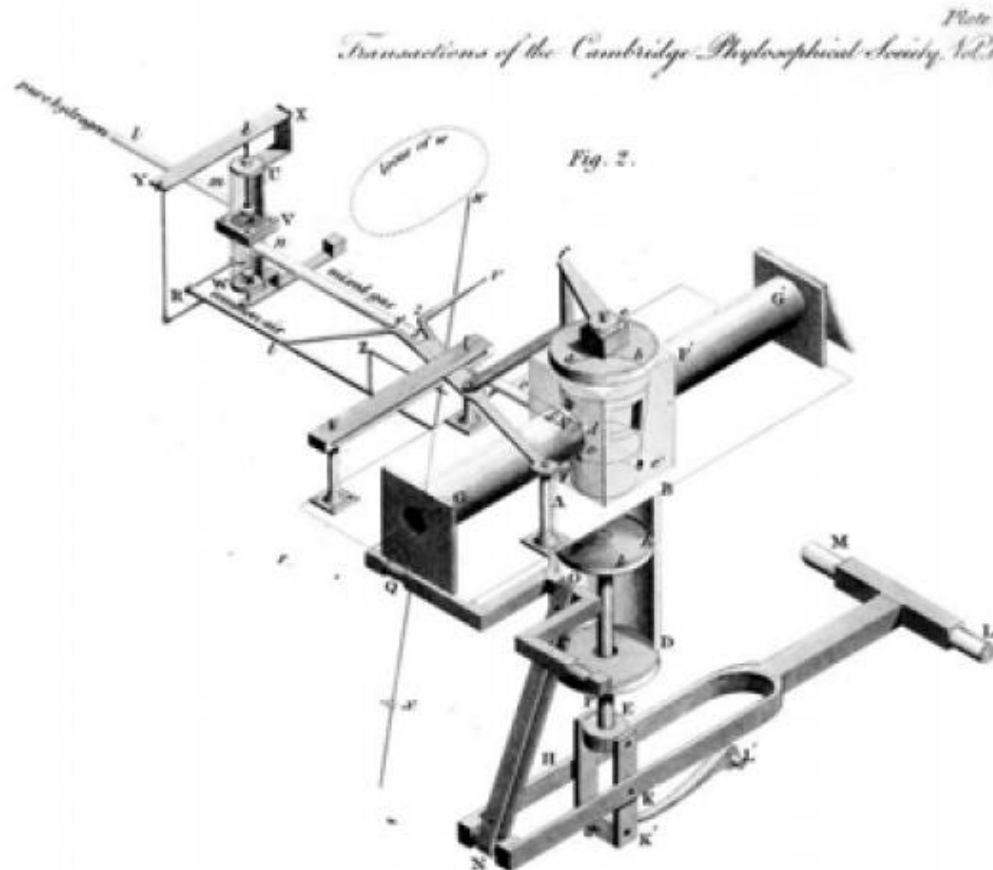
**Fig. 12** – Figura do tratado de T. Luders de 1680.



**Fig. 13** – Figura *Geométrie Descriptive* de Gaspard Monge (1798).

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

A partir de do tratado de William Farish a axonometria ganha interesse por parte da comunidade de matemáticos e geómetras que fazem o seu tratamento algébrico.

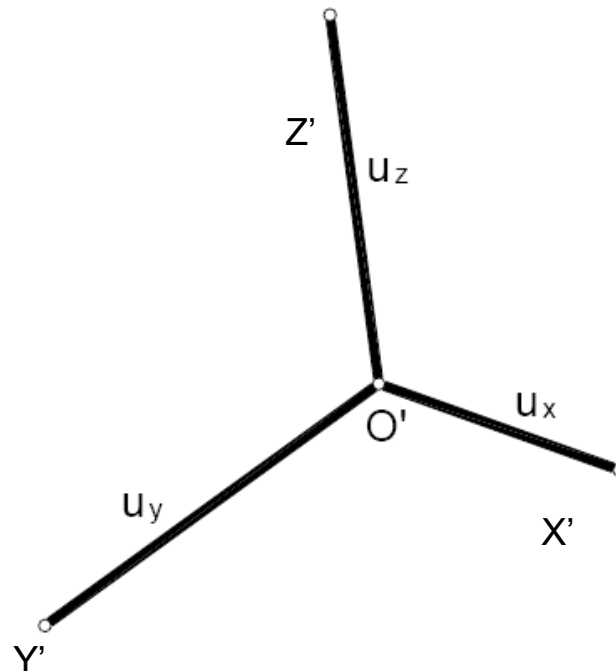


**Fig. 14** – Figura do tratado de William Farish *On Isometrical Perspective* (1822).

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Em 1853 Pohlke formula, sem apresentar nenhuma prova, aquele que viria a ser conhecido como o teorema fundamental da axonometria. Diz que *“um quadrângulo plano  $O'X'Y'Z'$  pode sempre tomar-se por projecção paralela de três segmentos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$  iguais, com um ponto  $O$  comum, e dois a dois ortogonais”*.

Mais tarde, esta conjectura foi demonstrada pelo matemático Schwarz. Posteriormente o teorema foi generalizado a quaisquer três segmentos de qualquer comprimento e fazendo entre si quaisquer ângulos.

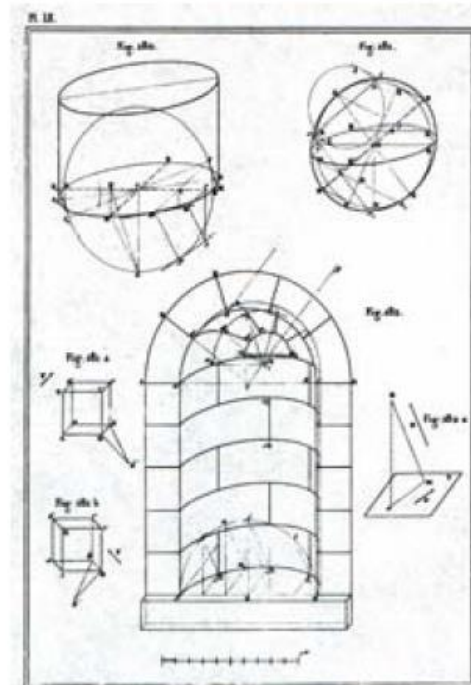
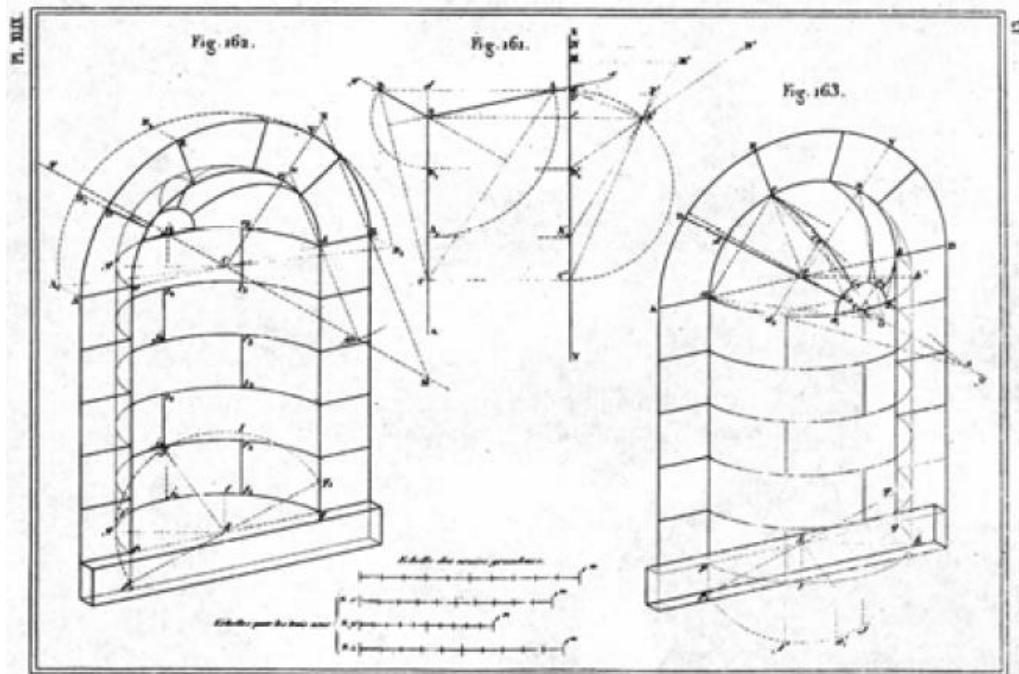


**Fig. 15** – Teorema de Pohlhe Schwarz.



# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

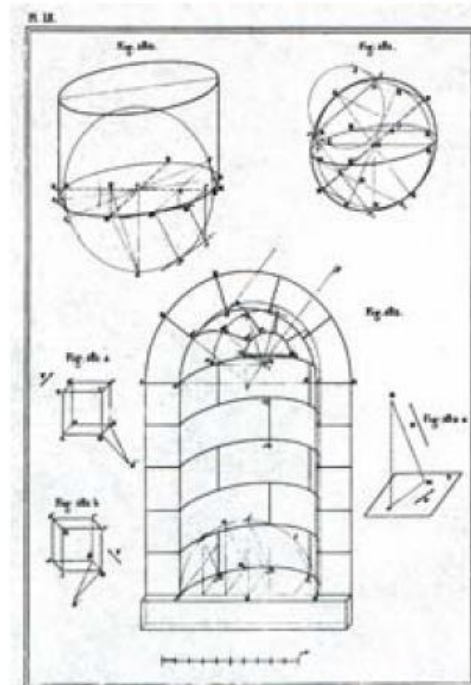
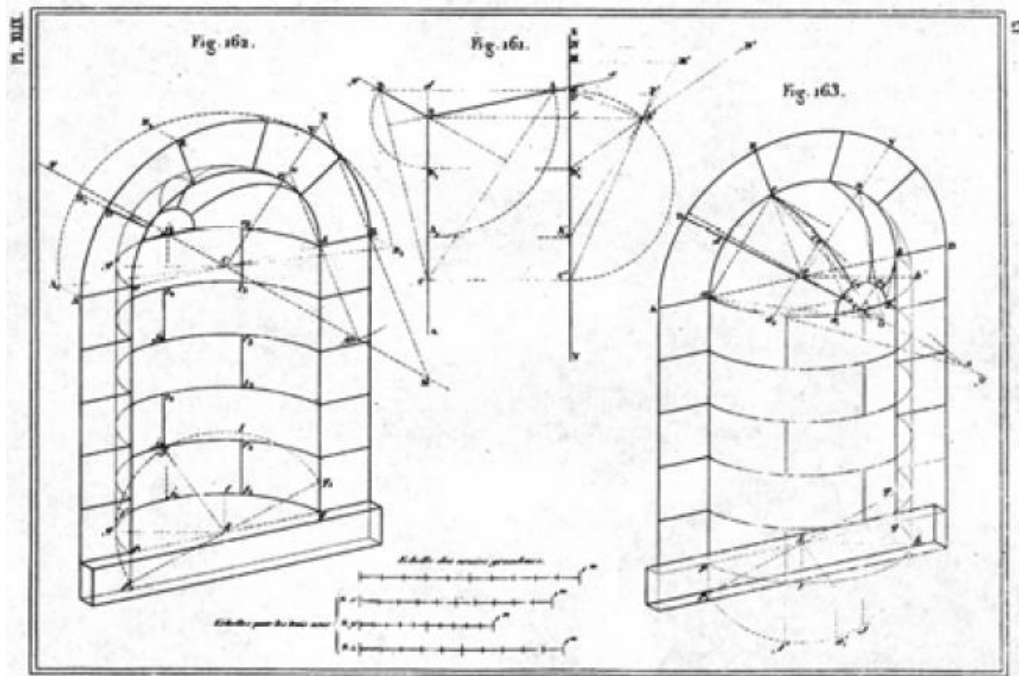
Representações axonométricas em tratados de geometria descritiva, em que se se coloca a ênfase na aplicação à representação de casos concretos, por exemplo no estudo da estereotomia (estudo do corte da pedra).



**Fig. 16** – Figuras do *Traité de géometrie Descriptive* de Jules de la Gournerie (sec. XIX)

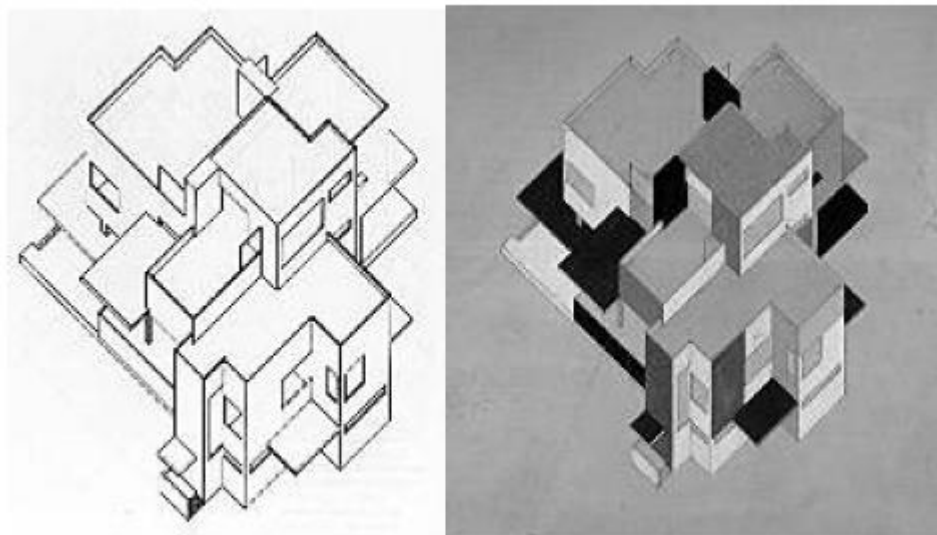
# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Representações axonométricas em tratados de geometria descritiva, em que se se coloca a ênfase na aplicação à representação de casos concretos, por exemplo no estudo da estereotomia (estudo do corte da pedra).



**Fig. 16** – Figuras do *Traité de géometrie Descriptive* de Jules de la Gournerie (sec. XIX)

Representações axonométricas na representação da arquitectura no Modernismo.

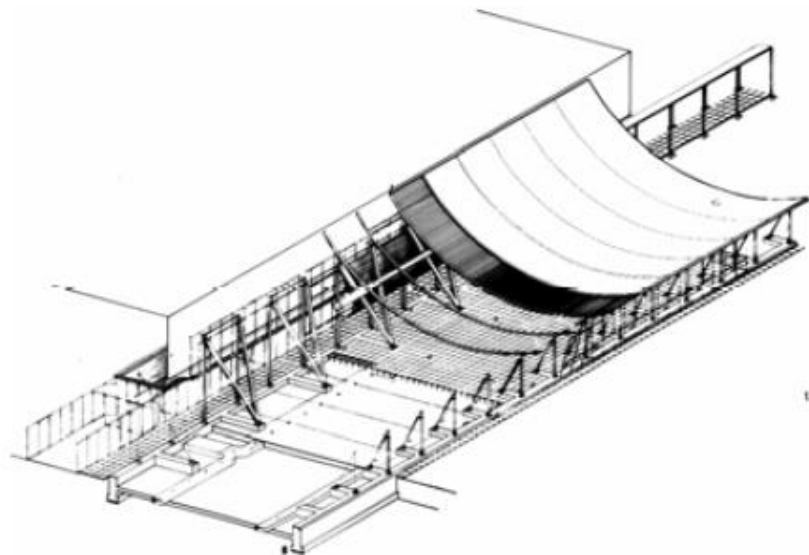
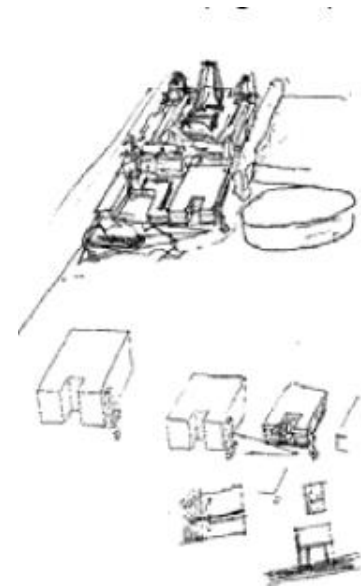


**Fig. 17** – Desenhos de Theo van Doesburg e Cor van Eesteren (1897-1988) para uma casa particular (1923)



**Fig. 18** – Desenho do projecto de Alberto Sartoris para a *Villa du Dr. Roman Brum* à *Lausanne* (1934).

Representações de arquitectura: do esquiço ao desenho de pormenores.



**Fig. 19** – Esquiço do arquitecto Siza Vieira

**Fig. 20** – Desenho de um projecto do arquitecto Renzo Piano

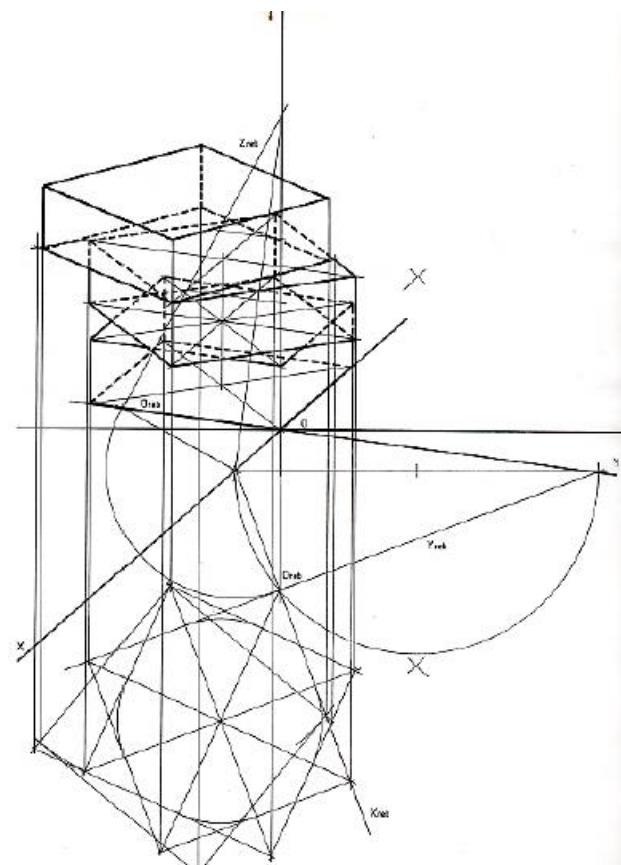
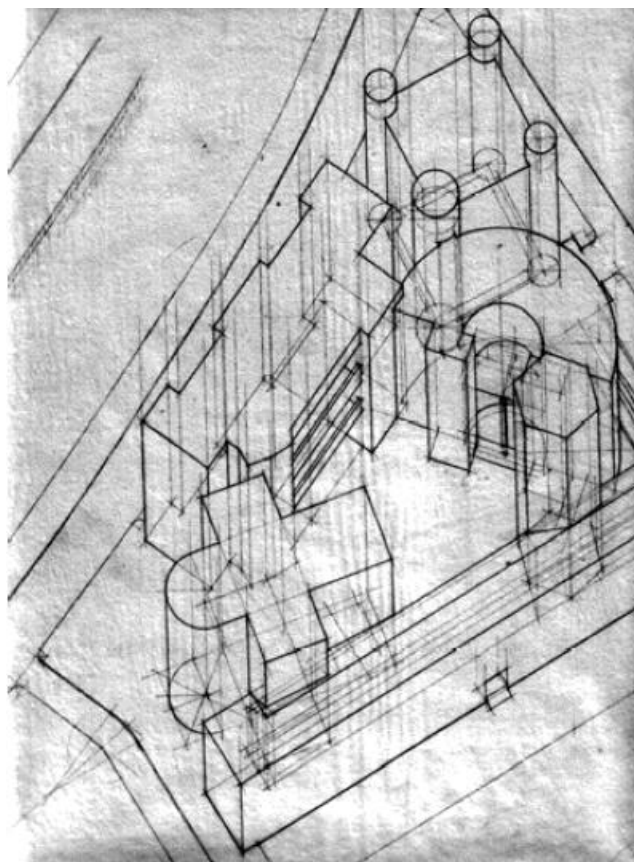
**Fig. 21** – Desenho de um pormenor construtivo

Representações axonométricas em visualização informática.



