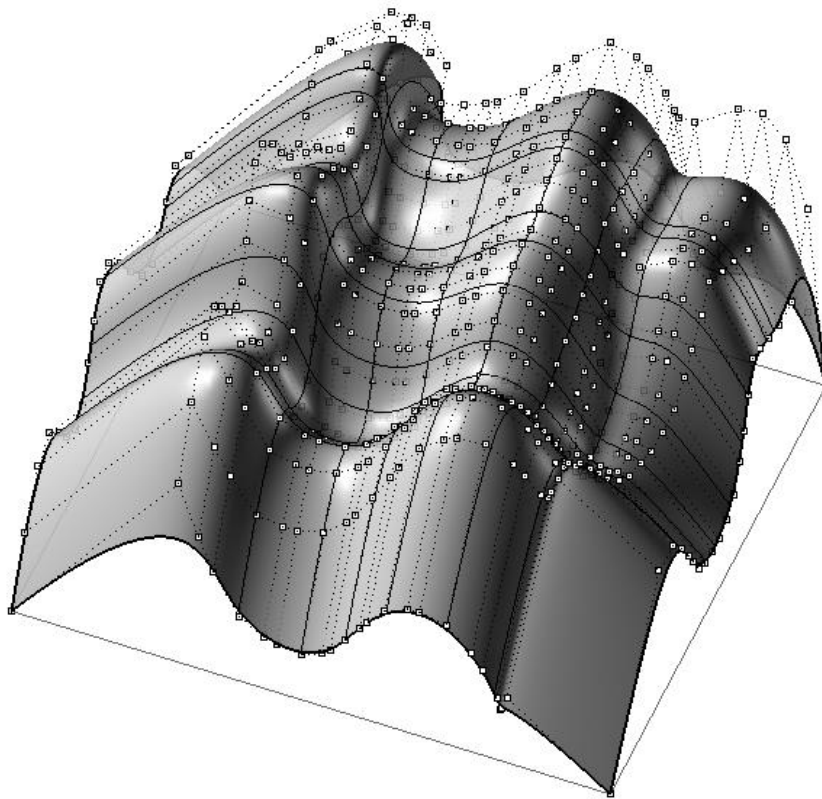


SEBENTA 01

- Linhas e Superfícies -

Texto de apoio à disciplina Modelação Geométrica e Generativa



FA.Ulisboa – Ano lectivo 2015/2016 – 1º semestre

Professor Luís Mateus (lmmateus@fa.ulisboa.pt)

ÍNDICE

1. NOTAS GERAIS SOBRE LINHAS E SUPERFÍCIES	4
2. LINHAS PLANAS	5
2.1. Cónicas	5
2.1.1. Elipse	6
2.1.2. Parábola	7
2.1.3. Hiperbóle	7
2.2. Splines	9
2.2.1. Curva de Bézier	9
2.2.2. B-Splines	11
2.2.3. Linhas NURBS	12
3. LINHAS ESPACIAIS E SUPERFÍCIES	14
3.1. Noções gerais sobre linhas e superfícies	15
3.1.1. Condições de pertença	15
3.1.2. Recta tangente	15
3.1.3. Curvaturas	15
3.1.4. Plano tangente a uma superfície	17
3.1.5. Recta normal e plano normal	17
3.1.6. Curvatura de uma superfície	18
3.1.7. Intersecção de superfícies	19
3.1.8. Recta tangente à linha de intersecção	19
3.1.9. Concordância entre superfícies	20
3.1.10. Contorno aparente	22
3.1.11. Distinção entre superfície e sólido	22
3.2. Classificação de superfícies quanto ao tipo de geratriz	22
3.2.1. Superfícies poliédricas	23
3.2.1.1. Poliedros regulares	23
3.2.1.2. Poliedros semi-regulares	23
3.2.1.3. Poliedros irregulares	24
3.2.2. Superfícies de revolução	25

3.2.2.1.	Superfície esférica	26
3.2.2.2.	Esferóide	26
3.2.2.3.	Superfície tórica	27
3.2.2.4.	Hiperbolóide de revolução de uma folha	28
3.2.2.5.	Hiperbolóide de revolução de duas folhas	28
3.2.2.6.	Hiperbolóide de revolução de duas folhas	29
3.2.3.	Superfícies planificáveis	29
3.2.3.1.	Superfície cônica, cilíndrica, piramidal e prismática	29
3.2.3.2.	Convoluta e Superfície tangencial.....	30
3.2.3.3.	Helicóide tangencial	31
3.2.3.4.	Planificação (método gráfico)	31
3.2.3.5.	Planificação da superfície do cilindro e do cone de revolução	32
3.2.3.6.	Planificação da superfície do cilindro e do cone oblíquo	33
3.2.3.7.	Planificação da superfície do helicóide tangencial.....	34
3.2.4.	Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)	35
3.2.4.1.	Hiperbolóide de revolução de uma folha	37
3.2.4.2.	Hiperbolóide empenado escaleno	39
3.2.4.3.	Parabolóide hiperbólico	40
3.2.4.4.	Helicóides regradados	43
3.2.4.5.	Superfícies de conóide.....	45
3.2.4.6.	Superfícies de cilindróide	46
3.2.4.7.	Superfícies de arco enviesado	47
3.2.4.8.	Plano tangente a uma superfície simplesmente regradada	48
3.2.4.9.	Plano tangente a uma superfície duplamente regradada.....	48
3.2.4.10.	Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz.....	49
3.2.4.11.	Hiperbolóide de revolução (planos tangentes)	51
3.2.4.12.	Parabolóide Hiperbólico (planos tangentes)	53
3.2.4.13.	Conóide (planos tangentes)	54
3.2.4.14.	Corno de vaca (planos tangentes).....	55
3.2.4.15.	Concordâncias.....	56
3.2.5.	Linhas e Superfícies NURBS no espaço	56
3.2.5.1.	Lógicas de geração de superfícies	59

3.3. Linhas a partir de superfícies	65
4. SÓLIDOS	65
4.1. Operações booleanas entre sólidos.....	65

1. NOTAS GERAIS SOBRE LINHAS E SUPERFÍCIES

O PONTO é uma entidade sem dimensão, isto é, adimensional.

A LINHA é uma entidade unidimensional gerada pelo movimento contínuo do ponto.

As linhas podem ser CURVAS ou não curvas; às linhas não curvas dá-se o nome de RECTAS.

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito. A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

A SUPERFÍCIE é uma entidade bidimensional gerada pelo movimento contínuo da linha.

A GERATRIZ é a linha, deformável ou indeformável, que se move no espaço para gerar a superfície.

A DIRECTRIZ é a linha ou superfície em que se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a directriz for uma superfície, então a superfície gerada diz-se de NÚCLEO.

Quando uma geratriz recta se move continuamente no espaço, conservando a direcção, apoiada numa directriz recta com direcção diferente da sua, é gerado o PLANO.

Cada plano tem uma ORIENTAÇÃO; orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si.

Cada plano contém uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito.

A cada orientação de planos corresponde apenas uma recta imprópria, isto é, todos os planos paralelos entre si têm a mesma recta do infinito, daí dizer-se que planos paralelos se intersectam no infinito.

Uma orientação contém uma infinidade de direcções.

O lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as rectas impróprias é o PLANO IMPRÓPRIO, isto é, o plano do infinito.

Quando uma superfície puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é REGRADA.

Quando uma superfície não puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é CURVA.

Por ORDEM¹ de uma superfície entende-se o número máximo de pontos em que uma recta a pode intersectar; o plano é uma superfície de 1ª ordem.

Quando uma superfície regrada pode ser “desenrolada” para um plano, sem provocar “pregas” ou “rasgos” diz-se que a superfície é PLANIFICÁVEL; apenas superfícies regradas podem ser planificáveis, embora nem todas o sejam.

2. LINHAS PLANAS

Não existe um único critério para classificar as linhas planas ou linhas espaciais. Porém, vários critérios podem ser usados de modo a agrupá-las em famílias. Critérios distintos podem levar a que as mesmas linhas fiquem em famílias distintas. Ou um determinado pode levar a que se excluam linhas.

2.1. Cónicas

Uma linha CÓNICA resulta da intersecção produzida por um plano numa superfície cónica (Figura 1) e pode ser representada através de um polinómio do segundo grau²:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

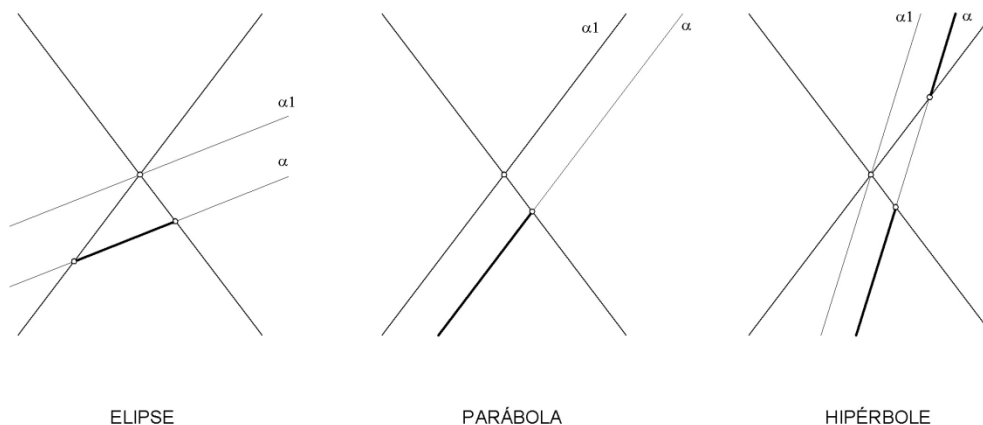


Figura 1

¹ Note-se que este conceito de ordem contraria outro conceito de ordem expresso abaixo neste documento.

