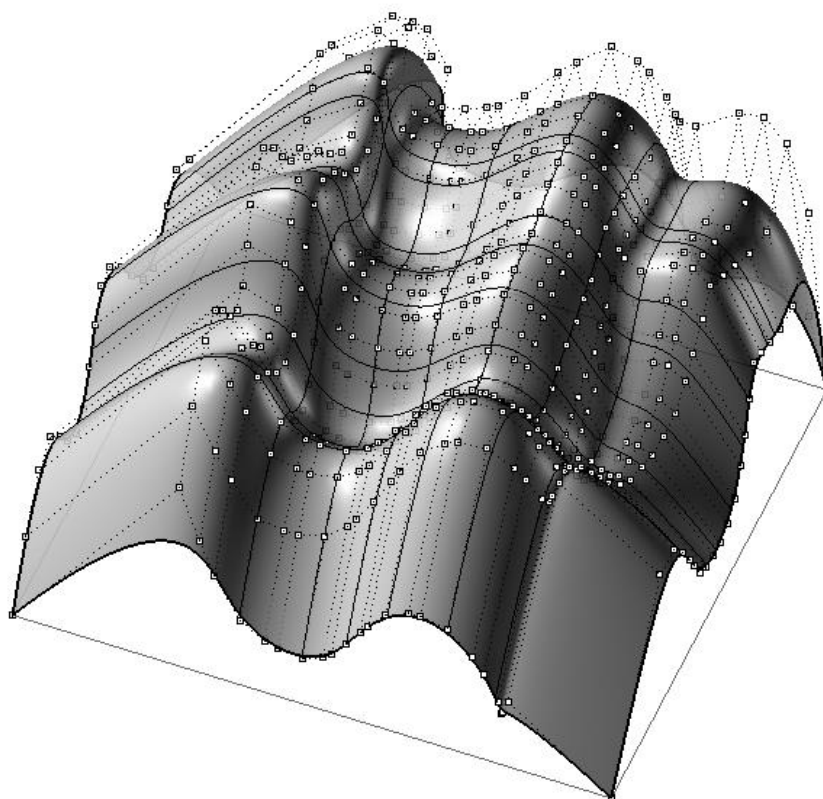


SEBENTA

- Linhas e Superfícies -

Texto de apoio à disciplina Modelação Geométrica e Generativa



FA.Ulisboa – Ano lectivo 2017/2018 – 1º semestre

Professor Luís Mateus (Immateus@fa.ulisboa.pt)

(versão 0.8)

ÍNDICE

1. NOTAS GERAIS SOBRE LINHAS E SUPERFÍCIES.....	4
2. LINHAS PLANAS	5
2.1. Cónicas	5
2.1.1. Elipse	6
2.1.2. Parábola	7
2.1.3. Hipérbole	7
2.1.4. Curvas livres.....	8
2.2. Splines	9
2.2.1. Curva de Bézier	9
2.2.2. B-Splines.....	11
2.2.3. Linhas NURBS.....	14
3. LINHAS ESPACIAIS E SUPERFÍCIES	16
3.1. Noções gerais sobre linhas e superfícies	16
3.1.1. Condições de pertença	16
3.1.2. Recta tangente.....	16
3.1.3. Curvaturas.....	17
3.1.4. Continuidade entre curvas	18
3.1.5. Plano tangente a uma superfície	19
3.1.6. Recta normal e plano normal.....	19
3.1.7. Curvatura de uma superfície	20
3.1.8. Intersecção de superfícies	21
3.1.9. Recta tangente à linha de intersecção.....	22
3.1.10. Concordância entre superfícies (tipos de continuidade)	23
3.1.11. Contorno aparente	24
3.1.12. Distinção entre superfície e sólido.....	25
3.2. Classificação de superfícies quanto ao tipo de geratriz	25
3.2.1. Superfícies poliédricas.....	25
3.2.1.1. Poliedros regulares	25
3.2.1.2. Poliedros semi-regulares	26
3.2.1.3. Poliedros irregulares.....	26
3.2.2. Superfícies de revolução	27
3.2.2.1. Superfície esférica	27

3.2.2.2.	Esferóide	28
3.2.2.3.	Superfície tórica.....	28
3.2.2.4.	Hiperbolóide de revolução de uma folha	29
3.2.2.5.	Hiperbolóide de revolução de duas folhas	29
3.2.2.6.	Hiperbolóide de revolução de duas folhas	30
3.2.3.	Superfícies planificáveis	30
3.2.3.1.	Superfície cônica, cilíndrica, piramidal e prismática	31
3.2.3.2.	Convoluta e Superfície tangencial.....	31
3.2.3.3.	Helicóide tangencial	32
3.2.3.4.	Planificação (método gráfico)	32
3.2.3.5.	Planificação da superfície do cilindro e do cone de revolução	33
3.2.3.6.	Planificação da superfície do cilindro e do cone oblíquo	34
3.2.3.7.	Planificação da superfície do helicóide tangencial.....	35
3.2.4.	Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)	35
3.2.4.1.	Hiperbolóide de revolução de uma folha	37
3.2.4.2.	Hiperbolóide empenado escaleno	40
3.2.4.3.	Parabolóide hiperbólico	41
3.2.4.4.	Helicóides regrados	44
3.2.4.5.	Superfícies de conóide.....	46
3.2.4.6.	Superfícies de cilindróide	47
3.2.4.7.	Superfícies de arco enviesado	48
3.2.4.8.	Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada	49
3.2.4.9.	Plano tangente a uma superfície duplamente regrada.....	49
3.2.4.10.	Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz.....	50
3.2.4.11.	Hiperbolóide de revolução (planos tangentes)	52
3.2.4.12.	Parabolóide Hiperbólico (planos tangentes)	54
3.2.4.13.	Conóide (planos tangentes)	55
3.2.4.14.	Corno de vaca (planos tangentes).....	55
3.2.4.15.	Concordâncias como composição de superfícies	56
3.2.5.	Linhas e Superfícies NURBS no espaço	57
3.3.	Lógicas de geração de superfícies	59
3.3.1.	Polígonos.....	59
3.3.2.	Superfícies de revolução (revolve).....	59
3.3.3.	Superfícies de “revolução” (rail revolve)	60

3.3.4.	Deslocamento da geratriz apoiada numa directriz (sweep 1 rail)	60
3.3.5.	Deslocamento da geratriz apoiada em duas directrizes (sweep 2 rails)	61
3.3.6.	Superfície gerada por extrusão (extrude).....	61
3.3.7.	Superfície gerada por interpolação de sequência de curvas (loft)	62
3.3.8.	Interpolação de uma rede espacial de curvas (curve network).....	62
3.3.9.	Superfície dados quatro vértices (corner points)	63
3.3.10.	Superfície dadas linhas de contorno (edge curves).....	63
3.3.11.	Superfície passante por um conjunto de linhas (patch).....	64
3.3.12.	Superfície gerada por panejamento sobre superfícies dadas (drape).....	64
3.3.13.	Superfície complexas.....	65
3.4.	Linhas a partir de superfícies	66
4.	SÓLIDOS	66
4.1.	Operações booleanas entre sólidos.....	66

1. NOTAS GERAIS SOBRE LINHAS E SUPERFÍCIES

O PONTO é uma entidade sem dimensão, isto é, adimensional.

A LINHA é uma entidade unidimensional gerada pelo movimento contínuo do ponto.

As linhas podem ser CURVAS ou não curvas; às linhas não curvas dá-se o nome de RECTAS.

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito. A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

A SUPERFÍCIE é uma entidade bidimensional gerada pelo movimento contínuo da linha.

A GERATRIZ é a linha, deformável ou indeformável, que se move no espaço para gerar a superfície.

A DIRECTRIZ é a linha ou superfície em que se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a directriz for uma superfície, então a superfície gerada diz-se de NÚCLEO.

Quando uma geratriz recta se move continuamente no espaço, conservando a direcção, apoiada numa directriz recta com direcção diferente da sua, é gerado o PLANO.

Cada plano tem uma ORIENTAÇÃO; orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si.

Cada plano contém uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito.

A cada orientação de planos corresponde apenas uma recta imprópria, isto é, todos os planos paralelos entre si têm a mesma recta do infinito, daí dizer-se que planos paralelos se intersectam no infinito.

Uma orientação contém uma infinidade de direcções.

O lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as rectas impróprias é o PLANO IMPRÓPRIO, isto é, o plano do infinito.

Quando uma superfície puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é REGRADA.

Quando uma superfície não puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é CURVA.

A ORDEM¹ de uma superfície algébrica, isto é, a ordem ou grau do polinómio que a define, pode ser interpretada como o número máximo de pontos em que uma recta a pode intersectar; por exemplo, o plano é uma superfície de 1ª ordem e uma superfície esférica é uma superfície de 2ª ordem.

Quando uma superfície regradada pode ser “desenrolada” para um plano, sem provocar “pregas” ou “rasgos” diz-se que a superfície é PLANIFICÁVEL; apenas superfícies regradadas podem ser planificáveis, embora nem todas as superfícies regradadas o sejam.

2. LINHAS PLANAS

Não existe um único critério para classificar as linhas planas ou linhas espaciais. Porém, vários critérios podem ser usados de modo a agrupá-las em famílias. Critérios distintos podem levar a que as mesmas linhas fiquem em famílias distintas. Ou um determinado pode levar a que se excluam linhas.

2.1. Cónicas

Uma linha CÓNICA resulta da intersecção produzida por um plano numa superfície cónica (Figura 1) e pode ser representada através de um polinómio do segundo grau²:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

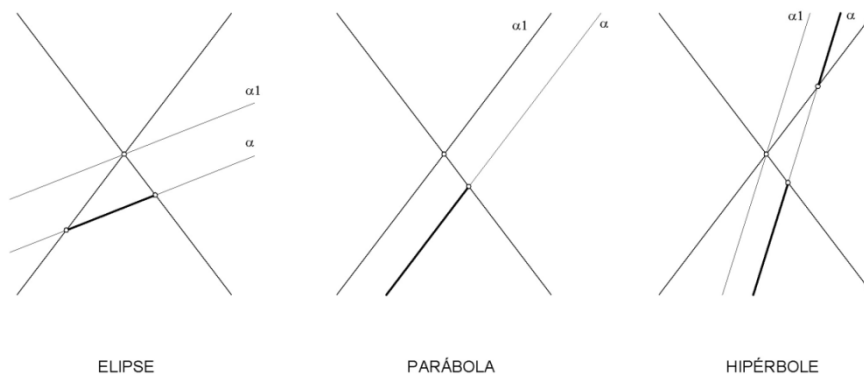


Figura 1: Linha cónica em função da posição relativa entre plano e superfície cónica.

As linhas cónicas são de três tipos: elipse, parábola e hipérbole.

A elipse é produzida quando o plano intersecta todas as geratrizes da superfície cónica.

A parábola é produzida quando o plano é paralelo a uma geratriz da superfície cónica.

¹ Note-se que esta definição de ordem não é a mesma que se referirá adiante quando se falar de Splines.

² Esta expressão pode ser generalizada para graus superiores dando origem a outros tipos de linhas (cúbicas, quárticas,...).

A hipérbole é produzida quando o plano é paralelo a duas geratrizes da superfície cônica.

2.1.1. Elipse

A elipse (de que a circunferência é um caso particular) fica definida como sendo a curva plana em que todos os pontos cumprem a condição de que suas distâncias somadas a dois pontos fixos chamados focos, é constante.

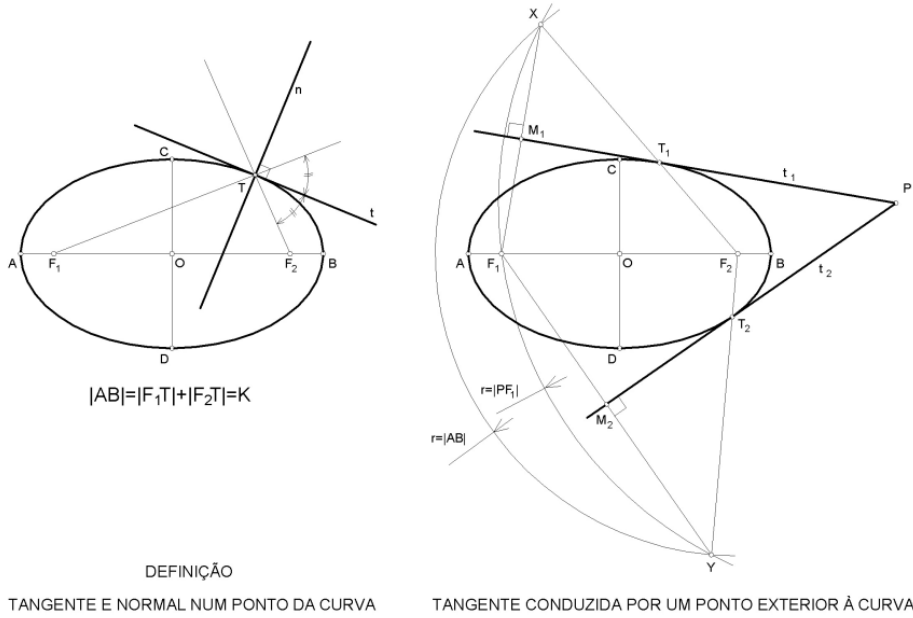


Figura 2: Traçado de tangentes à elipse.

A elipse pode ser obtida por transformação afim de uma circunferência (Figura 4), e fica definida por dois diâmetros conjugados (a que corresponde um paralelogramo envolvente que lhe é tangente nos pontos médios dos lados).

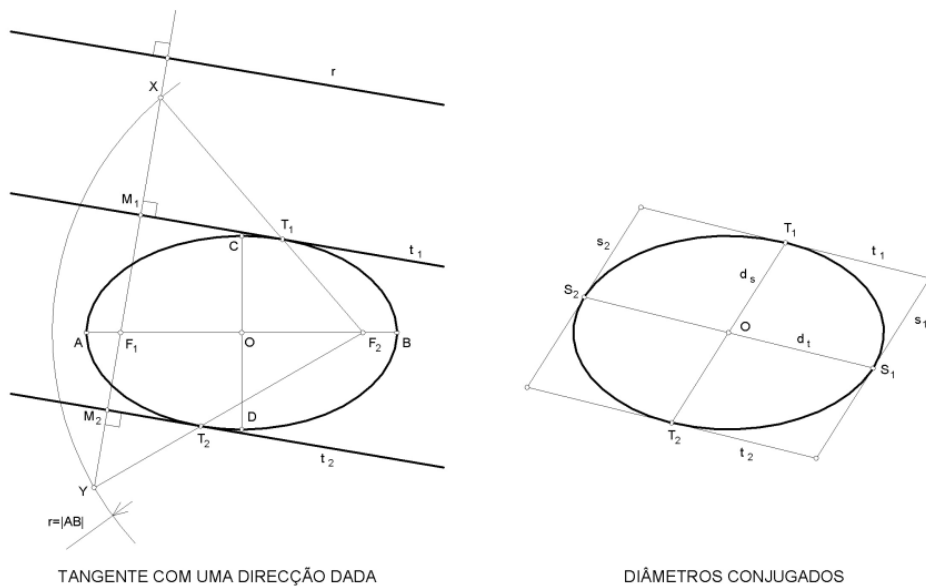


Figura 3: Traçado de tangente à elipse (esquerda) e elipse definida por diâmetros conjugados (direita).

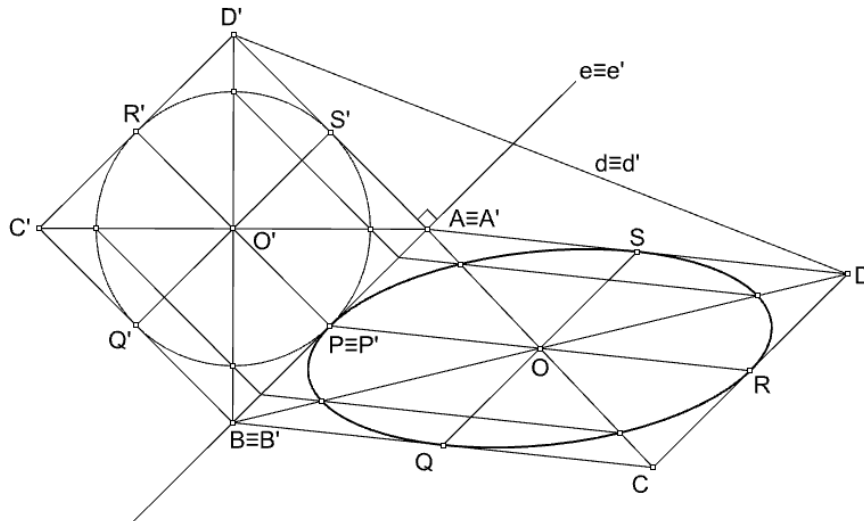


Figura 4: Afinidade entre elipse e circunferência.

2.1.2. Parábola

A parábola é uma curva plana que fica definida pela condição de que para qualquer ponto da curva, a distância a um ponto fixo, designado foco, e a distância a uma linha fixa, designada directriz, é igual.

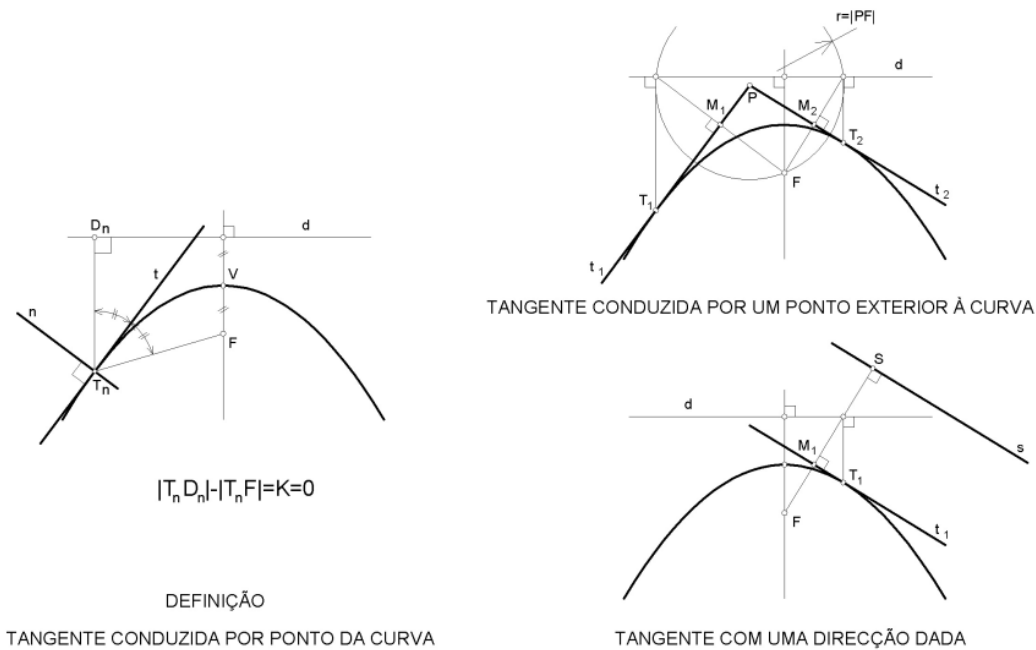
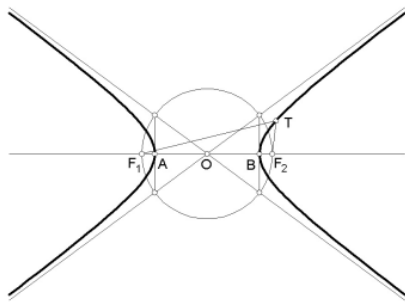


Figura 5: Traçado de tangentes à parábola.

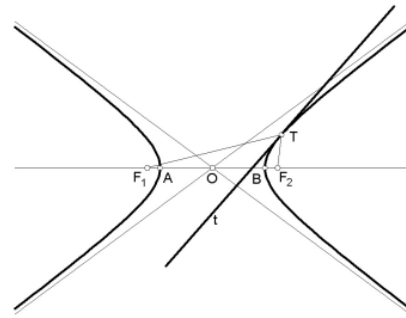
2.1.3. Hipérbole

A hipérbole é a curva plana que se define de modo semelhante à elipse, porém com a distinção de ser constante a diferença das distâncias aos focos.



$$|AB| = |F_1T| - |F_2T| = K$$

DEFINIÇÃO



TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA

Figura 6: Definição da hipérbole (esquerda) e traçado de tangente (direita).

2.1.4. Curvas livres

Do ponto de vista prático, é importante dispor de um tipo de linhas que permita representar aquelas linhas que se podem designar por linhas livres. As linhas livres são aquelas que resultam de um gesto de desenho espontâneo. Estas linhas não têm à partida uma definição geométrica. Porém, ao representá-las num computador, é necessário racionalizá-las de algum modo. A forma mais simples de as racionalizar, embora de resultado prático pouco atractivo, é representá-las através de uma sequência de ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA, como se vê na figura 7. Este modo de racionalizar uma linha livre é originário do desenho analógico como se compreende pela economia de meios implícita.

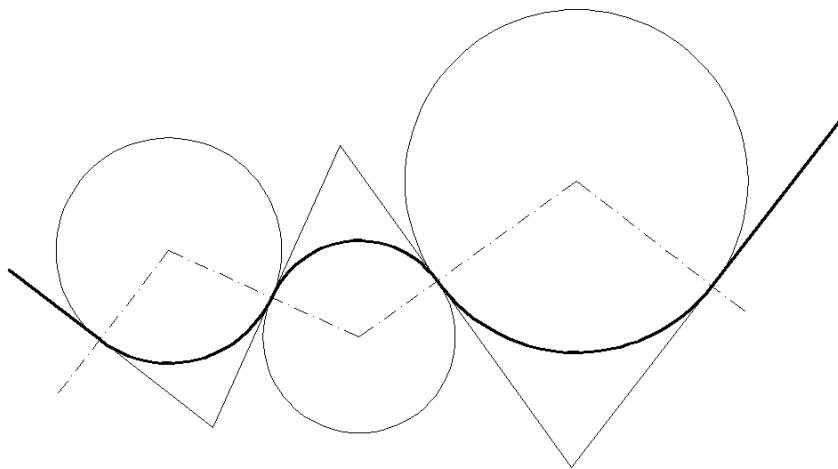


Figura 7: Racionalização de uma curva através de arcos de circunferência.

2.2. Splines

Uma forma de designar as linhas de forma livre é utilizando o termo *spline*. Este termo remonta à utilização de tiras de madeira que eram dobradas e curvadas para gerar moldes para a construção aeronáutica³. Em termos geométricos, uma *spline* é uma curva suave baseada na junção de uma ou várias curvas definidas por funções polinomiais que são adjacentes em pontos designados *Nós Internos*⁴ (K). Também se designam por *Nós* os extremos de uma *spline*.

2.2.1. Curva de Bézier

A *spline* mais simples é a CURVA DE BÉZIER⁵. Uma curva de Bézier é uma *B-spline* (ver próxima secção) sem *Nós Internos* (K). Uma curva de Bézier é definida através de *pontos de controlo* (C) que estão numa relação precisa com o *grau* (D) da mesma:

$$C = D + 1 \quad (2)$$

Na figura 8 temos 3 curvas de Bézier, de grau 2, 3 e 4, da esquerda para a direita, respectivamente. Note-se que uma curva de Bézier de grau 1 não é mais que um SEGMENTO DE RECTA.

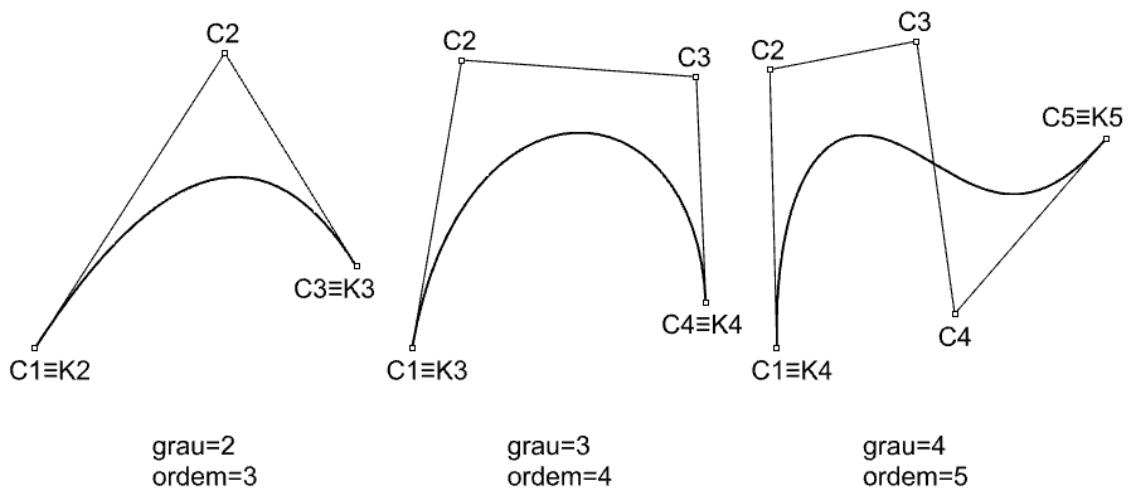


Figura 8: Curvas de Bézier de grau 2, 3 e 4.

³ Consulte-se o artigo da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28mathematics%29).

⁴ Os nós internos correspondem aos pontos em que as várias curvas polinomiais são adjacentes no espaço geométrico. Aos nós da spline corresponde um vector de nós no espaço paramétrico. Quando se fala em espaçamento uniforme de nós, na designação de B-Splines uniformes, está-se a fazer referência ao espaçamento no espaço paramétrico e não no espaço geométrico. A este respeito veja-se o artigo sobre B-Splines na Wolfram MathWorld (<http://mathworld.wolfram.com/B-Spline.html>).

⁵ Consulte-se o artigo da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve).