**Fig. 19** – Visualização informática e jogos de computador.

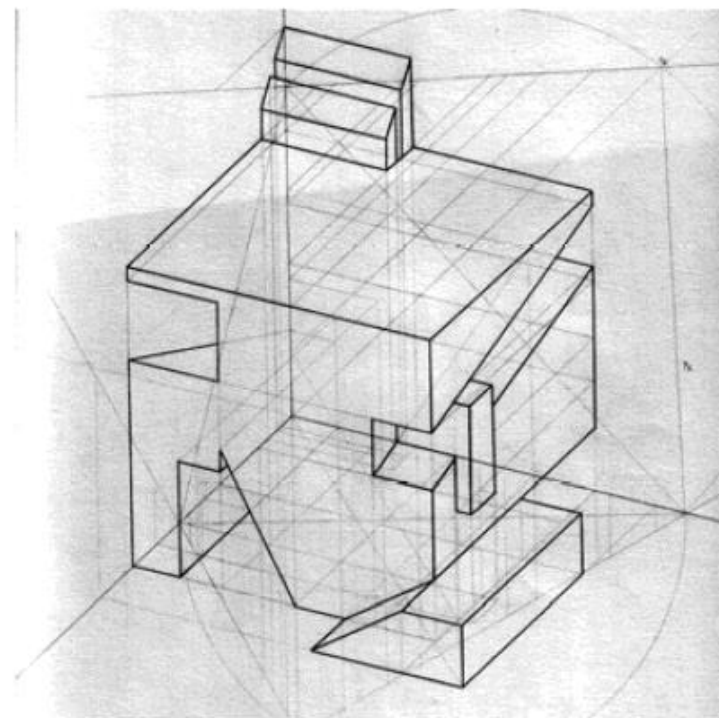
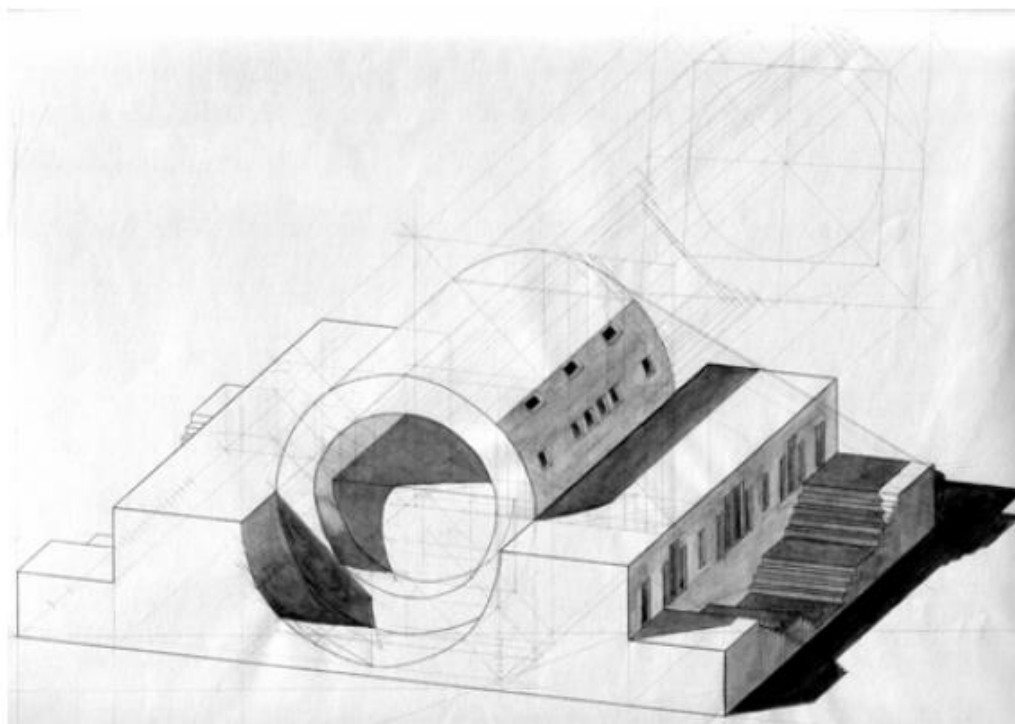
Exemplos de trabalhos de alunos.



**Fig. 20** – Exemplos de trabalhos de alunos.

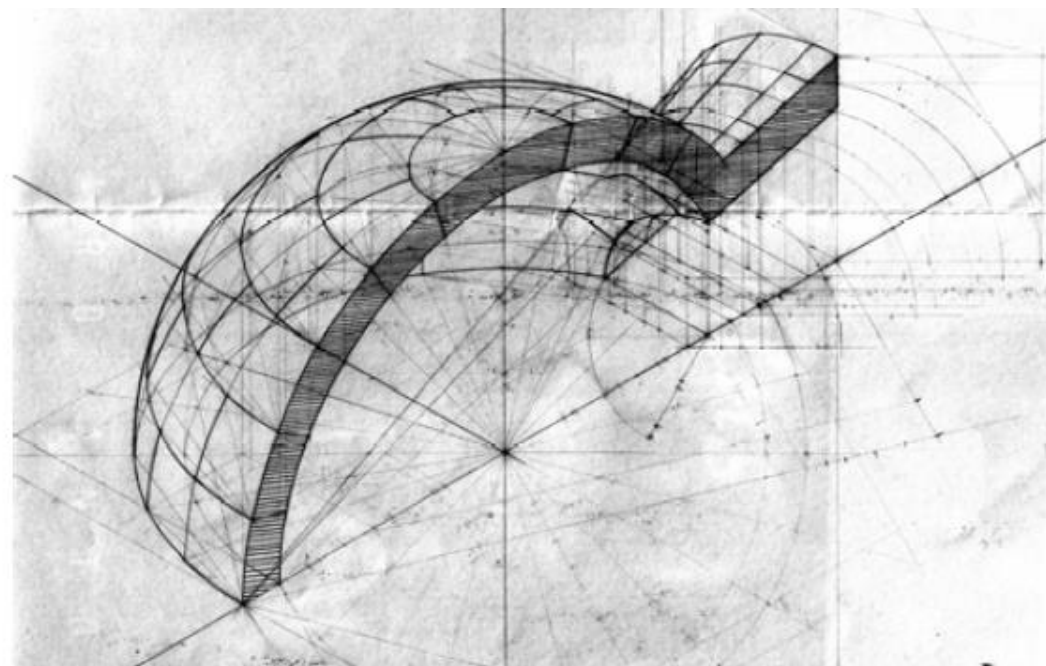
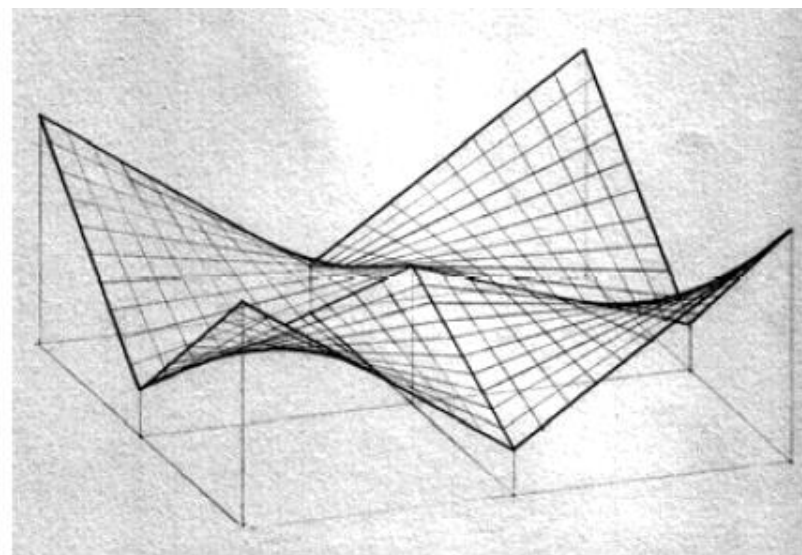


Exemplos de trabalhos de alunos.



**Fig. 21** – Exemplos de trabalhos de alunos.

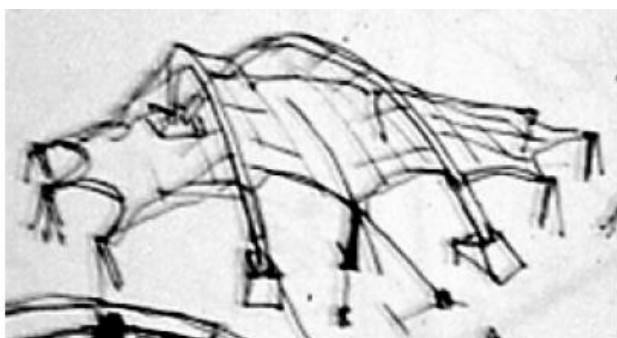
Exemplos de trabalhos de alunos.



**Fig. 22** – Exemplos de trabalhos de alunos.

# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: prática profissional

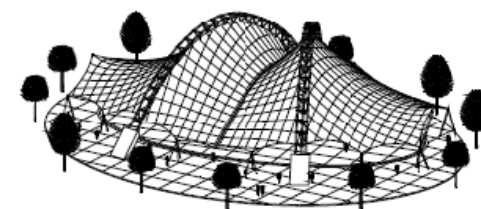
Exemplos da prática profissional: esboços, visualizações informáticas, desenhos construtivos.



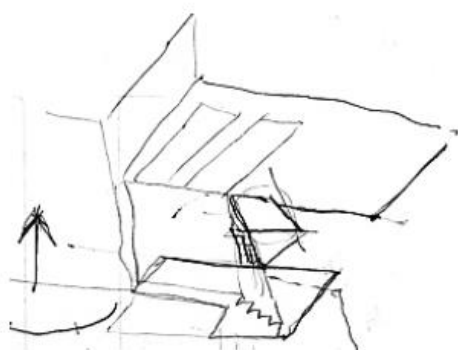
esboço



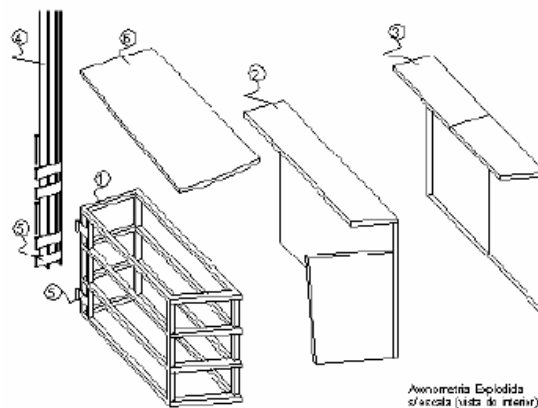
visualização informática



visualização informática

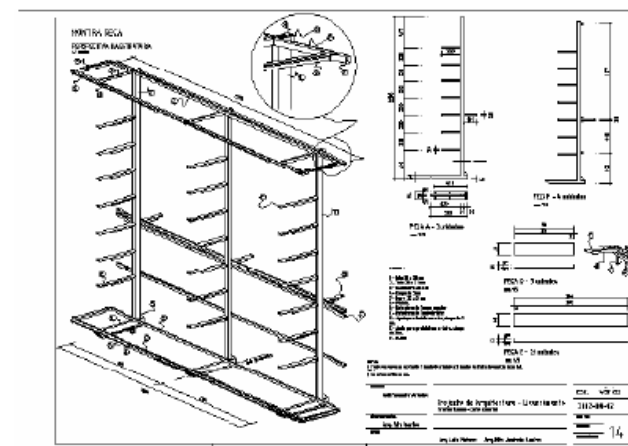


esboço



Axonometria Explodida  
d'escada (vista de interior)

excerto de desenho para construção

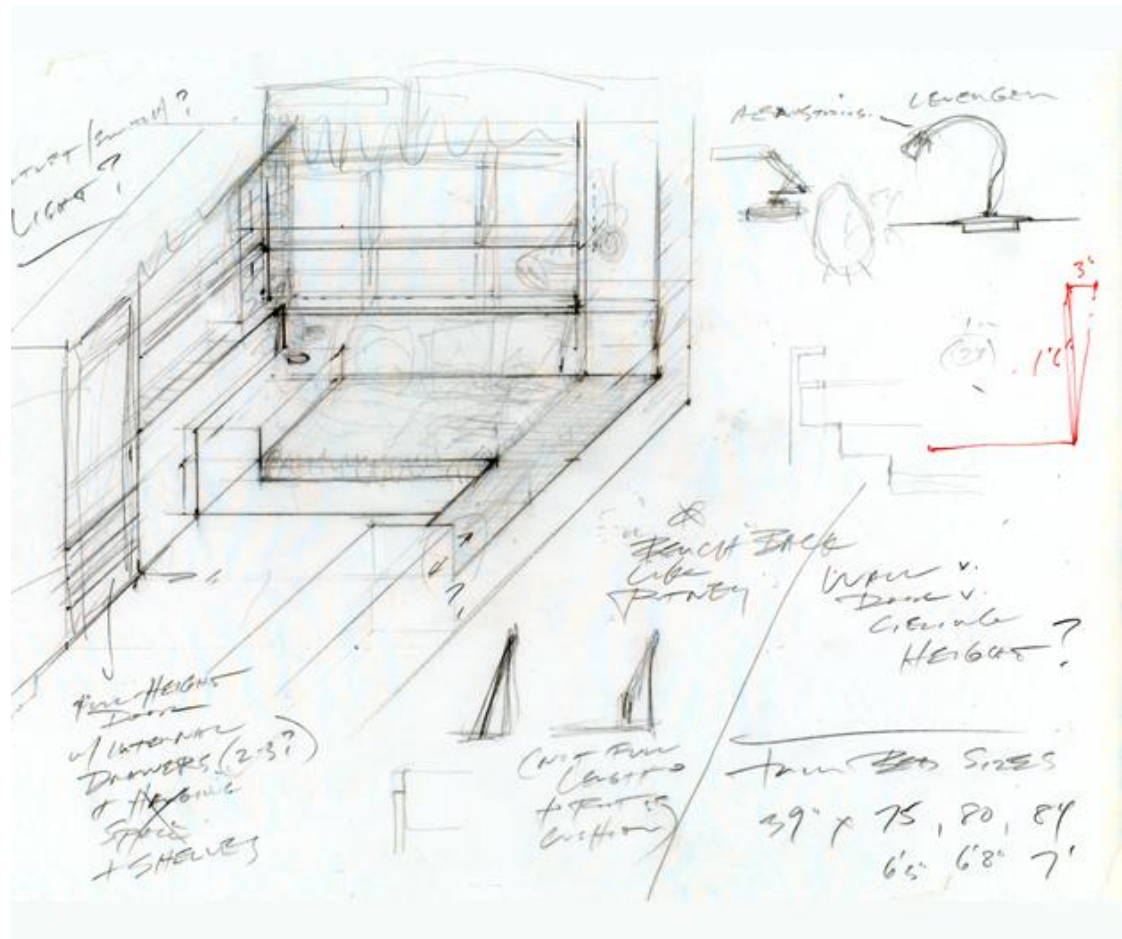
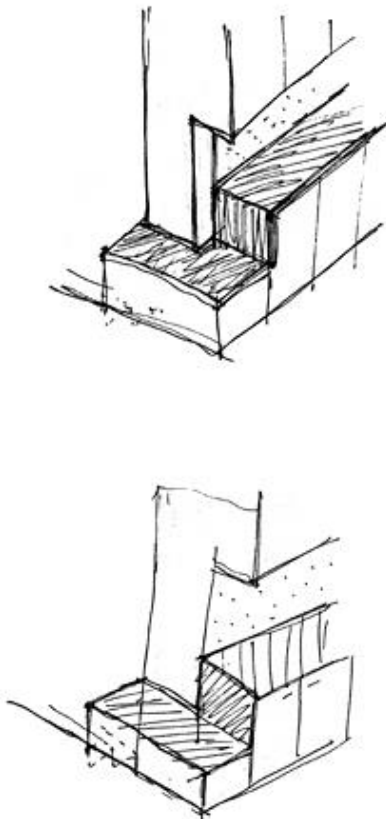


desenho para construção

Fig. 23

## >> Exemplos de desenhos axonométricos à mão levantada: exemplos da Web

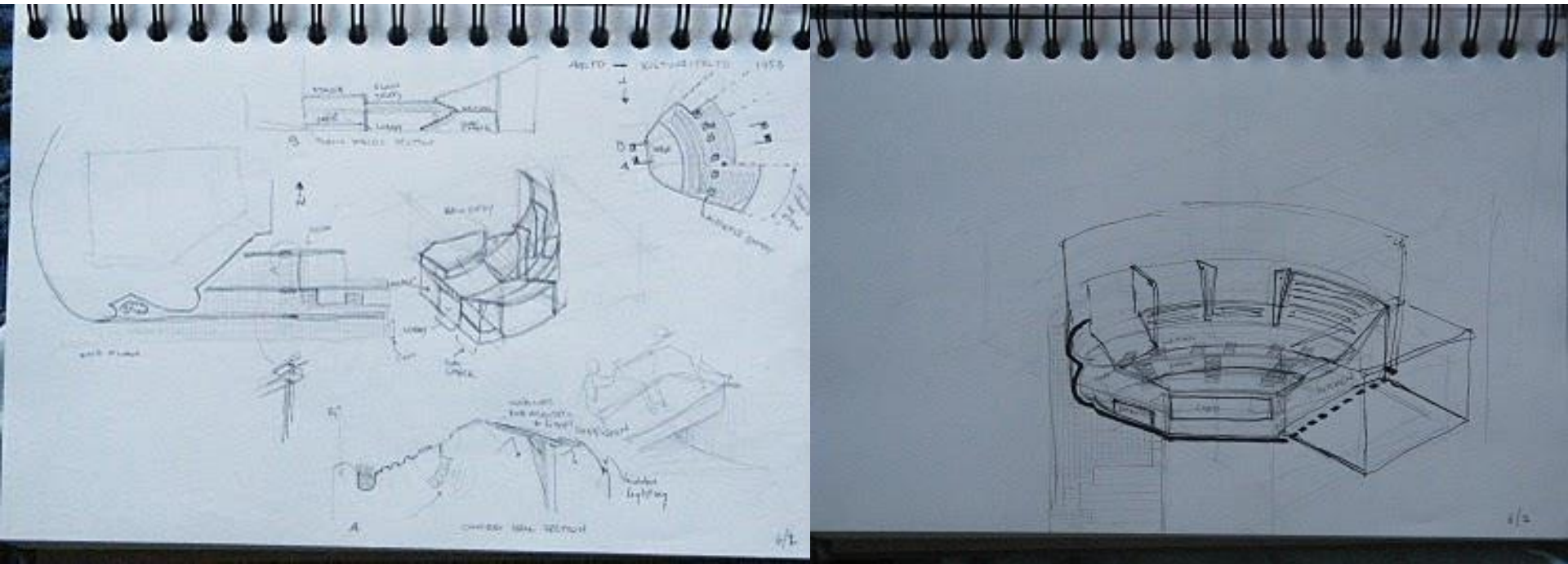
No exemplo da direita há uma orientação de planos que preserva as relações angulares. Esses planos aparecem “frontais” no desenho. No desenho da esquerda são arbitradas três direcções gráficas correspondentes aos três eixos estruturantes do objecto.



Imagens disponíveis em:  
<http://eastbranch.net/process.html>

## >> Exemplos de desenhos axonométricos à mão levantada: exemplos da Web

Nestes exemplos as formas curvas são inscritas em paralelepípedos. De seguida os paralelepípedos são decompostos de modo a que neles se inscrevam os objectos que se pretendem representar. Este método de estruturação do desenho é muito eficiente para representar formas curvas e pode aplicar-se quer se desenehe ou não à mão levantada.