² Esta expressão pode ser generalizada para graus superiores dando origem a outros tipos de linhas (cúbicas, quárticas,...).

As linhas cónicas são de três tipos.

2.1.1. Elipse

A elipse (de que a circunferência é um caso particular) fica definida como sendo a curva plana em que todos os pontos cumprem a condição de que suas distâncias somadas a dois pontos fixos chamados focos, é constante.

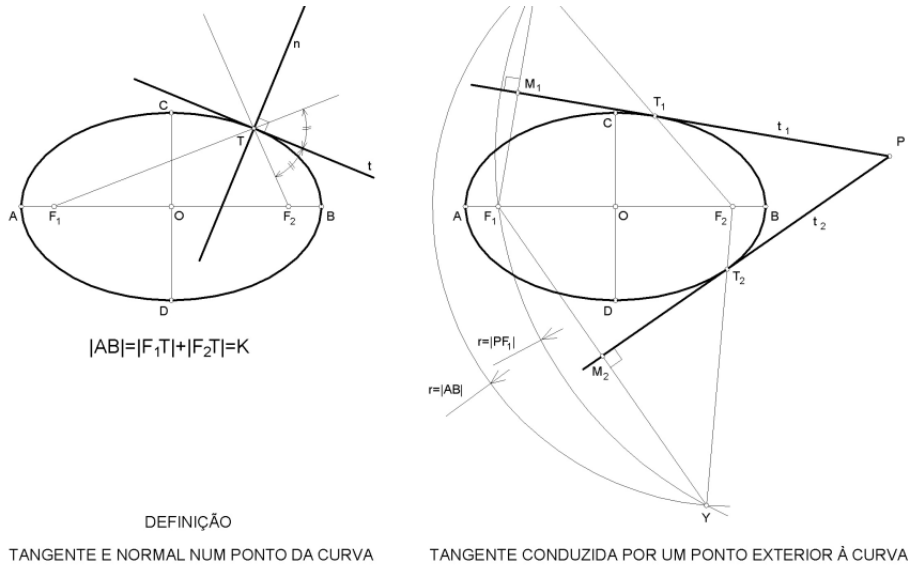


Figura 2

A elipse pode ser obtida por transformação afim de uma circunferência.

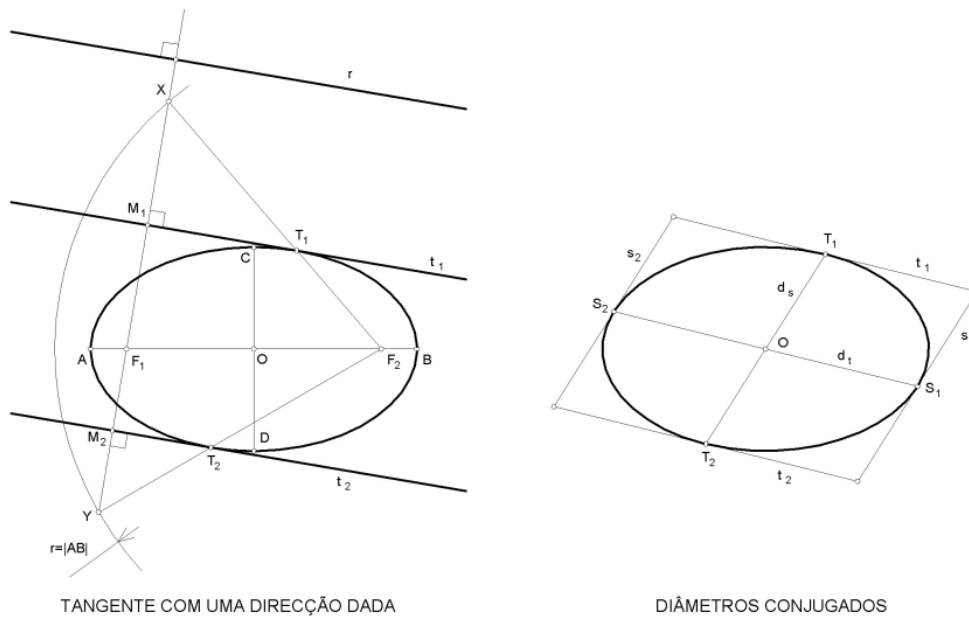


Figura 3

2.1.2. Parábola

A parábola é uma curva plana que fica definida pela condição de que para qualquer ponto da curva, a distância a um ponto fixo, designado foco, e a distância a uma linha fixa, designada directriz, é igual.

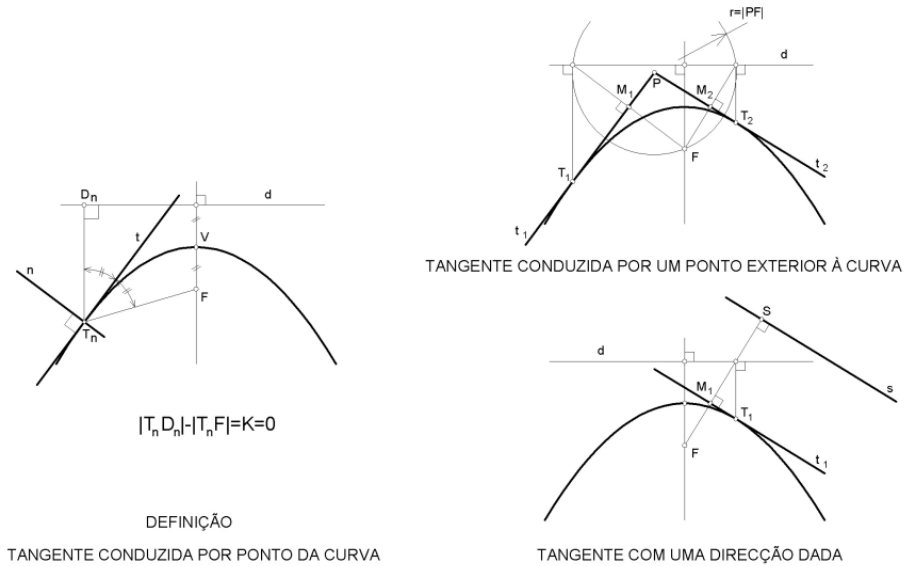


Figura 4

2.1.3. Hiperbóle

A hipérbole é a curva plana que se define de modo semelhante à elipse, porém com a distinção de ser constante a diferença das distâncias aos focos.

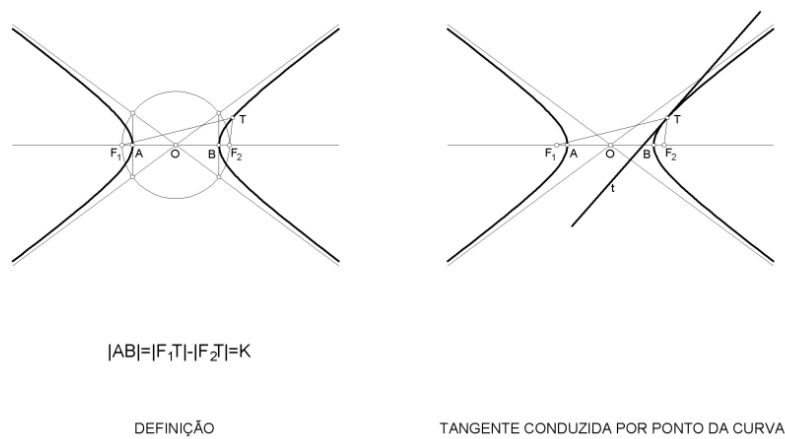
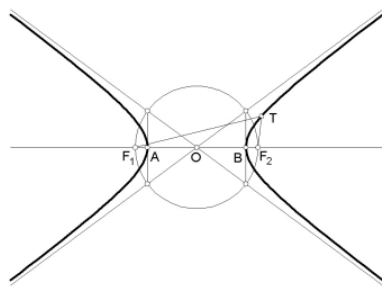
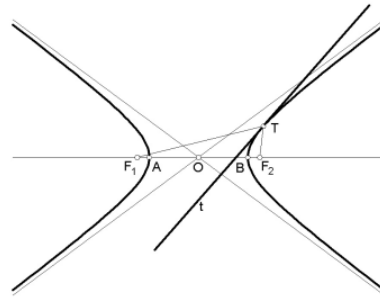


Figura 5



$$|AB| = |F_1T| - |F_2T| = K$$

DEFINIÇÃO



TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA

Figura 6

Do ponto de vista prático, é importante dispor de um tipo de linhas que permita representar aquelas linhas que se podem designar por linhas livres. As linhas livres são aquelas que resultam de um gesto de desenho espontâneo. Estas linhas não têm à partida uma definição geométrica. Porém, ao representá-las num computador, é necessário racionalizá-las de algum modo. A forma mais simples de as racionalizar, embora de resultado prático pouco atractivo, é representá-las através de uma sequência de ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA, como se vê na Figura 7. Este modo de racionalizar uma linha livre é originário do desenho analógico como se compreende pela economia de meios implícita.