Nas curvas ilustradas na figura 8, os vectores dos nós são, respectivamente, $K=\{0.0,0.0,1.0,1.0\}$, $K=\{0.0,0.0,0.0,1.0,1.0,1.0\}$ e $K=\{0.0,0.0,0.0,0.01.0,1.0,1.0,1.0\}$. Note-se que o número de nós é igual ao dobro do grau da curva. Outra regra importante é que o primeiro ponto geométrico da curva corresponde ao nó cujo índice é igual ao grau. Por exemplo, na curva de grau dois o segundo nó é 0.0 e a este nó corresponde o primeiro *endpoint* da curva. De forma idêntica, se percorrermos o vector dos nós pela ordem inversa, identificamos o nó correspondente ao segundo *endpoint* da curva⁶. Ainda como exemplo, na Bézier de grau 2, os pontos geométricos da curva correspondem, no espaço paramétrico, aos valores compreendidos entre o parâmetro K_2 e K_3 , isto é, entre 0.0 e 1.0. É ainda importante notar que espaçamentos iguais no espaço paramétrico não correspondem a espaçamentos iguais no espaço geométrico.

Outro conceito importante é a *ordem* (O) da curva. Por definição:

$$O = D + 1 \quad (3)$$

O algoritmo de De Casteljaou permite compreender a construção gráfica de uma curva de Bézier seja qual for o seu grau. Na Figura 9 pode perceber-se a lógica da construção gráfica de uma curva de Bézier de grau 3. É importante perceber que esta lógica pode ser generalizada para qualquer grau.

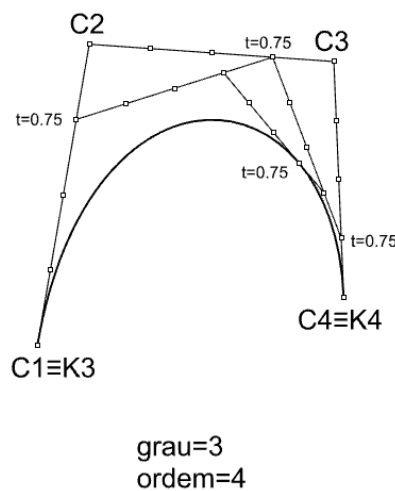


Figura 9: Algoritmo de De Casteljaou para construção de uma curva de Bézier de grau 3.

A figura ilustra a construção de um ponto dado pelo parâmetro $t=0.75$. O intervalo de parâmetros para a construção da curva de Bézier é, neste caso dado pelo intervalo $[0.0,1.0]$ por ser este o intervalo correspondente aos nós K_3 e K_4 . O ponto de parâmetro 0.0 é o ponto K_3 e o ponto de parâmetro 1.0 é ponto K_4 , que coincidem com o primeiro ponto e último

⁶ A este respeito consulte-se o link: http://www.mactech.com/articles/develop/issue_25/schneider.html

ponto de controlo, respectivamente. Como o grau é 3, o algoritmo implica 3 níveis de subdivisão para a construção de pontos da curva. O número de níveis de subdivisão é igual ao grau da curva.

Um aspecto interessante a notar é que uma de Bézier de grau 2 é que se trata de uma parábola, ou seja, é um caso particular de uma linha cónica. Outro aspecto interessante a notar acerca do grau da curva de Bézier é que também está em relação com o número de inflexões possíveis na mesma. Assim, o número de inflexões (I) possíveis é igual a:

$$I = D - 2 \quad (4)$$

É importante notar que uma curva de Bézier não pode ser utilizada para a representação de cónicas em geral.

2.2.2. B-Splines

Uma forma de expandir a utilização das curvas de Bézier é através da utilização de B-SPLINES (Basis Spline). Uma B-Spline é, na prática um arranjo de curvas de Bézier que transitam entre si de forma suave. Dito de outro modo, nos pontos de transição (correspondentes aos *Nós Internos*), as curvas de Bézier partilham as mesmas rectas tangentes. Uma B-Spline pode ser definida de dois modos: através de *pontos de controlo* ou através de *interpolação de pontos*. Quando uma B-Spline é definida através de *pontos de controlo*, a curva não passa por aqueles pontos (embora se possa definir o *vector de nós* de modo a que a curva passe pelos *endpoints*). Quando é definida através de *interpolação de pontos* a curva passa por aqueles pontos. Note-se que os pontos interpolados não são os *nós internos*. Na prática, as B-Splines dão-nos um modo de construir curvas de Bézier que se articulam entre si de um modo suave. As B-Splines contêm *nós internos*, isto é, pontos em que duas curvas de Bézier consecutivas contactam. Se uma B-Spline contiver um nó interno quer dizer que é composta por duas curvas de Bézier, e assim sucessivamente.

Vamos retomar a questão do *vector de nós*, e sua relação com a configuração das curvas, através de exemplos.

Na figura 10 temos uma B-Spline de grau 3 cujo vector de nós é $K=\{0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0\}$. Como o grau é três o primeiro *endpoint* corresponde ao nó $K_3=2.0$ e o último *endpoint* corresponde ao nó $K_7=6.0$. Este vector de nós tem todos os elementos igualmente espaçados e por isso diz-se UNIFORME. Se os elementos do vector não se encontrarem igualmente espaçados, diz-se NÃO UNIFORME. Porém, verifica-se que os *endpoints* da curva não coincidem com o primeiro e último ponto de controlo. Analisando os

nós internos, verifica-se que esta curva é, na prática, um arranjo de 4 curvas de Bézier “coladas” nos pontos correspondentes a K4, K5 e K6.

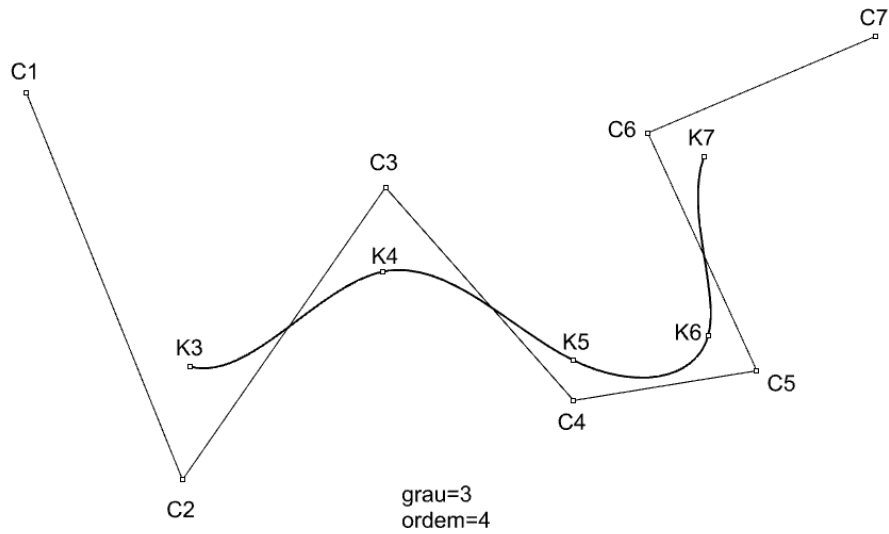


Figura 10

Em todo o caso, o número de elementos (N) do vector de nós é dado pela expressão:

$$N = C + O - 2 \quad (5)$$

No exemplo da figura 11, temos uma B-Spline de grau 3 cujo vector de nós é $K=\{0.0,0.0,0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0\}$. Neste caso, verifica-se que o primeiro *endpoint* da curva coincide com o primeiro ponto de controlo. Também esta curva é um arranjo de 4 curvas de Bézier.

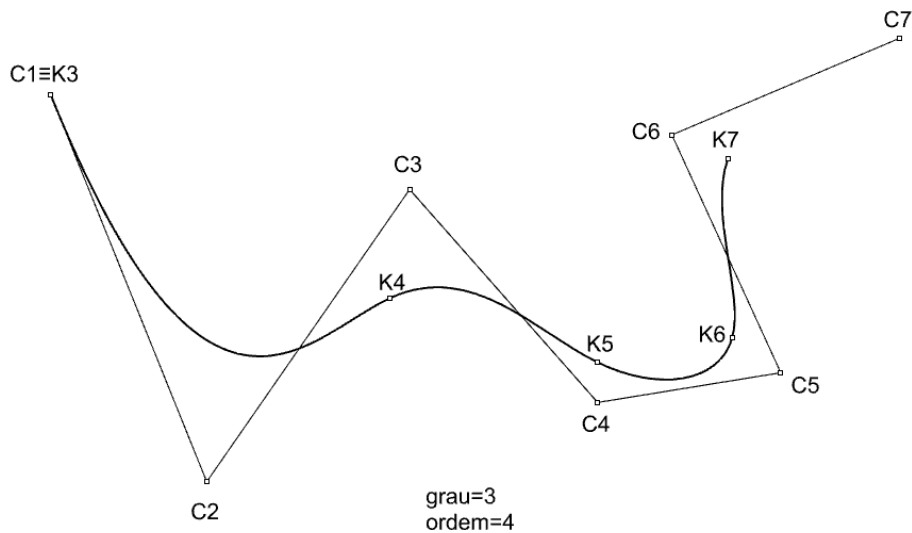


Figura 11

Na figura 12 temos uma B-Spline de grau 3 cujo vector de nós é $K=\{0.0,0.0,0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,4.0,4.0\}$. Neste caso verifica-se que os *endpoints* da curva

coincidem com o primeiro ponto e último ponto de controle. Este corresponde ao tipo de situação mais utilizada.

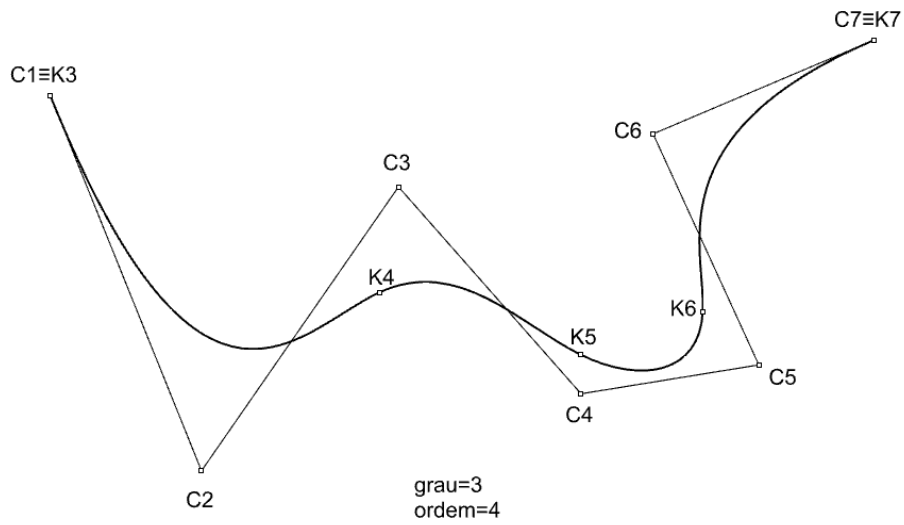


Figura 12

Tanto as curvas de Bézier como a sua generalização dada pelas B-Splines são INVARIANTES SOB A TRANSFORMAÇÃO AFIM, isto é, se sujeitarmos os pontos de controle de uma B-Spline a uma transformação afim, os pontos afins são pontos de controle de uma B-Spline afim da primeira conforme se ilustra na figura 13.

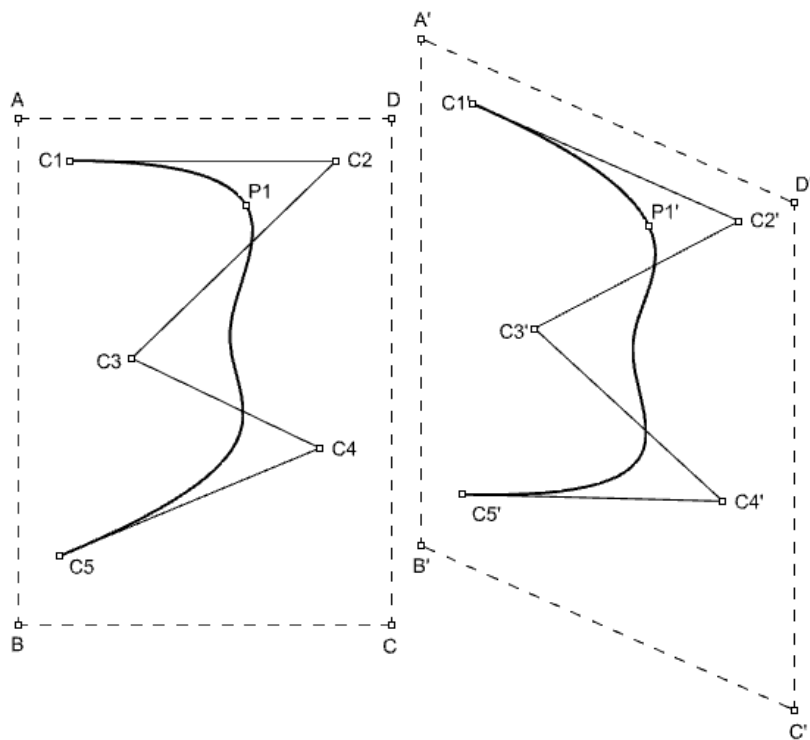


Figura 13

Recorde-se que uma transformação afim transforma um paralelogramo $[ABCD]$ noutra paralelogramo $[A'B'C'D']$. Note-se que o ponto $P1'$ afim do ponto $P1$, estado contido na B-Spline afim da primeira.

2.2.3. Linhas NURBS

Porém as B-Splines não são invariantes sob a TRANSFORMAÇÃO PROJECTIVA. Isto é, se sujeitarmos os pontos de controlo de uma B-Spline a uma transformação projectiva, os pontos homólogos são pontos de controlo de uma B-Spline não homóloga da primeira conforme se ilustra na figura 14.

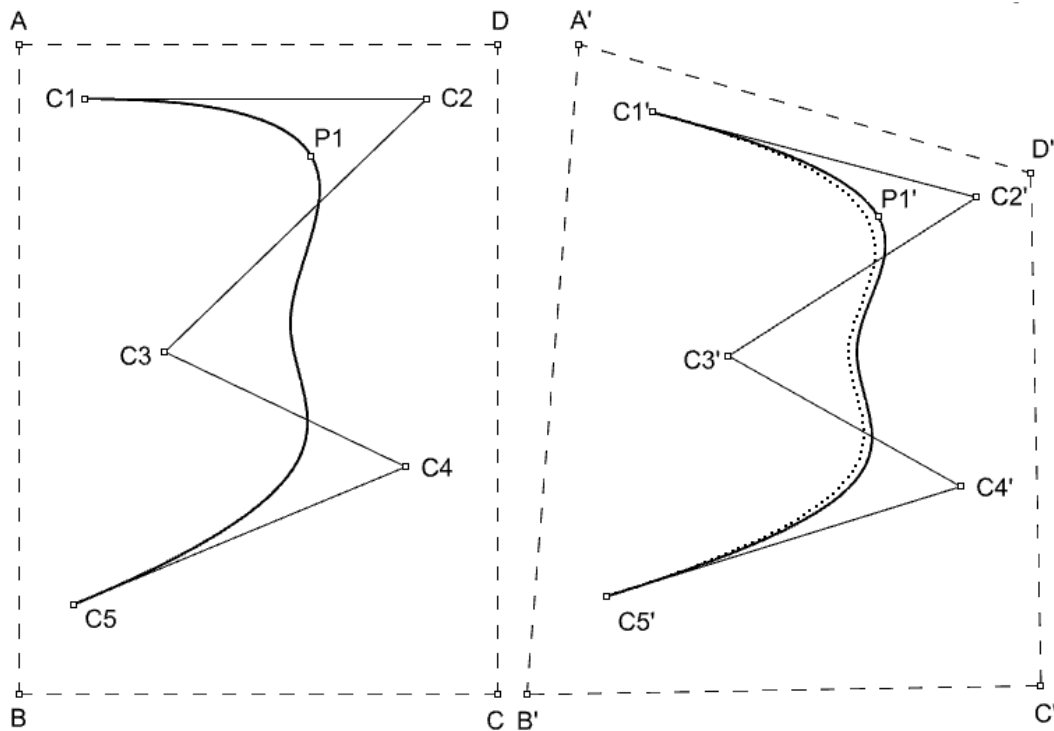


Figura 14

Recorde-se que uma transformação projectiva transforma um quadrilátero $[ABCD]$ qualquer noutra quadrilátero $[A'B'C'D']$ qualquer. Na transformação ilustrada na figura 14 os pontos homólogos dos pontos de controlo puderam ser usados como pontos de controlo de uma nova B-Spline (a pontilhado na figura 14 à direita). Porém esta linha não corresponde a transformação projectiva da B-Spline dada na figura da esquerda. A curva transformada é a curva a preto na figura da direita.

Que linha é esta?

Esta nova linha designa-se por NURBS (Non-Uniform Rational Basis Spline). A designação Non-Uniform refere-se ao facto de que os elementos do vector de nós poder não ser uniforme (como também já tínhamos observado nas B-Splines) e a um novo parâmetro que é a definição

de um peso (*weight*) associado aos pontos de controlo que tem por efeito atrair a curva para a proximidade desse ponto em função do maior ou menor valor que lhe estiver associado. Numa B-Spline todos os pesos têm o valor 1. Numa NURBS, os pesos podem ser distintos de 1. Se o peso de um ponto de controlo for maior que 1, a curva é atraída para o ponto de controlo. Se o peso de um ponto de controlo é menor que 1, a curva é afastada do ponto de controlo. Pode observar-se este efeito na figura 15. Nesta figura, a preto está desenhada uma B-Spline de grau 3. Ao alterar o peso do ponto de controlo C5, verificou-se um efeito sobre os *nós internos* que estavam sobre efeito daquele ponto de controlo. Note-se o facto interessante de que os *nós internos* se deslocaram na direcção do ponto de controlo; aproximaram-se quando o peso foi definido com valor superior a 1 (NURBS verde) e afastaram-se quando o peso foi definido com valor inferior a 1 (NURBS azul).

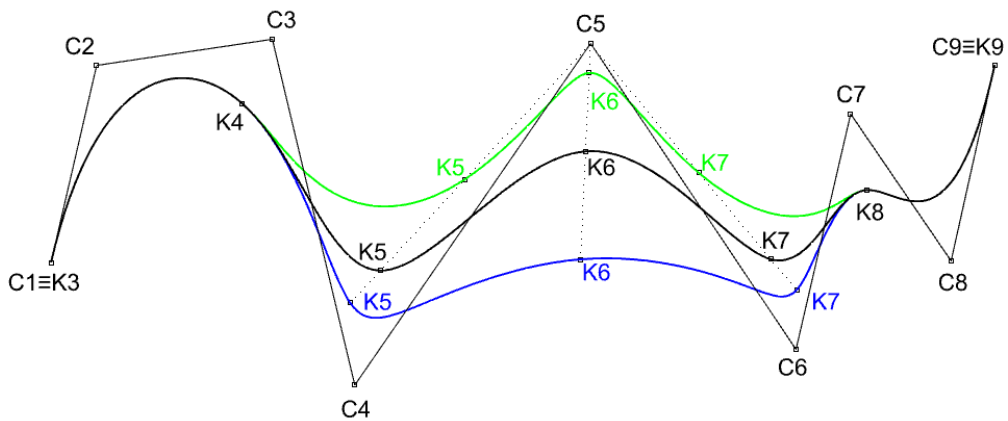


Figura 15

Uma vez que apenas se alterou o peso de um ponto de controlo, os *nós internos* por ele influenciados deslocaram-se numa linha recta. Porém, se alterarmos o peso em mais que um ponto de controlo, o efeito de atracção é combinado naqueles pontos que se encontram sob influência de mais que um ponto de controlo, conforme se observa na figura 16.

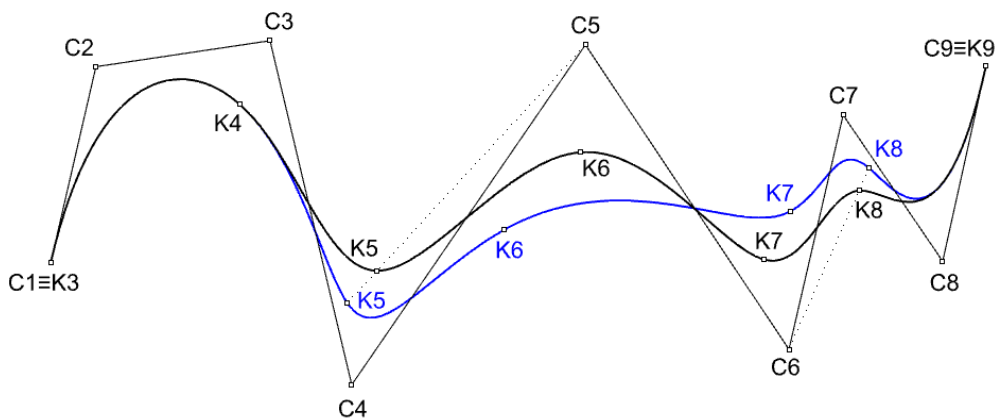


Figura 16

Um aspecto muito interessante acerca das NURBS é que, considerando o grau 2, e com a escolha adequada de pesos, estas podem representar qualquer linha cónica. Por isso, curiosamente, a configuração que ilustrámos na figura 7 é uma caso particular de uma linha NURBS.

3. LINHAS ESPACIAIS E SUPERFÍCIES

Uma linha espacial é uma linha que não está contida num plano.

Uma superfície pode ser conceptualmente definida como o movimento contínuo de uma linha no espaço, deformável ou não, sujeita a uma determinada lei. À semelhança do que foi referido para as linhas, também não existe um único critério de classificação das superfícies.

Uma linha pode resultar da intersecção de duas superfícies. Neste caso, será geralmente uma linha espacial. No entanto, em casos particulares poderá ser uma linha plana.

3.1. Noções gerais sobre linhas e superfícies

3.1.1. Condições de pertença

Se o ponto P pertencer à linha $[d]$ e a linha $[d]$ pertencer à superfície $[\alpha]$, então o ponto P pertence à superfície $[\alpha]$.

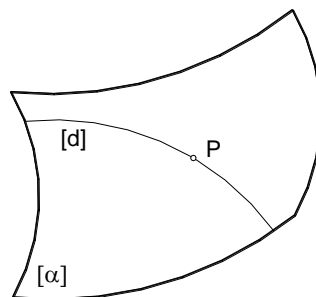


Figura 17

3.1.2. Recta tangente

O ponto A pertence à linha $[m]$ e a linha $[m]$ pertence à superfície $[\alpha]$.

A recta t_A , tangente à linha $[m]$ no ponto A , é a posição limite da recta secante s , quando o ponto X tende para o ponto A .

Se a recta t_A é tangente à linha $[m]$, é também tangente à superfície $[\alpha]$.

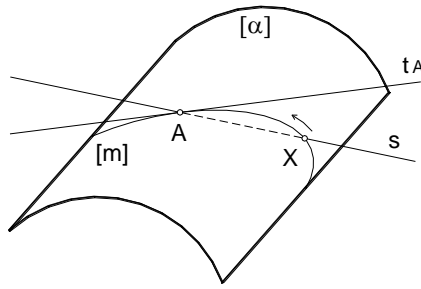


Figura 18

3.1.3. Curvaturas

Uma linha curva plana está sempre contida num plano. À excepção da circunferência, a CURVATURA das linhas varia. A curvatura de uma linha num ponto é o inverso do RAIIO DE CURVATURA da linha nesse mesmo ponto. E o raio de curvatura da linha num ponto é o raio da CIRCUNFERÊNCIA OSCULADORA à curva naquele ponto. O centro desta, o ponto C na figura abaixo, pode ser considerado como a posição limite da intersecção de duas rectas normais à curva quando o arco, definido pelos pontos comuns à curva e às normais, tende para zero, conforme se ilustra na figura seguinte.

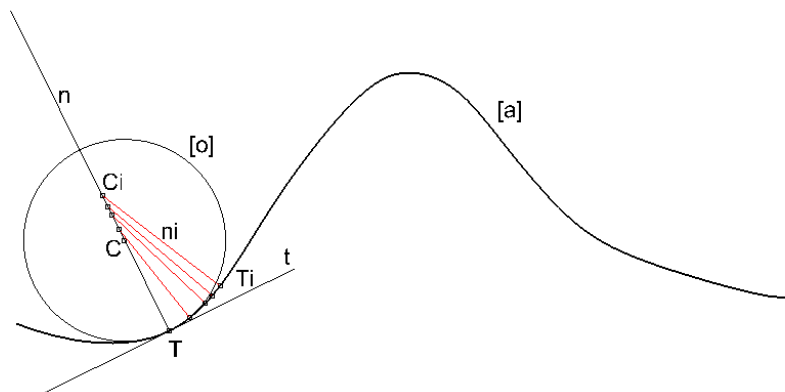


Figura 19

Na figura, às rectas t e n pode ser associado uma sistema de coordenadas rectangular, de origem em T que, como a curva é plana, está contido no plano da mesma. O terceiro eixo deste sistema de coordenadas, é uma recta passante pelo ponto T que é simultaneamente perpendicular às rectas t e n , e que se designa por recta BI-NORMAL à curva em T .

Estes conceitos podem ser estendidos às CURVAS TORSAS, isto é, às curvas não planas.

Dois pontos infinitamente próximos de um ponto T , numa curva torsa $[m]$, definem um PLANO OSCULADOR, que contém a circunferência osculadora, $[c]$, a recta tangente à curva, t ,

e a recta normal à curva, n , no ponto T . Da mesma forma, a recta bi-normal, b , passa por T e é perpendicular ao plano da circunferência osculadora.