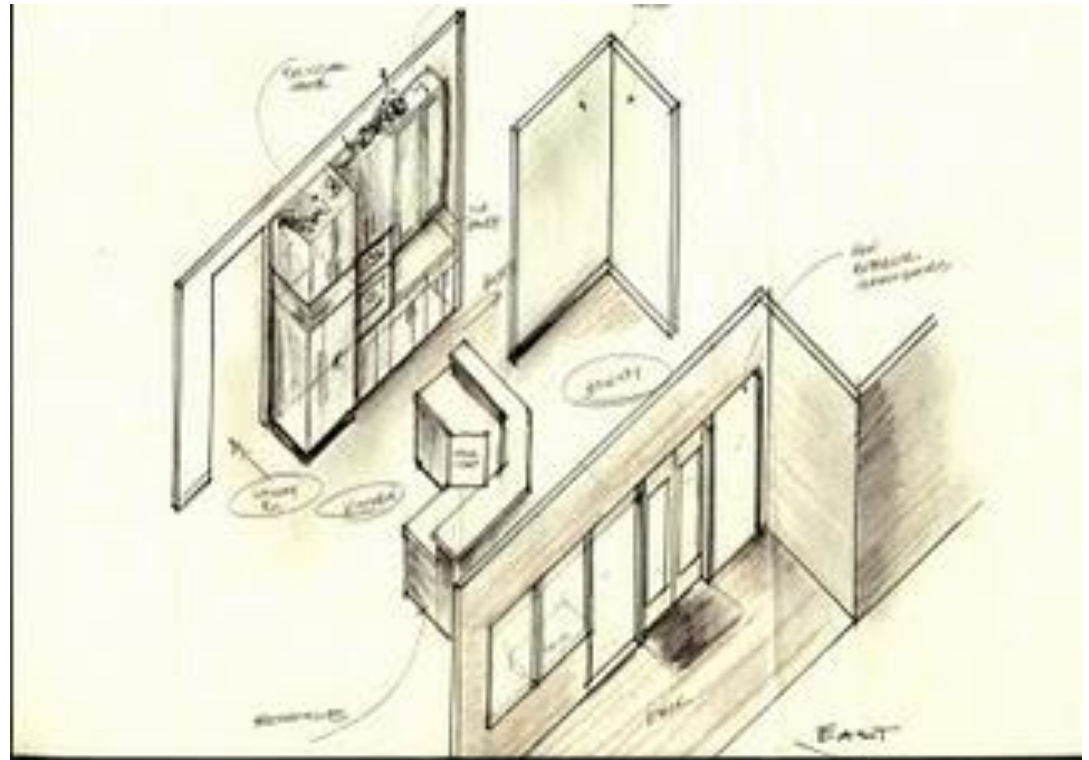
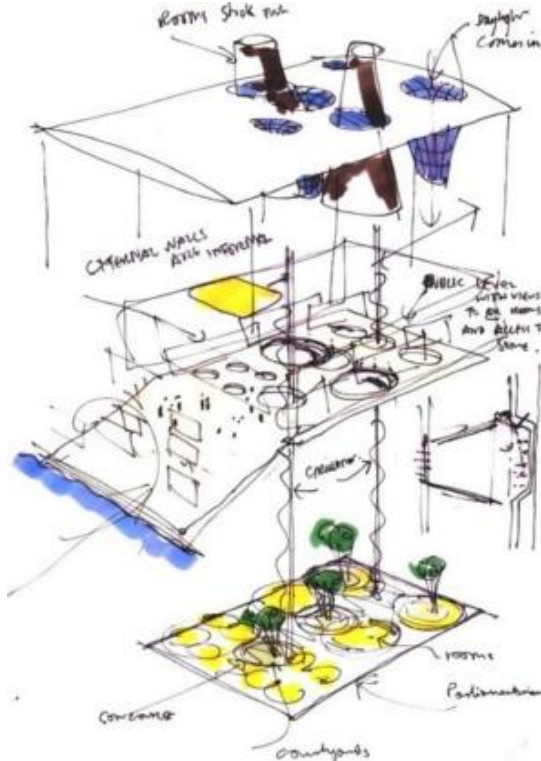
Imagens disponíveis em:

<http://scandicat.blogspot.com/2010/06/day-10-helsinki-alvar-aalto-and.html>



## >> Exemplos de desenhos axonométricos à mão levantada: exemplos da Web

No desenho da esquerda é feita uma “explosão” do objecto de modo a facilitar a visualização das relações entre os vários elementos constituintes do objecto. No desenho da direita há também uma orientação de planos que mantém as relações angulares. Neste caso trata-se da orientação horizontal que estrutura a organização do espaço/objecto.



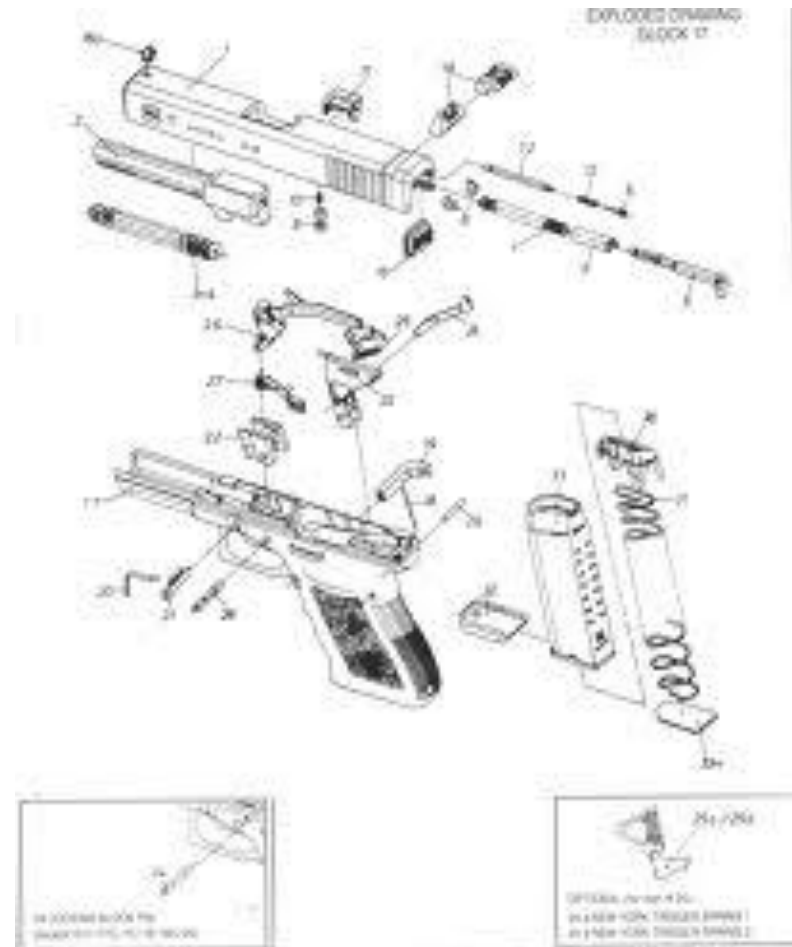
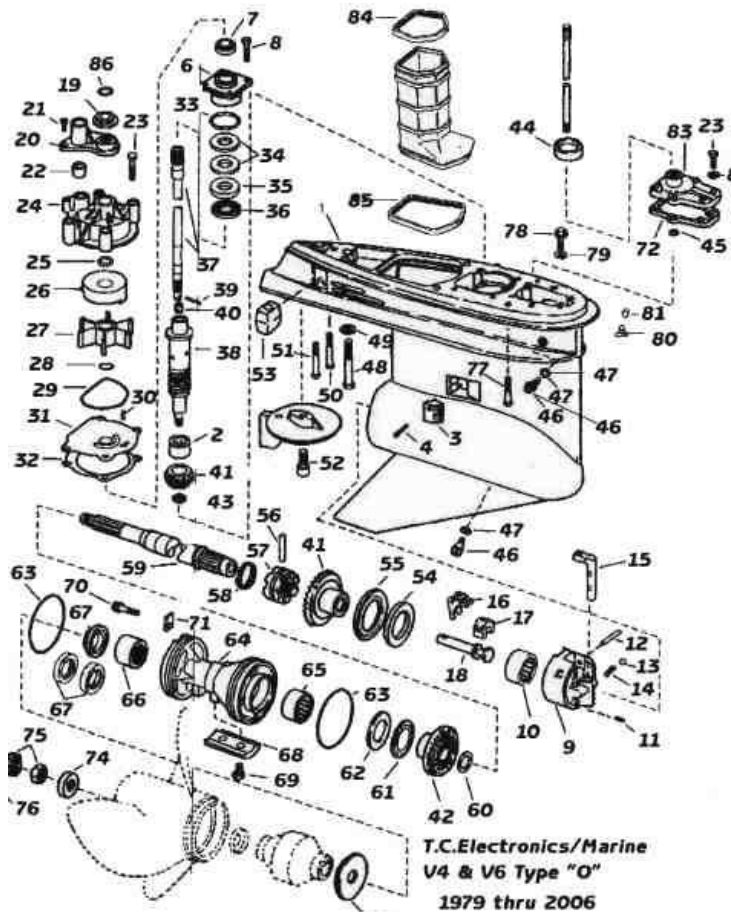
Imagens disponíveis em:

<http://en.wikipedia.org/wiki/Senedd> e <http://simplydesignpdx.blogspot.com/2009/10/happy-valley-kitchen-study.html>



## >> Exemplos de desenhos axonométricos explodidos: exemplos da Web

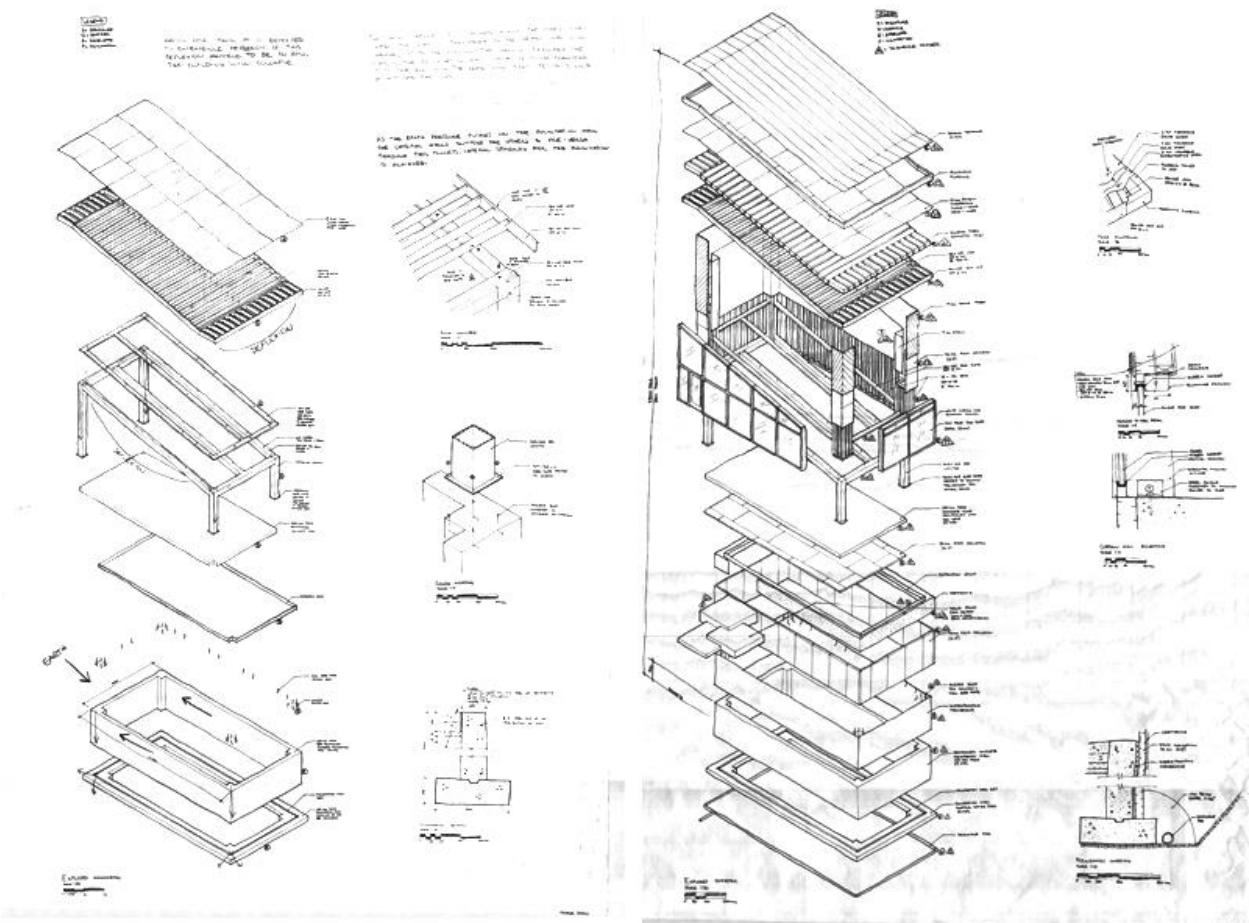
Os desenhos axonométricos explodidos são uma forma eficiente de ilustrar o modo como se relacionam as várias partes constituintes de um objecto, ou como se relacionam objectos distintos. São muito utilizados para ilustrar instruções de montagem de objectos, pormenores construtivos, diagramas de circulação, etc.



Imagens disponíveis em:  
<http://qwickstep.com/search/exploded-drawing.html>

## >> Exemplos de desenhos axonométricos cotados e anotados: exemplos da Web

A anotação de medidas em desenhos axonométricos numa direcção de eixo deve ser feita paralelamente a esse eixo com as linhas de chamada paralelas a um dos outros dois eixos. O desenho dos algarismos deve respeitar a lógica da axonometria como se o algarismo se situasse num plano em axonometria. O desenho dos algarismos deve ser cuidado e uniforme ao longo do desenho. O registo das medidas deve ser pensado e preparado e realizado por “impulso”. Na verdade este princípio deve aplicar-se a todo o processo de desenho.

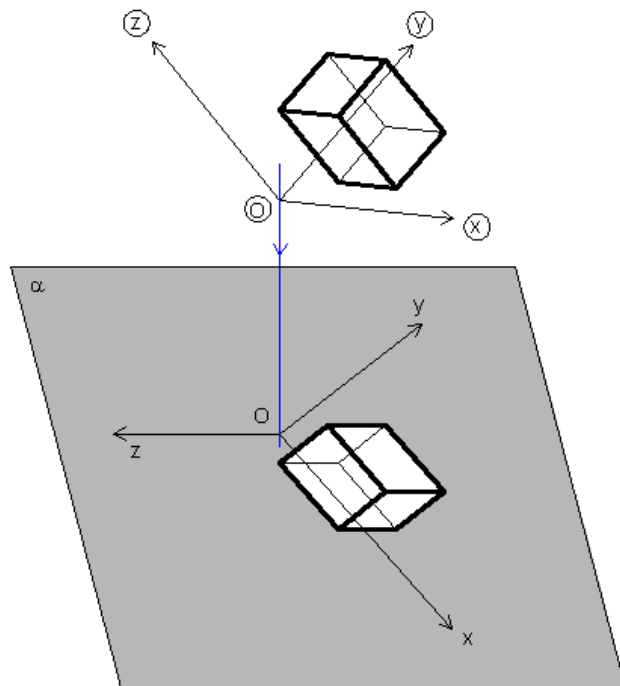


# Bloco A2

Os vários tipos de desenhos através de representações em axonometria: do esquiço ao desenho técnico.  
Bases operativas gerais do sistema axonométrico: axonometria ortogonal e axonometria oblíqua.  
Subsistemas axonométricos oblíquos: caso geral (teorema de Pohlke), a axonometria cavaleira e a axonometria militar; a definição de escalas nos eixos axonométricos; a noção de coeficiente de redução.  
O método do paralelepípedo envolvente e o método da afinidade.

# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: noções gerais

Na representação axonométrica, as figuras geométricas são associadas a um REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL e projectadas, solidariamente com este, num plano, o PLANO AXONOMÉTRICO, através de uma projecção ortogonal (AXONOMETRIA ORTOGONAL) ou oblíqua (AXONOMETRIA CLINOAGONAL).



- $(X, Y, Z)$  - REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL
- $X, Y$  e  $Z$  - EIXOS COORDENADOS
- $O$  - ORIGEM DO REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL
- $(x, y, z), (y, z, x)$  e  $(z, x, y)$  - PLANOS COORDENADOS
- $\alpha$  - PLANO AXONOMÉTRICO (o plano do desenho; a folha de papel)
- $x, y$  e  $z$  - EIXOS AXONOMÉTRICOS
- $O$  - PROJEÇÃO DA ORIGEM (por comodidade de linguagem por vezes designa-se simplesmente origem)

**Nota:** Alguns autores designam os planos coordenados por planos axonométricos, os eixos coordenados por eixos axonométricos, designando o plano de projecção simplesmente como plano de projecção. A nossa notação está de acordo com a notação adoptada nos programas do ensino secundário e vai ao encontro da notação utilizada pela maioria dos autores.

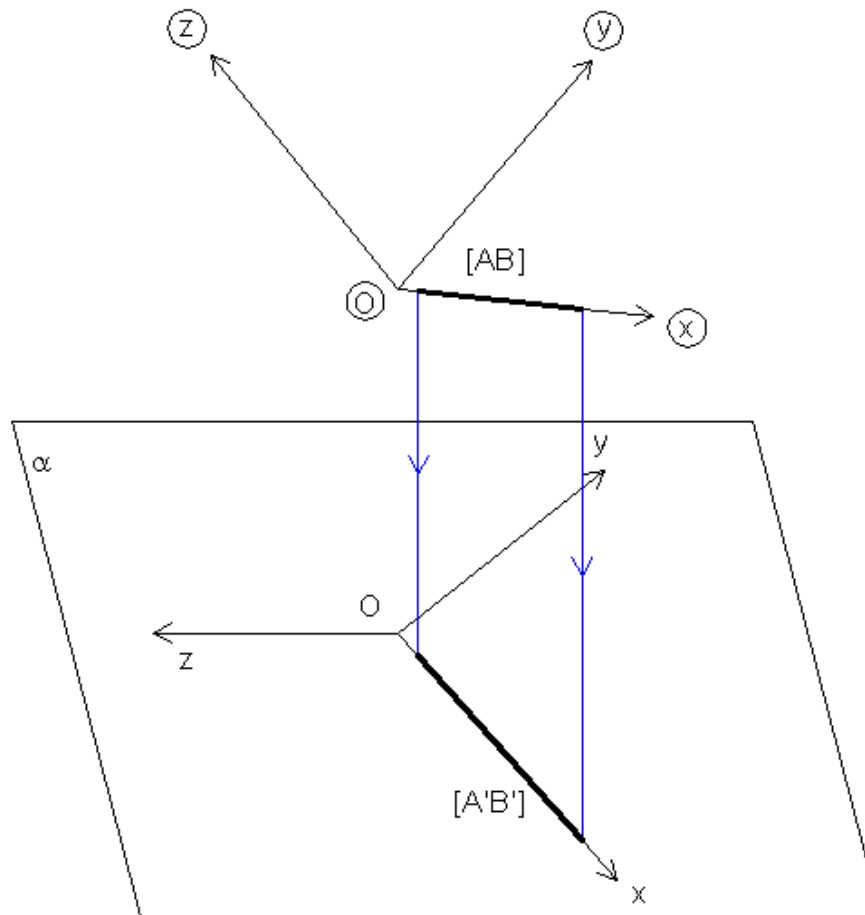
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução

Numa representação axonométrica podem estar relacionados, separadamente ou em conjunto, três conceitos distintos: i) COEFICIENTE DE REDUÇÃO, ii) ESCALA DO DESENHO AXONOMÉTRICO, e iii) ESCALA AXONOMÉTRICA.

O conceito de COEFICIENTE DE REDUÇÃO é específico da representação axonométrica e é função i) da direcção do eixo coordenado em relação ao plano axonométrico, e ii) da direcção de projecção. Não esqueçamos que os eixos axonométricos são projecções de eixos coordenados e que, por isso, as medidas paralelas a um eixo coordenado aparecem projectadas paralelas ao eixo axonométrico correspondente. À razão entre uma medida paralela a um eixo axonométrico, digamos  $[A'B']$ , e a sua homóloga paralela ao eixo coordenado correspondente, digamos  $[AB]$ , dá-se a designação de COEFICIENTE DE REDUÇÃO. No caso da figura seguinte trata-se do coeficiente de redução no eixo axonométrico  $x$  e nota-se por  $C_x$ . De modo idêntico notam-se  $C_y$  e  $C_z$  para os coeficientes de redução correspondentes aos eixos axonométricos  $y$  e  $z$ , respectivamente.