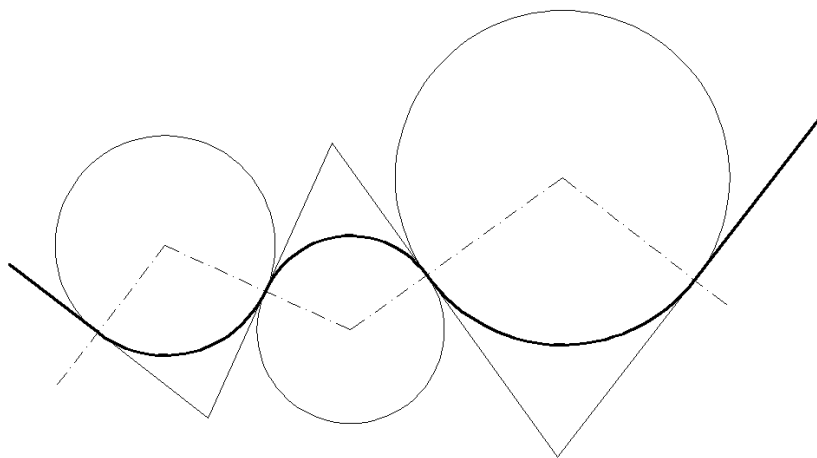


Figura 7

2.2. Splines

Uma forma de designar as linhas de forma livre é utilizando o termo *spline*. Este termo remonta à utilização de tiras de madeira que eram dobradas e curvadas para gerar moldes para a construção aeronáutica³. Em termos geométricos, uma *spline* é uma curva suave baseada na junção de uma ou várias curvas definidas por funções polinomiais que são adjacentes em pontos designados *Internal Knots*⁴ (K). Também se designam por *Knots* os extremos se uma *spline*.

2.2.1. Curva de Bézier

A *spline* mais simples é a CURVA DE BÉZIER⁵. Uma curva de Bézier é uma spline sem *Internal Knots*. Uma curva de Bézier é definida através de *control points* (C) que estão numa relação precisa com o grau (D) da mesma:

$$C = D + 1 \quad (2)$$

Numa curva de Bézier, o número de pontos de controlo coincide com a *ordem* (O) da curva. Generalizando, a ordem (O) é sempre igual a:

$$O = D + 1 \quad (3)$$

Na Figura 8 temos 3 curvas de Bézier, de grau 2, 3 e 4, da esquerda para a direita, respectivamente. Note-se que uma curva de Bézier de grau 1 não é mais que um SEGMENTO DE RECTA.

³ Consulte-se o artigo da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Spline_%28mathematics%29).

⁴ Não se deve confundir a designação *Knot* referida aos pontos em que as várias curvas polinomiais são adjacentes (estes são os nós geométricos, que incluem os *endpoints* da spline; os pontos de adjacência entre curvas polinomiais designam-se por *internal Knots*) com os elementos do designado *Knot vector* (que correspondem a valores no espaço paramétrico). Por exemplo, quando se fala em espaçamento uniforme de *Knots*, na designação de B-Splines uniformes, está-se a fazer referência ao espaçamento no espaço paramétrico e não no espaço geométrico. A este respeito veja-se o artigo sobre B-Splines na Wolfram MathWorld (<http://mathworld.wolfram.com/B-Spline.html>).

⁵ Consulte-se o artigo da Wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve).

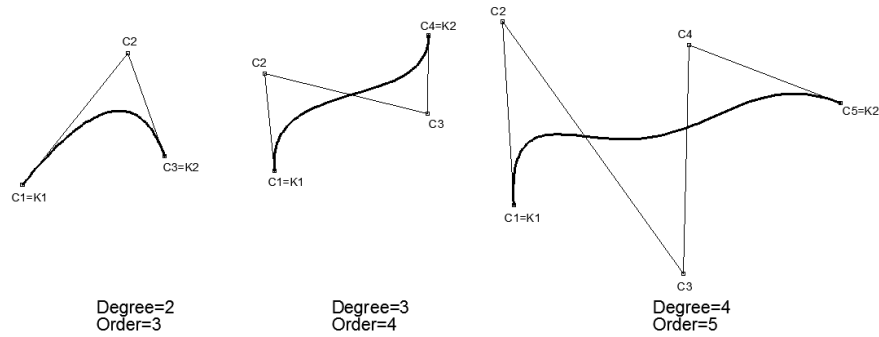


Figura 8

Um aspecto interessante a notar é que uma de Bézier de grau 2 é que se trata de uma parábola, ou seja, é um caso particular de uma linha cónica. Outro aspecto interessante a notar acerca do grau da curva de Bézier é que também está em relação com o número de inflexões possíveis na mesma. Assim, o número de inflexões (I) possíveis é igual a:

$$I = D - 2 \quad (4)$$

É importante notar que uma curva de Bézier não pode ser utilizada para a representação de cónicas em geral.

O algoritmo de De Casteljaou permite compreender a construção gráfica de uma curva de Bézier seja qual for o seu grau. Na Figura 9 pode perceber-se a lógica da construção gráfica de uma curva de Bézier de grau 3. É importante perceber que esta lógica pode ser generalizada para qualquer grau.

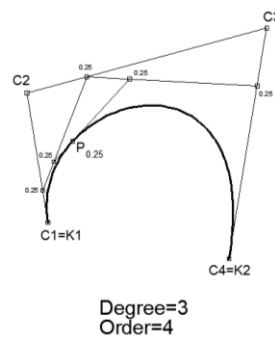


Figura 9

A figura ilustra a construção de um ponto dado pelo parâmetro 0.25. O intervalo de parâmetros para a construção da curva de Bézier é, neste caso dado pelo intervalo $[0,1]$. O ponto de parâmetro 0 é o ponto K1 e o ponto de parâmetro 1 é ponto K2. Como o grau é 3, o algoritmo

implica 3 níveis de subdivisão para a construção de pontos da curva. O número de níveis de subdivisão é igual ao grau da curva.

2.2.2. B-Splines

Uma forma de expandir a utilização das curvas de Bézier é através da utilização de B-SPLINES (Basis Spline). Uma B-Spline é, na prática um arranjo de curvas de Bézier que transitam entre si de forma suave. Dito de outro modo, nos pontos de transição (*Internal Knots*) partilham as mesmas rectas tangentes. Uma B-Spline pode ser definida de dois modos: através de *control points* ou através de *fit points*. Quando uma B-Spline é definida através de *control points*, à excepção do primeiro e último pontos, a curva não passa por aqueles pontos. Quando é definida através de *fit points* a curva passa por aqueles pontos. Note-se que os *fit points* não são necessariamente os *internal knots*. Na prática, as B-Splines dão-nos uma modo de construir curvas de Bézier que se articulam entre si de um modo suave. As B-Splines contêm *Internal Knots*, isto é, pontos em que duas curvas de Bézier contactam. Se uma B-Spline contiver um *Internal Knot* quer dizer que é composta por duas curvas de Bézier, e assim sucessivamente. As B-spline podem dividir-se em PERIÓDICAS e NÃO PERIÓDICAS. Uma B-spline periódica é fechada e não contém vértices (*kinks*). Na Figura 10 podemos observar uma B-Spline de grau 4, periódica, com 8 pontos de controlo e 8 *Internal Knots* (à esquerda) e uma B-Spline de grau 4, não periódica, com 8 pontos de controlo e 5 *Internal Knots* (à direita).

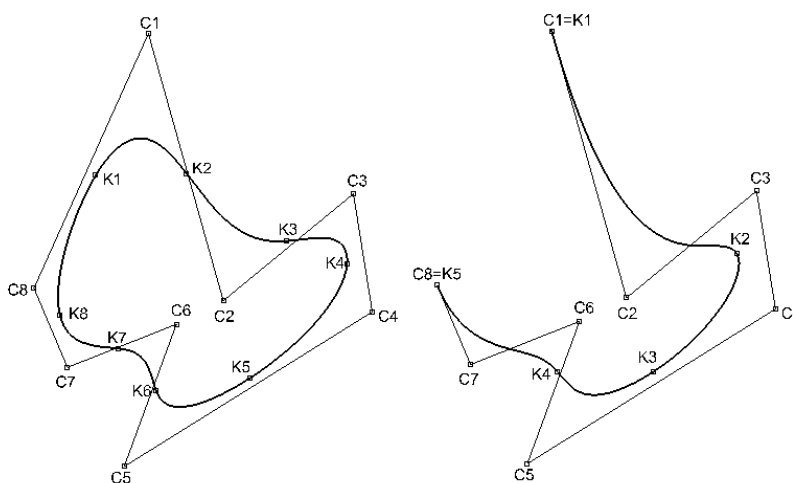


Figura 10

Outra propriedade das B-Splines, que também corresponde a uma forma de controlo das mesmas, é o já referido *Knot vector*. O *Knot vector* é um conjunto de valores dados por ordem não

decrecente que, na prática, são parâmetros para a definição da curva. Se a distância (no espaço paramétrico) entre elementos consecutivos no *Knot vector* for igual, a *B-Spline* diz-se UNIFORME, caso contrário, diz-se NÃO UNIFORME. A maior parte das ferramentas de *software* dão poucos ou nenhuns meios de controlo sobre o *Knot vector*. Dependendo da forma de definir o *Knot vector*, este pode ter o seguinte número (N) de elementos:

$$N = C + O \quad \text{ou} \quad N = C + O - 2 \quad (5)$$

A título de curiosidade, o *Knot vector* de uma B-Spline no *software* AutoCad é da forma mais longa (C+O) e no *software* Rhinoceros é da forma mais curta (C+O-2).