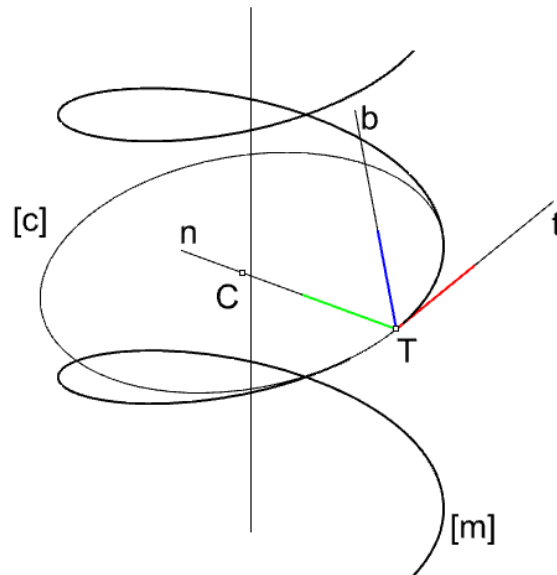


Figura 20

Numa curva torça, a bi-normal roda em torno da tangente à medida que o ponto T se desloca na curva. À maior ou menor taxa de rotação da bi-normal, dá-se o nome de TORSÃO.

3.1.4. Continuidade entre curvas

Entre curvas podem estabelecer-se vários tipos de continuidade.

Nas curvas da figura 21 apenas há continuidade de posição entre as curvas $[a]$ e $[b]$, isto é, existe um vértice V na transição entre as curvas.

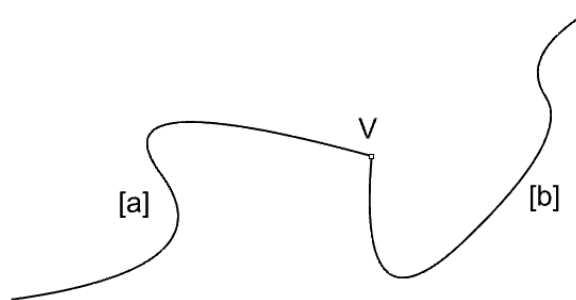


Figura 21

Nas curvas da figura 22 existe continuidade de tangência entre as duas curvas $[a]$ e $[b]$, isto é, no ponto V de transição entre as curvas, ambas admitem a mesma recta t tangente. Porém não há continuidade de curvaturas, como se pode verificar pelos gráficos que ilustram as curvaturas.

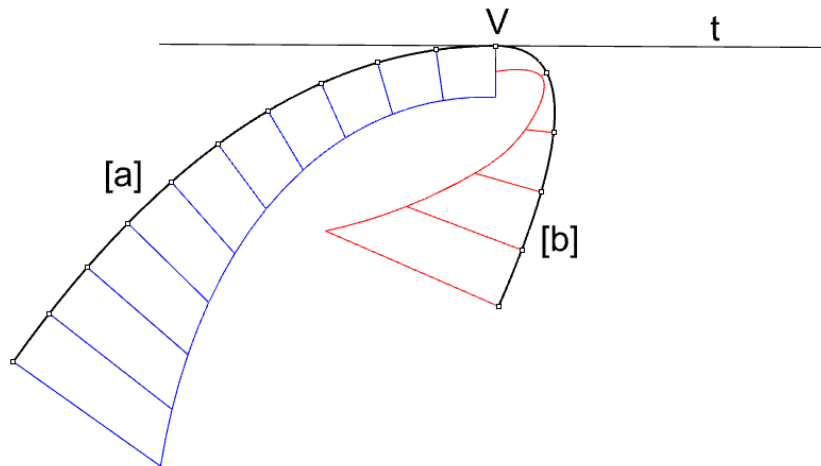


Figura 22

Se, no ponto V as curvaturas de ambas as linhas for a mesma e as linhas forem tangentes, então diz-se que as linhas têm continuidade de curvatura.

3.1.5. Plano tangente a uma superfície

Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas, pertencentes à superfície $[\alpha]$, concorrentes no ponto P .

Sejam t_a e t_b as rectas tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, no ponto P .

O plano ε , definido pelas rectas t_a e t_b , é o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

O plano ε é o lugar geométrico de todas as rectas tangentes à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Do plano tangente a uma superfície diz-se que é OSCULANTE.

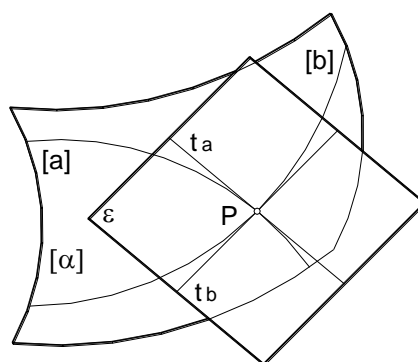


Figura 23

3.1.6. Recta normal e plano normal

Seja ε o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja n uma recta perpendicular ao plano ε no ponto P .

A recta n diz-se NORMAL à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

De um plano que contenha a recta n diz-se que é normal à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

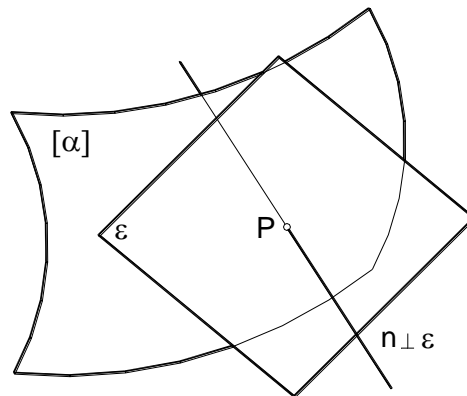


Figura 24

3.1.7. Curvatura de uma superfície

Seja n uma recta normal à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Sejam π e β planos normais à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja $[c]$ (resultado da intersecção do plano π com a superfície $[\alpha]$) a linha de maior curvatura superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja $[d]$ (resultado da intersecção do plano β com a superfície $[\alpha]$) a linha de menor curvatura da superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Verifica-se que os planos que contêm as linhas de curvatura máxima e mínima num ponto são perpendiculares entre si.

A curvatura média da superfície $[\alpha]$ no ponto P é a média das curvaturas máxima e mínima.

A curvatura Gaussiana da superfície $[\alpha]$ no ponto P é o produto da curvatura máxima e mínima.

Uma superfície planificável tem curvatura Gaussiana igual a zero em todos os seus pontos.

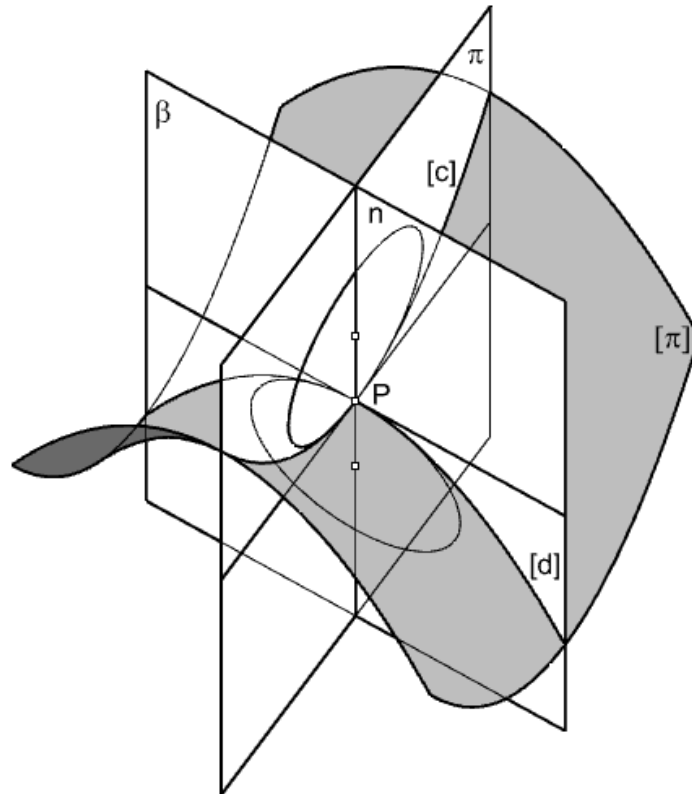


Figura 25

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P a dividir em quatro regiões, duas “para cima” do plano e duas “para baixo”, então a superfície é de DUPLA CURVATURA DE SENTIDOS OPOSTOS no ponto P .

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P apenas contiver P na sua vizinhança, então a superfície é de DUPLA CURVATURA COM O MESMO SENTIDO no ponto P .

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P tiver em comum com $[\alpha]$ apenas uma linha passante por P , então a superfície é de SIMPLES CURVATURA no ponto P .

3.1.8. Intersecção de superfícies

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto I da linha $[i]$.

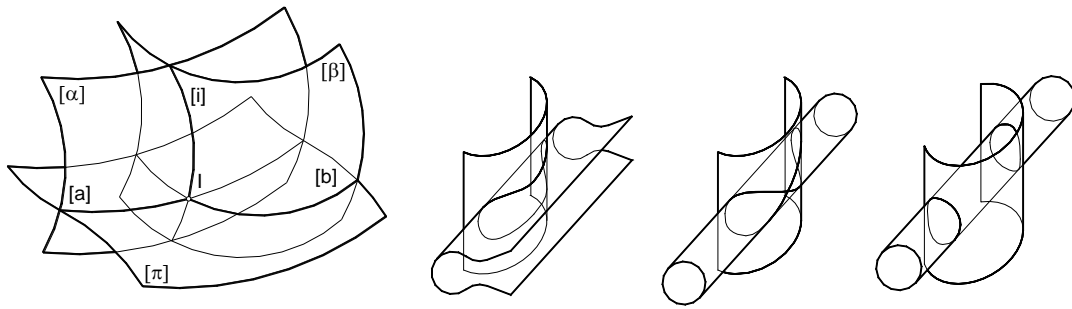


Figura 26

Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.

Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.

Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

3.1.9. Recta tangente à linha de intersecção

Seja $[i]$ a linha de intersecção entre as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja P um ponto da linha $[i]$, logo ponto comum $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja δ o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja π o plano tangente à superfície $[\beta]$ no ponto P .

A recta t , de intersecção entre os planos δ e π , é a recta tangente à linha $[i]$ no ponto P .

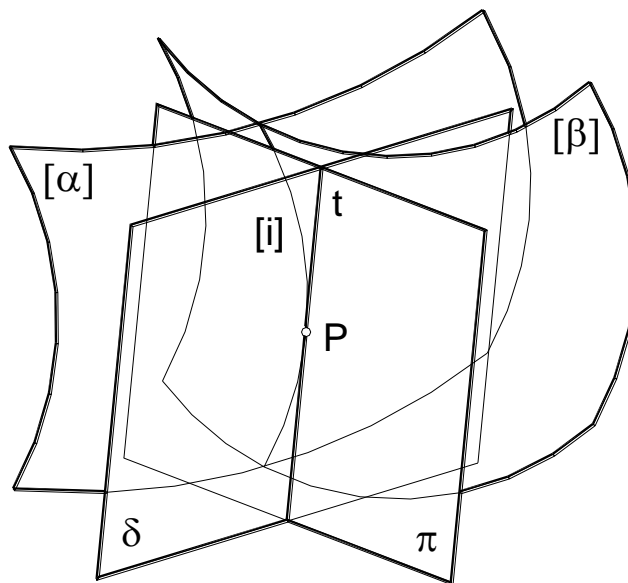


Figura 27

3.1.10. Concordância entre superfícies (tipos de continuidade)

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ admitirem os mesmos planos tangentes π em todos os pontos P da linha $[c]$ comum a ambas, então as duas superfícies dizem-se concordantes segundo a linha $[c]$. O cumprimento desta condição garante a “transição visualmente suave” entre as superfícies, que se designa por continuidade G1. Porém poderá haver descontinuidade ao nível das curvaturas. Se houver continuidade entre superfícies ao nível das curvaturas, diz-se que existe continuidade G2. Um teste comum para avaliar o tipo de continuidade entre superfícies é a análise ZEBRA.

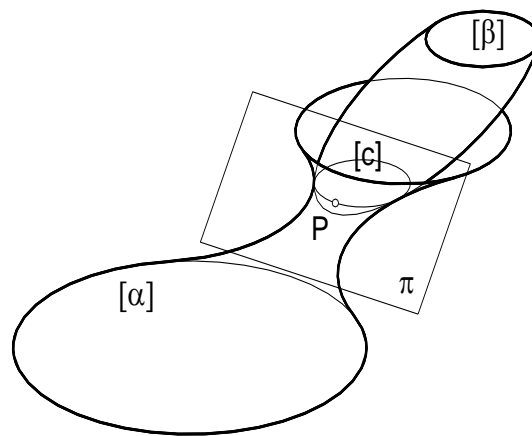


Figura 28

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo as linhas $[b]$ e $[a]$, respectivamente, de tal modo que as linhas $[b]$ e $[a]$ são tangentes entre si num ponto I da linha $[i]$.

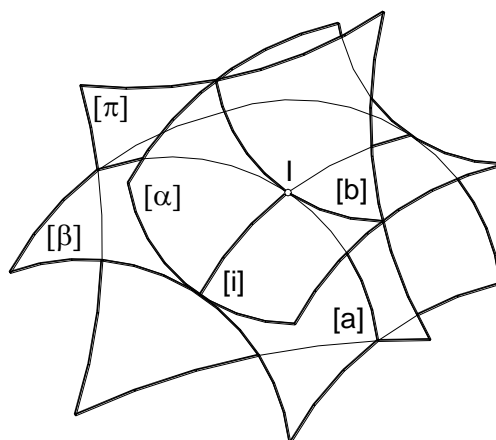


Figura 29

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$ e forem ambas concordantes com uma superfície $[\pi]$ segundo as linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, de tal modo que $[a]$ e $[b]$ se intersectem um ponto I da linha $[i]$, então, as duas linhas $[a]$ e $[b]$ são tangentes entre si no ponto I .

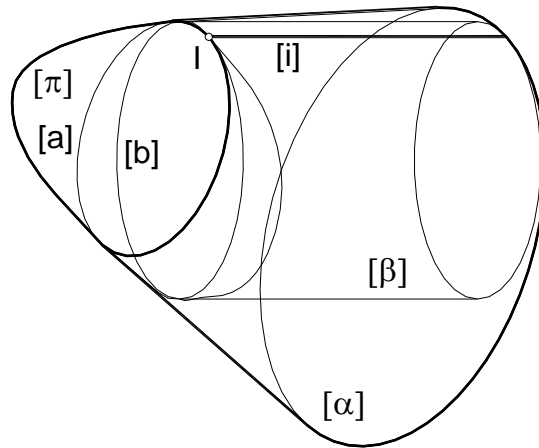


Figura 30

A mesma discussão sobre continuidade que se fez com as linhas pode ser transposta para as superfícies.

3.1.11. Contorno aparente

O contorno aparente de uma superfície $[\alpha]$ para um “observador” (centro de projecções) O é a linha $[c]$ de concordância entre a superfície $[\alpha]$ e uma superfície cônica $[\pi]$ de vértice O .

Se o observador estiver no infinito, então $[\pi]$ é uma superfície cilíndrica.

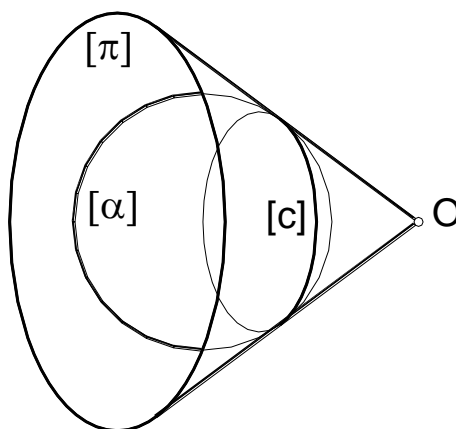


Figura 31

3.1.12. Distinção entre superfície e sólido

Uma superfície é a entidade que delimita o volume do sólido.

3.2. Classificação de superfícies quanto ao tipo de geratriz

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares, irregulares, malhas MESH
REGRADAS (geradas por linhas rectas)	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regrados; superfícies de arco enviesado
	outras	superfície regrada de uma só face	
CURVAS (não geradas por linhas rectas)		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO ⁷	esférica; tórica; elipsoidal; outras
		Outras	serpentina; superfícies mínimas; NURBS ⁸

Tabela 1

3.2.1. Superfícies poliédricas

A relação entre o número de arestas (A), vértices (V) e faces (F) de qualquer poliedro topologicamente equivalente a uma esfera vem dada pela fórmula de Euler:

$$V + F = A + 2 \quad (6)$$

Um poliedro que tenha por vértices os centros das faces de um outro poliedro diz-se DUAL daquele.

3.2.1.1. Poliedros regulares

Todas as faces são polígonos regulares de apenas um tipo, todos os vértices pertencem a uma superfície esférica, são os “Sólidos platónicos”.

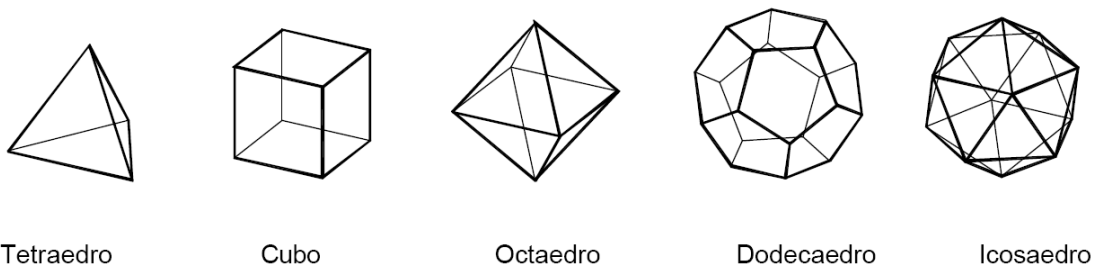


Figura 32

⁷ Note-se que há superfícies de revolução que são planificáveis (cónica e cilíndrica de revolução). Note-se que a superfície do hiperbolóide de revolução também pode ser definida por três geratrizes rectas.

⁸ Note-se que as superfícies NURBS podem ser utilizadas como representação de muitas das outras superfícies referidas na tabela.

3.2.1.2. Poliedros semi-regulares

Todas as faces são polígonos regulares de dois ou mais tipos sendo o comprimento da aresta uma constante; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica. São também designados por “Sólidos de Arquimedes”. Todas as arestas e vértices são congruentes e podem obter-se dos poliedros regulares por algum processo de transformação geométrica. Também podem considerar-se nesta categoria os prismas regulares e os anti-prismas regulares embora normalmente não seja comum.

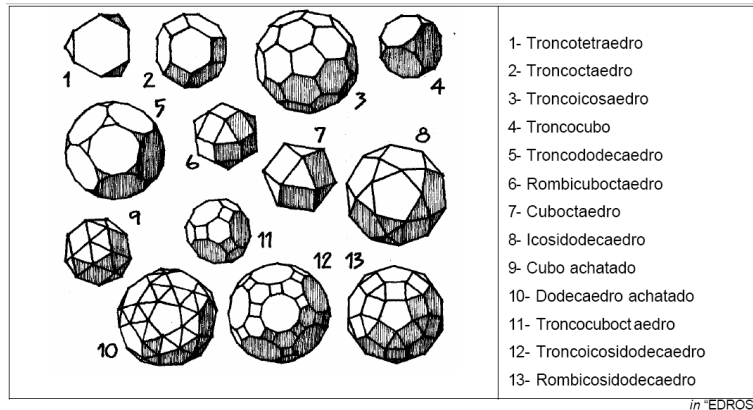


Figura 33

3.2.1.3. Poliedros irregulares

As faces são polígonos de tipos variados. Os vértices podem pertencer ou não a uma superfície esférica. O comprimento das arestas não é constante. Exemplos de poliedros irregulares são: pirâmides, bipirâmides, troncos de pirâmide, prismas, troncos de prisma. Uma bipirâmide é um sólido gerado pela “soma” de uma pirâmide com a sua simétrica relativamente ao plano da base. Outros tipos de poliedros irregulares são: anti-prismas, anti-piramóides, tronco-antiprismas, anti-prismóides.

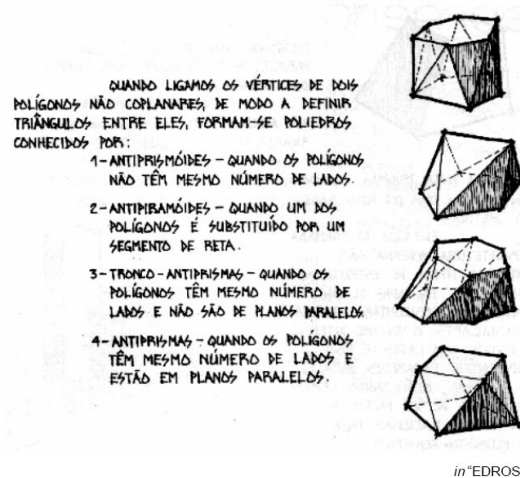


Figura 34

Outro tipo de poliedro interessante são os “sólidos de Johnson”. Trata-se de poliedros em que todas as faces são regulares de mais que um tipo, não sendo, no entanto, poliedros regulares, semi-regulares, prismas regulares ou anti-prismas regulares. Existem 92 ao todo.

3.2.2. Superfícies de revolução

Nestas, é conveniente definir alguns elementos notáveis.

O EIXO é a recta em torno da qual roda a linha (geratriz) que gera a superfície.

Um PARALELO é uma intersecção produzida na superfície por um plano perpendicular ao eixo.

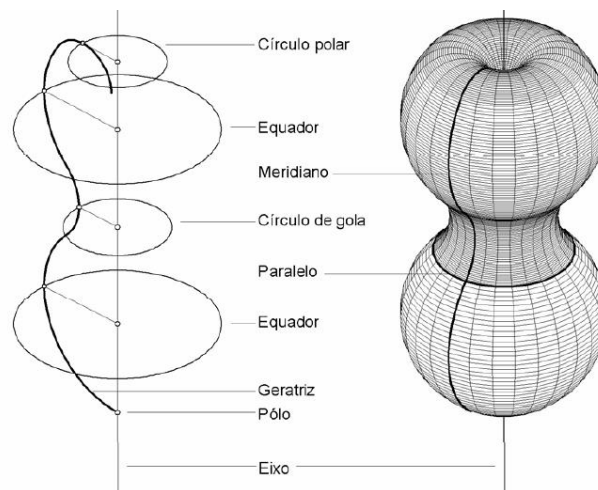
Um MERIDIANO é uma intersecção produzida na superfície por um plano complanar com o eixo.

Se um paralelo é o maior na sua vizinhança designa-se EQUADOR.

Se um paralelo é o menor na sua vizinhança designa-se CÍRCULO DE GOLA.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo nos pontos que este tem em comum com aquela, então estes pontos designam-se PÓLOS.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo ao longo de paralelos, estes designam-se CÍRCULOS POLARES.

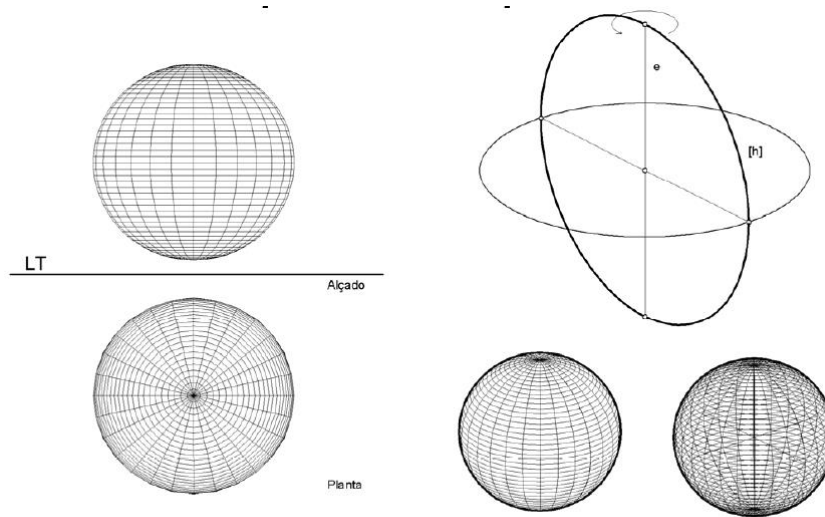


SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Figura 35

3.2.2.1. Superfície esférica

A superfície esférica pode ser conceptualmente concebida como o resultado da rotação de uma circunferência em torno de um diâmetro.

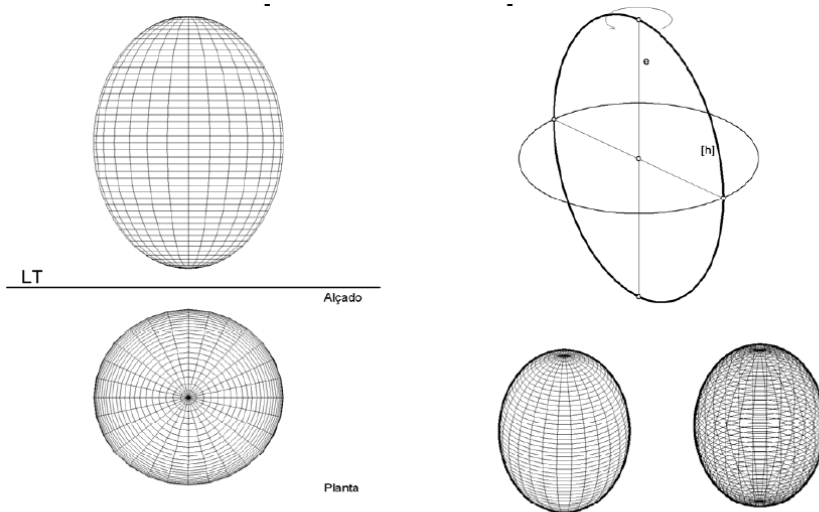


GERAÇÃO DA ESFERA POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM DIÂMETRO

Figura 36

3.2.2.2. Esferóide

O esferóide, ou elipsóide de revolução, é superfície que se gera pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos principais. Diz-se que é alongado se a rotação for feita em torno do eixo maior, e diz-se achatado se a rotação for feita em torno do eixo menor.