A noção geral do conceito de ESCALA define-se como sendo a razão entre uma medida numa representação e a sua homóloga real. As escalas podem ser expressas graficamente ou numericamente através de um quociente. Um exemplo de escala numérica é  $1/100$ , escala bastante usada em arquitectura. Quando se toma a axonometria no seu conjunto como um desenho, faz sentido falar de ESCALA DO DESENHO AXONOMÉTRICO no sentido geral que se dá ao termo escala. Esta diz respeito a um factor de redução global a aplicar ao espaço de um objecto a ser representado, e por conseguinte à sua representação, aqui entendida como desenho.

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução



Assim, podemos estender o conceito de ESCALA ao conceito de ESCALA AXONOMÉTRICA. Esta corresponde à composição da escala do desenho com cada um dos coeficientes de redução. Assim, numa representação axonométrica há, em princípio, 3 escalas axonométricas distintas. Uma forma de impor as escalas axonométricas num desenho seria por exemplo a seguinte:

$$E_x=1/100, E_y=1/100, E_z=1/200.$$

No entanto, esta forma de operar não é muito comum. Em geral privilegia-se a referência a uma escala geral e a coeficientes de redução específicos para cada eixo.



## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução

É importante perceber o que une e distingue os conceitos de escala axonométrica e de coeficiente de redução. Vamos procurar fazê-lo através de um exemplo.

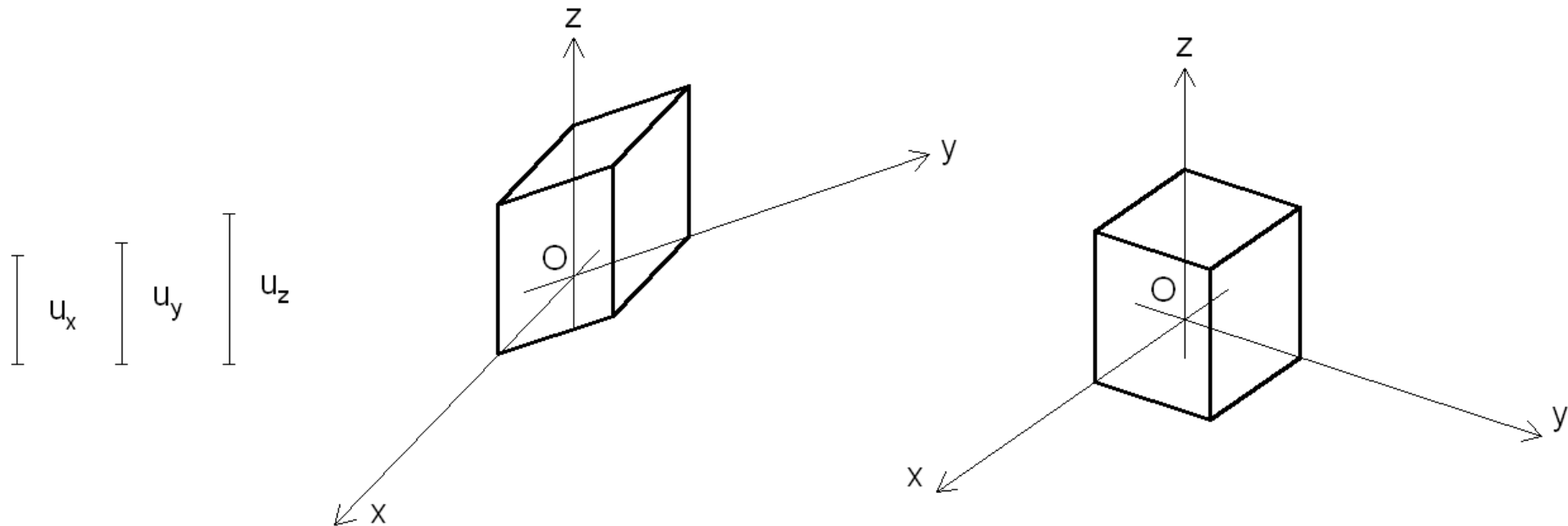
Num desenho axonométrico à escala 1/100, por exemplo, as medidas reais são afectadas sequencialmente, e separadamente, pela escala do desenho e de seguida pelo coeficiente de redução, ou vice-versa. Suponhamos que pretendemos representar uma medida de 8m paralela ao eixo coordenado z, sabendo que o coeficiente de redução a aplicar às medidas no eixo coordenado z é de 0.9, por exemplo. Neste caso a medida 8m afectada pela escala do desenho, 1/100, resulta em 8cm. De seguida esta medida afectada do coeficiente de redução 0.9 resulta em 7.2cm. Esta é a medida a representar ao longo do eixo axonométrico z.

Por outro lado a escala axonométrica de um eixo é uma expressão que sintetiza, não distinguindo, o coeficiente de redução e a escala do desenho. Assim, ao definir escalas para os eixos axonométricos, em geral escalas gráficas, não são explícitos os valores dos coeficientes de redução nem a escala da axonometria. Porém, as relações de proporção entre as escalas axonométricas e as relações de proporção entre os coeficientes de redução são as mesmas para um dado desenho.

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: axonometria oblíqua (clinogonal)

No CASO GERAL da axonometria oblíqua podemos escolher arbitrariamente as direcções dos eixos axonométricos e as escalas axonométricas em cada eixo. Esta possibilidade é uma consequência directa do teorema de Pohlke/Schwarz. Este é o caso em que decompor aqueles valores em escala do desenho e coeficientes de redução é tarefa árdua (mas que pode ser resolvida graficamente através de uma afinidade)!

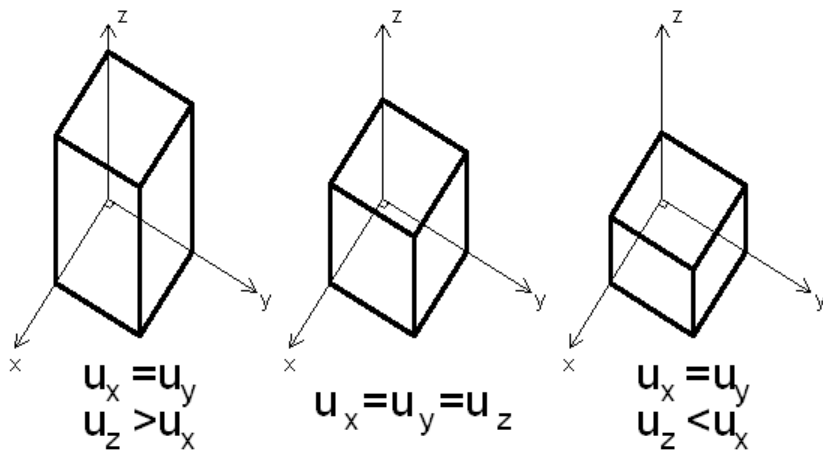
Nos exemplos abaixo foram arbitradas diferentes direcções de eixos axonométricos e foram definidas escalas distintas para cada um dos eixos axonométricos  $x$ ,  $y$  e  $z$  dadas pelos segmentos  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ , respectivamente, representativos de um comprimento unitário (tomado como padrão das medidas a utilizar). Em cada uma das axonometrias está representado um cubo com uma unidade de lado. Do ponto de vista estritamente geométrico ambas as representações estão correctas. No entanto a representação da direita é mais verosímil como representação de um cubo. Por isso, ao considerar o caso geral da axonometria oblíqua, é conveniente dispor os eixos e definir as escalas de modo a que as representações resultem visualmente convincentes.



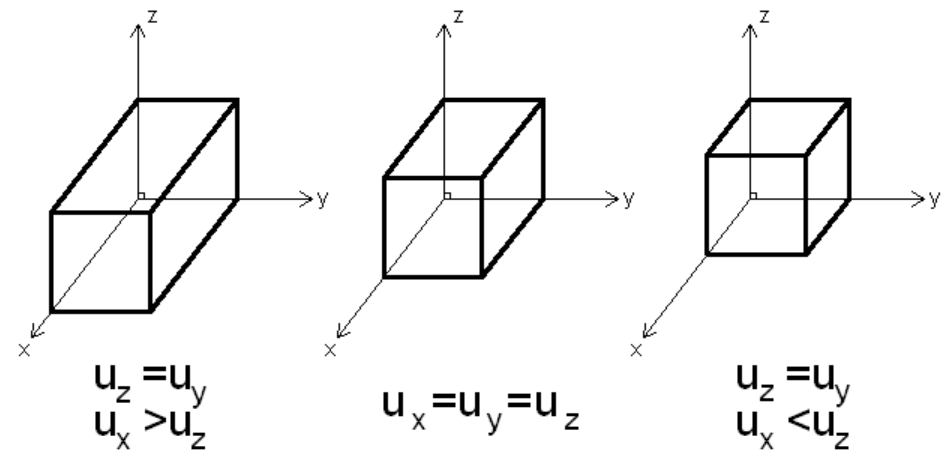
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: axonometria oblíqua (clinogonal)

Para além do caso geral da axonometria oblíqua consideram-se, em geral, dois casos particulares: i) o caso em que o plano coordenado  $x.y$  é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA MILITAR ou PLANOMÉTRICA) e o caso em que o plano coordenado  $x.z$  (ou  $y.z$ ) é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA CAVALEIRA). A consequência desta disposição espacial é de que os eixos axonométricos  $x$  e  $y$ , no caso da axonometria militar, e os eixos  $x$  e  $z$  (ou  $y$  e  $z$ ), no caso da axonometria cavaleira, são perpendiculares entre si, e as ESCALAS AXONOMÉTRICAS (e COEFICIENTES DE REDUÇÃO) nestes eixos são iguais entre si. Os coeficientes de redução nestes eixos são iguais à unidade.

No caso da axonometria militar a direcção e escala do eixo axonométrico  $z$  podem ser livremente arbitradas, porém a representação só resulta visualmente convincente se o escala no eixo axonométrico  $z$  for igual ou inferior à escala dos outros dois eixos, isto é, se o coeficiente de redução for igual ou inferior a 1. Raciocínio análogo pode ser aplicado ao caso da axonometria cavaleira. Nos exemplos abaixo estão representados cubos em axonometria militar (à esquerda) e cavaleira (à direita). Quais são mais convincentes como representações de cubos? Julgamos que a resposta é óbvia.



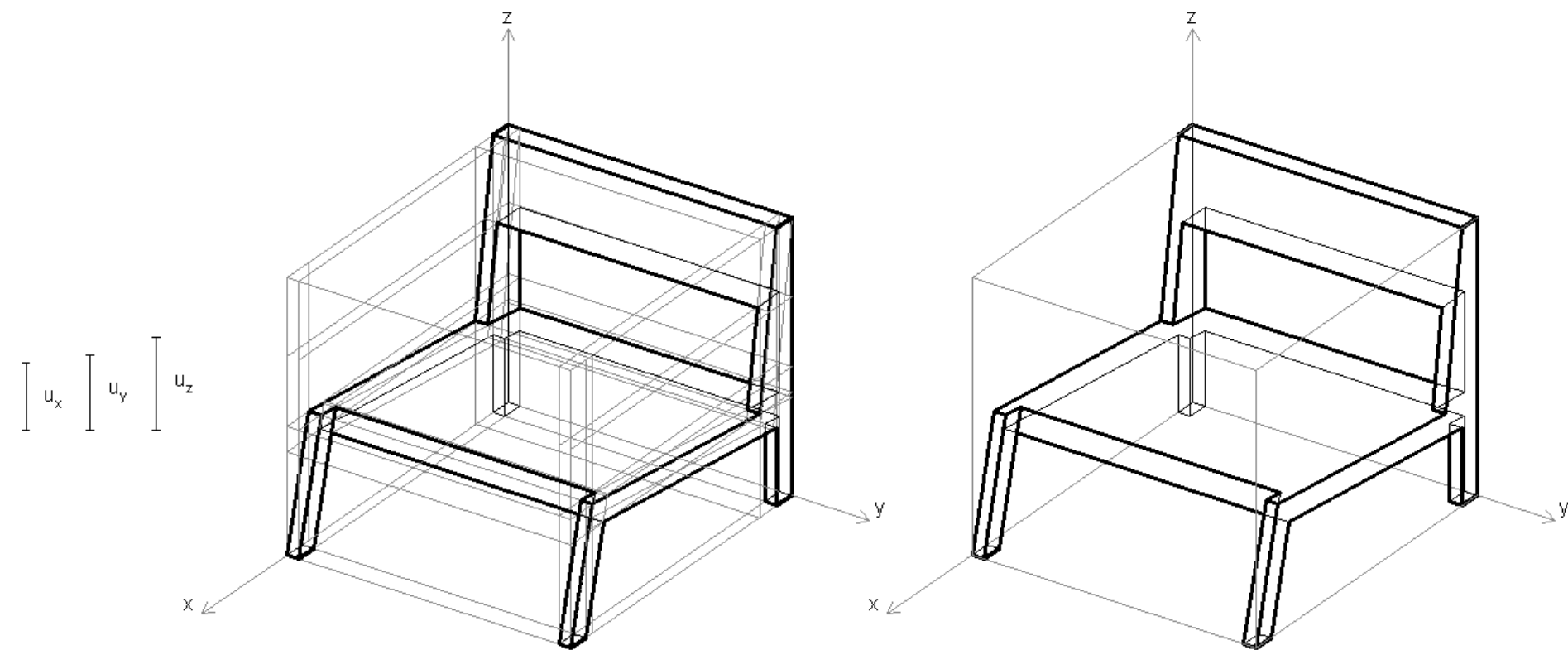
Axonometria Militar



Axonometria Cavaleira

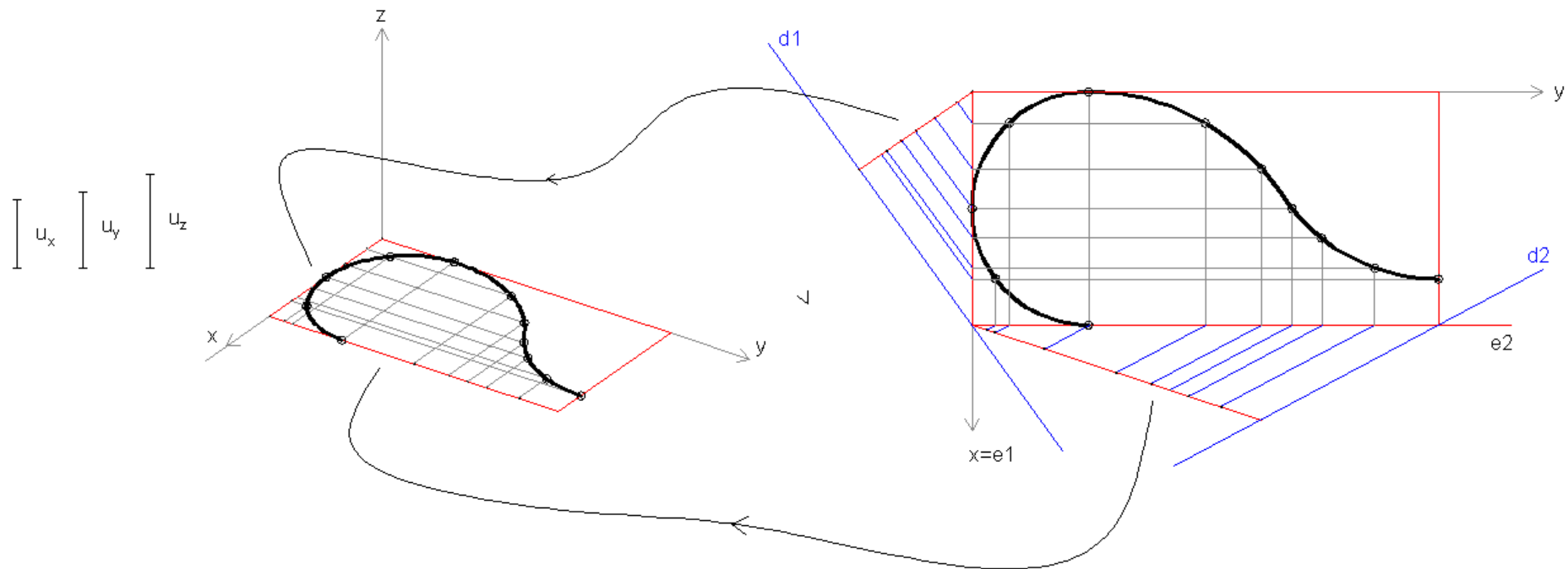
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: o método do paralelepípedo envolvente

Para representar um objecto mais ou menos complexo em axonometria, pode considerar-se o paralelepípedo que o circunscribe e em função da decomposição deste chegar àquele. Este método designa-se por MÉTODO DO PARALELEPÍPEDO ENVOLVENTE. Na figura seguinte dá-se um exemplo.



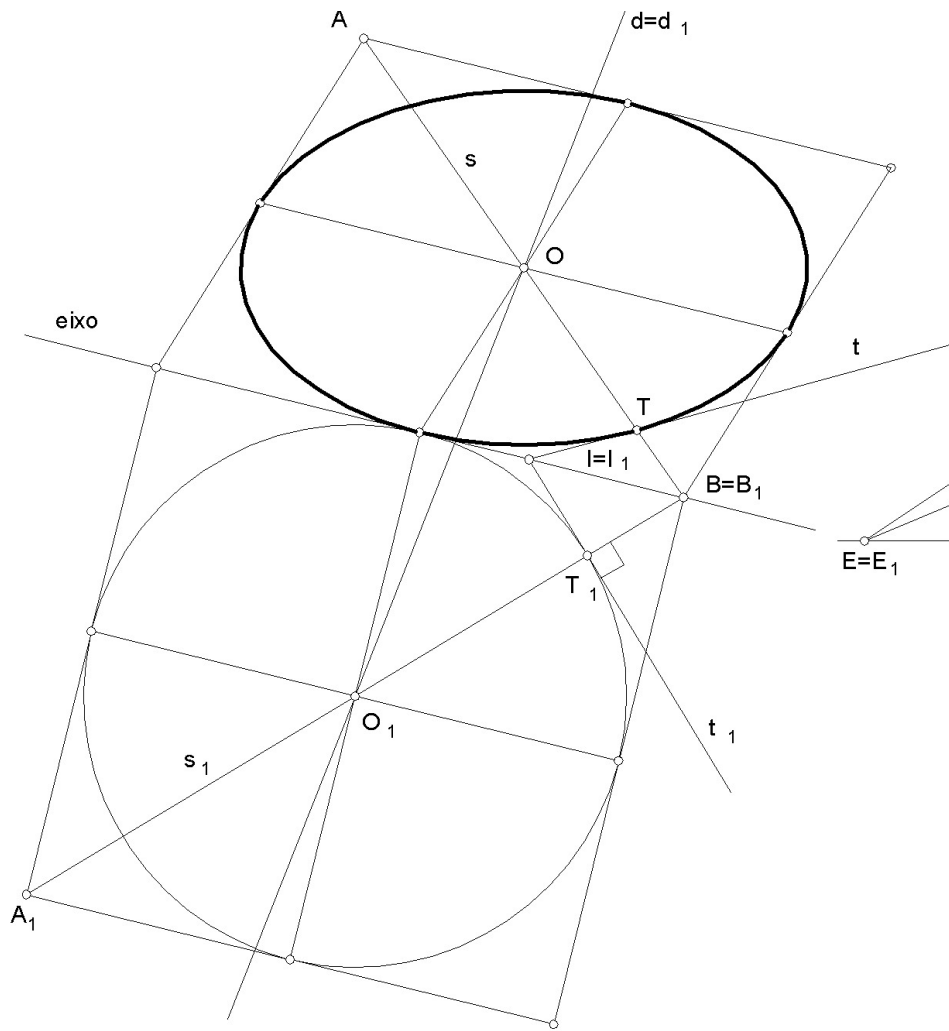
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: o método da afinidade

Associado ou não ao método anterior, pode utilizar-se o MÉTODO DA AFINIDADE. Este método consiste: i) na definição de um eixo para a transformação afim, e ii) na definição de uma direcção de afinidade que relacione o desenho a obter com um desenho homólogo conhecido. A figura seguinte ilustra a aplicação do método na representação de uma curva livre. Note-se que por comodidade de desenho pode proceder-se à transformação como um traçado auxiliar não sobreposto ao da axonometria, como ilustra a figura. Note-se ainda que foram utilizadas duas afinidades, uma de direcção  $d1$  e eixo  $e1$ , e outra de direcção  $d2$  e eixo  $e2$ . Com efeito, a afinidade é aplicada a pontos discretos que depois devem ser unidos “à mão levantada”.