Tanto as curvas de Bézier como a sua generalização dada pelas B-Splines são INVARIANTES SOB A TRANSFORMAÇÃO AFIM, isto é, se sujeitarmos os pontos de controlo de uma B-Spline a uma transformação afim, os pontos afins são pontos de controlo de uma B-Spline afim da primeira conforme se ilustra na Figura 11.

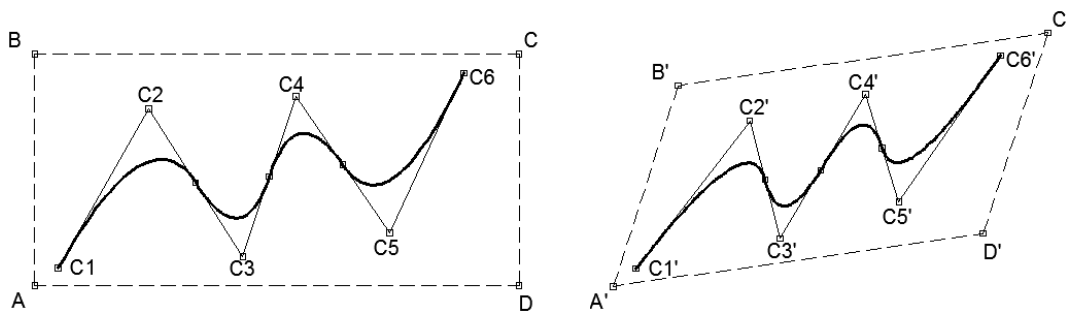


Figura 11

Recorde-se que uma transformação afim transforma um paralelogramo [ABCD] noutra paralelogramo [A'B'C'D'].

2.2.3. Linhas NURBS

Porém as B-Splines não são invariantes sob a TRANSFORMAÇÃO PROJECTIVA. Isto é, se sujeitarmos os pontos de controlo de uma B-Spline a uma transformação projectiva, os pontos homólogos são pontos de controlo de uma B-Spline não homóloga da primeira conforme se ilustra na Figura 12.

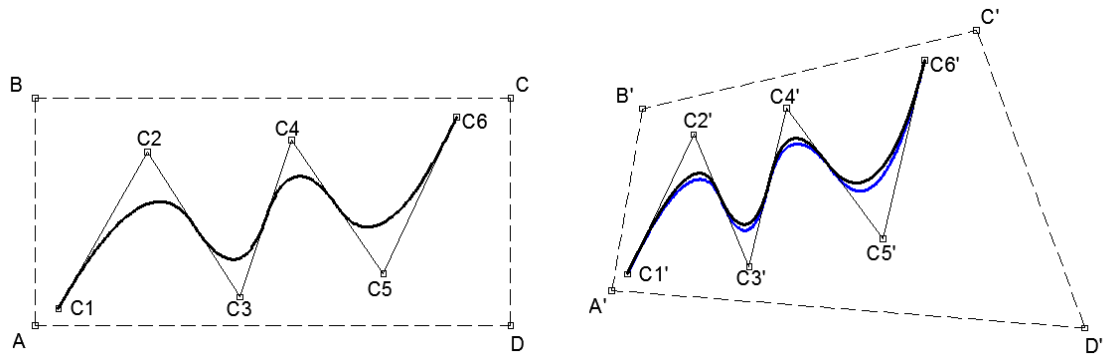


Figura 12

Recorde-se que uma transformação projectiva transforma um quadrilátero $[ABCD]$ qualquer noutro quadrilátero $[A'B'C'D']$ qualquer. Na transformação ilustrada na Figura 12 os pontos homólogos dos pontos de controlo puderam ser usados como pontos de controlo de uma nova B-Spline (a azul na figura da direita). Porém esta linha não corresponde a transformação projectiva da B-Spline dada na figura da esquerda. A curva transformada é a curva a preto na figura da direita.

Que linha é esta?

Esta nova linha designa-se por NURBS (Non-Uniform Rational Basis Spline). Na prática uma B-Spline é uma NURBS IRRACIONAL. O novo parâmetro que é introduzido na curva NURBS é a definição de um peso (*weight*) aos pontos de controlo que tem por efeito atrair a curva para a proximidade desse ponto em função do maior ou menor valor que lhe estiver associado. Numa B-Spline Irracional, todos os pesos têm o valor 1. Numa NURBS, os pesos podem ser distintos de 1. Se o peso de um ponto de controlo for maior que 1, a curva é atraída para o ponto de controlo. Se o peso de um ponto de controlo é menor que 1, a curva é afastada do ponto de controlo. Pode observar-se este efeito na Figura 13. Nesta figura, a preto está desenhada uma B-Spline de grau 3. Ao alterar o peso do ponto de controlo C_6 , verificou-se um efeito sobre os *Internal Knots* que estavam sobre efeito daquele ponto de controlo. Note-se o facto interessante de que os *Internal Knots* se deslocaram na direcção do ponto de controlo; aproximaram-se quando o peso foi definido com valor superior a 1 e afastaram-se quando o peso foi definido com valor inferior a 1.

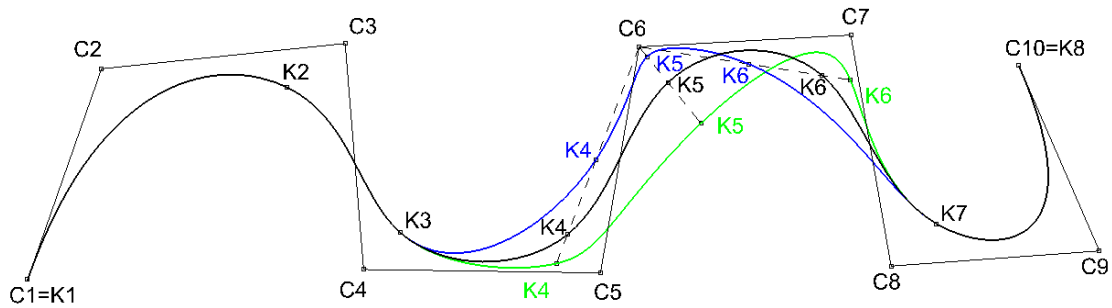


Figura 13

Uma vez que apenas se alterou o peso de um ponto de controlo, os *Internal Knots* por ele influenciados deslocaram-se numa linha recta. Porém, se alterarmos o peso em mais que um ponto de controlo, o efeito de atracção é combinado, conforme se observa na Figura 14.

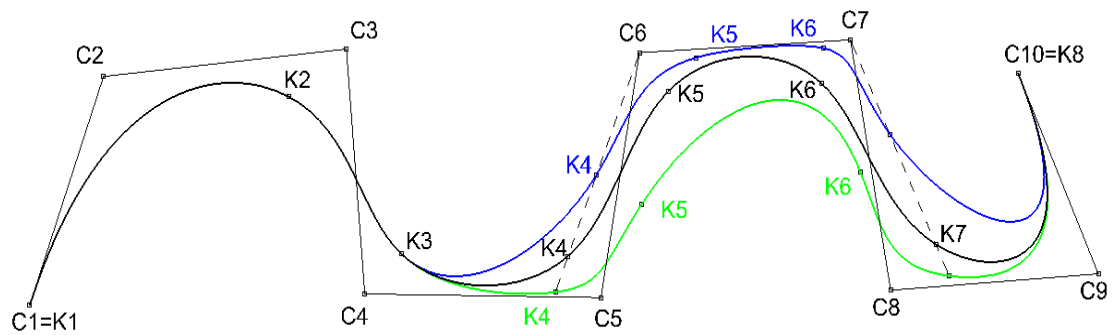


Figura 14

Um aspecto muito interessante acerca das NURBS é que, considerando o grau 2, e com a escolha adequada de pesos, estas podem representar qualquer linha cónica. Por isso, curiosamente, a configuração que ilustrámos na Figura 7 é uma caso particular de uma linha NURBS.

3. LINHAS ESPACIAIS E SUPERFÍCIES

Uma linha espacial é uma linha que não está contida num plano.

Uma superfície pode ser conceptualmente definida como o movimento contínuo de uma linha no espaço, deformável ou não, sujeita a uma determinada lei. À semelhança do que foi referido para as linhas, também não existe um único critério de classificação das superfícies.

Uma linha pode resultar da intersecção de duas superfícies. Neste caso, será geralmente uma linha espacial. No entanto, em casos particulares poderá ser uma linha plana.

3.1. Noções gerais sobre linhas e superfícies

3.1.1. Condições de pertença

Se o ponto P pertencer à linha $[d]$ e a linha $[d]$ pertencer à superfície $[\alpha]$, então o ponto P pertence à superfície $[\alpha]$.

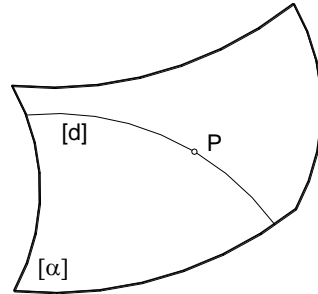


Figura 15

3.1.2. Recta tangente

O ponto A pertence à linha $[m]$ e a linha $[m]$ pertence à superfície $[\alpha]$.

A recta t_A , tangente à linha $[m]$ no ponto A , é a posição limite da recta secante s , quando o ponto X tende para o ponto A .

Se a recta t_A é tangente à linha $[m]$, é também tangente à superfície $[\alpha]$.