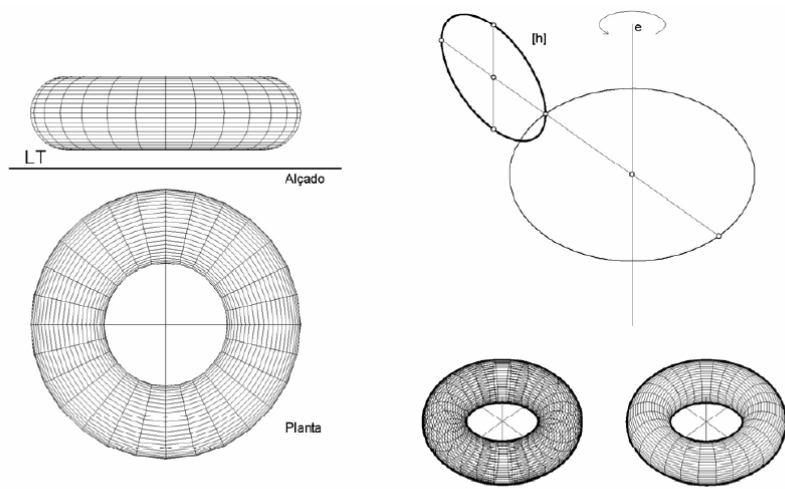


GERAÇÃO DO ELIPSÓIDE POR ROTAÇÃO DE UMA ELIPSE EM TORNO DE UM EIXO

Figura 37

3.2.2.3. Superfície tórica

A superfície tórica fica gerada pela rotação de circunferência em torno de um eixo contido no seu plano. Considera-se que o eixo não intersecta a circunferência.



GERAÇÃO DO TORO POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM EIXO COMPLANAR

Figura 38

3.2.2.4. Hiperbolóide de revolução de uma folha

O hiperbolóide de revolução de uma folha, que adiante se verá que também é uma superfície regrada, é gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo conjugado ou não transverso.

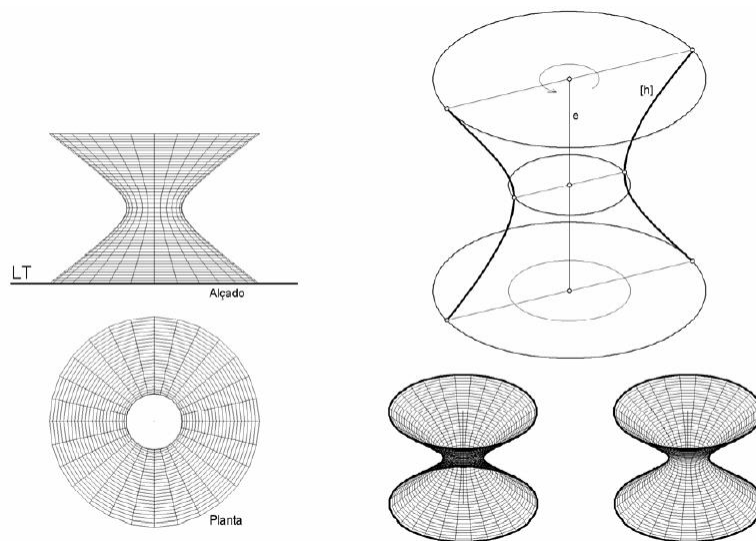


Figura 39

3.2.2.5. Hiperbolóide de revolução de duas folhas

O hiperbolóide de revolução de duas folhas é a superfície gerada pela rotação da hipérbole em torno do seu eixo real ou transverso.

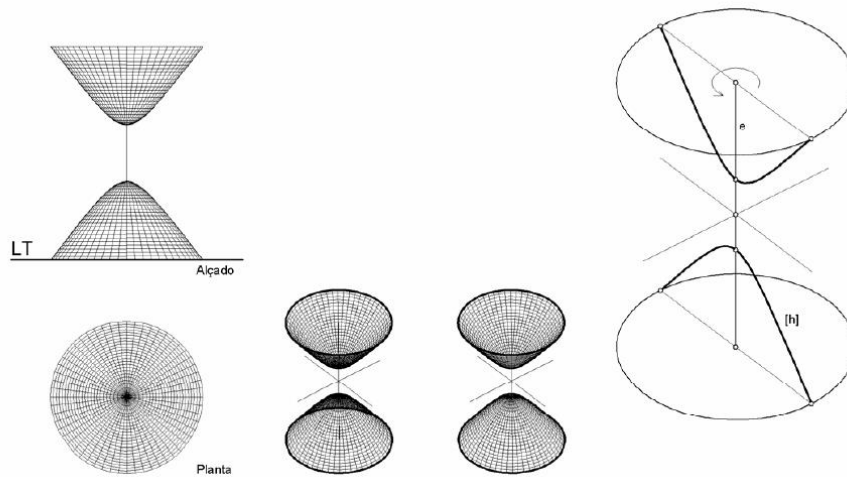


Figura 40

3.2.2.6. Hiperbolóide de revolução de duas folhas

O parabolóide de revolução é a superfície gerada pela rotação da parábola em torno do seu eixo.

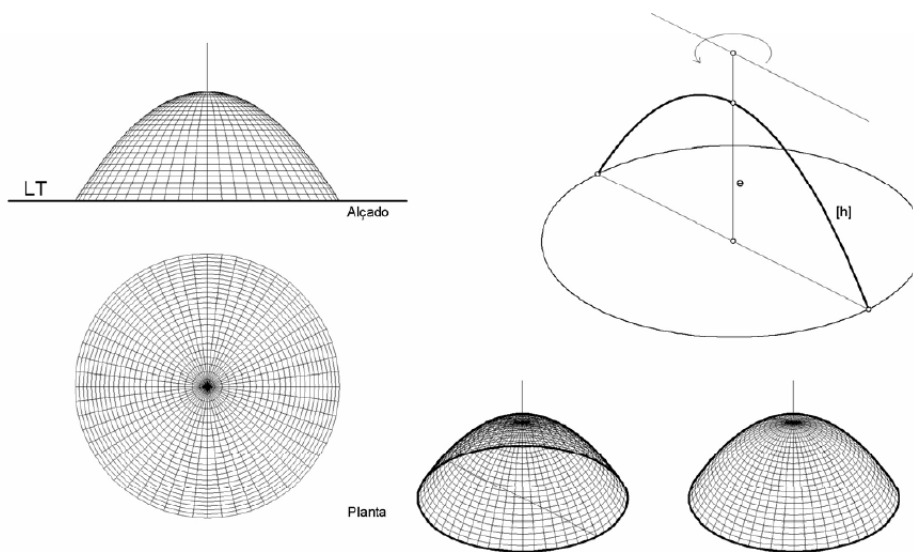


Figura 41

3.2.3. Superfícies planificáveis

Para que uma superfície seja planificável deve ser regrada. Mas esta condição só por si não implica que a superfície seja planificável. Para além de ser regrada deve ainda acontecer que cada par de geratrizes infinitamente próximas entre si sejam concorrentes, isto é coplanares. Do enunciado resulta que uma superfície planificável apenas admite um plano tangente por cada geratriz. A planificação corresponde ao “desenrolar” da superfície até que esta coincida com uma dos planos tangentes. Nesta operação a superfície não “estica” nem “encolhe”, não se “rasga” nem adquire “pregas”. Nesta operação preservam-se os

comprimentos e os ângulos. A resolução de problemas concretos depende, obviamente, do tipo particular de superfície que se tem em presença. Assim, diferentes métodos serão utilizados para planificar superfícies cónicas ou cilíndricas de revolução, cónicas ou cilíndricas oblíquas, convolutas, tangenciais, etc.

Tal como já foi atrás referido, uma superfície planificável tem curvatura Gaussiana, em todos os seus pontos, igual a zero.

3.2.3.1. Superfície cónica, cilíndrica, piramidal e prismática

As superfícies planificáveis mais comuns são as superfícies cónicas, cilíndricas, piramidais e prismáticas.

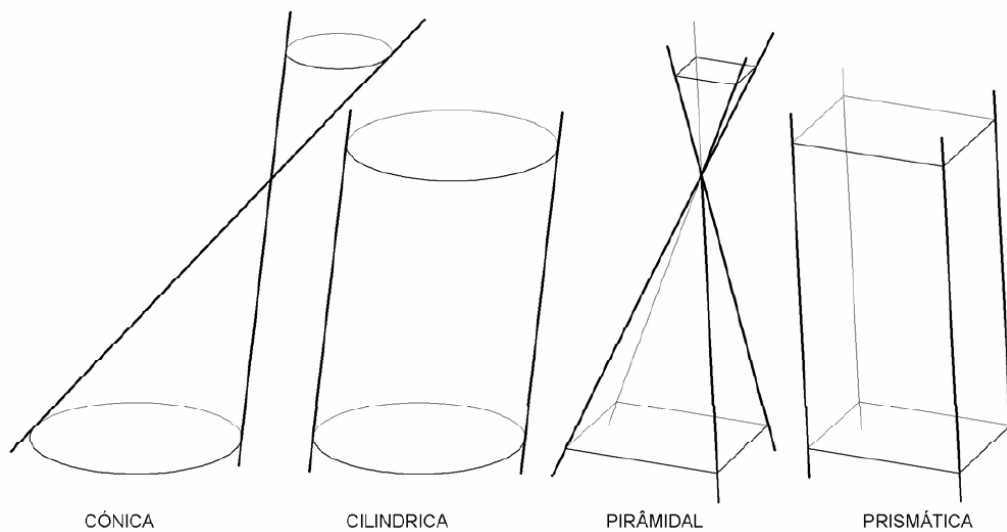


Figura 42

3.2.3.2. Convoluta e Superfície tangencial

Outro tipo de superfícies planificáveis são as que se seguem. A convoluta fica definida pelo lugar geométrico das rectas que resultam dos pontos de tangência de um par de rectas coplanares tangentes a duas linhas curvas espaciais, que se deslocam no espaço mantendo aquelas condições (tangência e coplanaridade).

As superfícies tangenciais ficam definidas pelo lugar geométrico das rectas tangentes a uma linha torsa.

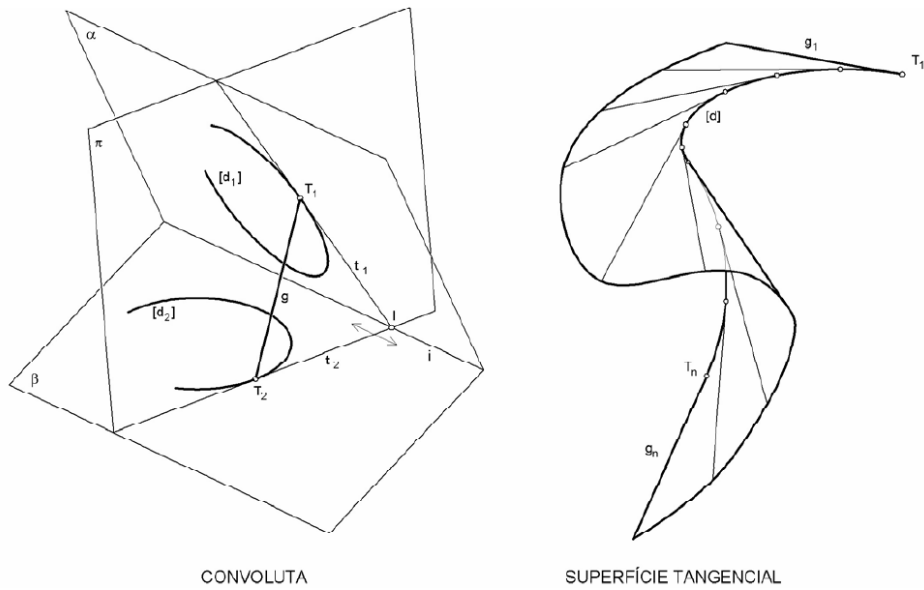


Figura 43

3.2.3.3. Helicóide tangencial

O helicóide tangencial é uma caso particular de uma superfície tangencial. Neste caso a linha directriz é uma hélice cilíndrica.

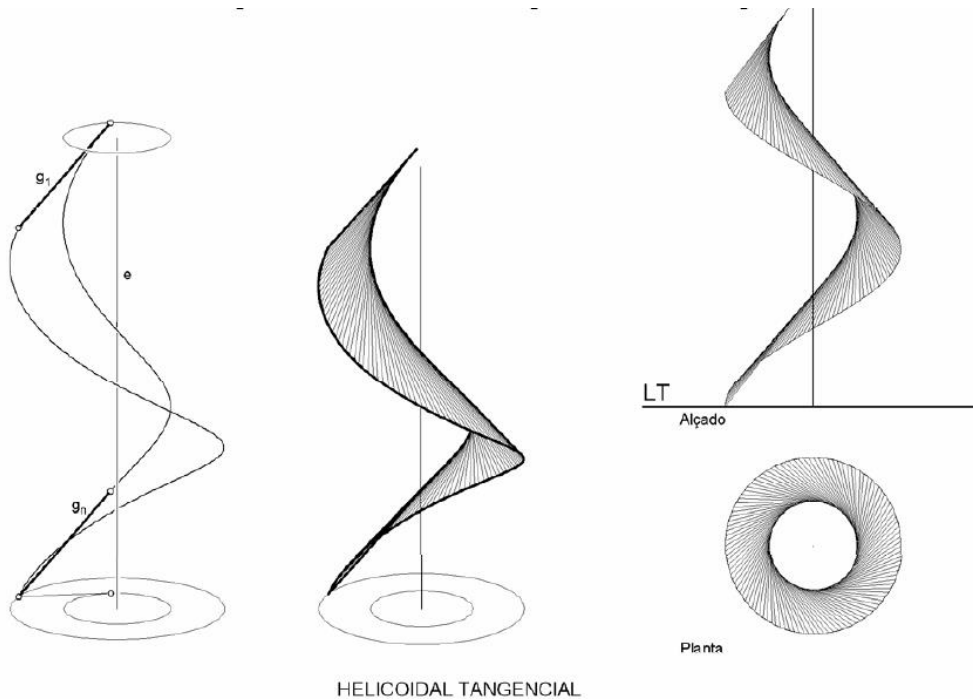
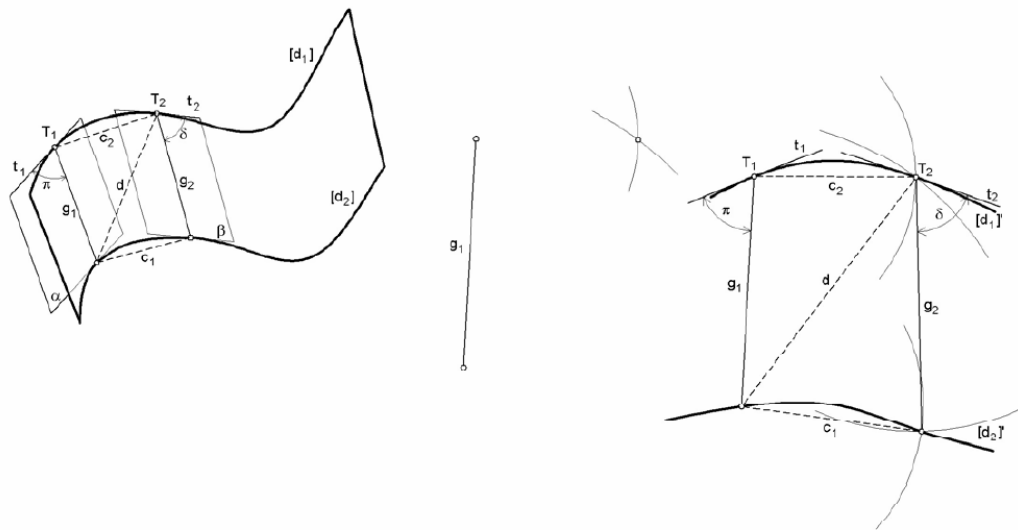


Figura 44

3.2.3.4. Planificação (método gráfico)

A planificação de uma superfície consiste no “desenrolar” da mesma para um plano. Uma aproximação a esse processo é a definição da superfície por meio de uma triangulação e de seguida proceder ao ajuste desses triângulos no plano. Este processo acaba por ser válido para

a “planificação” de superfícies não planificáveis uma vez que todas as superfícies podem ser aproximadas por uma triangulação.



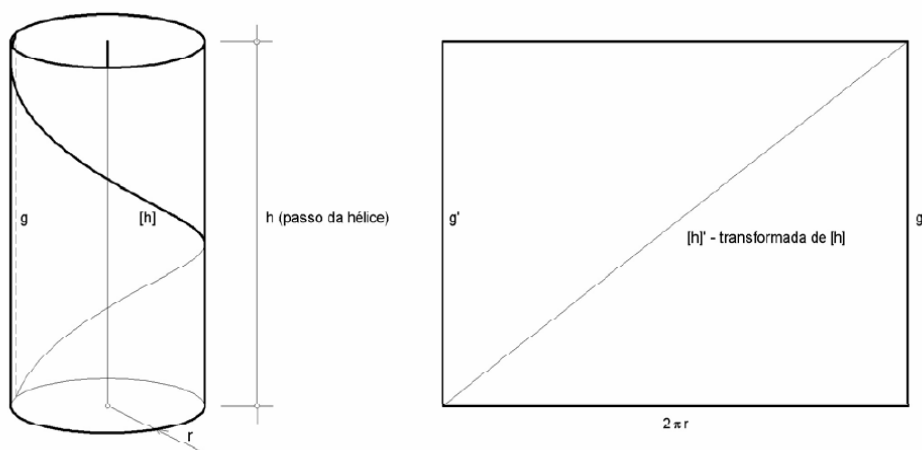
PLANIFICAÇÃO (método gráfico princípio geral)

Figura 45

Algumas ferramentas de modelação 3D implementam funções de planificação de superfícies, como é o caso do *software* Rhinoceros. Porém, verifica-se que os resultados não são correctos quando se procura generalizar a superfície.

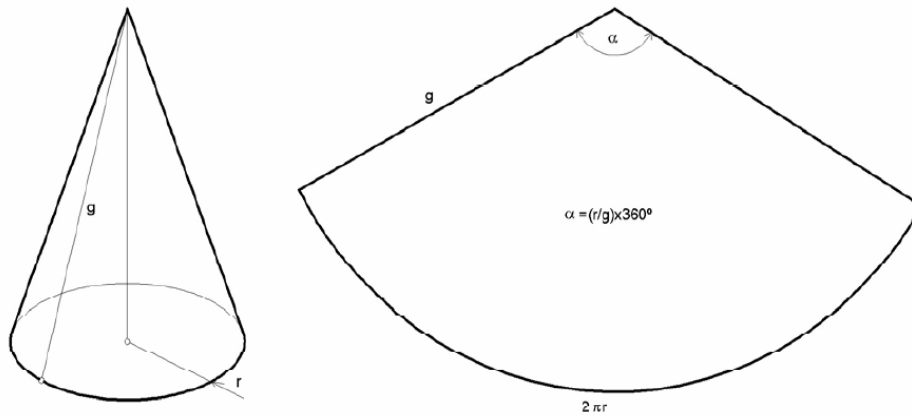
3.2.3.5. Planificação da superfície do cilindro e do cone de revolução

Porém, há figuras cuja planificação é bastante simples. Trata-se da planificação da superfície do cilindro de revolução, que resulta num rectângulo, e a planificação do cone de revolução que resulta num sector circular.



PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO / HÉLICE CILÍNDRICA

Figura 46

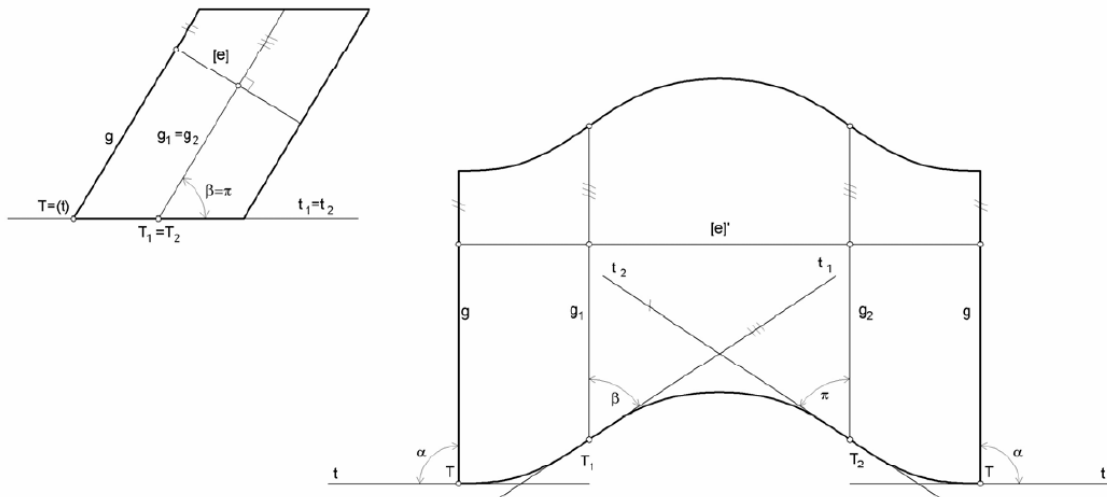


PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CONE DE REVOLUÇÃO

Figura 47

3.2.3.6. Planificação da superfície do cilindro e do cone oblíquo

A planificação do cilindro oblíquo pode fazer-se por meio da aproximação da sua superfície à de um prisma, e a planificação do cone oblíquo pode fazer-se meio da aproximação da sua superfície à de uma pirâmide. O resultado é tanto melhor quanto mais refinada for a aproximação.



PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO OBLÍQUO

Figura 48

directrizes quaisquer. Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regrada ou em que esta degenera numa superfície planificável.

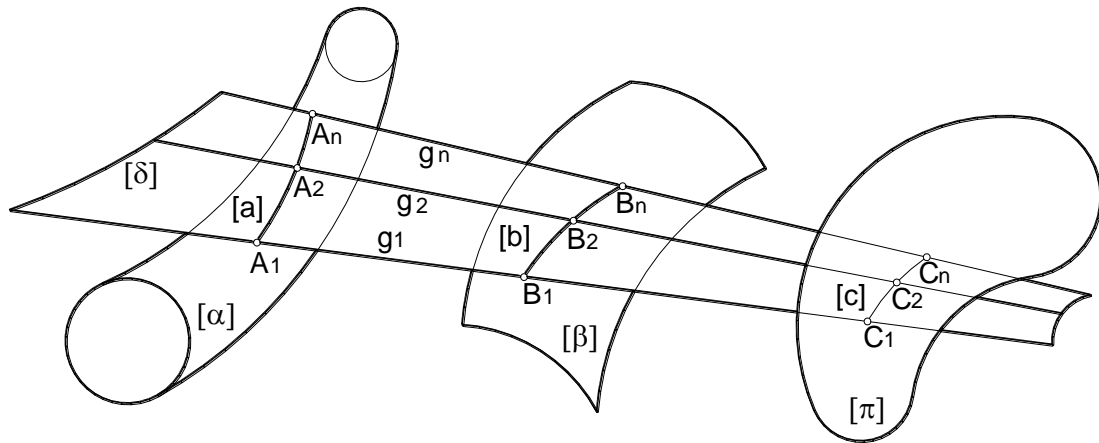


Figura 51

A condição que se impõe para que as rectas g_1, g_2, g_n definam uma superfície regrada $[\delta]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[\delta]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ segundo linhas $[a], [b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas g_1, g_2, g_n designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfícies directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.

Se a superfície $[\delta]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n , então diz-se que é SIMPLEMENTE REGRADA.

Se a superfície $[\delta]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n e j_1, j_2, j_n , então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas às geratrizes d_1, d_2, d_n de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.

Contudo, deve notar-se que mesmo que a superfície seja definida por 3 directrizes próprias ela gozará obrigatoriamente da propriedade de ser de plano director ou de cone director, uma vez que todas as rectas têm pontos impróprios. Em todo o caso, em termos de classificação quanto à directriz, é conveniente distinguir as que são de plano director ou cone director e as ORDINÁRIAS.

Como consequência, apresenta-se o seguinte quadro de classificação de superfícies regradas não planificáveis (empenadas) definidas por três directrizes.

SUPERFÍCIES REGRADAS EMPENADAS DEFINIDAS POR 3 DIRECTRIZES (linhas e/ou superfícies) R (recta) ; C (curva) ; S (superfície) ; R^∞ (recta imprópria) ; C^∞ (curva imprópria)	TIPO	DIRECTRIZES	exemplos
	ORDINÁRIA		R R R
		R R C	
		R C C	Superfícies de arco enviesado (corno de vaca; arriere-vousure)
		C C C	
		R R S	
		R C S	
		C C S	
		R S S	
		C S S	
		S S S	
DE PLANO DIRECTOR		R^∞ R R	Parabolóide hiperbólico
		R^∞ R C	Superfícies de conóide; Superfícies helicoidais
		R^∞ C C	Superfícies de cilindróide
		R^∞ R S	Superfícies de conóide com um núcleo
		R^∞ C S	Superfícies de cilindróide com um núcleo; Superfícies helicoidais com núcleo
		R^∞ S S	Superfícies de cilindróide com dois núcleos
DE CONE DIRECTOR		C^∞ R R	Tetraedróide
		C^∞ C R	Superfícies helicoidais
		C^∞ C C	
		C^∞ R S	
		C^∞ C S	Superfícies helicoidais com núcleo
		C^∞ S S	

Tabela 2

3.2.4.1. Hiperbolóide de revolução de uma folha

O hiperbolóide de revolução de uma folha acumula a dupla condição de ser superfície de revolução e superfície regrada. Com efeito, a mesma superfície pode ser gerada pela rotação de uma hipérbole pela rotação de uma recta enviesada ao eixo.