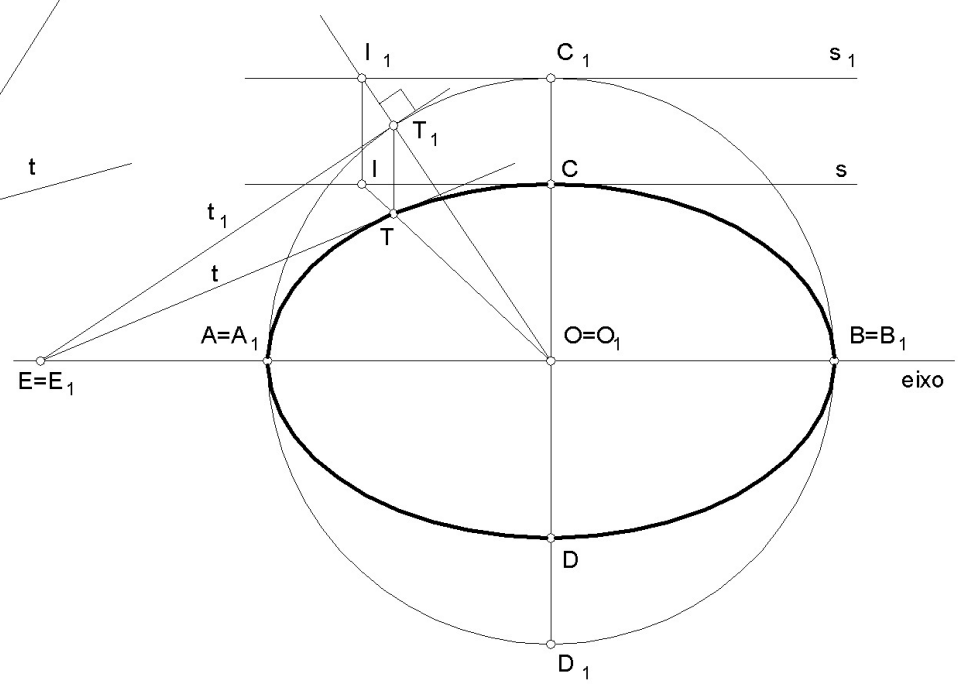


No desenho seguinte é ilustrada a afinidade entre circunferência e elipse. No primeiro caso a elipse está definida por diâmetros conjugados e o eixo da afinidade contém um lado do paralelogramo circunscrito. No segundo caso a elipse está definida pelos seus eixos principais e o eixo da afinidade contém o eixo maior da elipse. Em ambos os casos a circunferência afim corresponde, ponto a ponto, à elipse.

# >> AFINIDADE ELIPSE / CIRCUNFERÊNCIA



AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA

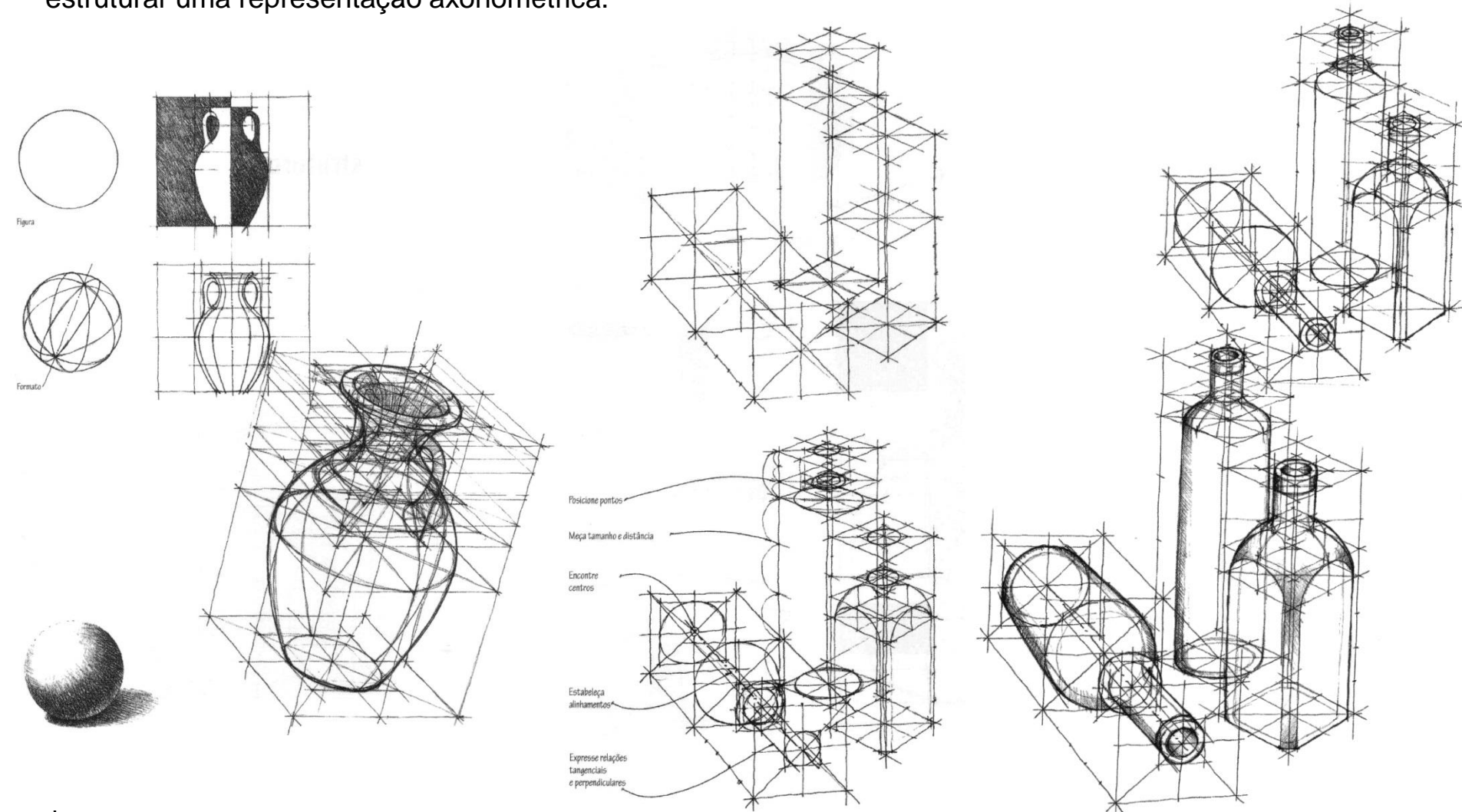


AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA



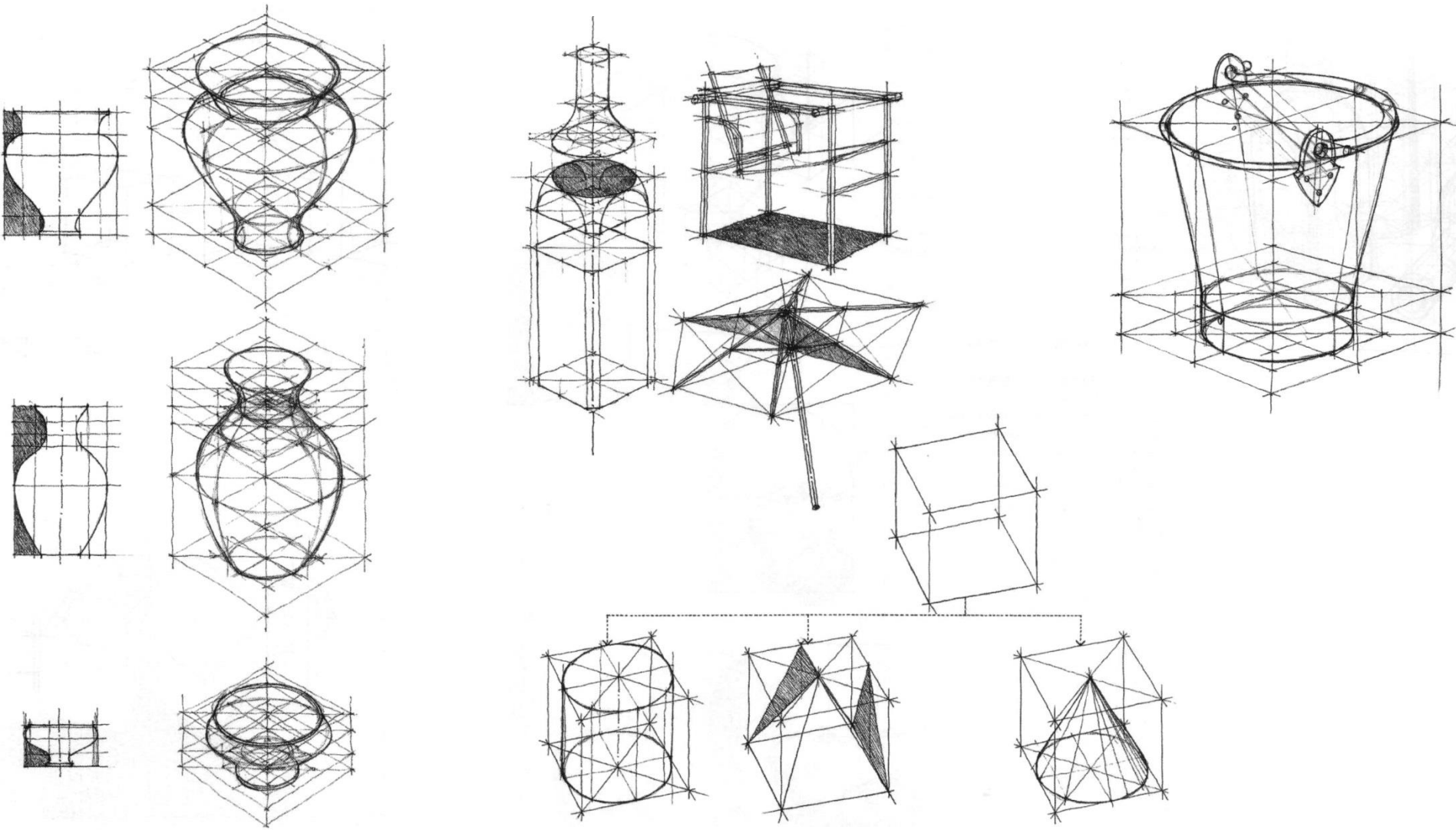
## >> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente / afinidade

Nos desenhos que se seguem, ilustra-se a aplicação do método do paralelepípedo envolvente. Ainda que em desenhos produzidos à mão levantada, coloca-se em evidência a utilidade do método como modo de estruturar uma representação axonométrica.



In

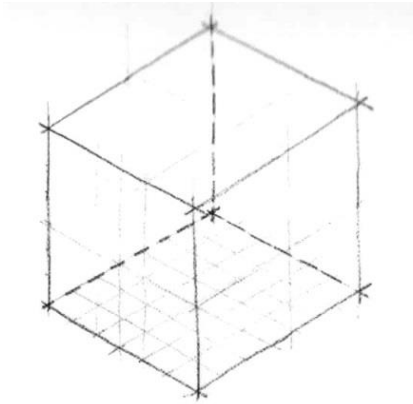
# >> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente / afinidade



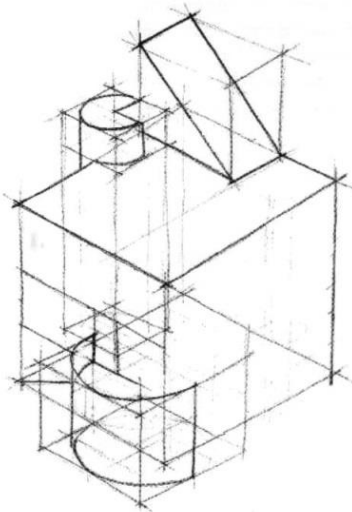
In

CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

## >> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente

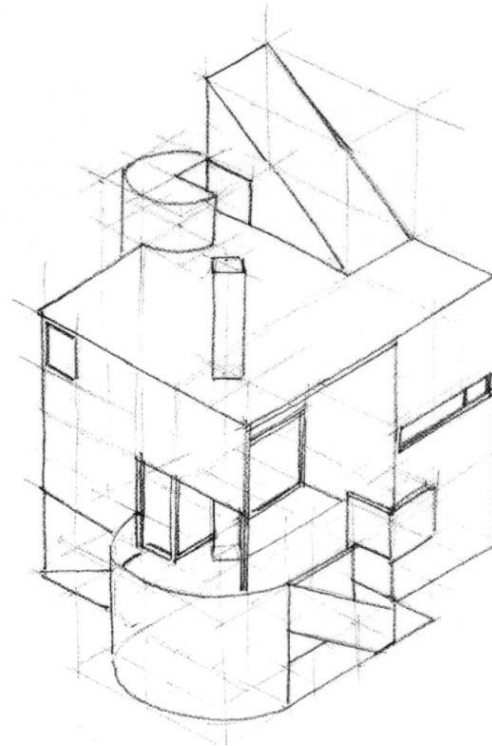


*Um simples prisma em axonometria  
converte-se no "contentor" básico  
de um edifício, neste caso a residência  
Gwathmey.*

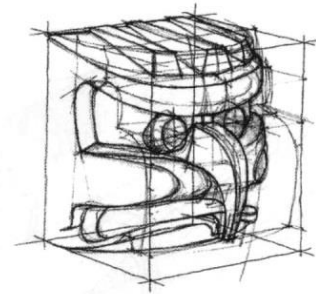
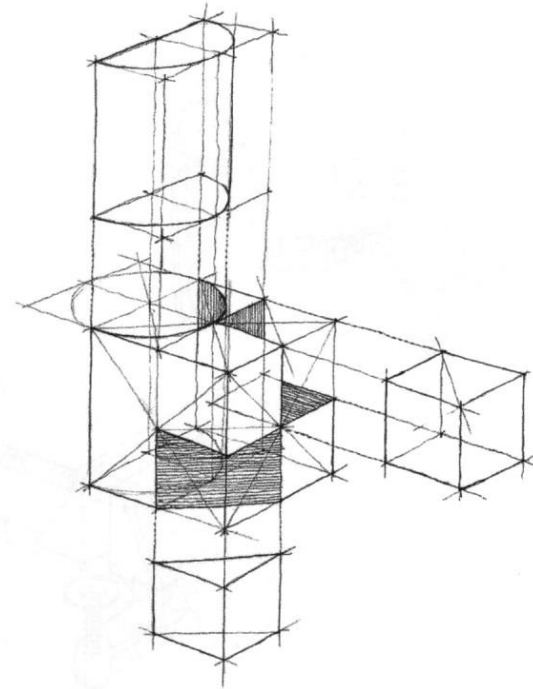
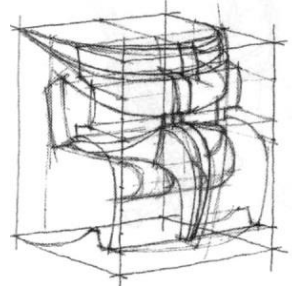
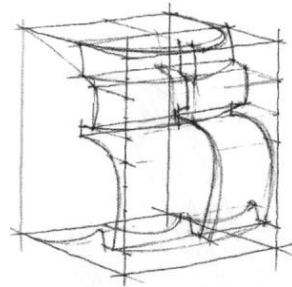
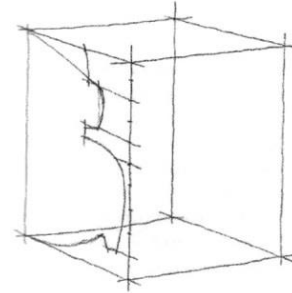
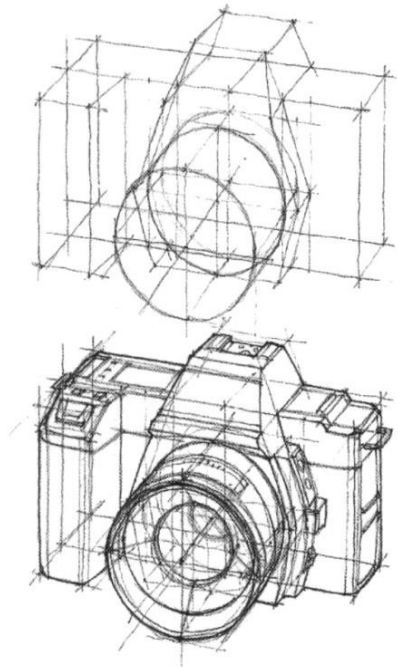
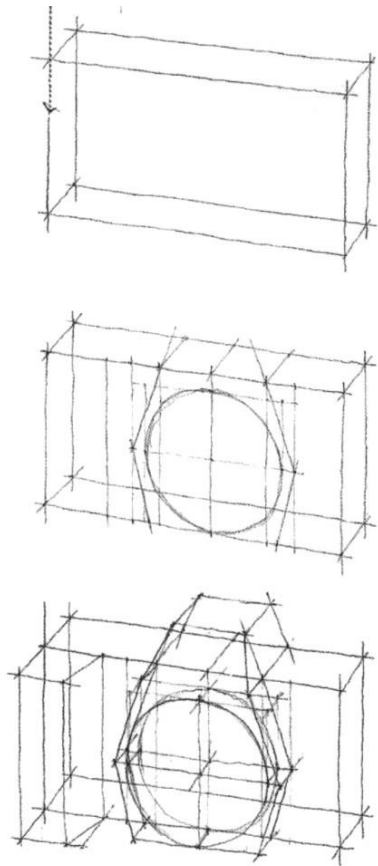


*Subdivide-se  
gradualmente o  
prisma, de acordo  
com os elementos  
volumétricos que  
compõem a sua  
estrutura  
arquitectónica.*

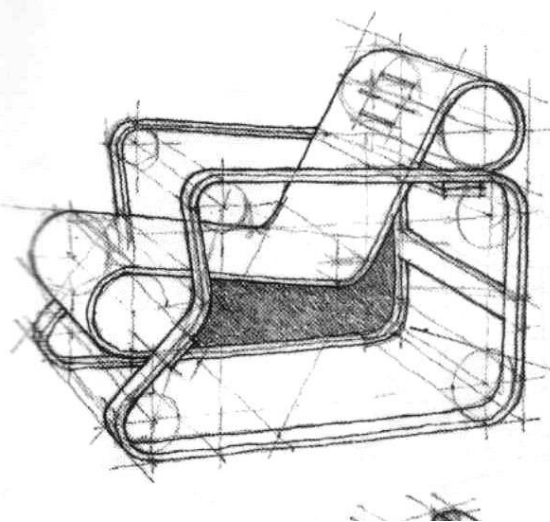
*Por fim, incluem-se  
janelas, escada e  
aqueles elementos  
que acabam por  
definir a proposta  
analisada.*