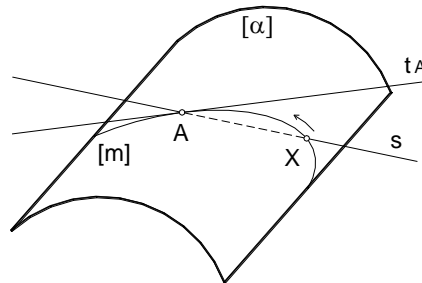


Figura 16

3.1.3. Curvaturas

Uma linha curva plana está sempre contida num plano. À excepção da circunferência, a CURVATURA das linhas varia. A curvatura de uma linha num ponto é o inverso do RAIIO DE CURVATURA da linha nesse mesmo ponto. E o raio de curvatura da linha num ponto é o raio da CIRCUNFERÊNCIA OSCULADORA à curva naquele ponto. O centro desta, o ponto C na figura

abaixo, pode ser considerado como a posição limite da intersecção de duas rectas normais à curva quando o arco, definido pelos pontos comuns à curva e às normais, tende para zero, conforme se ilustra na figura seguinte.

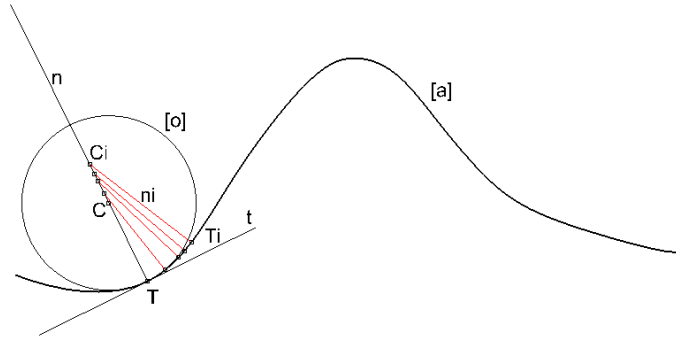


Figura 17

Na figura, às rectas t e n pode ser associado uma sistema de coordenadas rectangular, de origem em T que, como a curva é plana, está contido no plano da mesma. O terceiro eixo deste sistema de coordenadas, é uma recta passante pelo ponto T que é simultaneamente perpendicular às rectas t e n , e que se designa por recta BI-NORMAL à curva em T .

Estes conceitos podem ser estendidos às CURVAS TORSAS, isto é, às curvas não planas.

Dois pontos infinitamente próximos de um ponto T , numa curva torsa, definem um PLANO OSCULADOR, que contém a circunferência osculadora, a recta tangente à curva e a recta normal à curva no ponto T . Da mesma forma, a recta bi-normal passa por T e é perpendicular ao plano da circunferência osculadora.

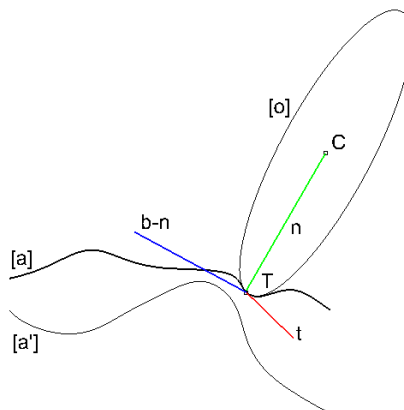


Figura 18

3.1.4. Plano tangente a uma superfície

Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas, pertencentes à superfície $[\alpha]$, concorrentes no ponto P .

Sejam t_a e t_b as rectas tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, no ponto P .

O plano ε , definido pelas rectas t_a e t_b , é o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

O plano ε é o lugar geométrico de todas as rectas tangentes à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Do plano tangente a uma superfície diz-se que é OSCULANTE.

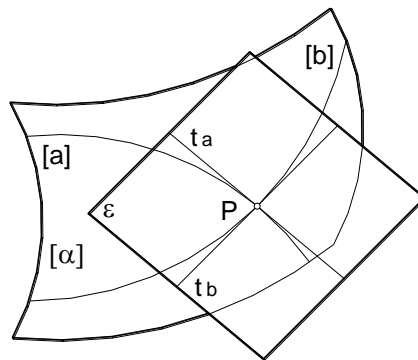


Figura 19

3.1.5. Recta normal e plano normal

Seja ε o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja n uma recta perpendicular ao plano ε no ponto P .

A recta n diz-se NORMAL à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

De um plano que contenha a recta n diz-se que é normal à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

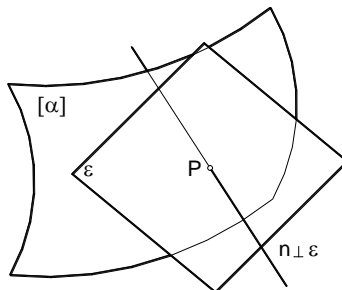


Figura 20

3.1.6. Curvatura de uma superfície

Seja n uma recta normal à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Sejam π e β planos normais à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja $[c]$ (resultado da intersecção do plano π com a superfície $[\alpha]$) a linha de maior curvatura superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja $[d]$ (resultado da intersecção do plano β com a superfície $[\alpha]$) a linha de menor curvatura da superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Verifica-se que os planos que contêm as linhas de curvatura máxima e mínima num ponto são perpendiculares entre si.

A curvatura média da superfície $[\alpha]$ no ponto P é a média das curvaturas máxima e mínima.

A curvatura Gaussiana da superfície $[\alpha]$ no ponto P é o produto da curvatura máxima e mínima.

Uma superfície planificável tem curvatura Gaussiana igual a zero em todos os seus pontos.

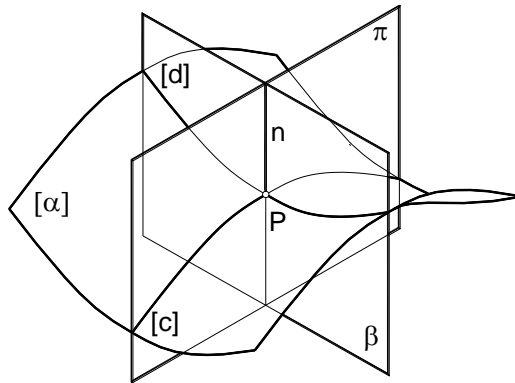


Figura 21

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P a dividir em quatro regiões, duas “para cima” do plano e duas “para baixo”, então a superfície é de DUPLA CURVATURA DE SENTIDOS OPOSTOS no ponto P .

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P apenas contiver P na sua vizinhança, então a superfície é de DUPLA CURVATURA COM O MESMO SENTIDO no ponto P .

Se o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P tiver em comum com $[\alpha]$ apenas uma linha passante por P , então a superfície é de SIMPLES CURVATURA no ponto P .

3.1.7. Intersecção de superfícies

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto I da linha $[i]$.

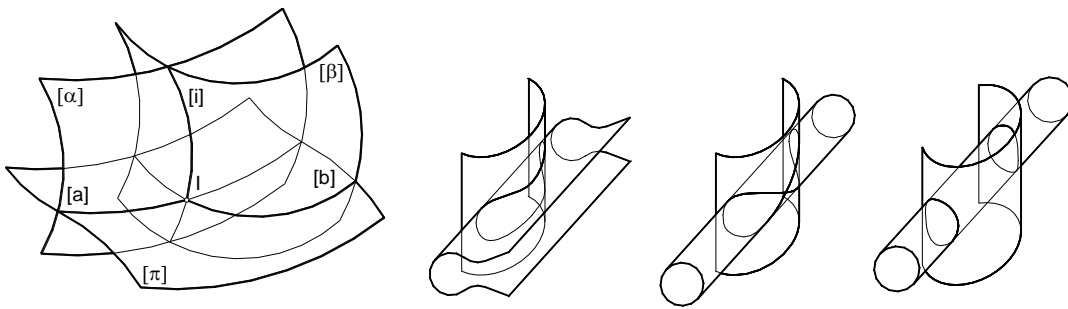


Figura 22

Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.

Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.

Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

3.1.8. Recta tangente à linha de intersecção

Seja $[i]$ a linha de intersecção entre as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja P um ponto da linha $[i]$, logo ponto comum $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja δ o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto P .

Seja π o plano tangente à superfície $[\beta]$ no ponto P .

A recta t , de intersecção entre os planos δ e π , é a recta tangente à linha $[i]$ no ponto P .

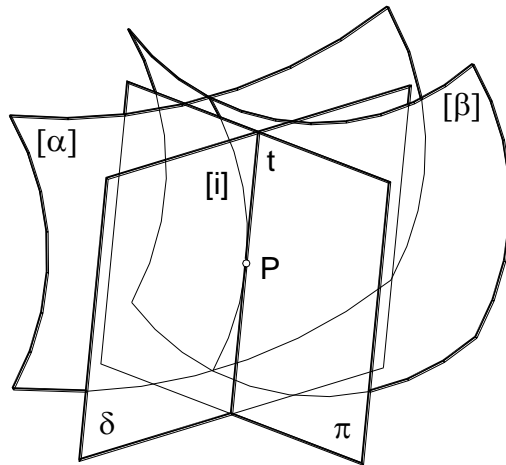


Figura 23

3.1.9. Concordância entre superfícies

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ admitirem os mesmos planos tangentes π em todos os pontos P da linha $[c]$ comum a ambas, então as duas superfícies dizem-se concordantes segundo a linha $[c]$. O cumprimento desta condição garante a “transição visualmente suave” entre as superfícies, que se designa por continuidade G1. Porém poderá haver descontinuidade ao nível das curvaturas. Se houver continuidade entre superfícies ao nível das curvaturas, diz-se que existe continuidade G2. Um teste comum para avaliar o tipo de continuidade entre superfícies é a análise ZEBRA.