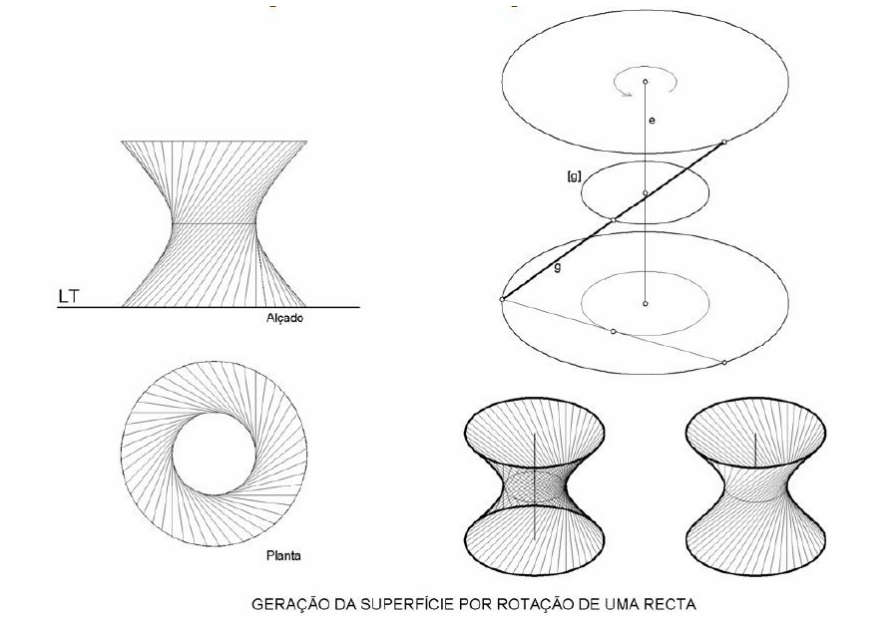


Figura 52

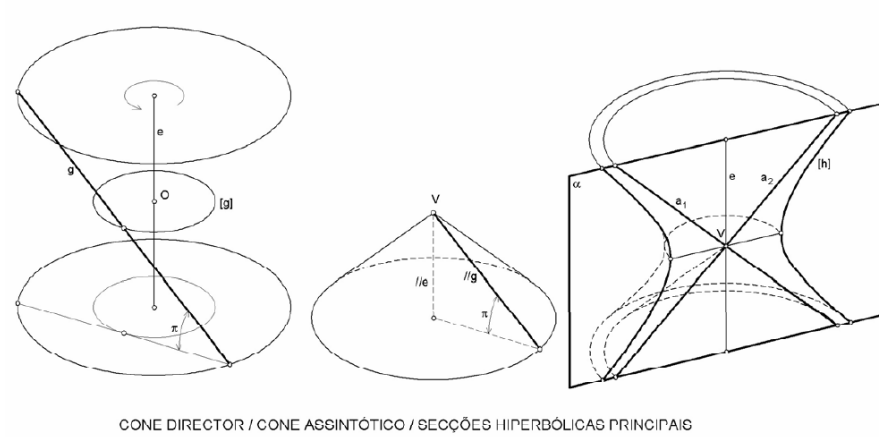
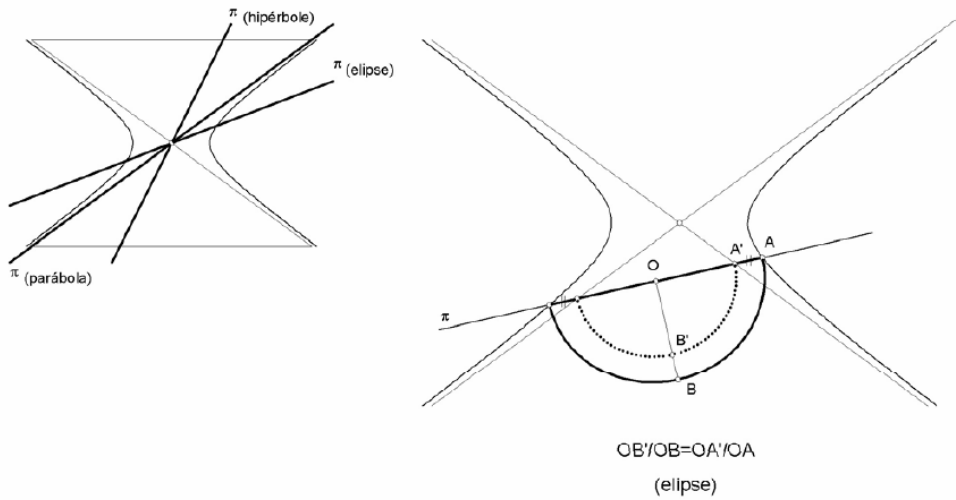


Figura 53

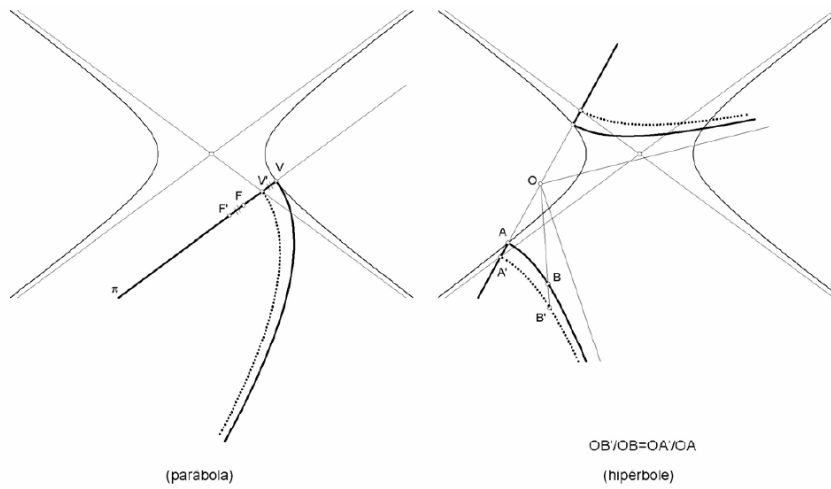
Uma das propriedades interessantes do hiperbolóide de revolução de uma folha é o facto de as suas geratrizes serem paralelas às geratrizes de uma família de superfícies cónicas de revolução, os designados cones directores.



INTERSECÇÕES PLANAS

Figura 54

As intersecções que é possível produzir nesta superfície são do mesmo tipo que as que se podem produzir numa superfície cónica de revolução, isto é, são linhas cónicas. Planos com uma determinada orientação produzem intersecções do mesmo tipo das produzidas nos cones directores.



INTERSECÇÕES PLANAS

Figura 55

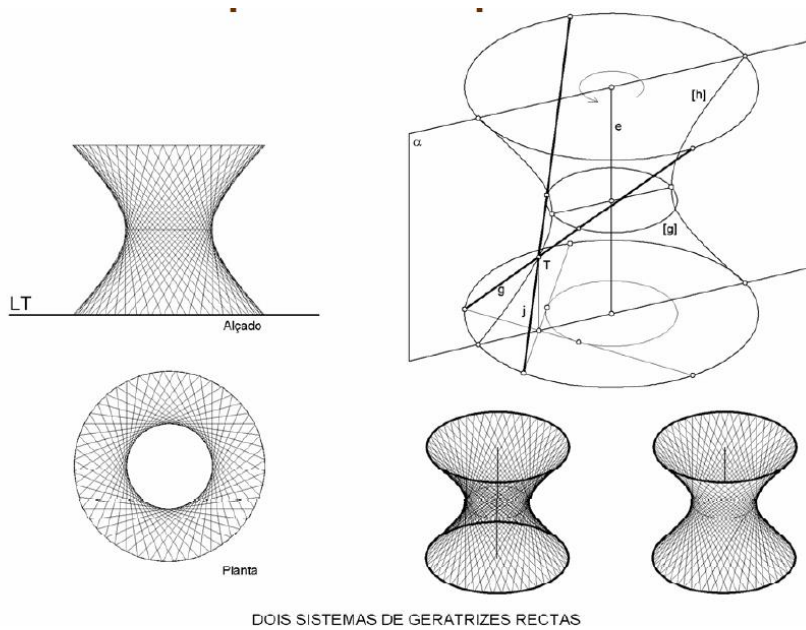


Figura 56

Uma propriedade interessante desta superfície é o facto de ser duplamente regrada, isto é, a mesma superfície pode ser gerada de dois modos distintos pela rotação de uma recta. Assim, esta superfície admite dois sistemas de geratrizes, ou dito de outra forma, a superfície pode ser concebida como uma rede de linhas rectas no espaço que se intersectam.

3.2.4.2. Hiperbolóide empenado escaleno

O hiperbolóide empenado escaleno pode obter-se do anterior por meio de uma transformação afim, e goza de propriedades muito semelhantes àquele.

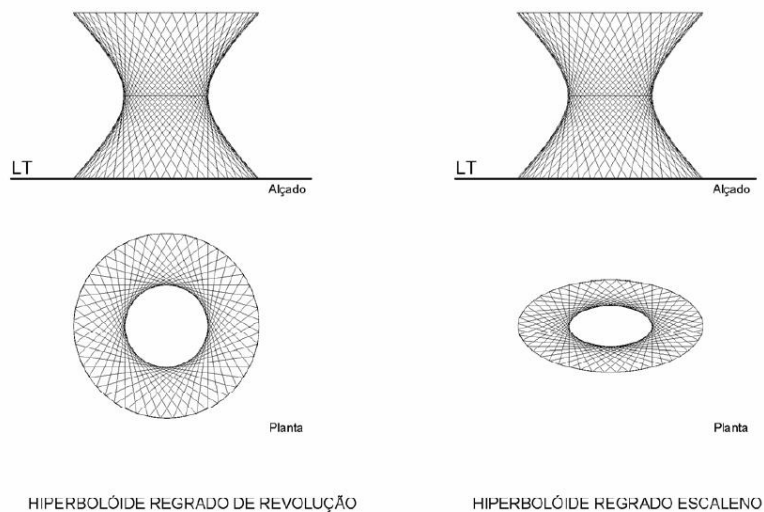
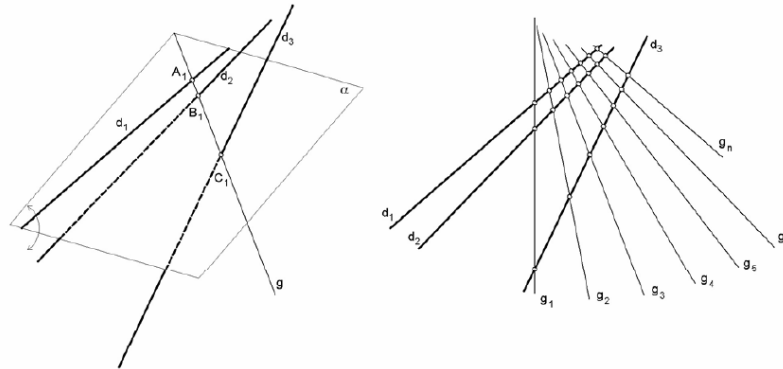


Figura 57

Porém, outra forma de gerar o hiperbolóide empanado escaleno é a que se ilustra na figura seguinte. Das três rectas enviesadas quaisquer (directrizes), a superfície é gerada pelo

movimento de uma quarta recta (geratriz) que se desloca no espaço apoiada naquelas três. Geratrizes desta superfície podem ser facilmente obtidas através da intersecção de um feixe de planos com duas directrizes, tendo por base a outra geratriz.

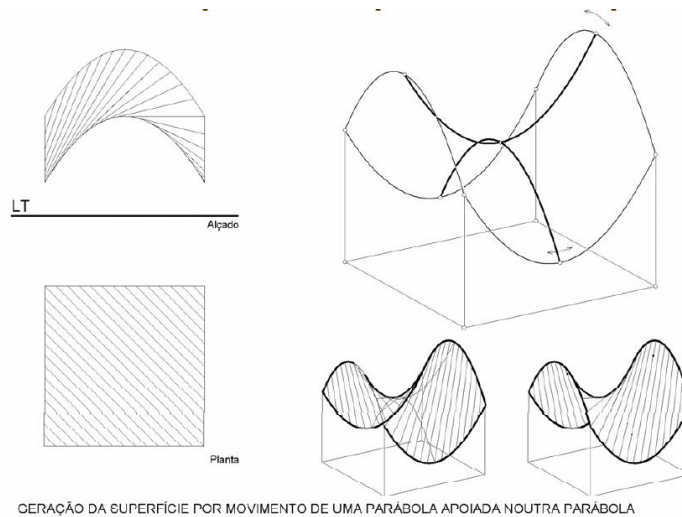


DEFINIÇÃO DO HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS

Figura 58

3.2.4.3. Parabolóide hiperbólico

O parabolóide hiperbólico também pode ser gerado de vários modos distintos. Na figura seguinte, ilustra-se a sua geração por deslocamento de uma parábola (que preserva a orientação) apoiada noutra parábola.



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR MOVIMENTO DE UMA PARÁBOLA APOIADA NOUTRA PARÁBOLA

Figura 59

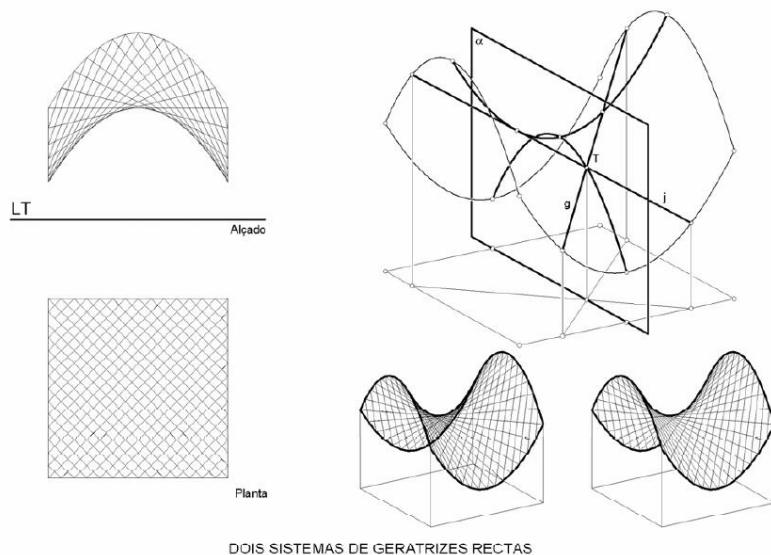


Figura 60

Trata-se também de uma superfície duplamente regrada. Isto é, também pode ser considerado gerado de dois modos distintos pelo movimento de uma recta no espaço apoiada sobre três rectas enviesadas. Embora neste caso uma das rectas seja imprópria. Isto quer dizer, na prática, que a geratriz se desloca mantendo-se apoiada em duas directrizes enviesadas e conservando o paralelismo a um plano (orientação de planos), designado plano director. Face às propriedades descritas, verifica-se que o parabolóide hiperbólico admite duas orientações de planos directores.

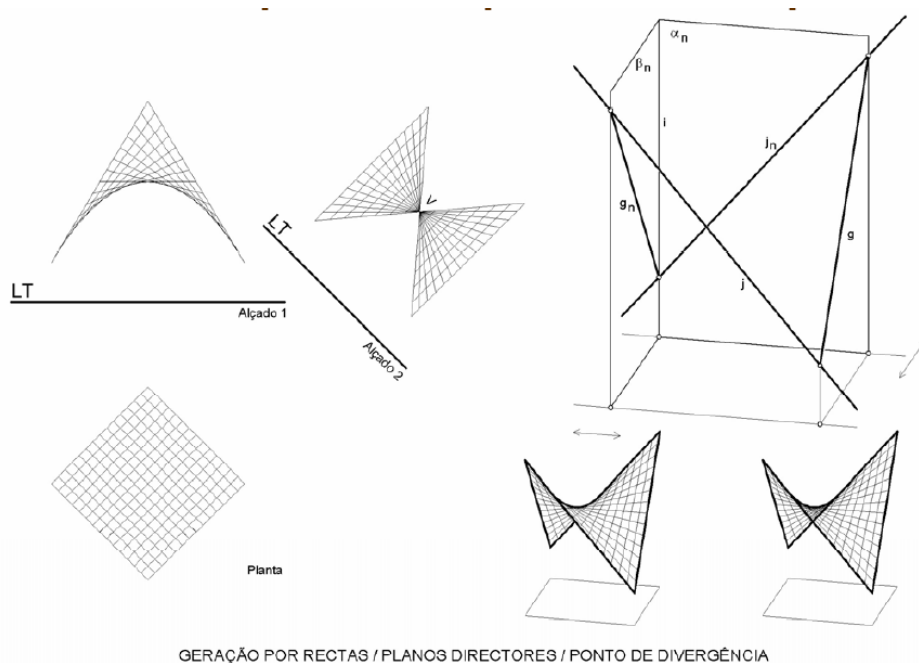
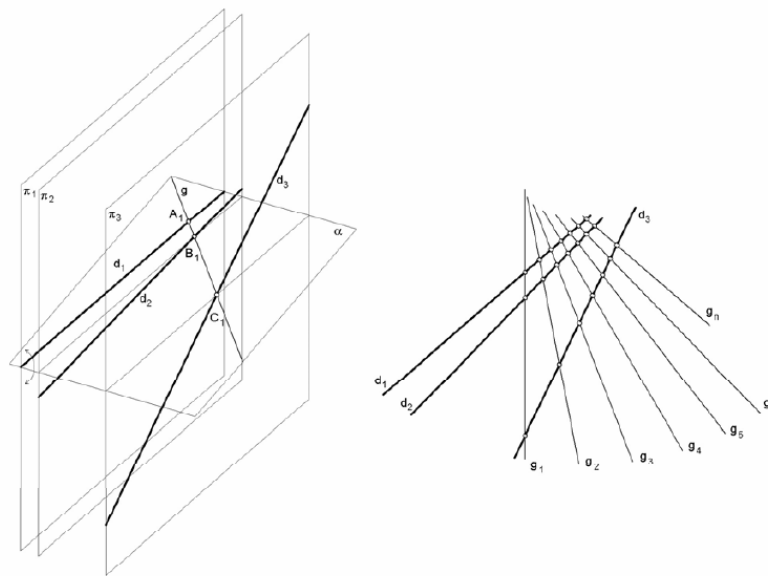


Figura 61

A forma mais simples de definir um parabolóide hiperbólico é através de um quadrilátero enviesado. As direcções de dois lados opostos definem a orientação do plano director daquela

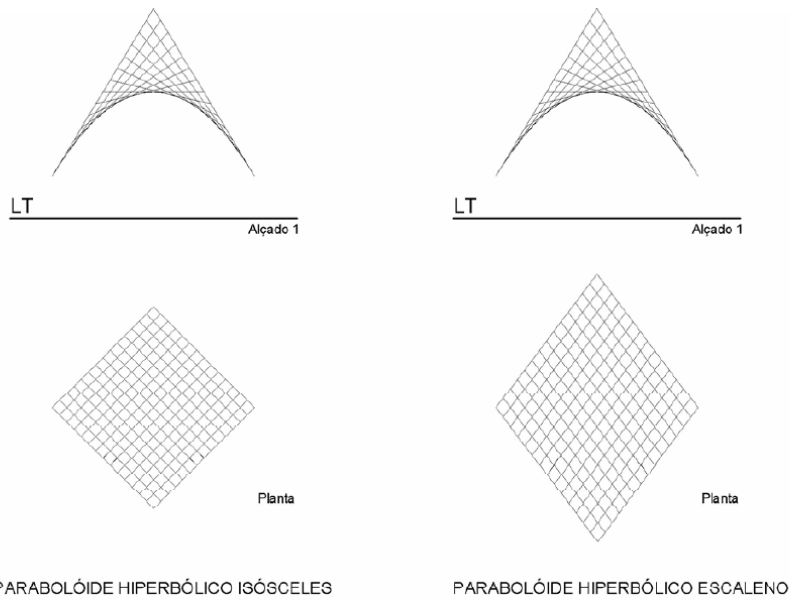
família de geratrizes, e as direcções dos outros dois lados definem a orientação do plano director da outra família de geratrizes.



DEFINIÇÃO DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS

Figura 62

Para se definir o parabolóide hiperbólico dadas três geratrizes da mesma família, deve impor-se a condição de que as direcções destas rectas estejam contidas numa única orientação (a orientação do plano director daquela família de geratrizes).



PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ISÓSCELES

PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO

Figura 63

O parabolóide hiperbólico admite dois tipos de secções cónicas. Se um plano contiver a direcção comum aos dois planos directores, então a intersecção é do tipo parábola. Caso contrário é do tipo hipérbole.

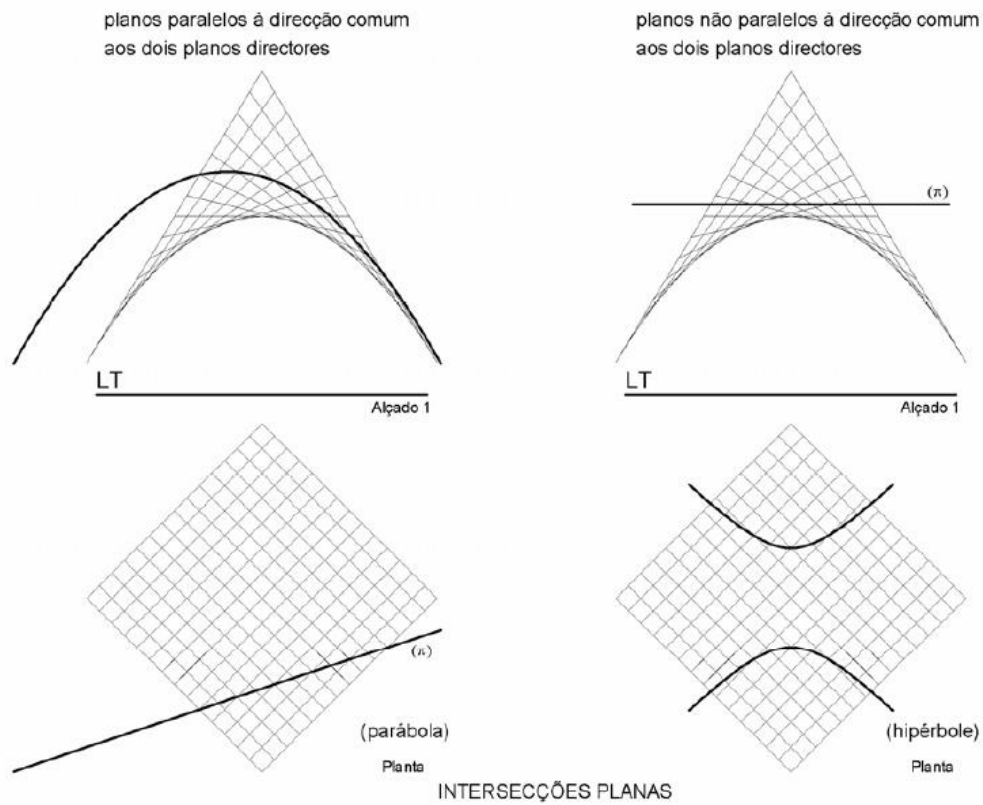


Figura 64

Claro está, que não se está aqui a considerar os casos dos planos osculantes, em que as secções degeneram num par de rectas, rectas essas que se cruzam no ponto de tangência do plano com a superfície.

3.2.4.4. Helicóides regrados

Os helicóides regrados são uma família particular de superfícies regradas empenadas, que têm por directriz uma hélice cilíndrica. Podem ser de cone director ou de plano director. Podem ter núcleo central ou ser axiais.

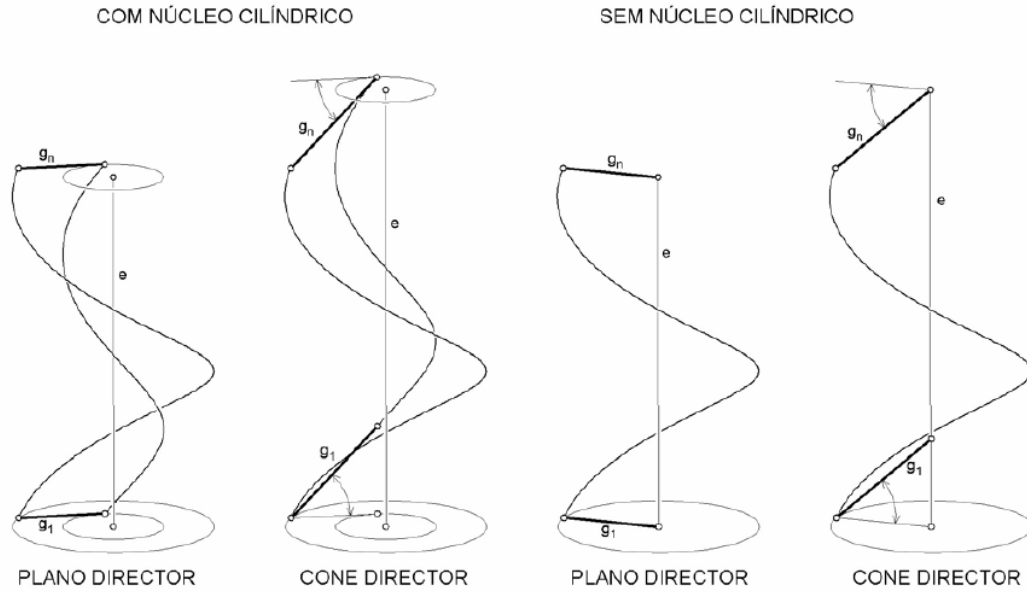


Figura 65

Quando se diz que o helicóide é axial, quer-se dizer que as geratrizes (consideradas extensíveis) são concorrentes com o eixo. Na outra situação, as geratrizes são tangentes à superfície de um cilindro de revolução co-axial com o helicóide. Quando são de plano director, as geratrizes conservam uma direcção contida numa orientação, em geral ortogonal ao eixo da superfície. Quando são de cone director, mantêm um ângulo constante com o eixo, com a particularidade desse ângulo nunca ser 90° .