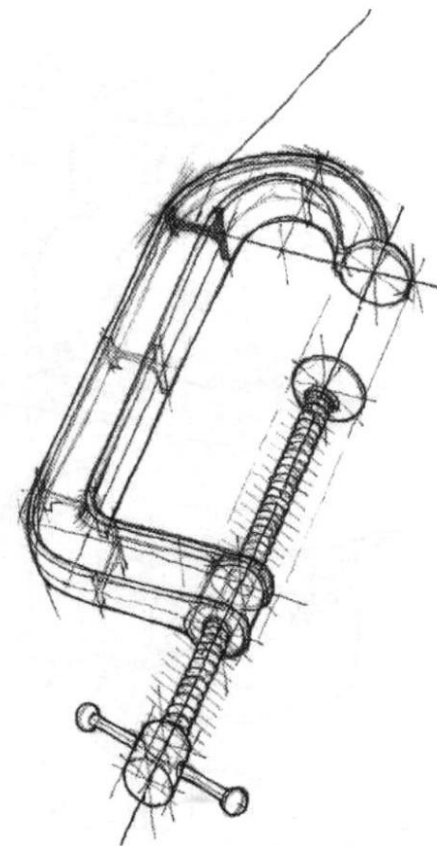
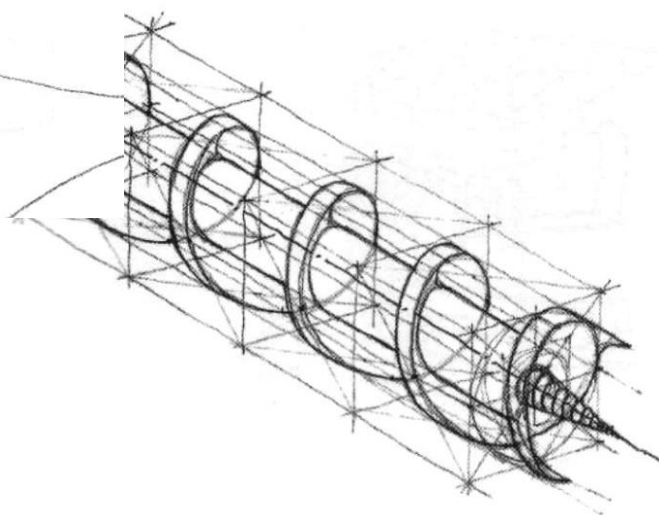
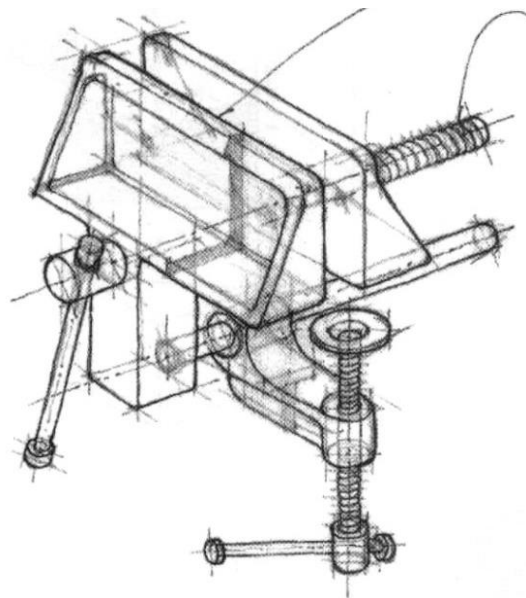
## >> EXEMPLOS: adição / subtração



## >> EXEMPLOS: formas complexas



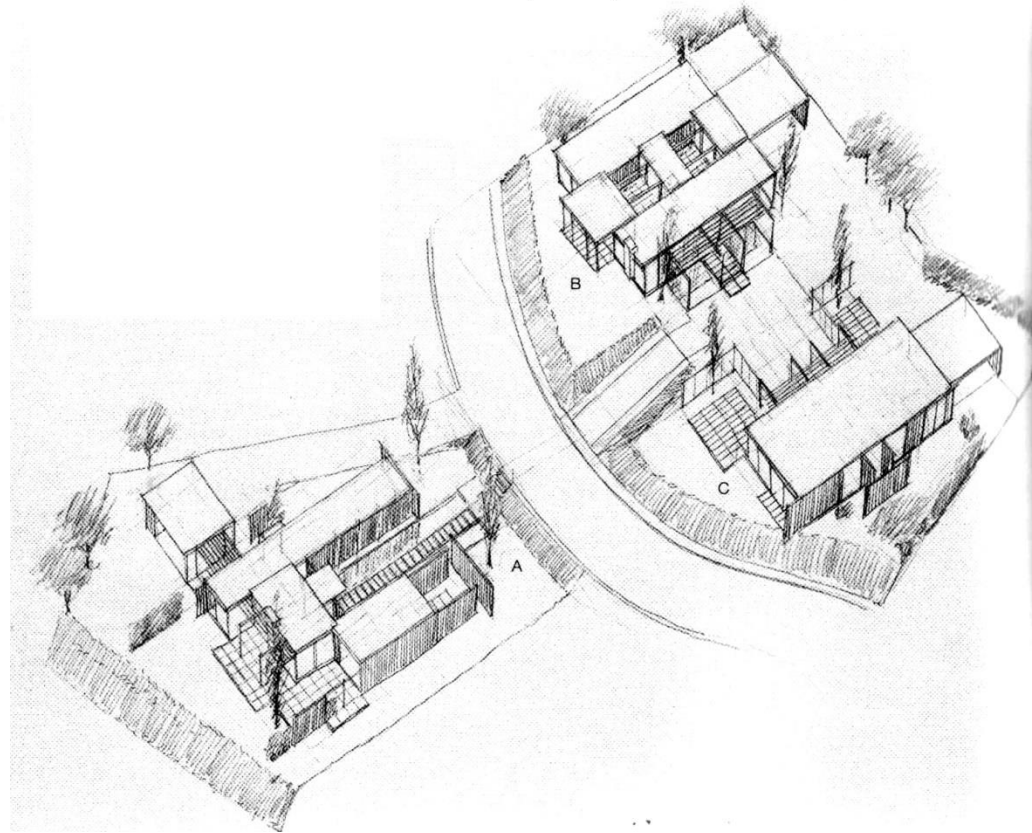
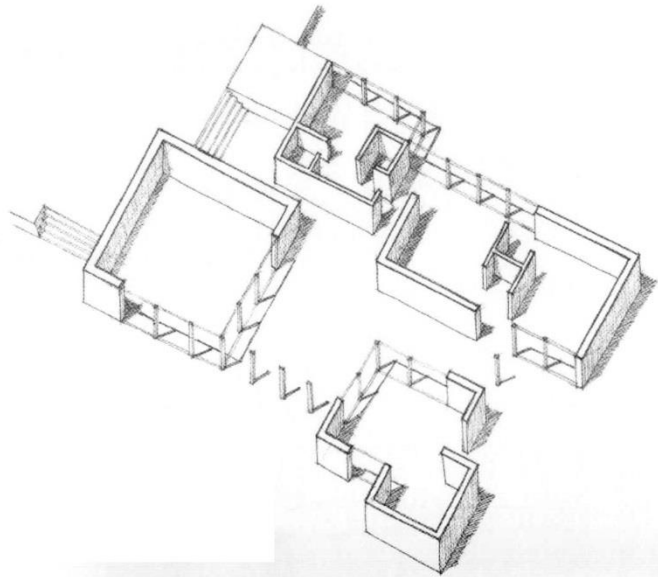
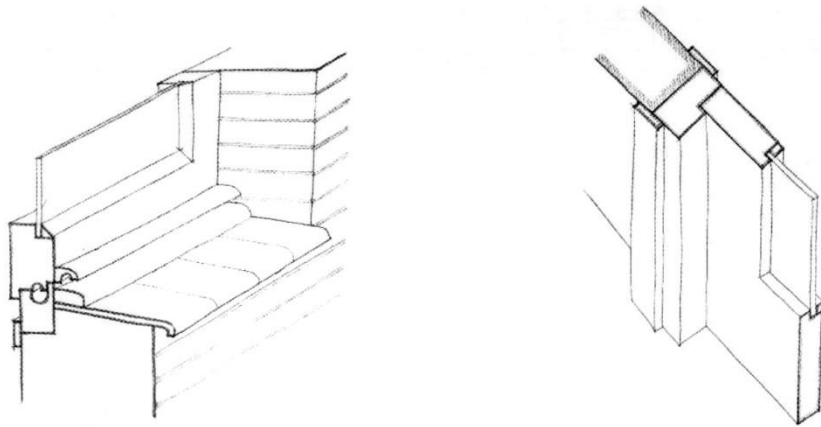
(Este desenho está em perspectiva e não em axonometria.)







# >> EXEMPLOS: esquiço axonométrico em axonometria cavaleira e militar

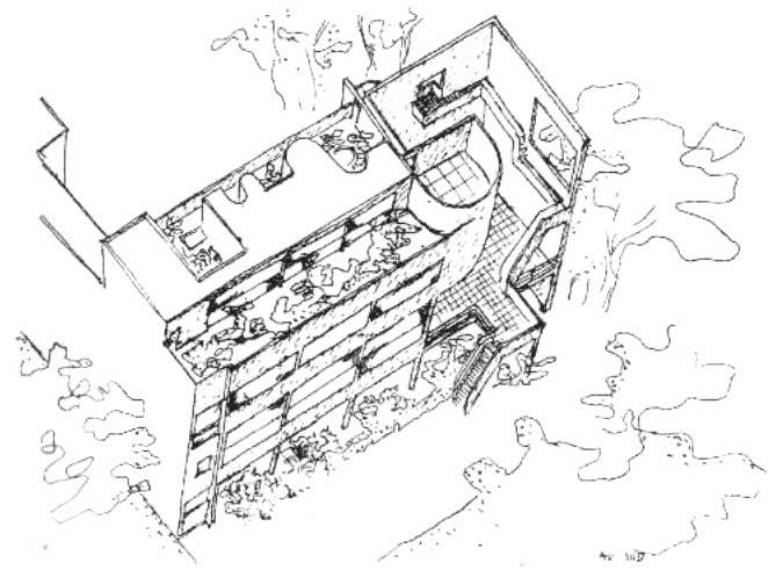


In

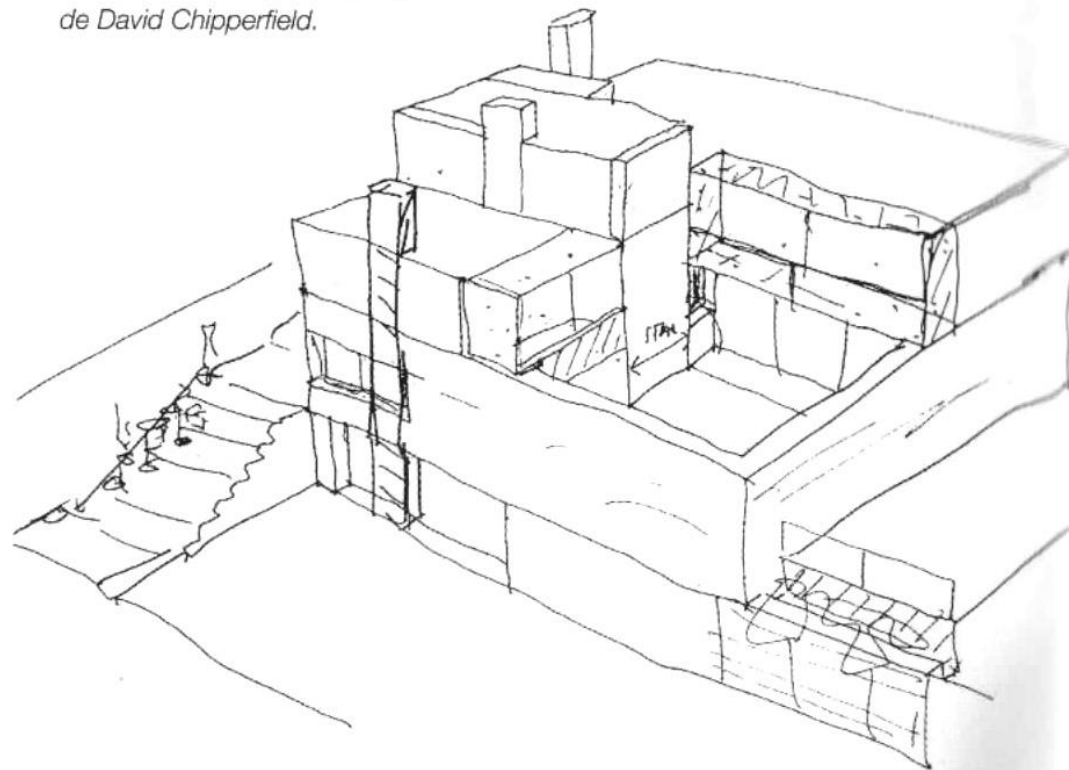
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

## >> EXEMPLOS: mais outro exemplo!...

*Axonometria militar da casa Steir, em Garches (França), da autoria de Le Corbusier.*



*Axonometria isométrica de uma casa unifamiliar na Alemanha, de David Chipperfield.*



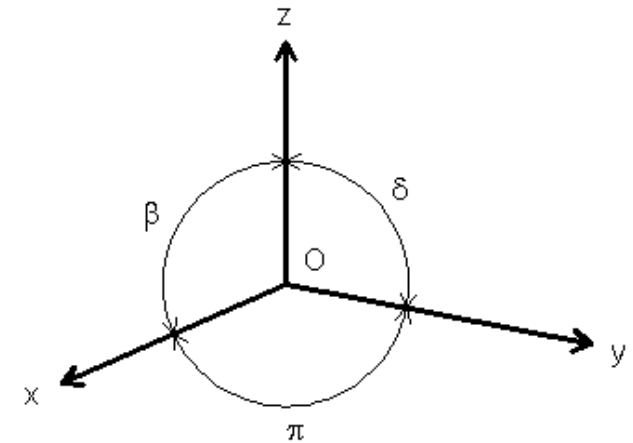
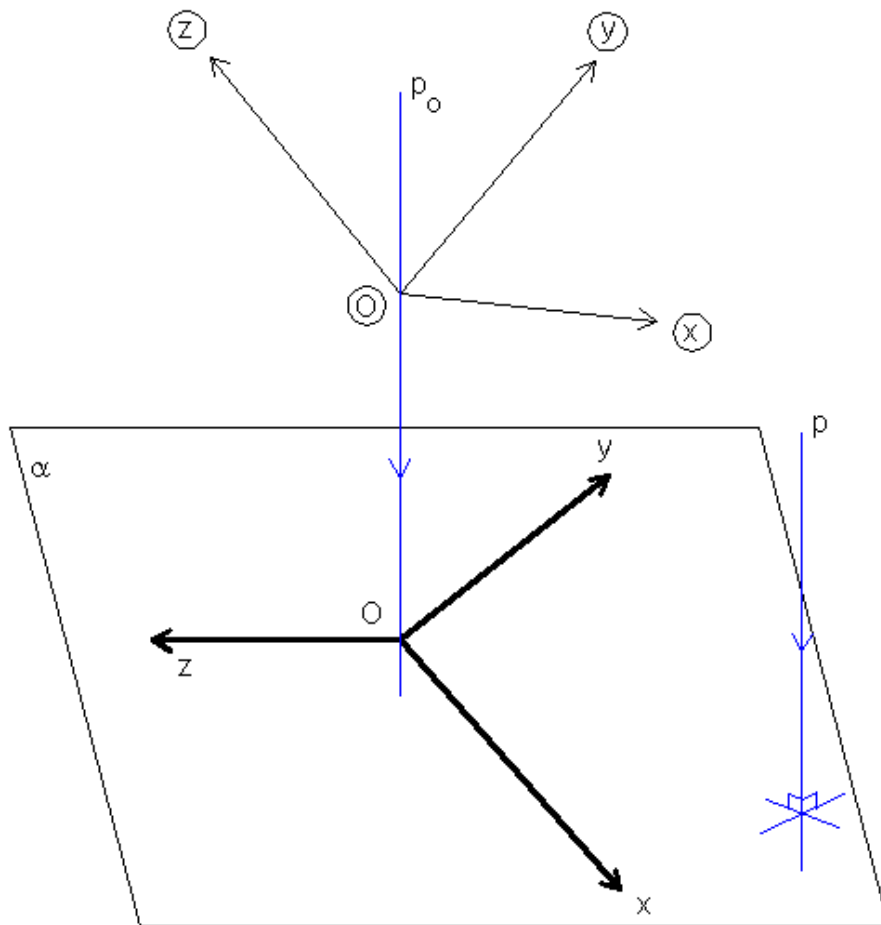
# Bloco A3

O Sistema axonométrico:

- O caso geral da axonometria ortogonal: o triângulo fundamental e o rebatimento dos planos coordenados.
- Subsistemas axonométricos ortogonais: trimetria ou anisometria, dimetria, isometria ou monometria.

# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: noções gerais e subsistemas

No caso geral da representação axonométrica ortogonal, os eixos coordenados são oblíquos ao plano axonométrico com inclinações distintas. Daqui resulta que a cada eixo axonométrico corresponde um coeficiente de redução diferente, sendo todos inferiores a 1 (o que acontece sempre nas axonometrias ortogonais), e todos os ÂNGULOS AXONOMÉTRICOS (ângulos que fazem no desenho cada par de semi-eixos axonométricos positivos) são em geral diferentes. Quando assim é, o subsistema axonométrico designa-se por TRIMETRIA ou ANISOMETRIA, como se ilustra na figura.



$$\beta \neq \delta \neq \pi$$
$$C_x \neq C_y \neq C_z$$

Trimetria

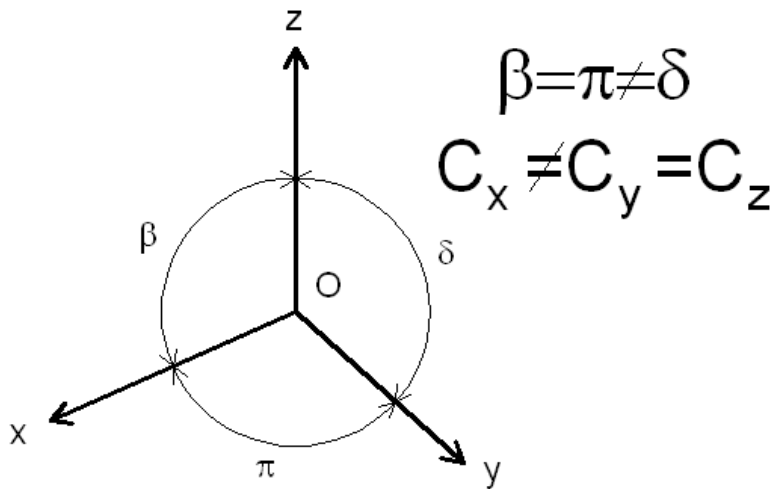
# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: noções gerais e subsistemas

Dois outros casos podem ser considerados:

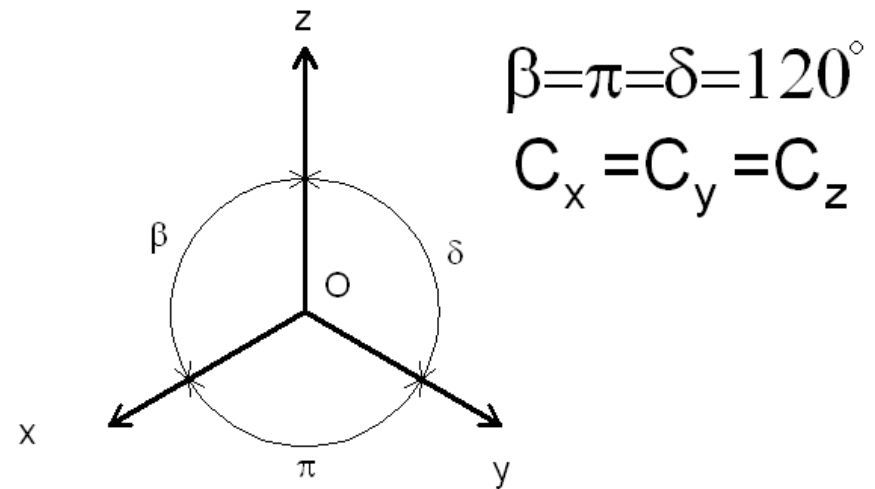
a) O caso da DIMETRIA, em que dois eixos coordenados apresentam igual inclinação em relação ao plano axonométrico, com a consequência de haver dois coeficientes de redução e dois ângulos axonométricos iguais;

b) O caso da ISOMETRIA ou MONOMETRIA, em que os três eixos coordenados apresentam igual inclinação em relação ao plano axonométrico com a natural consequência da igualdade dos três coeficientes de redução e dos três ângulos axonométricos.

Na figura seguinte ilustram-se estes dois casos.