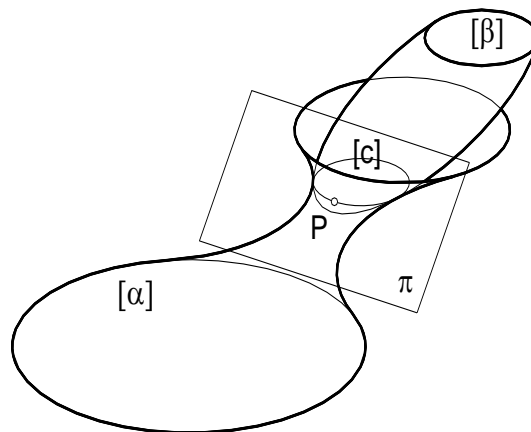


Figura 24

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo as linhas $[b]$ e $[a]$, respectivamente, de tal modo que as linhas $[b]$ e $[a]$ são tangentes entre si num ponto I da linha $[i]$.

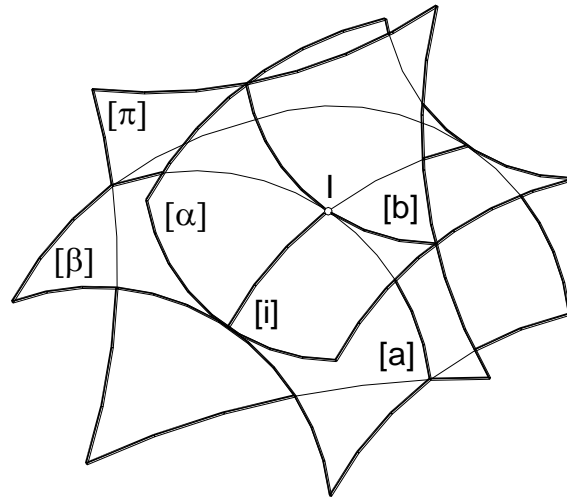


Figura 25

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$ e forem ambas concordantes com uma superfície $[\pi]$ segundo as linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, de tal modo que $[a]$ e $[b]$ se intersectem um ponto I da linha $[i]$, então, as duas linhas $[a]$ e $[b]$ são tangentes entre si no ponto I .

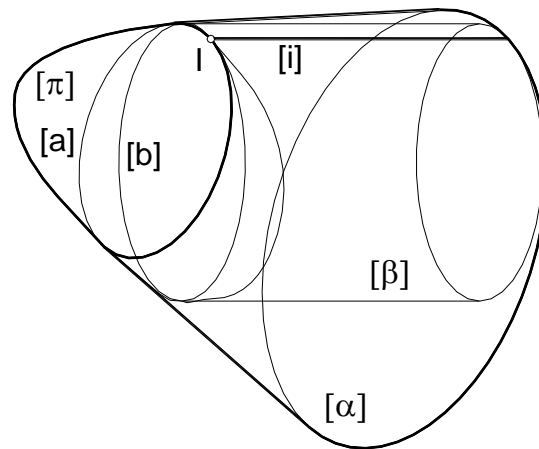


Figura 26

3.1.10. Contorno aparente

O contorno aparente de uma superfície $[\alpha]$ para um “observador” (centro de projecções) O é a linha $[c]$ de concordância entre a superfície $[\alpha]$ e uma superfície cónica $[\pi]$ de vértice O .

Se o observador estiver no infinito, então $[\pi]$ é uma superfície cilíndrica.

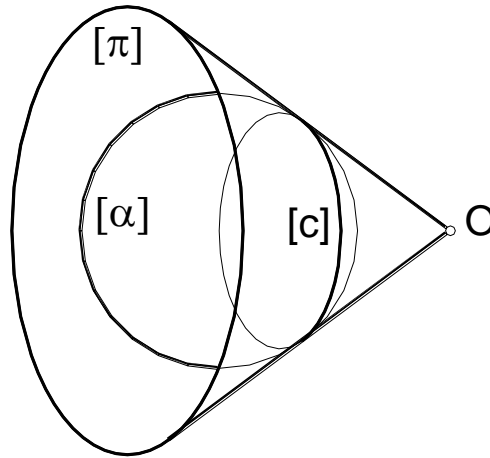


Figura 27

3.1.11. Distinção entre superfície e sólido

Uma superfície é a entidade que delimita o volume do sólido.

3.2. Classificação de superfícies quanto ao tipo de geratriz

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
		SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliédricas regulares, semi-regulares, irregulares, malhas MESH
REGRADAS (geradas por linhas rectas)	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cónica; cilíndrica; prismática; piramidal
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
		outras	
	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradados; superfícies de arco enviesado
		outras	superfície regradada de uma só face
CURVAS (não geradas por linhas rectas)		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO	esférica; tórica; elipsoidal; outras
		Outras	serpentina; superfícies mínimas; NURBS ⁶

Tabela 1

⁶ Note-se que as superfícies NURBS podem ser utilizadas muitas das outras superfícies referidas na tabela.

3.2.1. Superfícies poliédricas

A relação entre o número de arestas (A), vértices (V) e faces (F) de qualquer poliedro topologicamente equivalente a uma esfera vem dada pela fórmula de Euler:

$$V + F = A + 2 \quad (6)$$

Um poliedro que tenha por vértices os centros das faces de um outro poliedro diz-se DUAL daquele.

3.2.1.1. Poliedros regulares

Todas as faces são polígonos regulares de apenas um tipo, todos os vértices pertencem a uma superfície esférica, são os “Sólidos platônicos”.



Figura 28

3.2.1.2. Poliedros semi-regulares

Todas as faces são polígonos regulares de dois ou mais tipos sendo o comprimento da aresta uma constante; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica. São também designados por “Sólidos de Arquimedes”. Todas as arestas e vértices são congruentes e podem obter-se dos poliedros regulares por algum processo de transformação geométrica. Também podem considerar-se nesta categoria os prismas regulares e os anti-prismas regulares embora normalmente não seja comum.

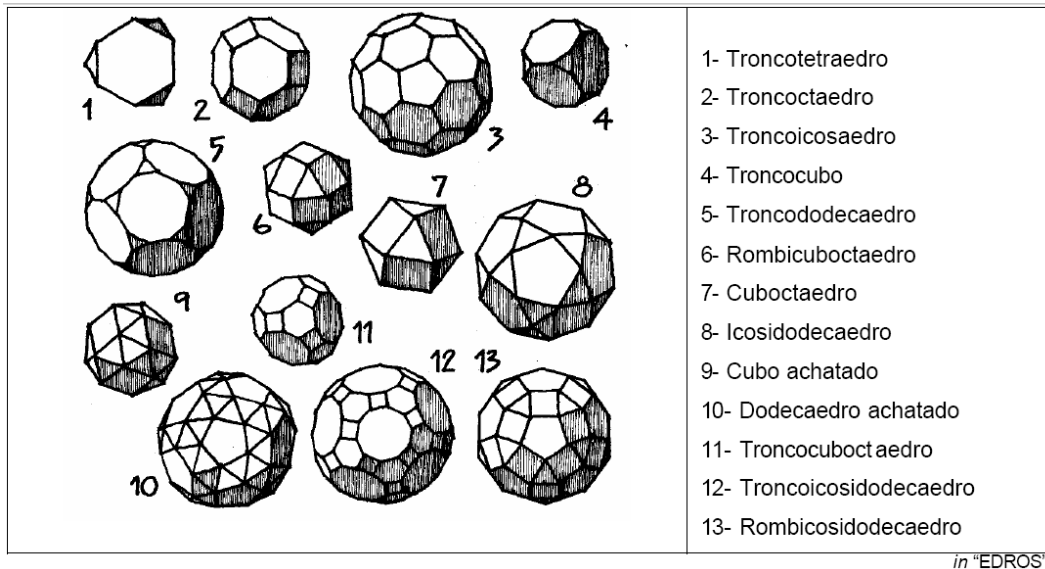


Figura 29

3.2.1.3. Poliedros irregulares

As faces são polígonos de tipos variados. Os vértices podem pertencer ou não a uma superfície esférica. O comprimento das arestas não é constante. Exemplos de poliedros irregulares são: pirâmides, bipirâmides, troncos de pirâmide, prismas, troncos de prisma. Uma bipirâmide é um sólido gerado pela “soma” de uma pirâmide com a sua simétrica relativamente ao plano da base. Outros tipos de poliedros irregulares são: anti-prismas, anti-piramóides, tronco-antiprismas, anti-prismóides.

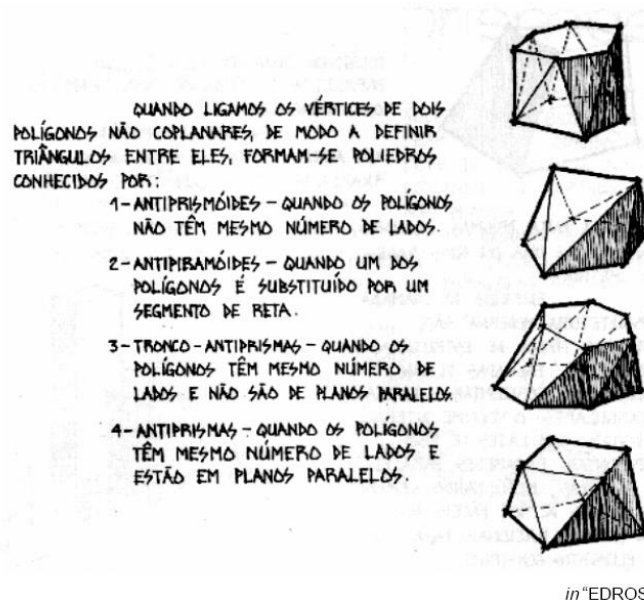


Figura 30

Outro tipo de poliedro interessante são os “sólidos de Johnson”. Trata-se de poliedros em que todas as faces são regulares de mais que um tipo, não sendo, no entanto, poliedros regulares, semi-regulares, prismas regulares ou anti-prismas regulares. Existem 92 ao todo.