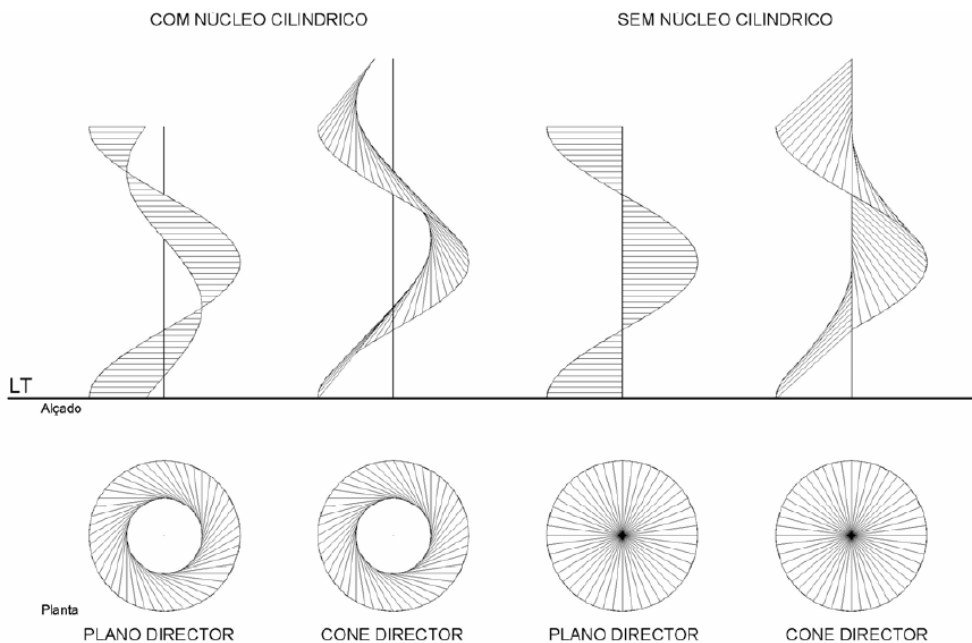


Figura 66

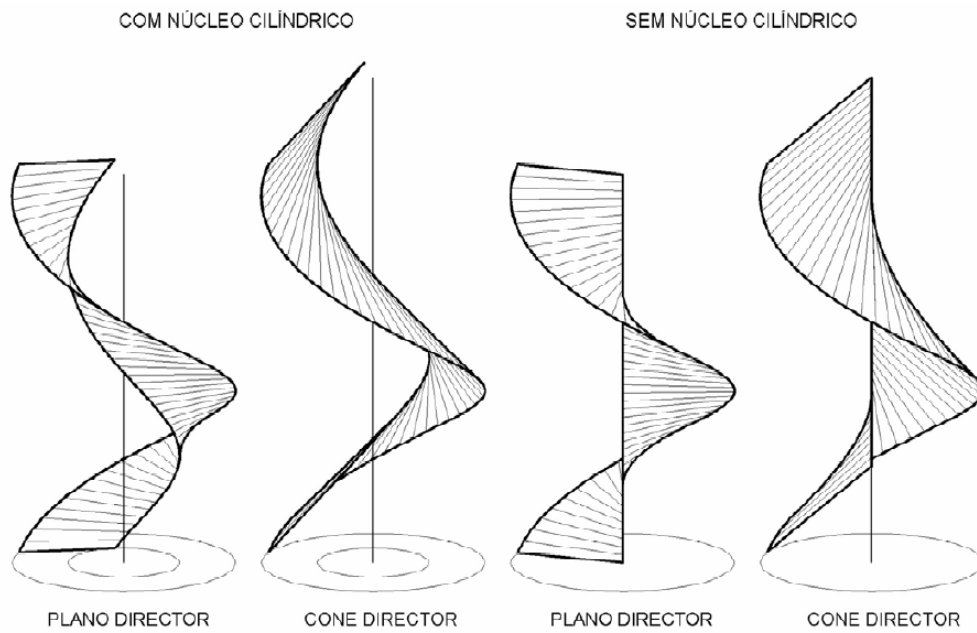


Figura 67

3.2.4.5. Superfícies de conóide

As superfícies de conóide podem ser geradas pelo deslocamento de uma recta (geratriz) que se apoia numa recta e numa curva, conservando o paralelismo relativamente a uma orientação de planos. Isto é, trata-se uma superfície simplesmente regrada de plano director.

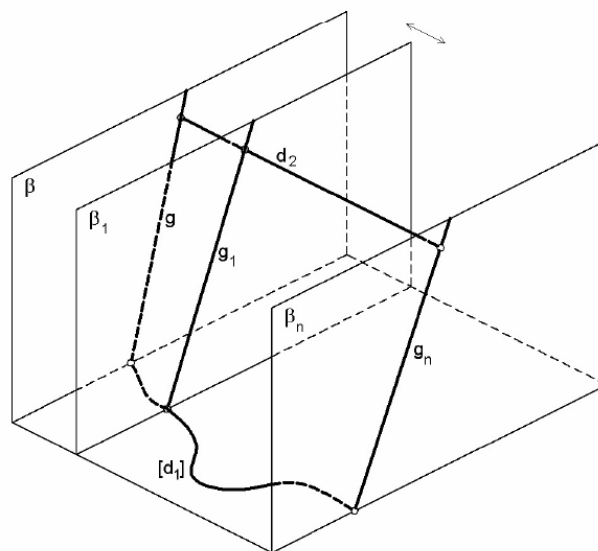


Figura 68

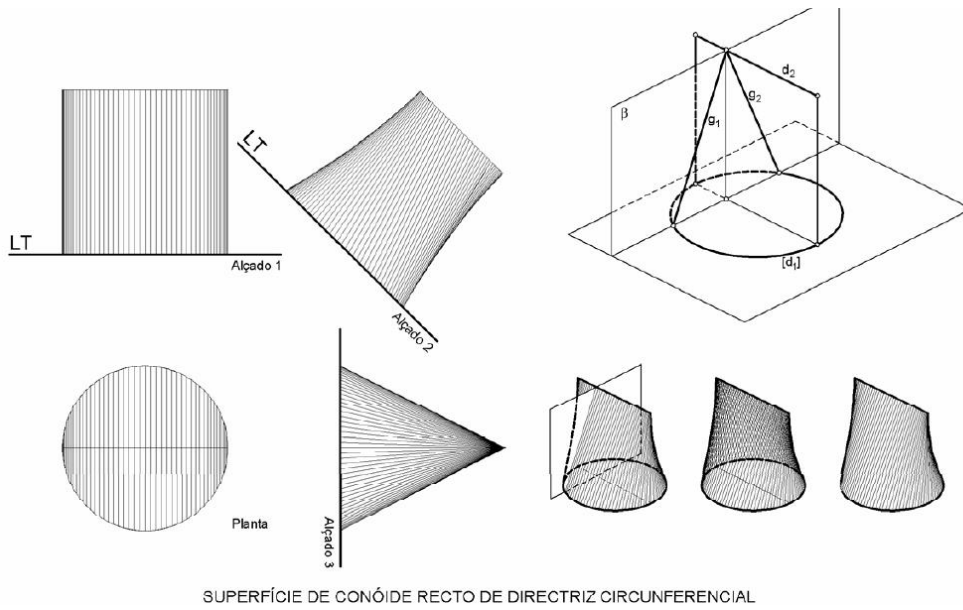


Figura 69

3.2.4.6. Superfícies de cilindróide

A superfície de cilindróide é em tudo semelhante à anterior, porém a geratriz apoia-se em duas curvas.

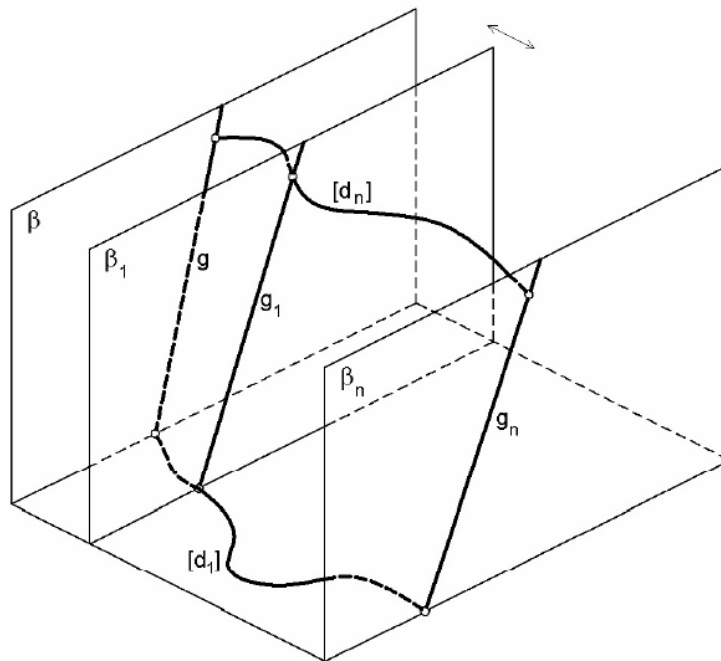
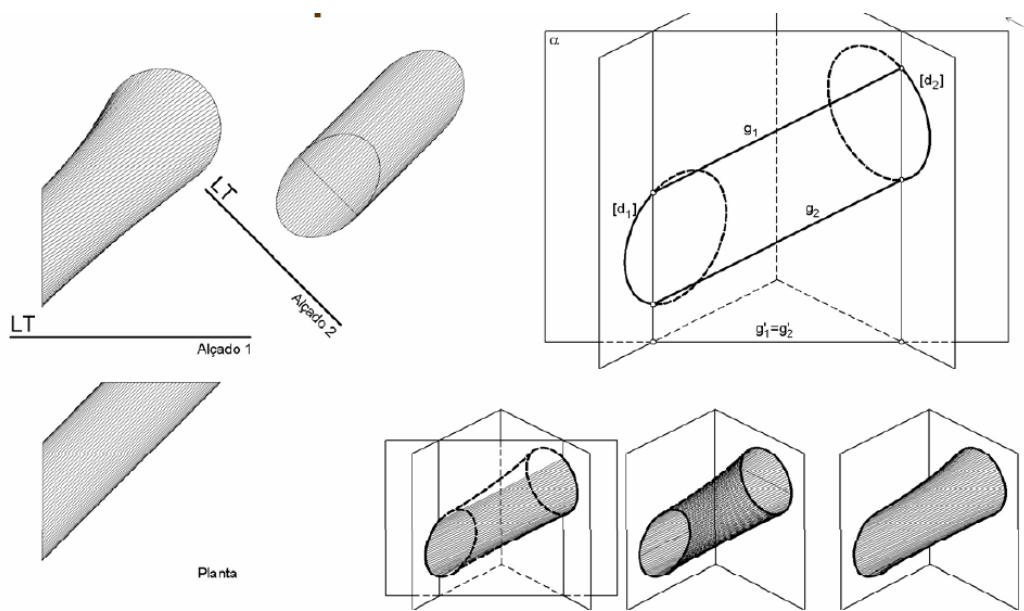


Figura 70

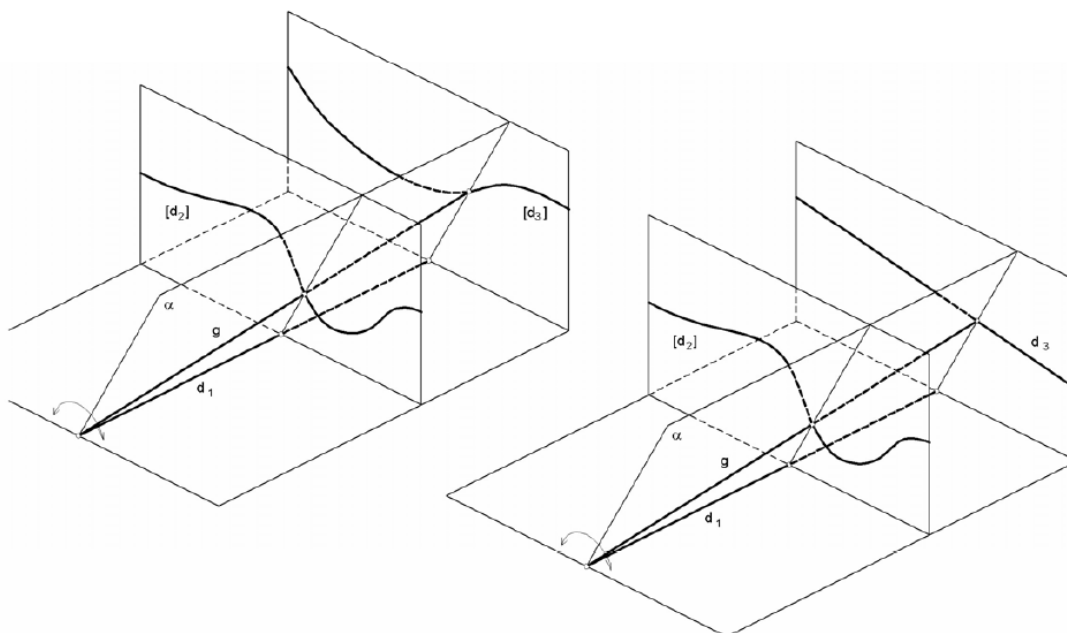


SUPERFÍCIE DE CILINDRÓIDE DE DIRECTRIZES CIRCUNFERENCIAIS

Figura 71

3.2.4.7. Superfícies de arco enviesado

As superfícies de arco enviesado são geradas pelas rectas definidas pelas intersecções sucessivas de um feixe de planos relativamente a duas curvas ou uma curva e uma recta.



SUPERFÍCIES DE ARCO ENVIESADO

Figura 72

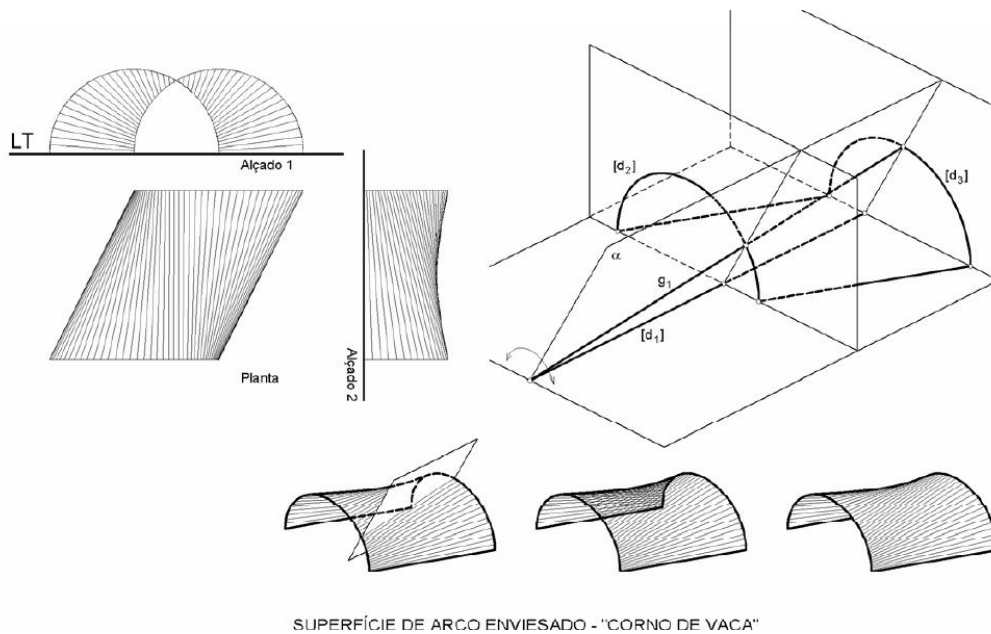


Figura 73

3.2.4.8. Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada

Numa superfície empenada simplesmente regrada $[\alpha]$ o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , contém a geratriz recta g que por ele passa. Este plano intersecta a superfície segundo a recta g e segundo uma linha $[a]$. O plano π contém a recta t tangente à linha $[a]$ no ponto T .

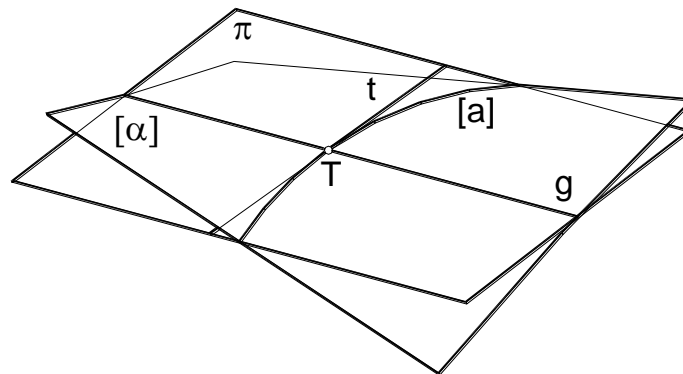


Figura 74

3.2.4.9. Plano tangente a uma superfície duplamente regrada

Numa superfície empenada duplamente regrada, $[\alpha]$, o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , fica definido pelas duas geratrizes rectas, g e j , que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.

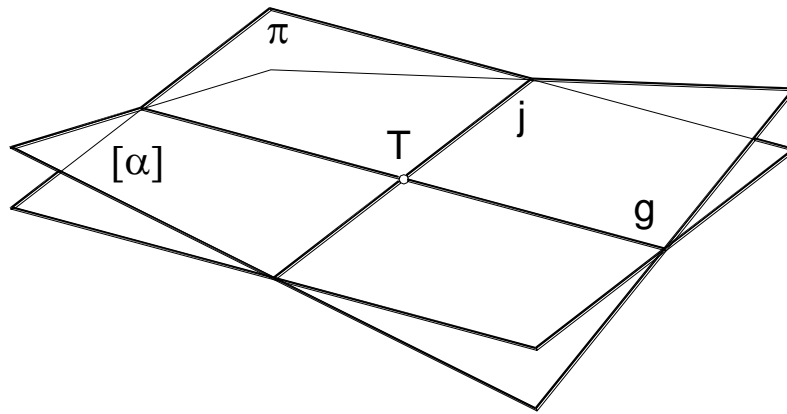


Figura 75

3.2.4.10. Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz

Considere-se a superfície empenada regrada $[\delta]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja g uma geratriz recta, da superfície $[\delta]$, que contém os pontos A , B e C pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos α_A , α_B e α_C tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente, ficam definidos pela geratriz g e pelas rectas t_A , t_B e t_C , respectivamente tangentes a $[a]$ em A , a $[b]$ em B e a $[c]$ em C .

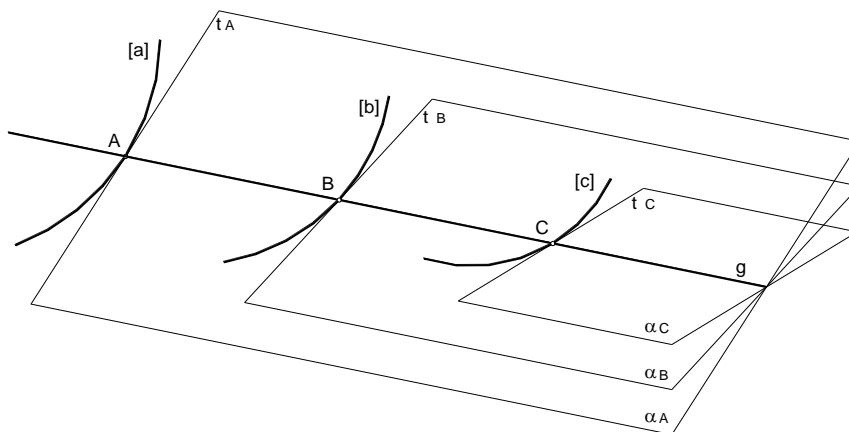


Figura 76

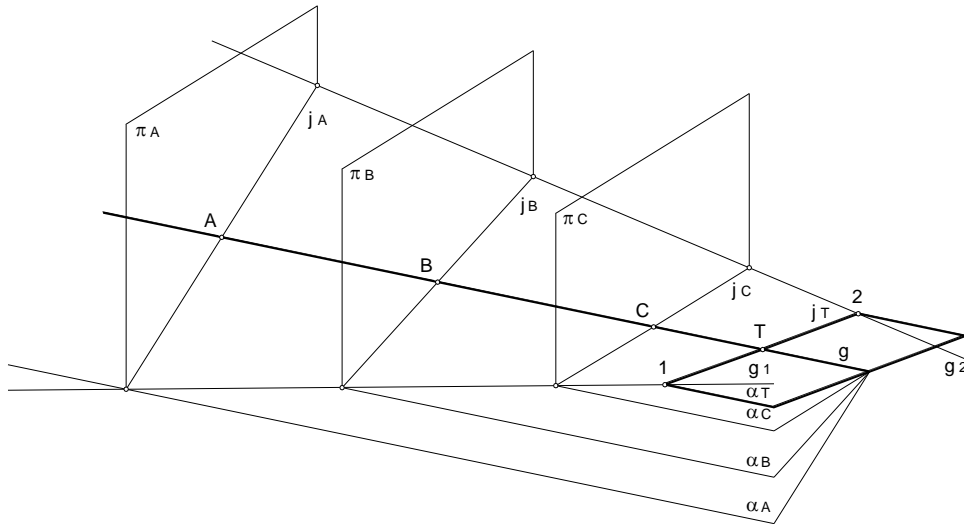


Figura 77

Na sequência do exposto para a Figura 76 tem-se:

Se se intersectar o plano α_A com um plano π_A qualquer (passante pelo ponto A), o plano α_B com um plano π_B qualquer (passante pelo ponto B), e o plano α_C com um plano π_C qualquer (passante pelo ponto C), obtêm-se, respectivamente, as rectas j_A , j_B e j_C tangentes à superfície regrada empenada $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Como os planos π_A , π_B e π_C podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

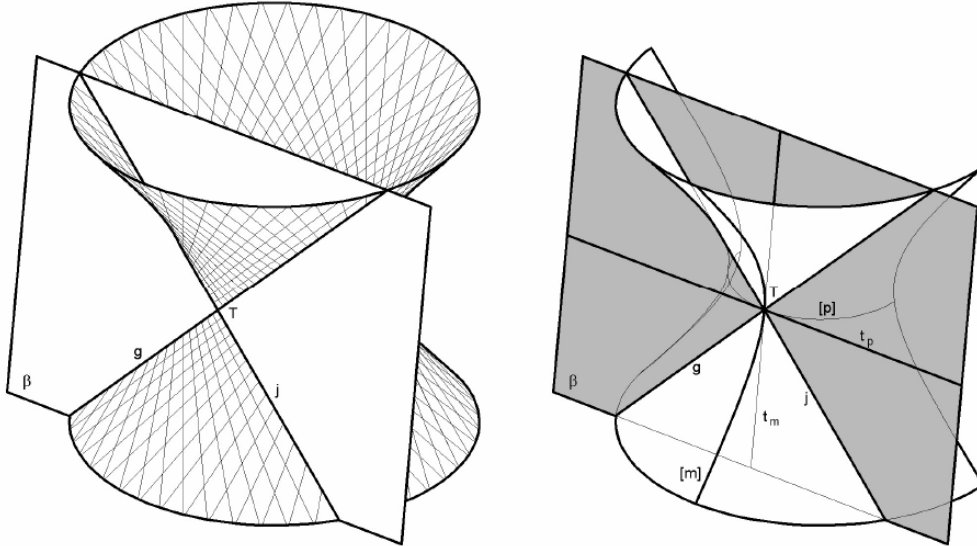
Se os três planos π_A , π_B e π_C forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.

Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Determinar o plano α_T , tangente à superfície $[\delta]$ num ponto T qualquer da geratriz g , consiste em determinar a geratriz j_T (do sistema contrário ao de g e concorrente com g no ponto T) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.

3.2.4.11. Hiperbolóide de revolução (planos tangentes)

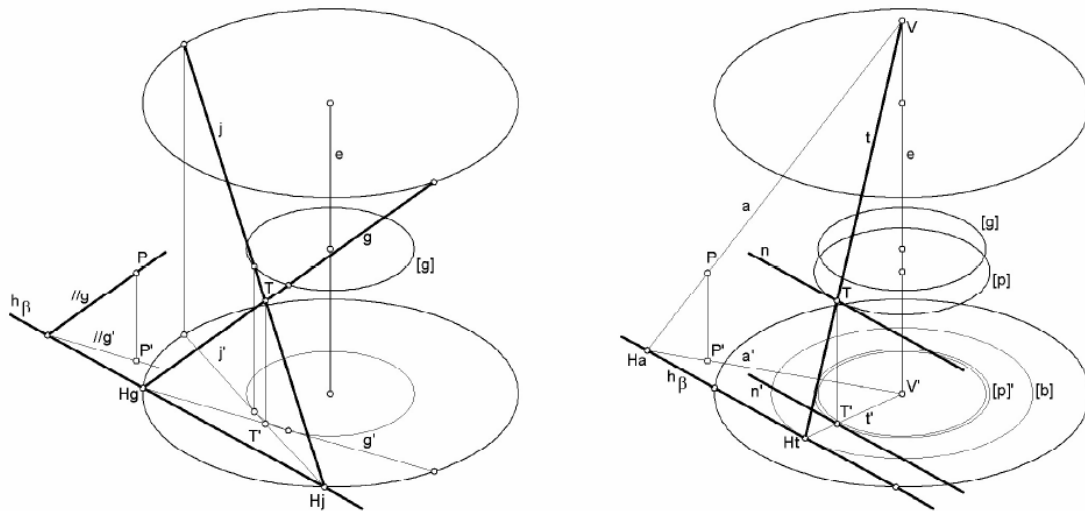
Como a superfície do hiperbolóide de revolução é duplamente regrada, o plano tangente fica definido pelas duas geratrizes, de sistemas contrários, que se intersectam no ponto de tangência.



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO DA SUPERFÍCIE

Figura 78

Porém, tal como para qualquer superfície, o plano pode ser definido por um par de rectas tangentes a duas secções que se cruzam, no ponto de tangência.