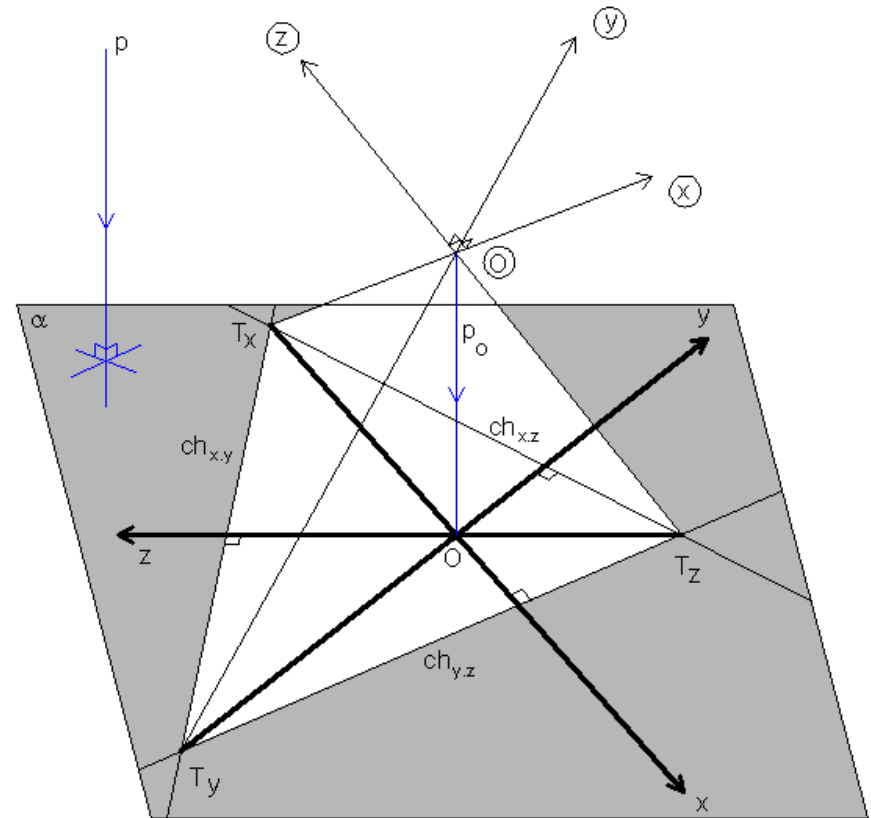
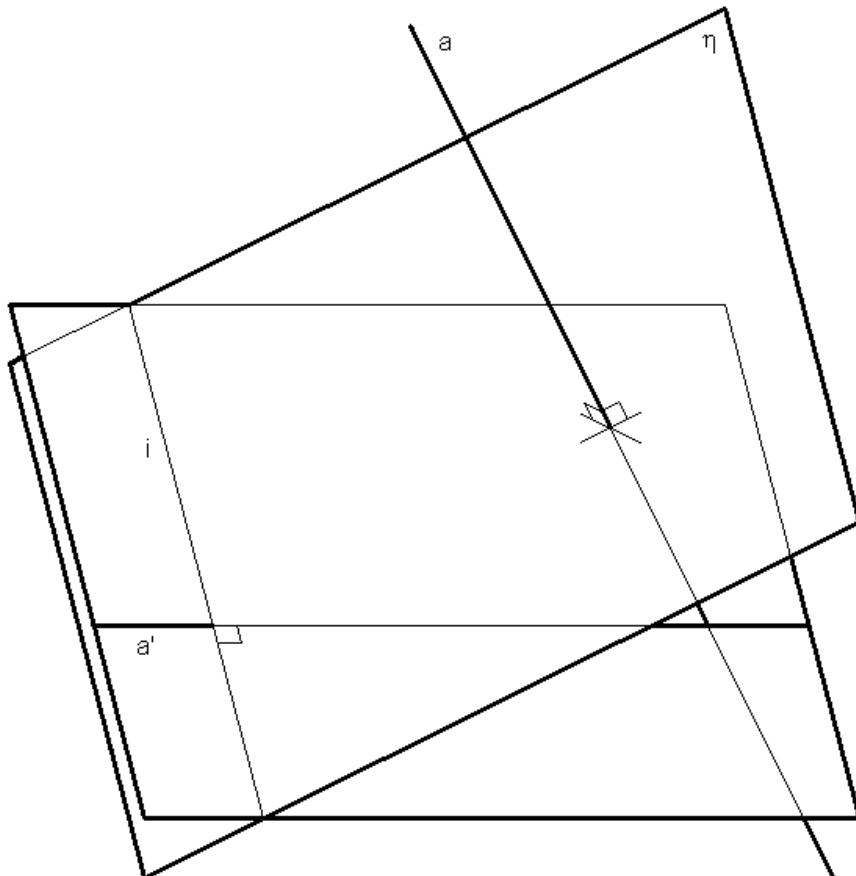
Dimetria



Isometria

# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: triângulo fundamental

Cada um dos eixos coordenados, intersecta o plano axonométrico num ponto. O conjunto dos três pontos (na figura são os pontos  $T_x$ ,  $T_y$  e  $T_z$ ) define um triângulo. Esse triângulo designa-se TRIÂNGULO FUNDAMENTAL ou TRIÂNGULO PRINCIPAL da axonometria. Cada lado do triângulo está contido na recta de intersecção de um plano coordenado com o plano axonométrico e é perpendicular à projecção do outro eixo coordenado. Este facto relaciona-se com um teorema da geometria no espaço segundo o qual “quando uma recta  $a$  é perpendicular a um plano  $\eta$ , a sua projecção ortogonal num plano  $\omega$ , digamos  $a'$ , é perpendicular à recta  $i$  comum aos planos  $\eta$  e  $\omega$ ”. Na figura à esquerda ilustramos o teorema, e à direita a sua consequência na relação dos lados do triângulo fundamental com os eixos axonométricos. O triângulo fundamental é sempre ACUTÂNGULO.





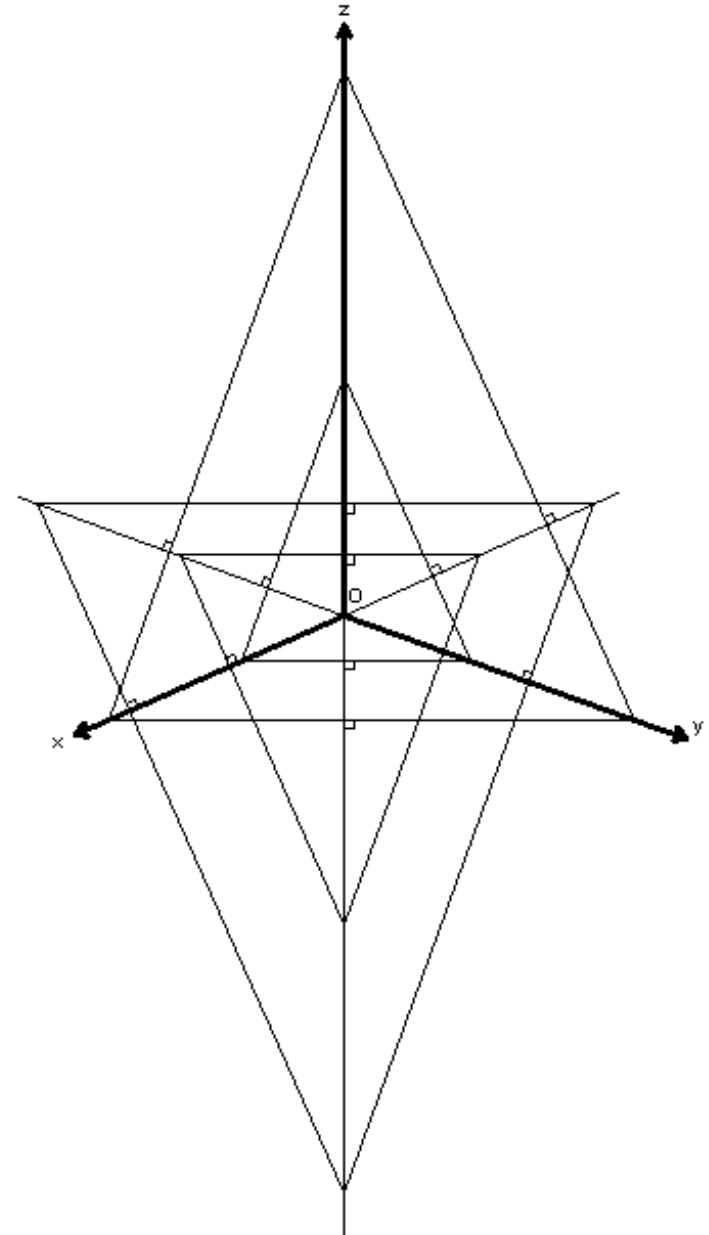
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: triângulo fundamental

Desta relação resulta que a projecção da origem do referencial no plano axonométrico é sempre o ORTOCENTRO do triângulo fundamental.

Qualquer plano paralelo ao plano axonométrico intersecta os eixos coordenados em pontos que definem um triângulo semelhante ao triângulo fundamental, como se ilustra na figura. Assumindo a direcção e sentido do eixo coordenado  $z$  conforme a figura, se o plano se encontrar “abaixo” da origem, o triângulo encontra-se “virado para baixo no desenho” e se o plano se encontrar “acima” da origem, o triângulo encontra-se “virado para cima no desenho”. Se o plano passar pela origem, o triângulo é nulo.

Qualquer um destes triângulos tem as mesmas propriedades que o triângulo fundamental e pode ser usado como tal, podendo assumir-se a designação de FAMÍLIA DE TRIÂNGULOS FUNDAMENTAIS (nossa designação).

Com efeito, em geral, na representação axonométrica o plano axonométrico permanece indeterminado, sendo apenas conhecida a sua orientação. Essa orientação reduz-se à “orientação da folha de desenho”. Isto significa que para resolver os problemas da representação axonométrica ortogonal pode utilizar-se indistintamente qualquer um destes triângulos e tomá-lo por triângulo fundamental. Ao fazê-lo fixamos uma posição para o plano axonométrico.



## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: axonometrias gráficas

Nas axonometria ortogonais as escalas axonométricas e os coeficientes de redução não podem ser livremente arbitrados. Com efeito, como veremos, os coeficientes de redução ficam implicitamente determinados ao arbitrar uma qualquer disposição de eixos axonométricos válida (o triângulo fundamental deverá ser sempre ACUTÂNGULO) e são directamente dependentes dessa disposição.

Note-se que ao fixar uma tal disposição de eixos axonométricos, fica automaticamente definida a família de triângulos fundamentais, e com isso ficam fixas as direcções dos eixos coordenados, ou seja, as inclinações dos eixos coordenados em relação ao plano axonométrico, das quais os coeficientes de redução são função. Para efectuar uma representação axonométrica ortogonal não é necessário conhecer o valor numérico do coeficiente de redução. A representação pode ser feita por processos exclusivamente gráficos (AXONOMETRIAS GRÁFICAS). Estes processos implicam o rebatimento dos planos coordenados para o plano axonométrico (aqui considerado como o plano da folha de desenho). Através deste processo de rebatimento é possível relacionar medidas em “verdadeira grandeza” com as suas projecções “axonométricas”. Em geral as medidas que se relacionam deste modo são as COORDENADAS CARTESIANAS dos vértices das figuras a representar (MÉTODO DAS COORDENADAS RECTANGULARES).

Embora se possa rebater qualquer plano, com qualquer orientação, para o plano axonométrico, nós apenas trataremos o caso do rebatimento dos planos coordenados.

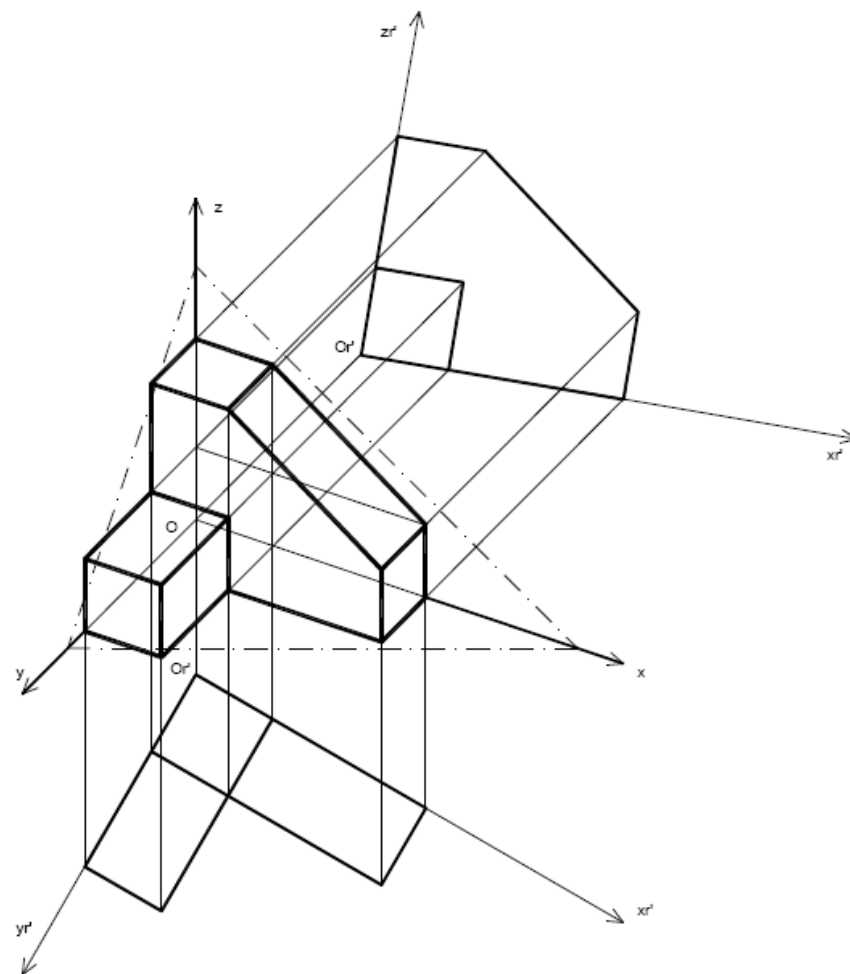
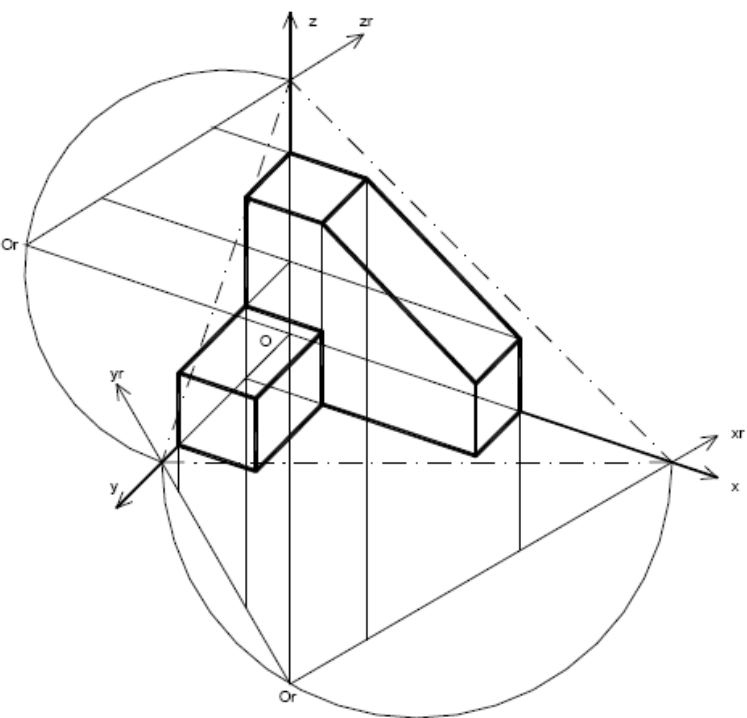
Na figura do slide seguinte ilustramos o processo do rebatimento de um plano coordenado. Para os outros o procedimento é idêntico. Note-se que há sempre dois sentidos possíveis para o rebatimento.

Note-se ainda que o processo do rebatimento, graficamente, não é mais que uma afinidade em que o eixo da transformação é a charneira do rebatimento.



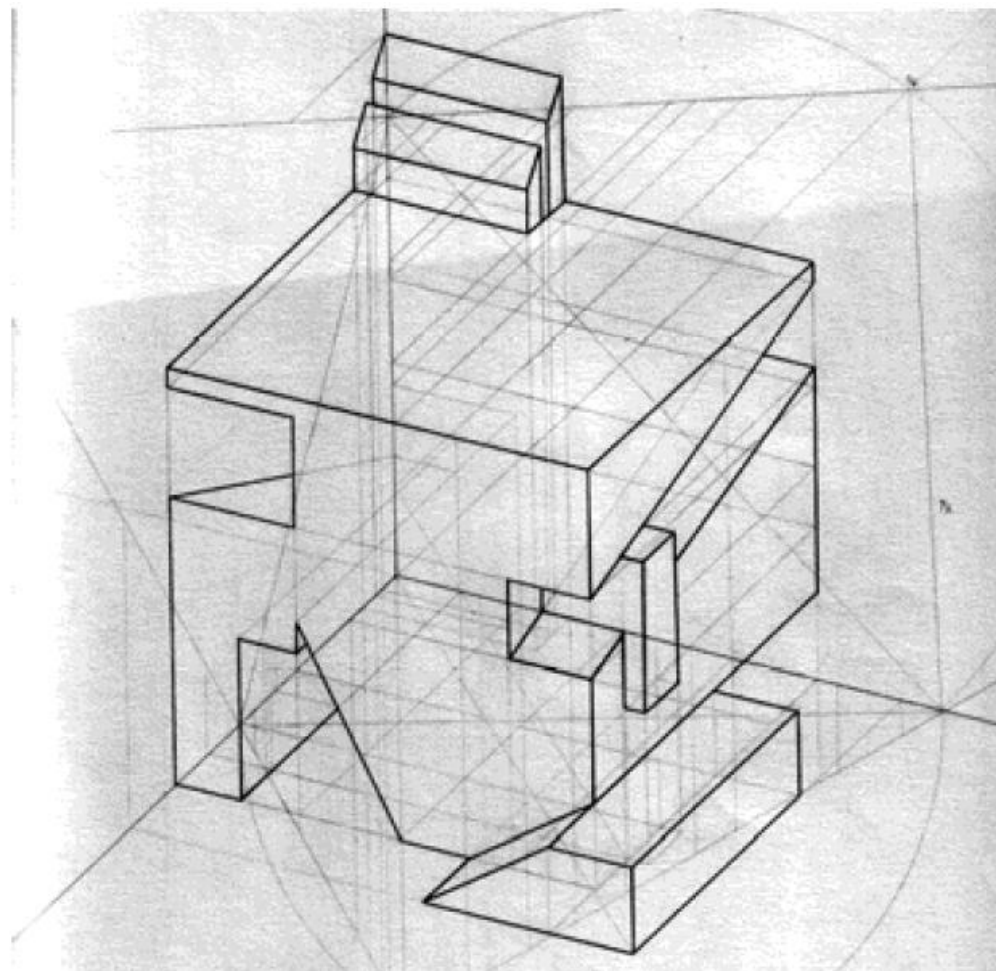
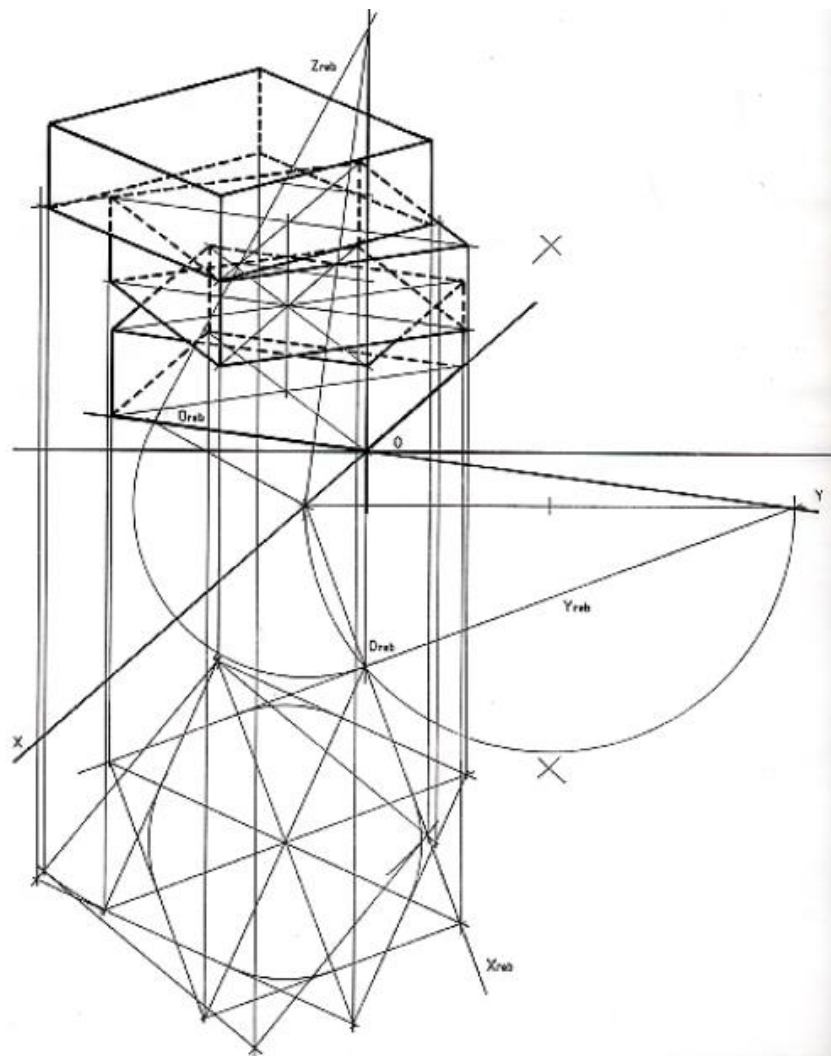
# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: método dos cortes

Nesta figura ilustra-se a representação de um objecto a partir das operações de rebatimento notadas no slide anterior. No exemplo da direita estão omissos alguns traçados (ver figura do slide anterior). A disposição de vistas e axonometria da figura direita corresponde ao método de representação conhecido como o MÉTODO DOS CORTES.