3.2.2. Superfícies de revolução

Nestas, é conveniente definir alguns elementos notáveis.

O EIXO é a recta em torno da qual roda a linha (geratriz) que gera a superfície.

Um PARALELO é uma intersecção produzida na superfície por um plano perpendicular ao eixo.

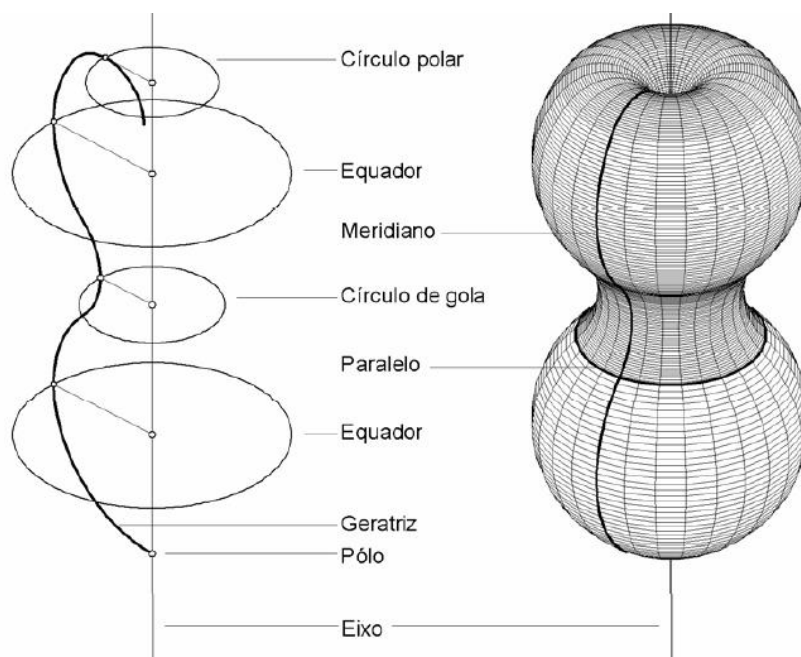
Um MERIDIANO é uma intersecção produzida na superfície por um plano complanar com o eixo.

Se um paralelo é o maior na sua vizinhança designa-se EQUADOR.

Se um paralelo é o menor na sua vizinhança designa-se CÍRCULO DE GOLA.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo nos pontos que este tem em comum com aquela, então estes pontos designam-se PÓLOS.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo ao longo de paralelos, estes designam-se CÍRCULOS POLARES.

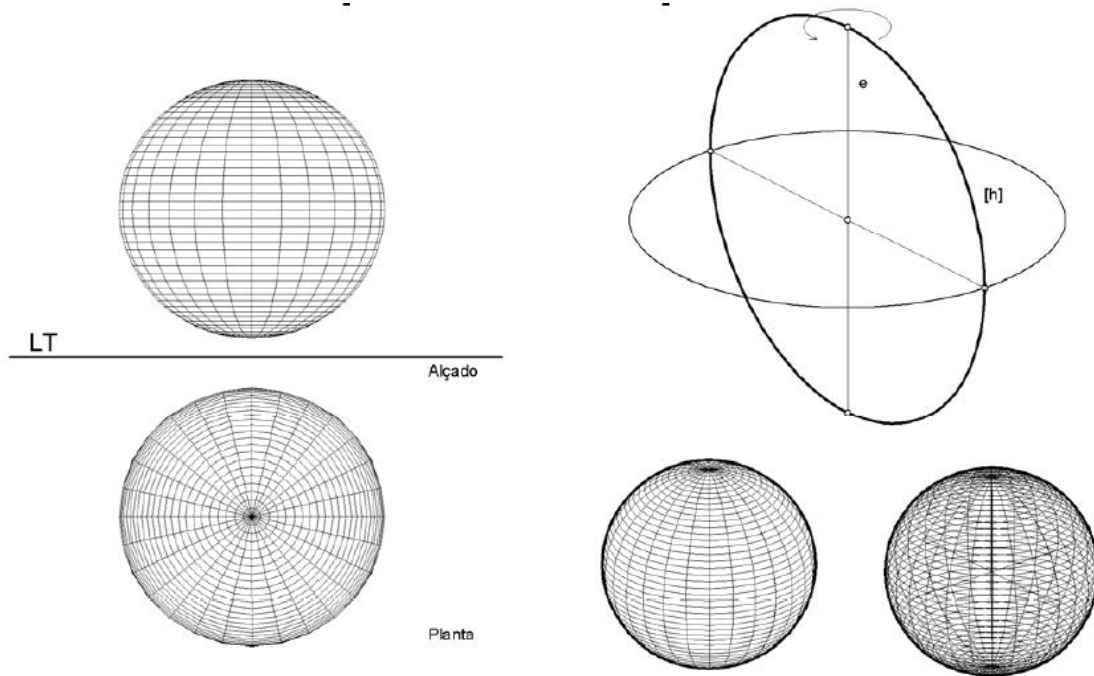


SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Figura 31

3.2.2.1. Superfície esférica

A superfície esférica pode ser conceptualmente concebida como o resultado da rotação de uma circunferência em torno de um diâmetro.

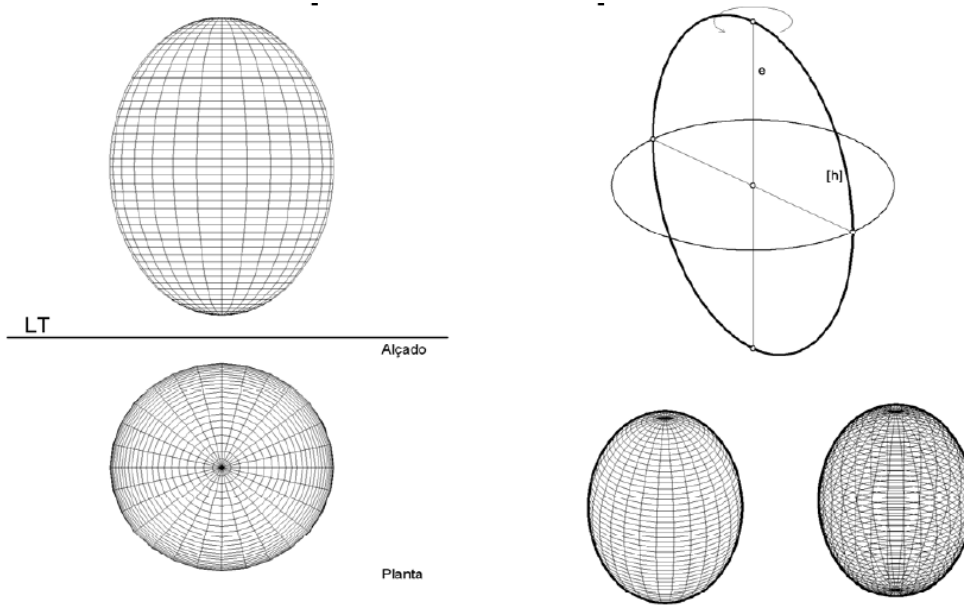


GERAÇÃO DA ESFERA POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM DIÂMETRO

Figura 32

3.2.2.2. Esferóide

O esferóide, ou elipsóide de revolução, é superfície que se gera pela rotação de uma elipse em torno de um dos seus eixos principais. Diz-se que é alongado se a rotação for feita em torno do eixo maior, e diz-se achatado se a rotação for feita em torno do eixo menor.

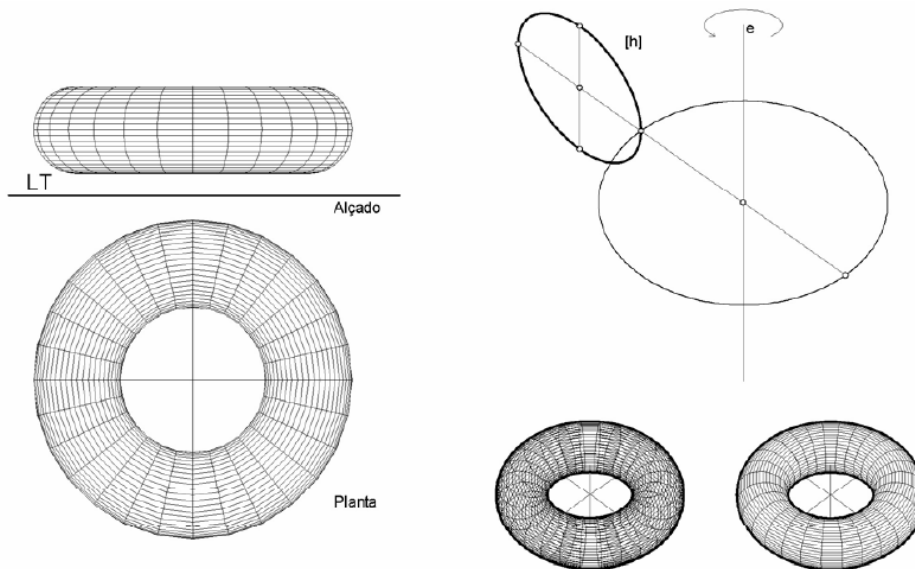


GERAÇÃO DO ELIPSÓIDE POR ROTAÇÃO DE UMA ELIPSE EM TORNO DE UM EIXO

Figura 33

3.2.2.3. Superfície tórica

A superfície tórica fica gerada pela rotação de circunferência em torno de um eixo contido no seu plano. Considera-se que o eixo não intersecta a circunferência.