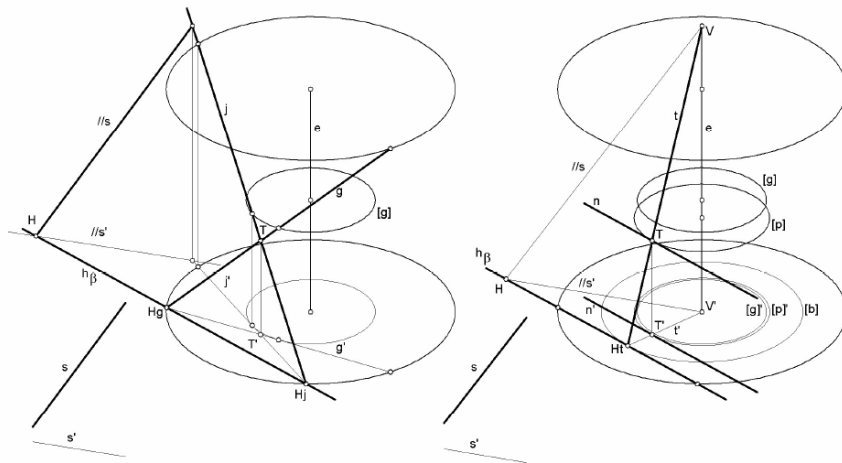


PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR PONTO EXTERIOR

Figura 79

Dado um ponto exterior, é possível conduzir uma infinidade de planos tangentes à superfície. Uma forma de restringir o número de soluções é seleccionar uma linha da superfície (em

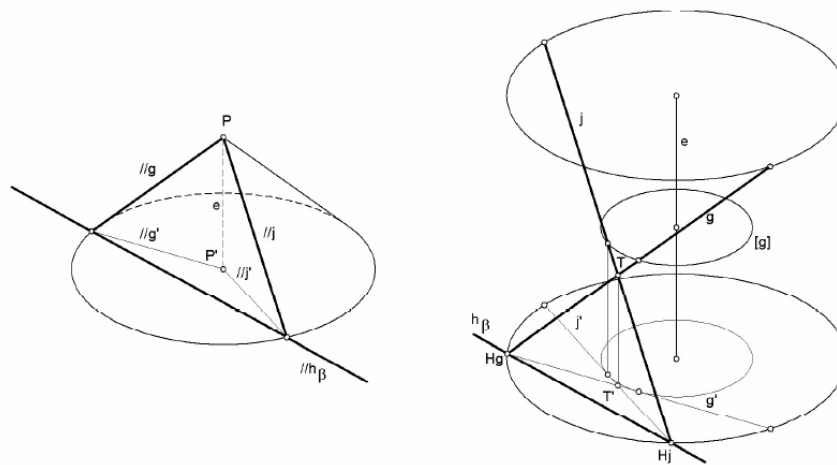
princípio recta) sobre a qual se determina o plano tangente. Deste modo o número de soluções fica restringido a uma na generalidade dos casos.



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

Figura 80

Conduzir o plano tangente paralelo a uma recta implica conduzir por uma geratriz qualquer, de um dos sistemas de geratrizes, uma recta concorrente com a direcção dada. O ponto de tangência determina-se identificando a geratriz do outro sistema contida no plano.

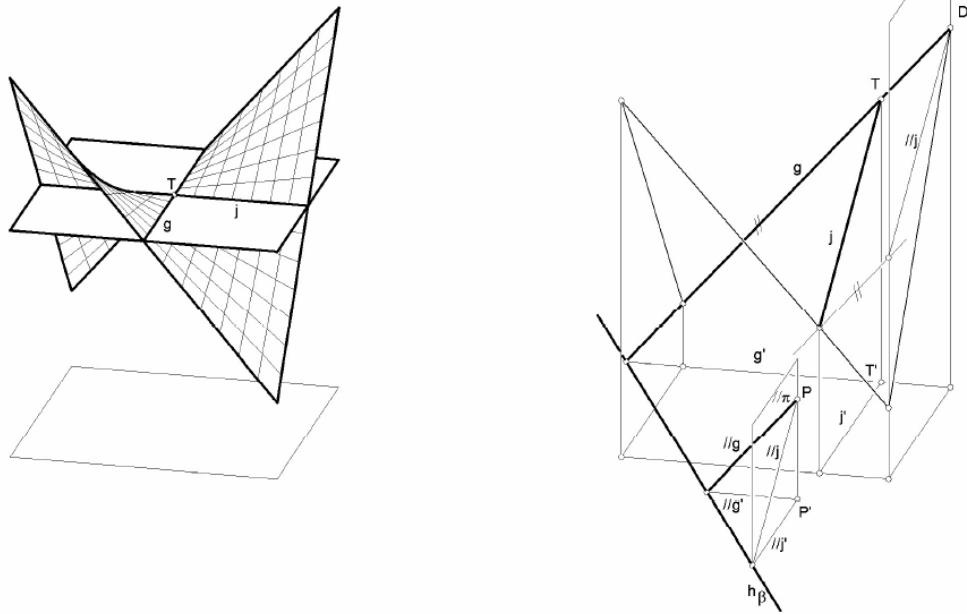


PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Figura 81

Para verificar se é possível conduzir um plano tangente paralelo a um plano dado, verifica-se se existem, num cone director, direcções comuns com o plano. Em caso afirmativo, o plano tangente fica definido pelas duas geratrizes com aquelas direcções, isto é, as geratrizes paralelas ao plano dado.

3.2.4.12. Parabolóide Hiperbólico (planos tangentes)

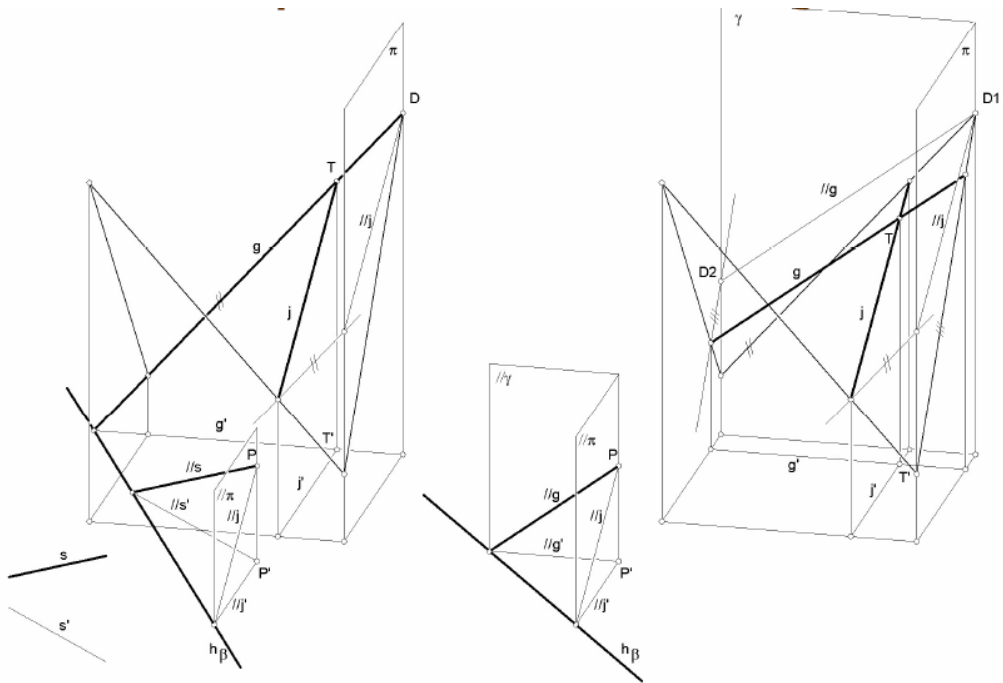


PLANO TANGENTE NUM PONTO DA SUPERFÍCIE

PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO EXTERIOR

Figura 82

Também com o parabolóide hiperbólico, por ser uma superfície duplamente regrada, o plano tangente num ponto da superfície fica definido pelas duas geratrizes de sistemas contrários que se cruzam no ponto de tangência.



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Figura 83

Determinar o plano tangente paralelo a uma recta ou paralelo a um plano dado é em tudo semelhante ao que foi referido para o hiperbolóide regradado. A diferença agora é a necessidade de nos referirmos ao plano director em vez do cone director.

3.2.4.13. Conóide (planos tangentes)

Tal como referido em 3.2.4.8, o plano tangente a uma superfície simplesmente regradada, conduzido por um ponto da superfície, contém a geratriz recta da superfície que passa no ponto. Uma outra recta pode ser obtida através da condução, no ponto em causa, de uma recta tangente a uma curva passante pelo ponto de tangência. Ou, então pode ser determinado, procurando conduzir aquela recta como geratriz de uma superfície duplamente regradada concordante com a superfície inicial, pois como já foi referido, duas superfícies concordantes, partilham os mesmos planos tangentes ao longo da linha de concordância.

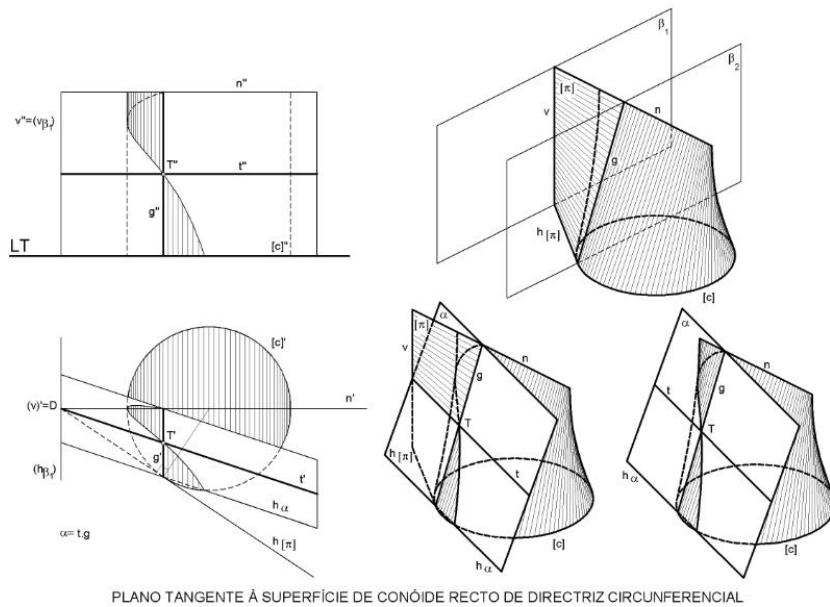
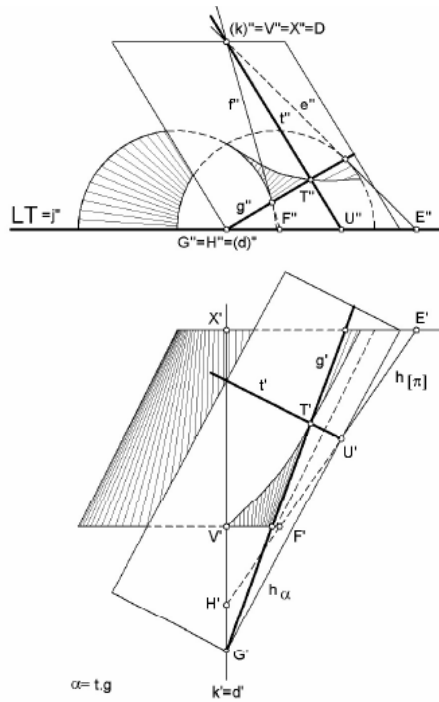


Figura 84

3.2.4.14. Corno de vaca (planos tangentes)

Esta superfície aparece-nos aqui por curiosidade. Com efeito, o modo de a tratar é em tudo idêntico ao caso anterior.



PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DO "CORNO DE VACA"

Figura 85

3.2.4.15. Concordâncias como composição de superfícies

É possível passar suavemente de uma superfície para outra, se elas forem concordantes, isto é, se ao longo da linha comum a ambas, os planos tangentes forem os mesmos. Nas duas figuras dadas abaixo, apresentam-se concordâncias entre várias superfícies e o parabolóide hiperbólico.

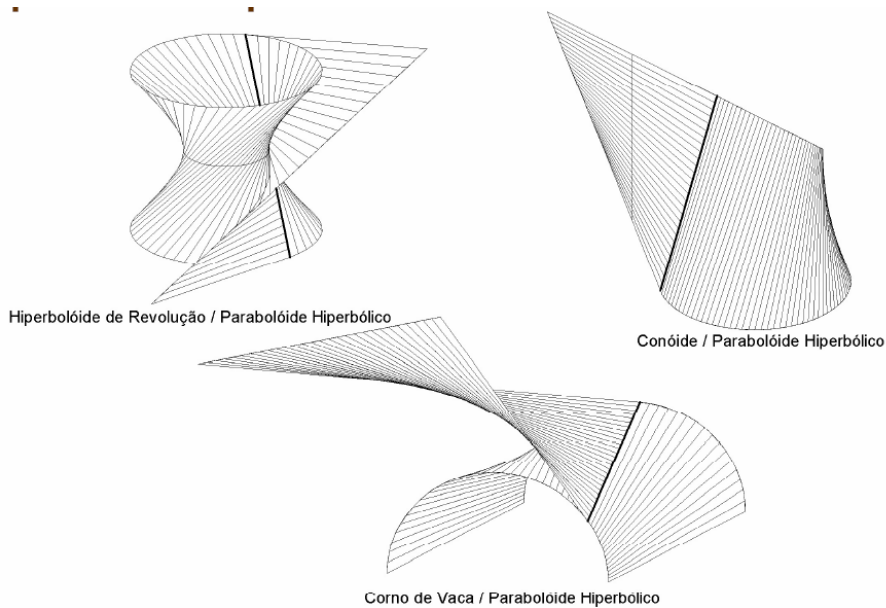


Figura 86

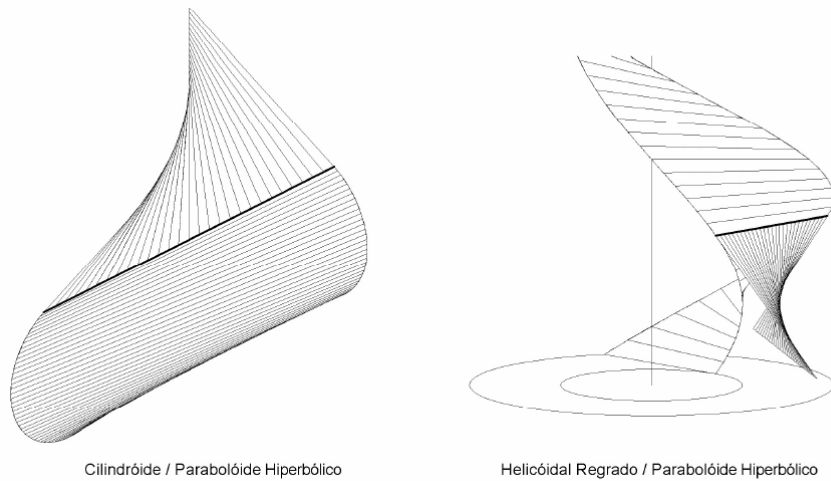


Figura 87

3.2.5. Linhas e Superfícies NURBS no espaço

Tudo aquilo que se referiu relativamente às linhas de Bézier, B-splines e NURBS no plano, pode ser facilmente expandido para o espaço tridimensional. Por exemplo, os segmentos de recta do polígono de controlo de uma curva de Bézier de grau três não têm de estar todos no mesmo plano. E o mesmo se aplica às B-Splines e às NURBS. Esta é uma forma de generalizar a representação de curvas no espaço.

Estas curvas, quer sejam planas ou não, colocadas espacialmente podem servir de directrizes para a geração de superfícies NURBS.

No ponto anterior, descreveu-se toda uma série de superfícies. Curiosamente, provavelmente não se encontrarão muitas delas como primitivas geométricas em muitas ferramentas de modelação 3D. Uma forma de representação daquelas superfícies é por aproximação através de superfícies NURBS. Note-se porém que, as superfícies NURBS, com os pesos adequados atribuídos aos pontos de controlo, permitem representar de forma rigorosa (geometricamente rigorosa) esferas, parabolóides, etc. Nas duas figuras seguintes pode-se observar o efeito de alterar o peso dos vértices da rede de controlo das superfícies.

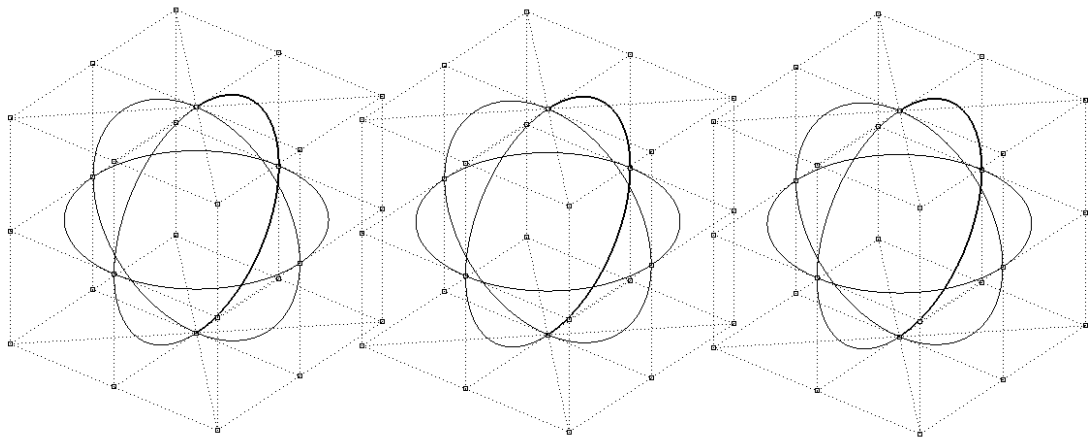


Figura 88

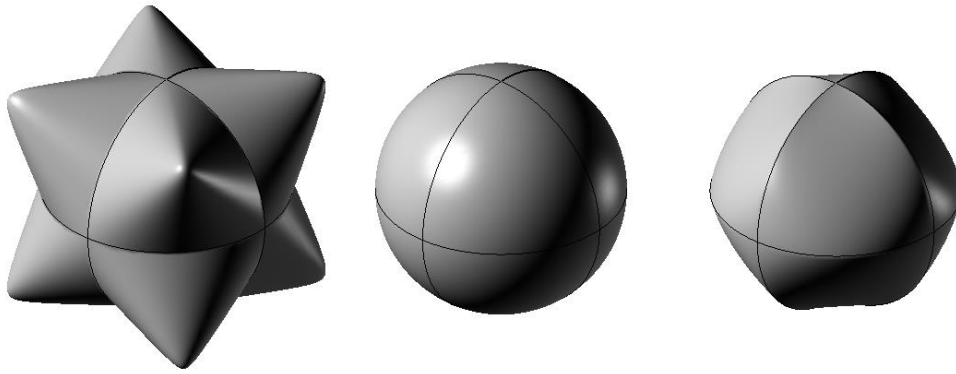


Figura 89

Em relação à figura central (em que se representa uma superfície esférica) foram aumentados os pesos relativos aos vértices do “cubo” de controlo (à esquerda) e diminuídos os pesos dos mesmos vértices (à direita). Isto é possível, porque a superfície está representada como uma NURBS.

Genericamente, uma superfície NURBS fica definida por uma grelha de pontos de controlo, e respectivos pesos associados, e pelo grau (e ordem) das suas geratrizes nas duas direcções paramétricas de desenvolvimento da superfície. Estas duas direcções paramétricas, usualmente notadas pelas letras U e V, podem ser visualmente representadas através de uma grelha de curvas ISOPARAMÉTRICAS.

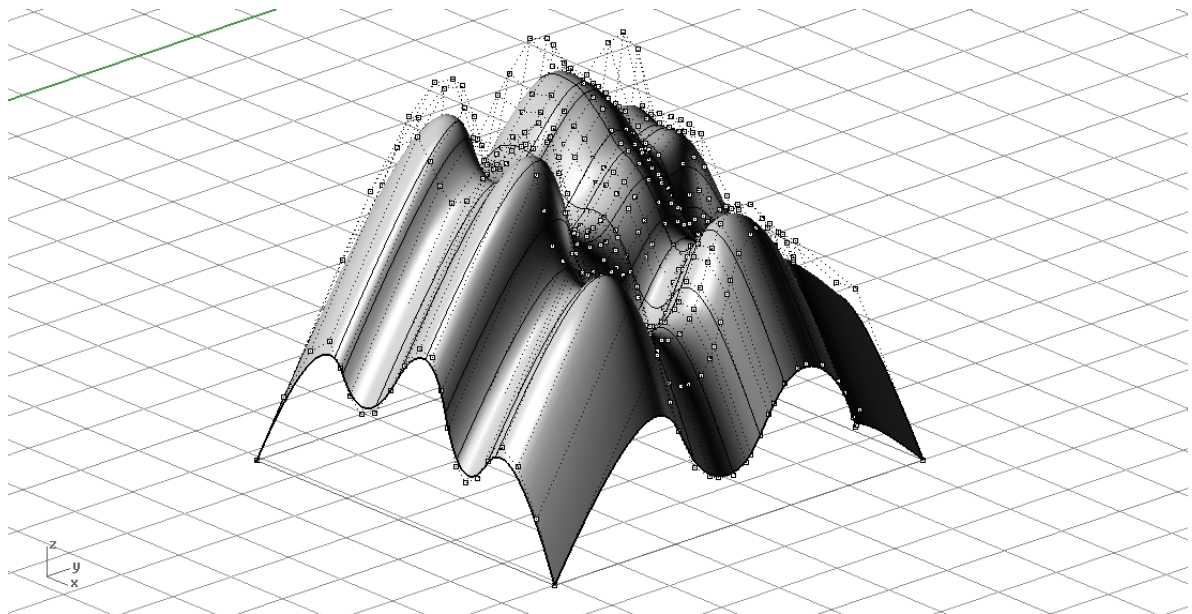


Figura 90

Uma curva isoparamétrica é uma curva que, numa das direcções paramétricas, corresponde a um valor constante de um parâmetro, no espaço paramétrico (que é distinto do espaço geométrico).

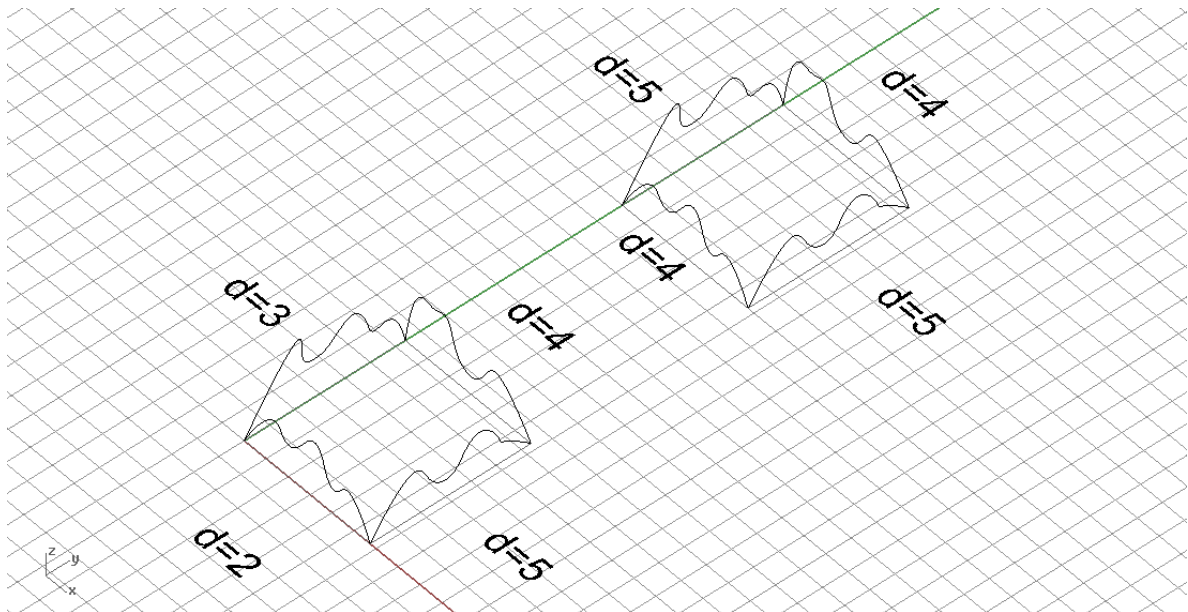


Figura 91

Se uma superfície NURBS for gerada por curvas de graus diferentes numa das direcções paramétricas, em geral é assumido o maior grau para a geração da superfície nessa direcção. Nas duas figuras anteriores, fica ilustrado esse facto. As linhas de entrada para a geração da NURBS tinham grau 2 e 4 numa das direcções paramétricas, e 3 e 5 na outra direcção paramétrica. Assim, na primeira direcção foi assumido o grau 4 para a primeira direcção paramétrica e o grau 5 para a outra direcção paramétrica. Isto deve-se ao facto de ser possível aumentar o grau de uma curva sem lhe alterar a forma, mas não ser possível o contrário.

3.3. Lógicas de geração de superfícies

As lógicas de modelação podem ser variadas.

Neste ponto apresentam-se algumas lógicas de modelação implementadas no *software* Rhinoceros. Porém, outras aplicações podem implementar outras lógicas. Recomenda-se uma leitura cruzada deste ponto com o que está referido nas tabelas das páginas 25 e 37, relativas à classificação de superfícies. As várias lógicas contêm variantes. Aqui apenas se apresentam as ideias gerais procurando transmitir de que modo as funções implementadas naquela aplicação podem ser utilizadas de modo mais ou menos directo para a representação de superfícies.

3.3.1. Polígonos

Os polígonos podem ser gerados de vários modos. Um rectângulo pode ser desenhado através da função *Plane*, um polígono qualquer, de n lados, pode ser gerado definindo as curvas planas que o delimitam (função *PlanarSrf*).

3.3.2. Superfícies de revolução (revolve)

Em relação a este tipo de superfícies, veja-se o que foi dito no parágrafo 3.2.2.