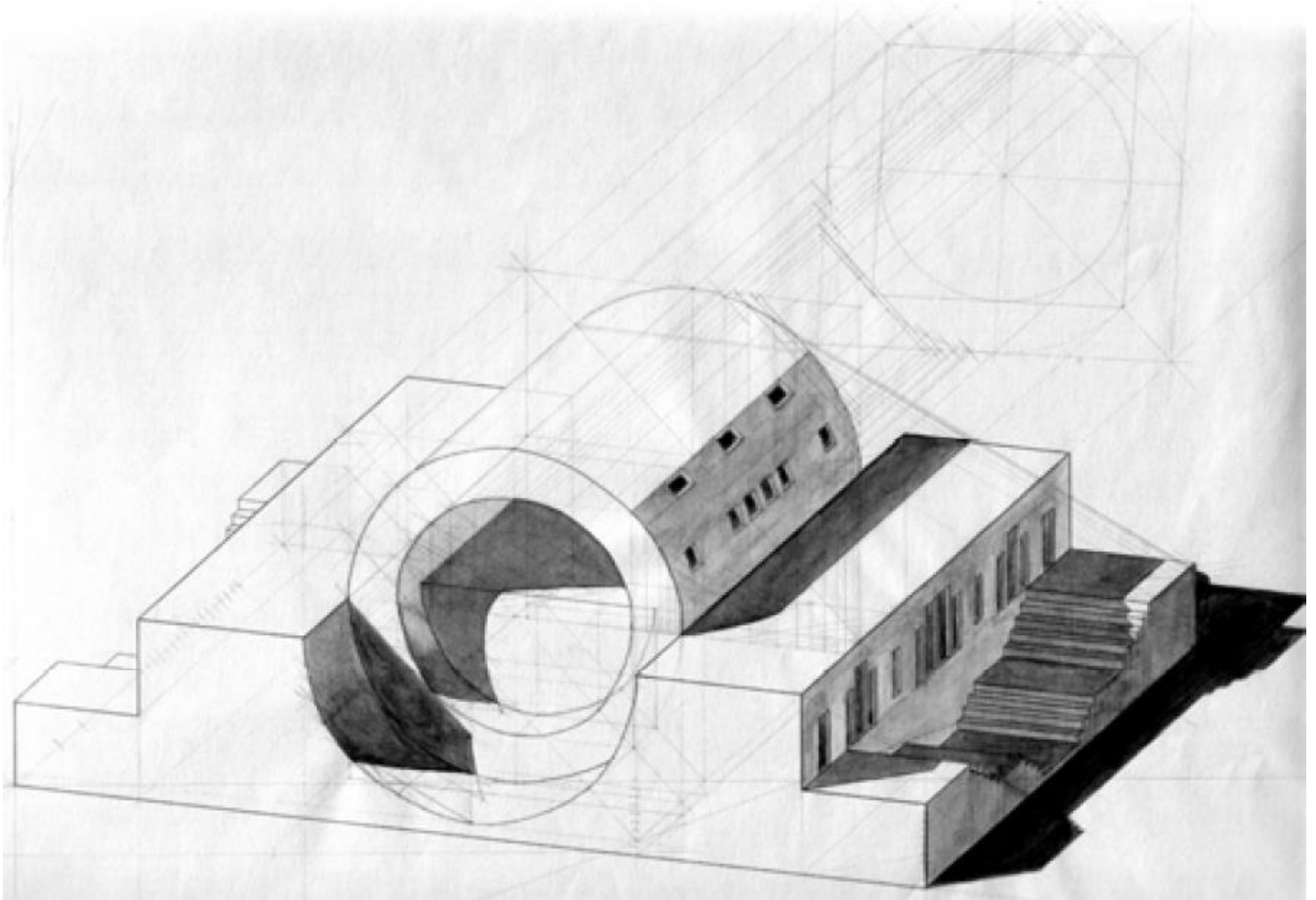
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: trabalhos de alunos

No exemplo da esquerda está representada uma “pilha” de prismas com rotações relativas entre eles. No exemplo da direita está representado um sólido a partir de subtrações e adições a um cubo base.



# >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA ORTOGONAL: trabalhos de alunos

Neste exemplo determinaram-se as sombras do objecto.





# Bloco A4

O Sistema axonométrico:

- As axonometrias normalizadas (a norma ISO 5456-3).

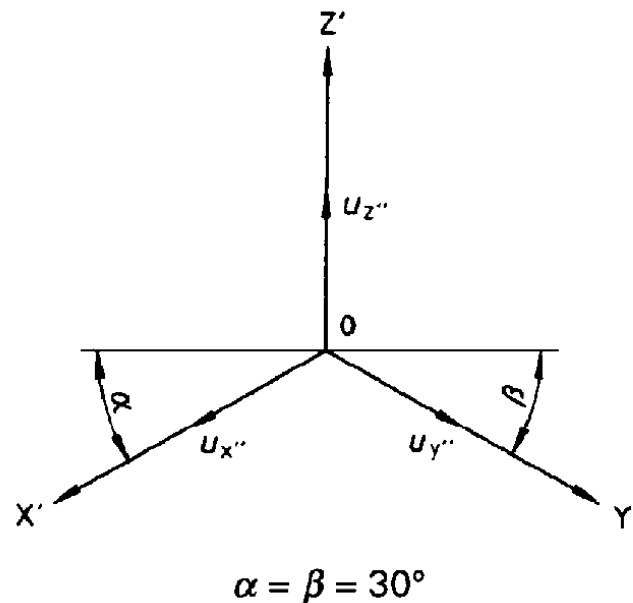
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA (ISO 5456-3)

A norma ISO 5456-3 define alguns princípios para a representação axonométrica, recomendando alguns subsistemas com configurações particulares.

Recomenda-se que numa representação axonométrica deve evitar-se o desenho de contornos e arestas invisíveis. Porém nós consideramos que esta recomendação apenas deve aplicar-se a um desenho final, tendo sempre o cuidado de preservar o original com todos os traçados que permitem a vista sintética. Para todos os efeitos nós representaremos sempre as linhas invisíveis através de traços contínuos leves, no caso de figuras complexas, e de linhas a traço interrompido, no caso de figuras simples.

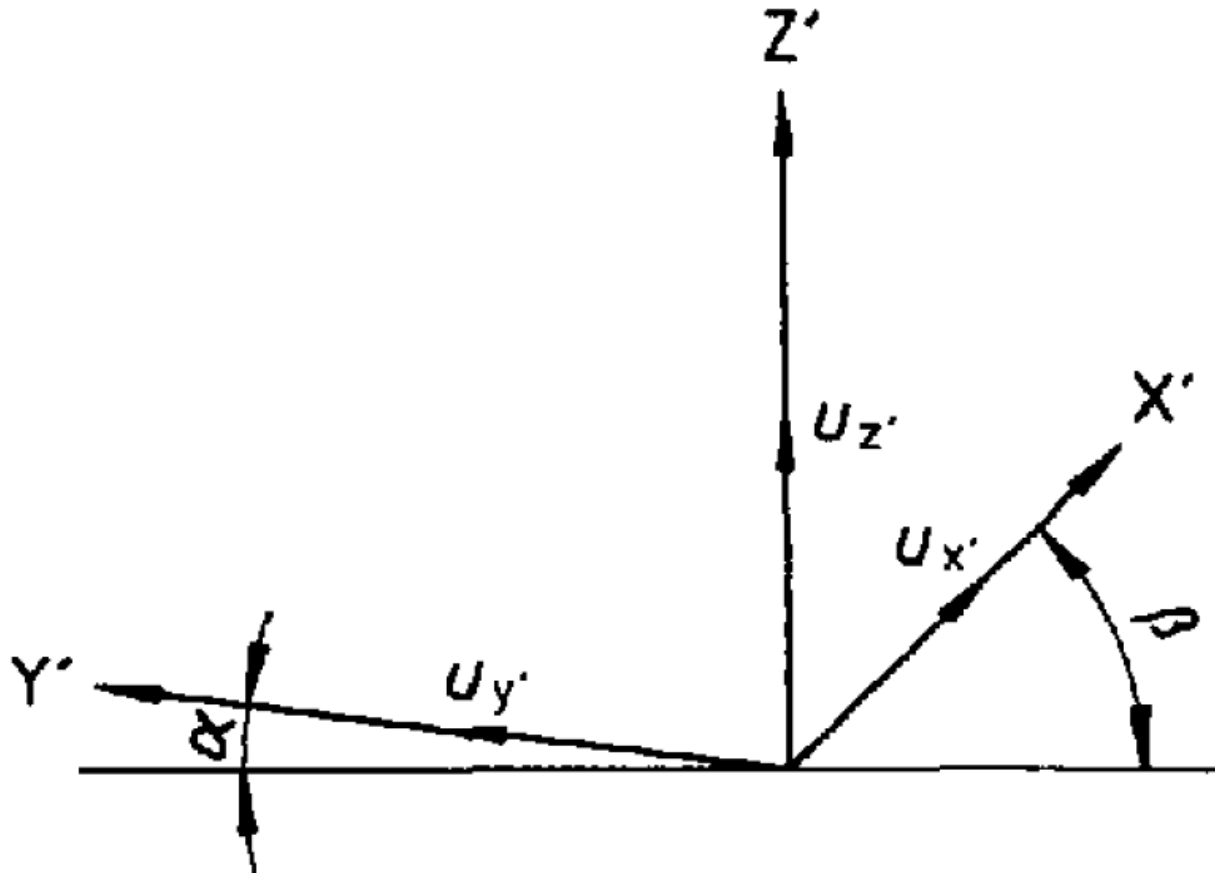
Os subsistemas recomendados pela norma são: a isometria, a dimetria, a axonometria cavaleira, a axonometria de gabinete e axonometria planométrica.

Na axonometria isométrica é considerada uma ampliação global do desenho por um factor de aproximadamente 1.225 para que, em termos práticos, se possa adoptar um coeficiente de redução igual à unidade em todos os eixos, o que facilita a representação.



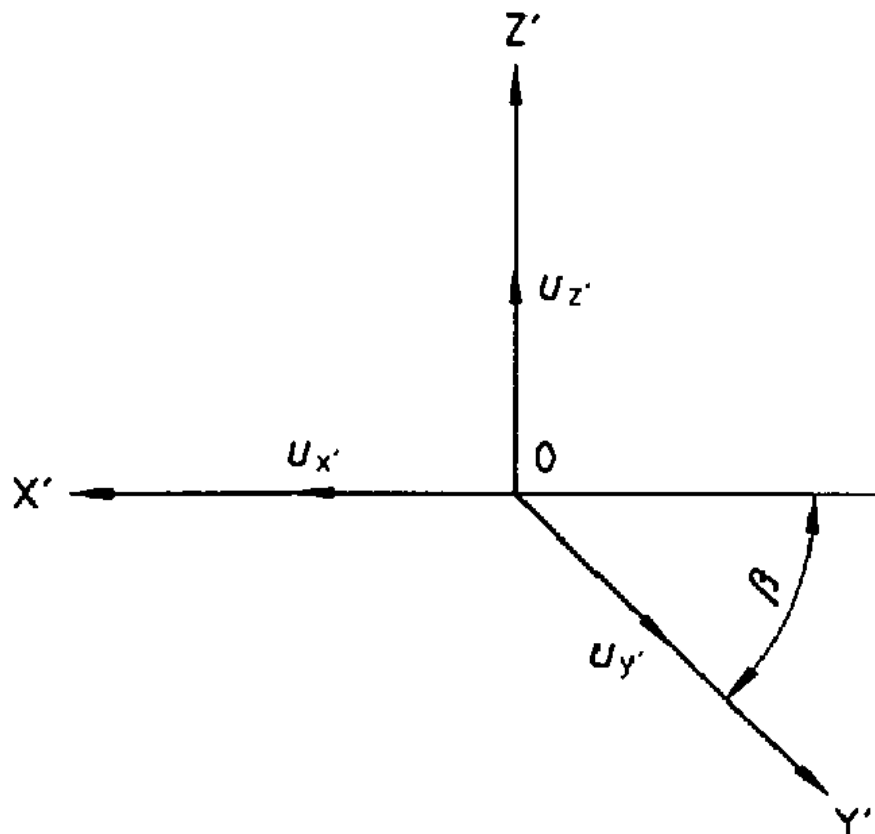
## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA (ISO 5456-3)

Na axonometria dimétrica são considerados os ÂNGULOS DE FUGA (ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  na figura) de  $7^\circ$  e  $42^\circ$  sendo considerada a proporção 0.5/1/1 entre os coeficientes de redução em x, y, e z, respectivamente. Na prática estes valores são utilizados como escalas axonométricas o que significa que também se está a considerar uma ampliação global do desenho. Note-se que na norma os eixos são representados por uma letra maiúscula seguida de '.



## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA (ISO 5456-3)

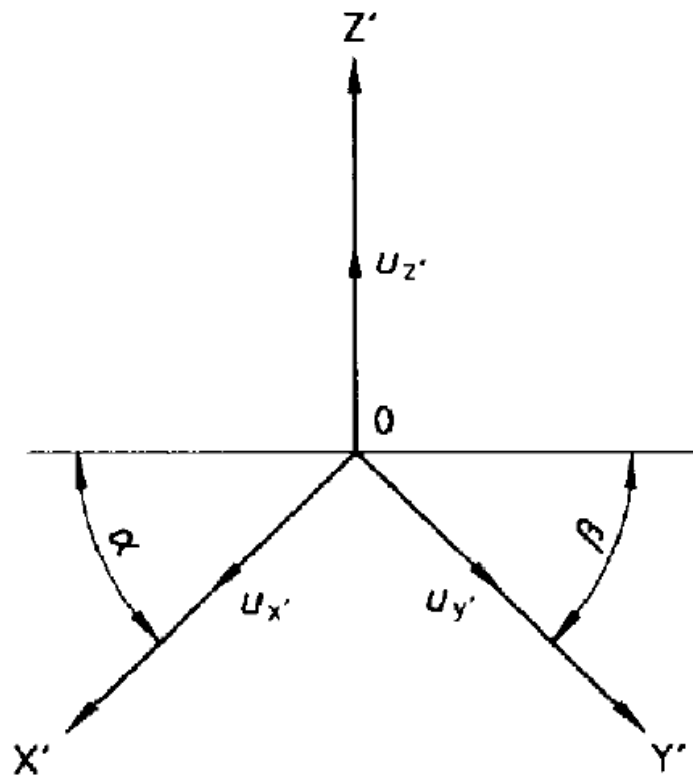
Na axonometria cavaleira é considerado o ÂNGULO DE FUGA ( $\beta$  na figura) de  $45^\circ$  sendo considerados todos os coeficientes de redução (e escalas axonométricas) iguais à unidade. Neste caso não faz sentido falar em ampliação global do desenho. Apenas significa que a inclinação das projectantes em relação ao plano axonométrico é de  $45^\circ$  (note-se que este ângulo nada tem a ver com o ângulo de fuga).



A axonometria de gabinete é em quase tudo igual à anterior. Na verdade é um tipo de axonometria cavaleira em que o coeficiente de redução em  $y$  (de acordo com a figura) é de 0.5.

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA (ISO 5456-3)

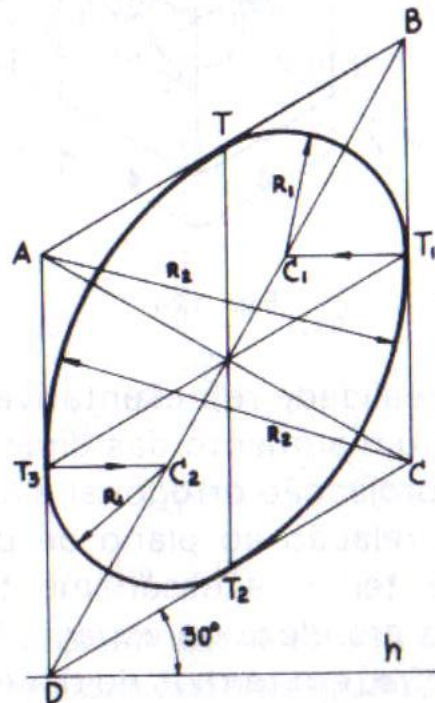
Na axonometria planométrica (axonometria militar) é dito que devem evitar-se ângulos de fuga de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , de modo a que todas as vistas possam ser representadas. O eixo  $z$  é considerado vertical e são recomendados vários pares de ângulos de fuga para os eixos axonométricos  $x$  e  $y$  ( $15^\circ / 75^\circ$ ;  $30^\circ / 60^\circ$ ;  $45^\circ / 45^\circ$ ;  $60^\circ / 30^\circ$ ;  $75^\circ / 15^\circ$ ). Relativamente aos coeficientes de redução (e escalas axonométricas) é recomendada a relação  $1:1:1$  ou  $1:1:2/3$  para os eixos axonométricos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Naturalmente, se for conveniente podem ser utilizadas outras combinações.



$$\alpha = 0^\circ \text{ to } 180^\circ$$
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA (ISO 5456-3)

Uma vez que são declarados coeficientes de redução (que em boa verdade correspondem a escalas axonométricas) para este tipo de axonometrias, os traçados dispensam a operação de rebatimento. Para alguns destes subsistemas existem ainda traçados auxiliares que permitem representar projecções de circunferências contidas em planos paralelos aos planos coordenados. Estes traçados consistem em aproximações ao desenho das elipses através de ovais (ver TPU 55 ou Desenho Técnico). Por estas razões este tipo de axonometrias costuma receber a designação de AXONOMETRIAS MÉTRICAS (em que a redução das medidas pode ser efectuada numericamente sobre as medidas da figura a representar) por oposição a AXONOMETRIAS GRÁFICAS (em que as reduções de medidas são efectuadas por processos exclusivamente gráficos). Também se pode designar este tipo de axonometrias por AXONOMETRIAS CONVENCIONAIS.



Exemplo de oval para representar, por aproximação, uma elipse em isometria correspondente a uma circunferência contida num plano paralelo a um plano coordenado (retirado do TPU 55).



## >> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA NORMALIZADA: exemplo

Exemplo de representação axonométrica planométrica (militar) obtida a partir de uma vista de cima (planta).