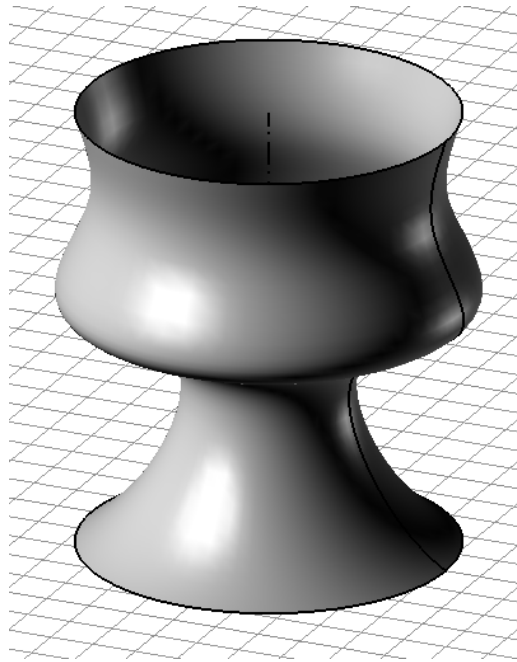


Figura 92

3.3.3. Superfícies de “revolução” (rail revolve)

Estas superfícies baseiam-se na ideia de revolução, porém não são verdadeiramente superfícies de revolução. A geratriz roda em torno de um eixo, no entanto deforma-se nessa rotação em função das distâncias dos pontos de uma nova linha (*rail*) em relação ao eixo. Essas sucessivas deformações são, na prática, transformações afins da geratriz em direcções ortogonais ao eixo.

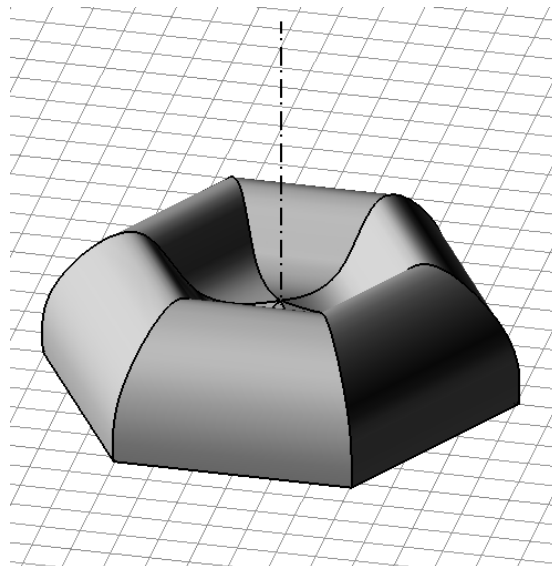


Figura 93

3.3.4. Deslocamento da geratriz apoiada numa directriz (sweep 1 rail)

Estas superfícies baseiam-se no deslocamento da linha geratriz ao longo de uma directriz com a restrição de se manter o ângulo entre ambas em todo o movimento.

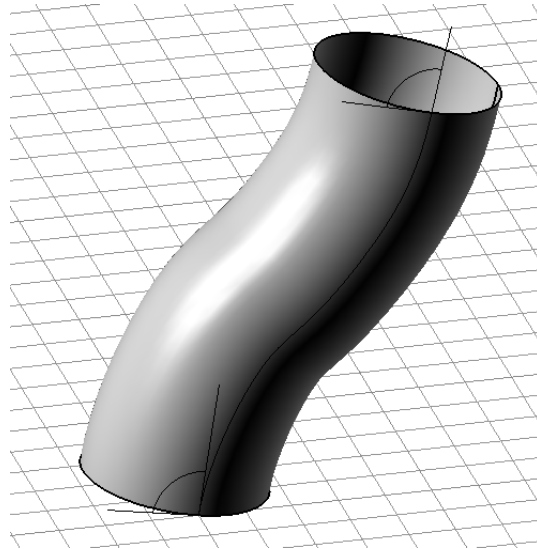


Figura 94

3.3.5. Deslocamento da geratriz apoiada em duas directrizes (sweep 2 rails)

Neste exemplo foram dadas duas directrizes horizontais (*rails*) ao longo das quais a geratriz se moveu, e as posições extremas de uma geratriz, que sendo diferentes, supõem que a geratriz é deformável. No exemplo da figura seguinte, a geratriz começa por ser um arco de semicircunferência para terminar num arco de semi-elipse. Nas posições intermédias, o rácio entre eixo menor e eixo maior vai variando pelas situações intermédias às dos dois extremos das posições da geratriz.

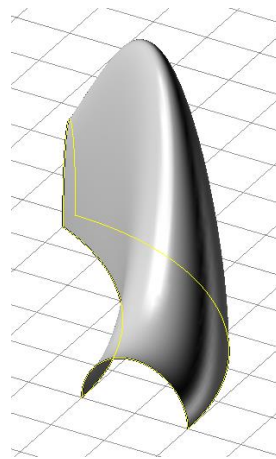


Figura 95

É possível definir mais que duas posições (e geometrias) para a geratriz que condicionarão a geração da superfície de modo a que a elas se adapte.

3.3.6. Superfície gerada por extrusão (extrude)

A ideia base de uma extrusão consiste na definição de uma geratriz que se desloca segundo uma directriz. Neste deslocamento a geratriz mantém a orientação.

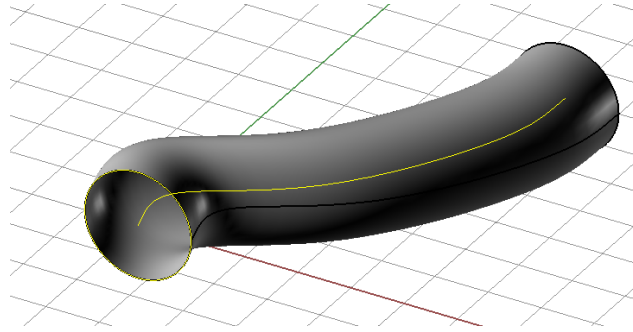


Figura 96

Há no entanto outros tipos de extrusão, podendo a geratriz alterar a sua dimensão e proporções

3.3.7. Superfície gerada por interpolação de sequência de curvas (loft)

Consideradas várias curvas dadas espacialmente numa determinada sequência, a superfície é gerada ajustando-se às mesmas.

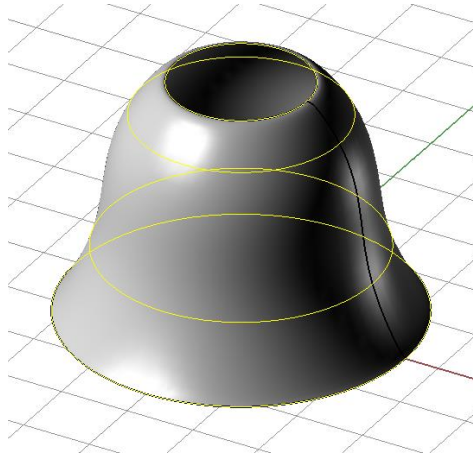


Figura 97

3.3.8. Interpolação de uma rede espacial de curvas (curve network)

À semelhança do caso anterior, a superfície é gerada por interpolação. No entanto, neste caso, é dada uma rede de curvas no espaço que informam sobre o “esqueleto” da superfície.

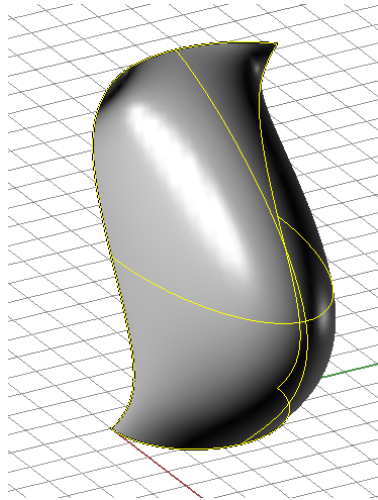


Figura 98

Um modo idêntico de gerar superfícies é através da definição de uma rede espacial de pontos (função *SrtPtGrid*). Cada linha de pontos corresponde, na prática, a uma linha geratriz da superfície numa das direções paramétricas da mesma.

3.3.9. Superfície dados quatro vértices (corner points)

A superfície gerada deste modo é o parabolóide hiperbólico.

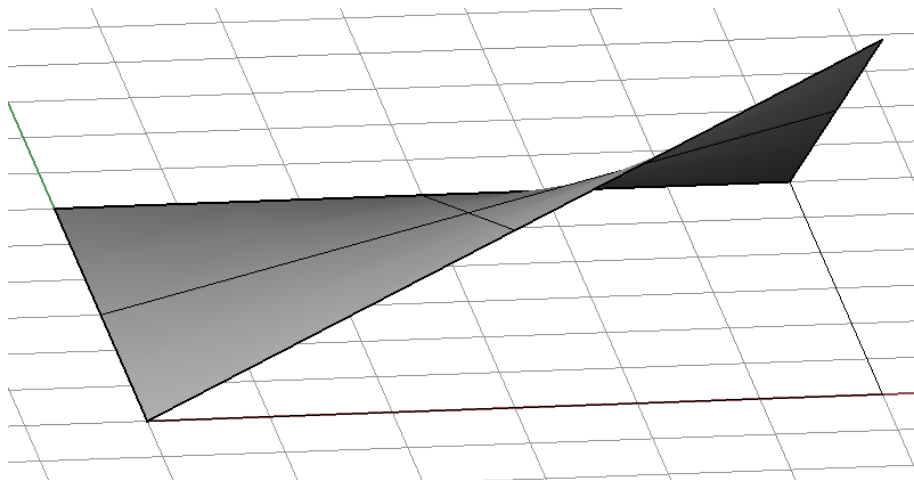


Figura 99

3.3.10. Superfície dadas linhas de contorno (edge curves)

Neste caso, a superfície pode ser definida por 2, 3 ou 4 linhas. Idealmente essas devem linhas do contorno para melhor controlo do resultado

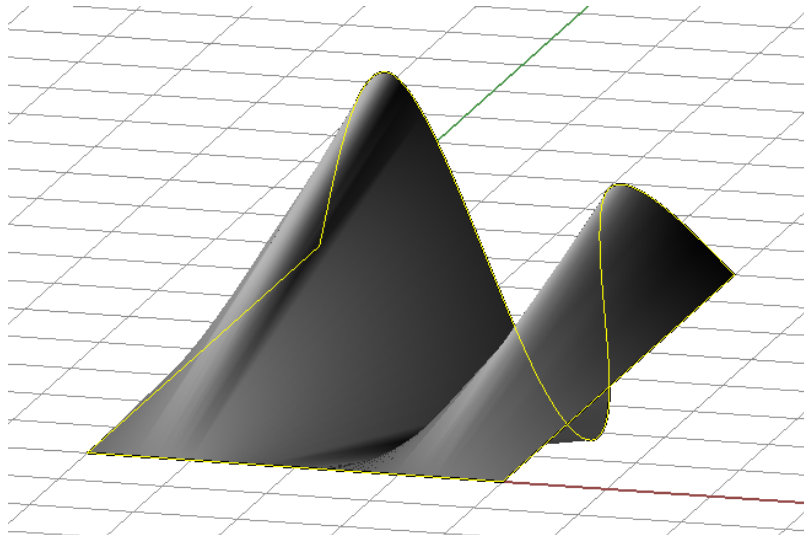


Figura 100

3.3.11. Superfície passante por um conjunto de linhas (patch)

Neste caso, as linhas também podem ser limites de superfícies. E assim sendo, pode ser controlada a tangência relativamente a essas superfícies.

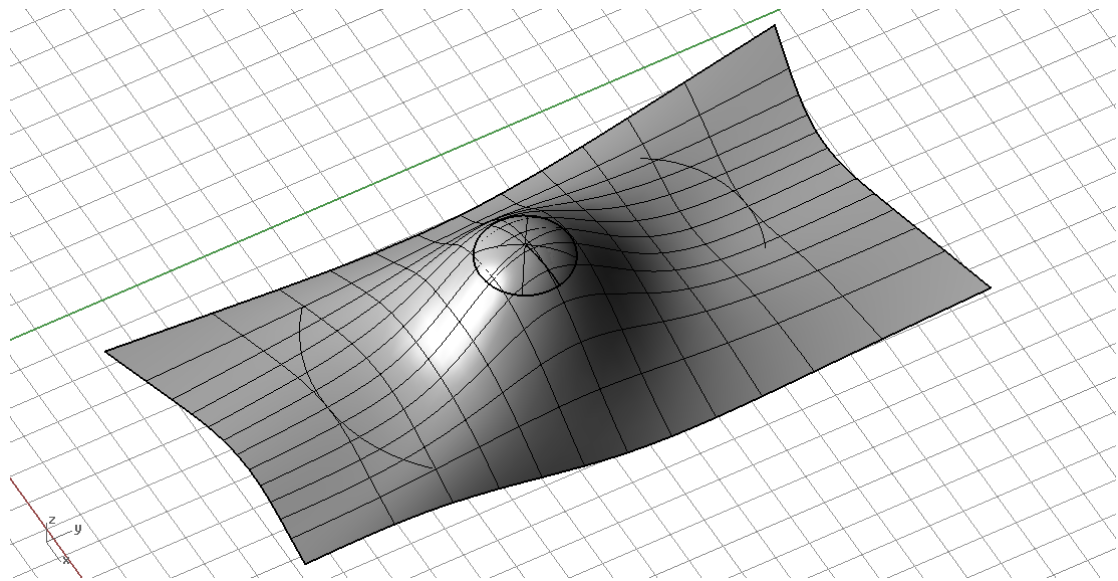


Figura 101

3.3.12. Superfície gerada por panejamento sobre superfícies dadas (drape)

A metáfora para a geração deste tipo de superfície é a de cobrir um conjunto de superfícies dadas com uma nova superfície como se fossem cobertas com um pano ou com uma rede elástica. É importante notar que, no *software Rhinoceros* este tipo de superfície é sempre gerada considerando a vista corrente. É também importante notar que o controlo da profundidade da superfície é função do ponto mais próximo e do ponto mais afastado da câmara na vista corrente.

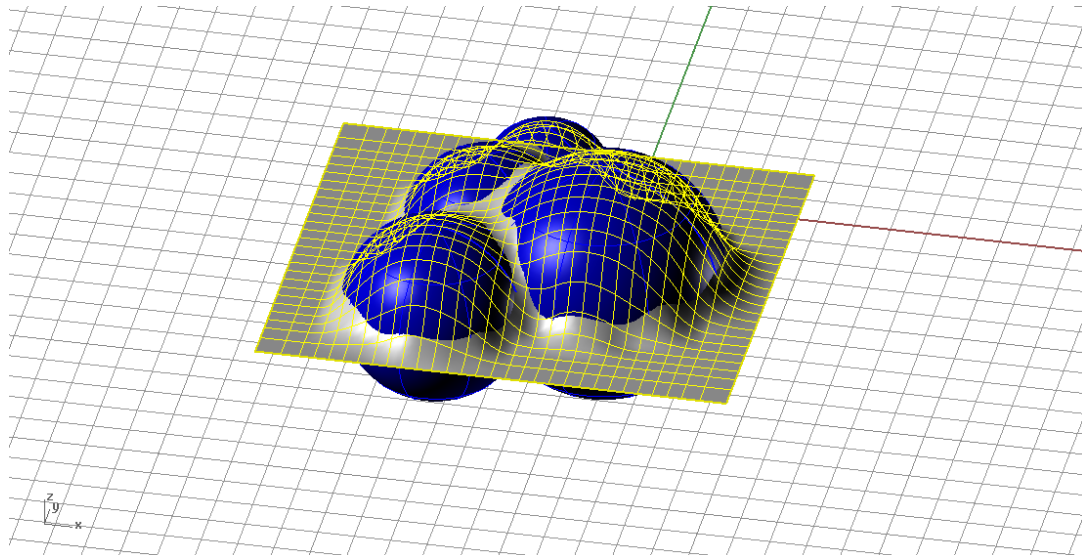


Figura 102

3.3.13. Superfície complexas

Com os recursos dados pela computação, podem ser representadas, no limite, quaisquer superfícies. Através da figura seguinte, ilustra-se como, através da escolha adequada de linhas e pontos como elementos directores, podemos representar um leque alargado de superfícies mais ou menos complexas articuladas de modo a gerar modelos de elevada elaboração.

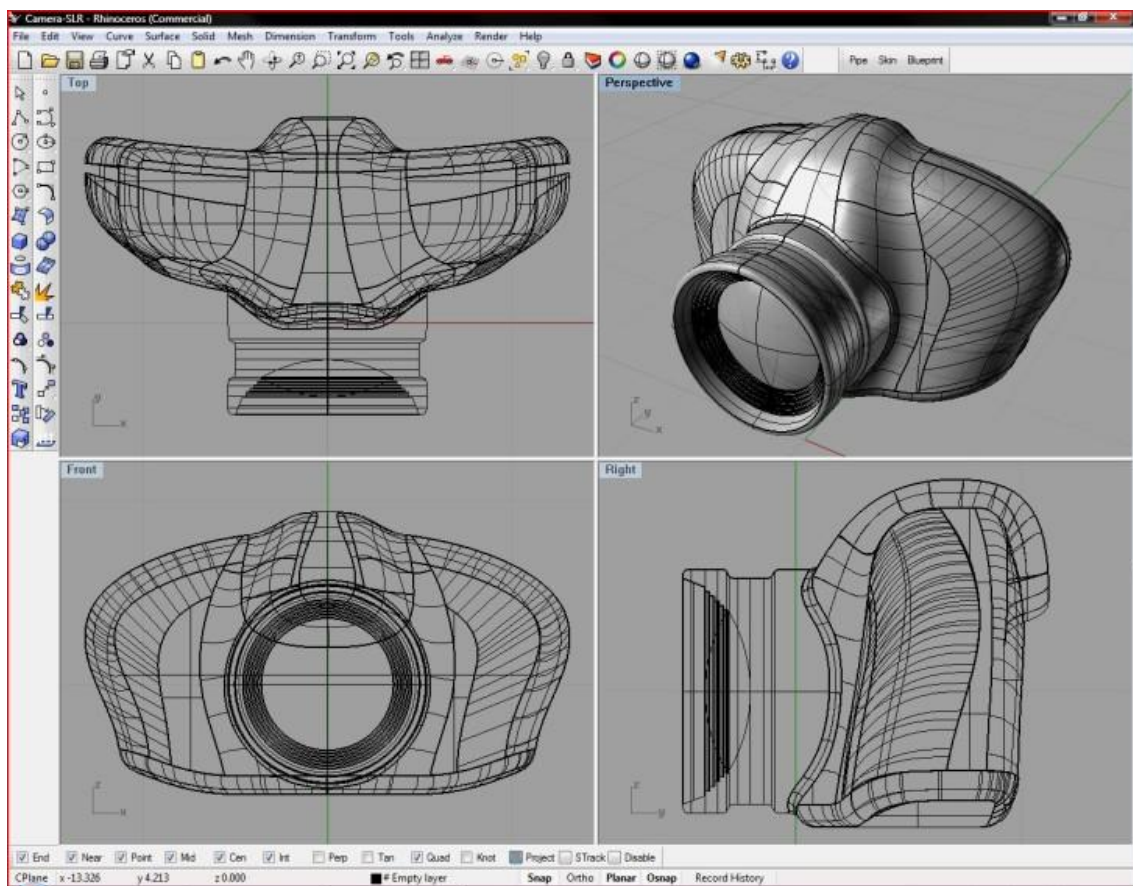


Figura 103 (in <http://www.3dprinter.net/rhino-3d-review>)

3.4. Linhas a partir de superfícies

Se por um lado, as linhas são o que dá origem às superfícies através do seu movimento no espaço, também é facto que podem ser geradas a partir das superfícies.

De uma superfície limitada podem ser extraídos esses limites. De uma superfície NURBS podem ser extraídas linhas isoparamétricas. É possível mapear linhas em superfícies através de diferentes tipos de transformação (projectão paralela, projectão normal à superfície, correspondência paramétrica, etc.).

Porém o modo mais popular de gerar linhas através de superfícies é através da intersecção, conforme se ilustra na figura seguinte.

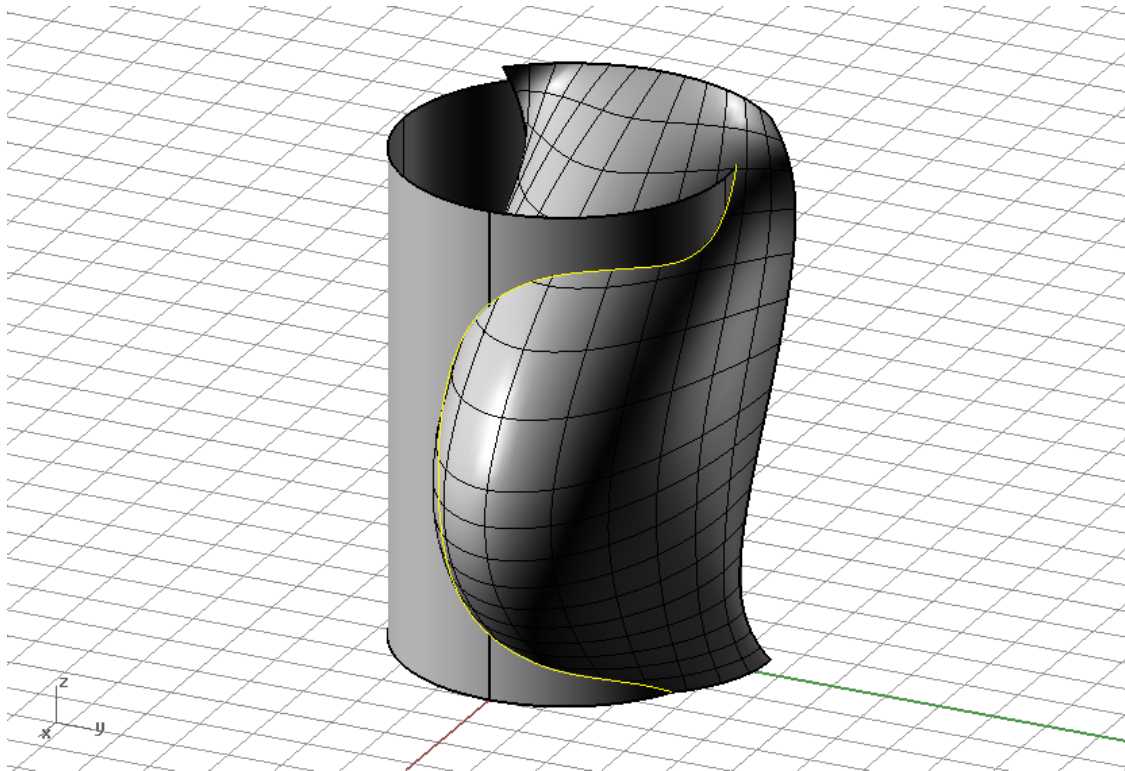


Figura 104

4. SÓLIDOS

Qualquer configuração de superfícies no espaço que encerre um volume, pode ser, conceptualmente associada a um sólido. As arestas desse sólido (não necessariamente rectas) serão as linhas de intersecção das várias superfícies, e estas linhas delimitarão as faces do sólido (não necessariamente planas).

4.1. Operações booleanas entre sólidos

As operações booleanas são de três tipos: a) união, b) subtracção, e c) intersecção.

A operação união corresponde a considerar tudo o que é comum e não comum aos sólidos base.

A operação subtração corresponde à diferença entre os sólidos base, isto é, aquilo que dos vários sólidos base é comum ao primeiro, é subtraído a este.

A operação de intersecção corresponde a considerar apenas a porção de volume comum aos sólidos base.

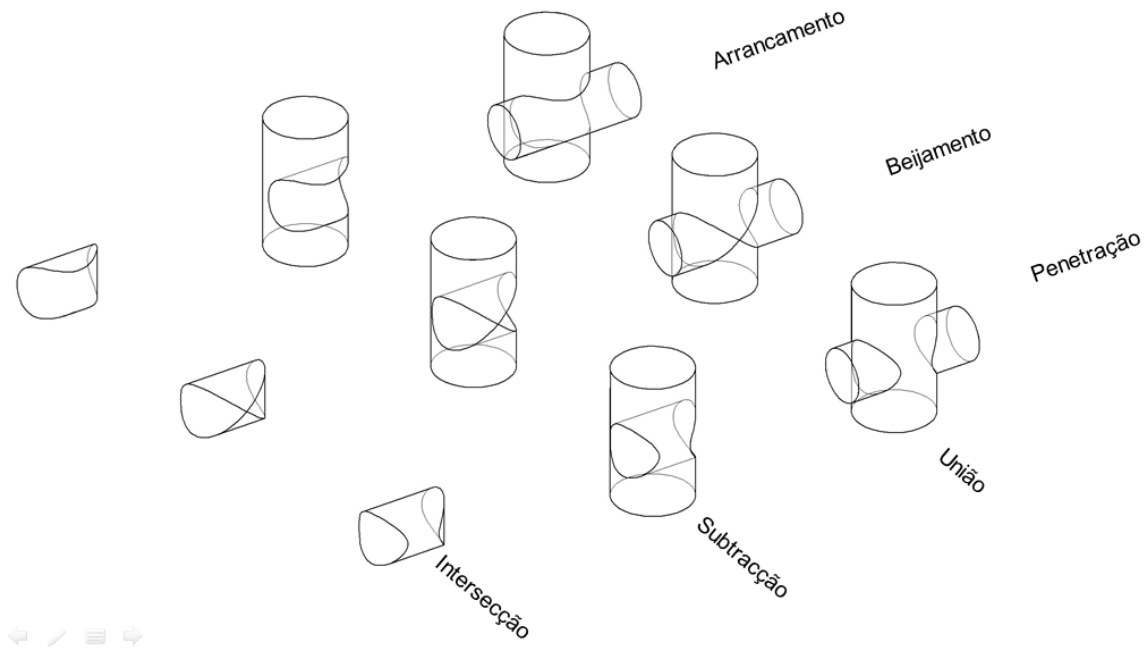


Figura 105

Em todos os casos, as arestas dos sólidos finais resulta sempre da intersecção das superfícies dos sólidos base.

Para além desta classificação das intersecções, é possível considerar outras, em particular no que concerne às características das linhas de intersecção entre as superfícies. Destas interessamos colocar particular relevo numa situação designada por BEIJAMENTO uma vez que o seu controlo é mais exigente. A condição que deve ser cumprida para que exista um ponto duplo na linha de intersecção entre duas superfícies é a de existir um plano tangente comum a ambas.