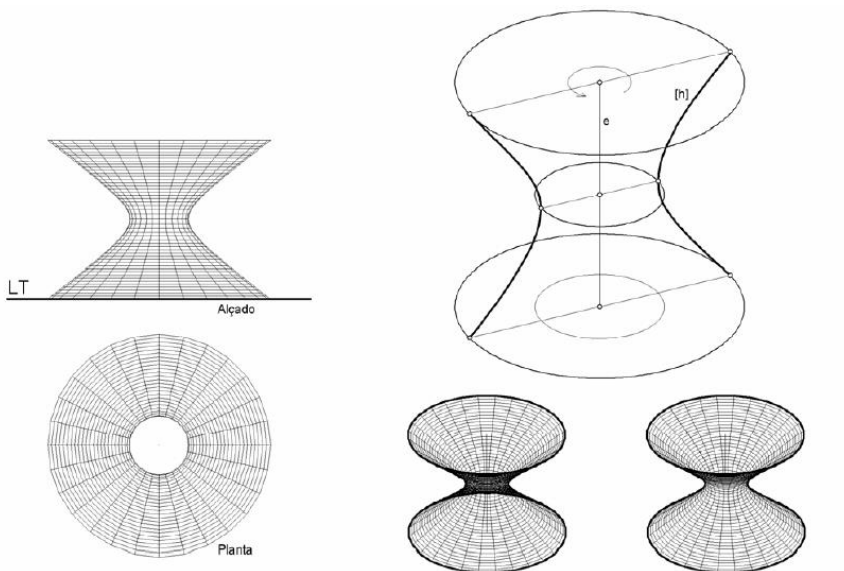


GERAÇÃO DO TORO POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM EIXO COMPLANAR

Figura 34

3.2.2.4. Hiperbolóide de revolução de uma folha

O hiperbolóide de revolução de uma folha, que adiante se verá que também é uma superfície regrada, é gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transverso.

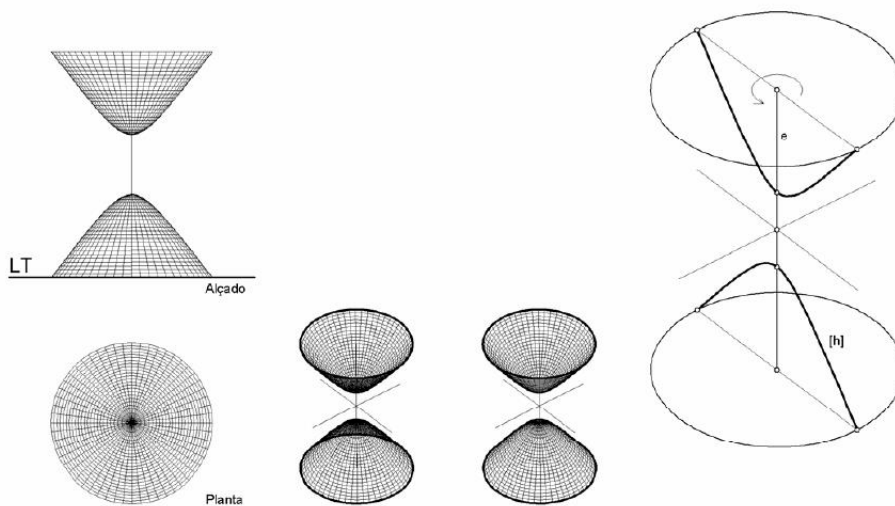


GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO REGRADO POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO TRANSVERSO

Figura 35

3.2.2.5. Hiperbolóide de revolução de duas folhas

O hiperbolóide de revolução de duas folhas é a superfície gerada pela rotação da hipérbole em torno do seu eixo real.

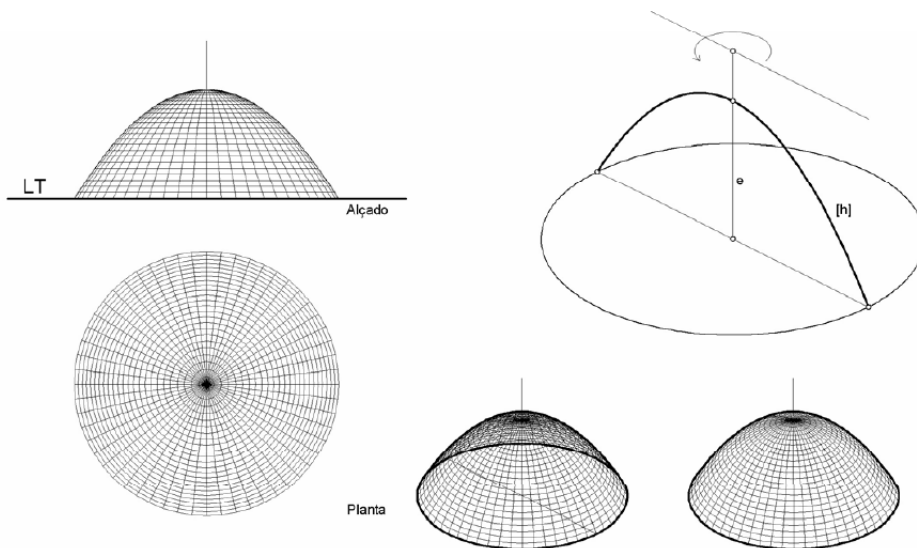


GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO DE 2 FOLHAS POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO REAL

Figura 36

3.2.2.6. Hiperbolóide de revolução de duas folhas

O parabolóide de revolução é a superfície gerada pela rotação da parábola em torno do seu eixo.



GERAÇÃO DO PARABOLÓIDE DE REVOLUÇÃO POR ROTAÇÃO DA PARÁBOLA EM TORNO DO SEU EIXO

Figura 37

3.2.3. Superfícies planificáveis

Para que uma superfície seja planificável deve ser regrada. Mas esta condição só por si não implica que a superfície seja planificável. Para além de ser regrada deve ainda acontecer que cada par de geratrizes infinitamente próximas entre si sejam concorrentes, isto é coplanares. Do enunciado resulta que uma superfície planificável apenas admite um plano tangente por cada geratriz. A planificação corresponde ao “desenrolar” da superfície até que esta coincida com uma dos planos tangentes. Nesta operação a superfície não “estica” nem “encolhe”, não se “rasga” nem adquire “pregas”. Nesta operação preservam-se os comprimentos e os ângulos. A resolução de problemas concretos depende, obviamente, do tipo particular de superfície que se tem em presença. Assim, diferentes métodos serão utilizados para planificar superfícies cónicas ou cilíndricas de revolução, cónicas ou cilíndricas oblíquas, convolutas, tangenciais, etc.

Tal como já foi atrás referido, uma superfície planificável tem curvatura Gaussiana, em todos os seu pontos, igual a zero.

3.2.3.1. Superfície cónica, cilíndrica, piramidal e prismática

As superfícies planificáveis mais comuns são as superfícies cónicas, cilíndricas, piramidais e prismáticas.

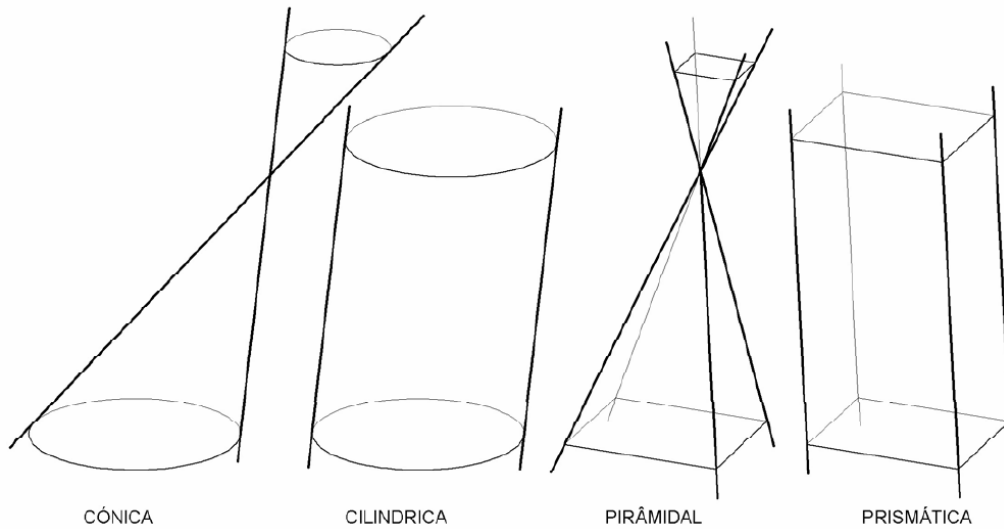


Figura 38

3.2.3.2. Convoluta e Superfície tangencial

Outro tipo de superfícies planificáveis são as que se seguem. A convoluta fica definida pelo lugar geométrico das rectas que resultam dos pontos de tangência de um par de rectas coplanares tangentes a duas linhas curvas espaciais, que se deslocam no espaço mantendo aquelas condições (tangência e coplanaridade).

As superfícies tangenciais ficam definidas pelo lugar geométrico das rectas tangentes a uma linha torça.

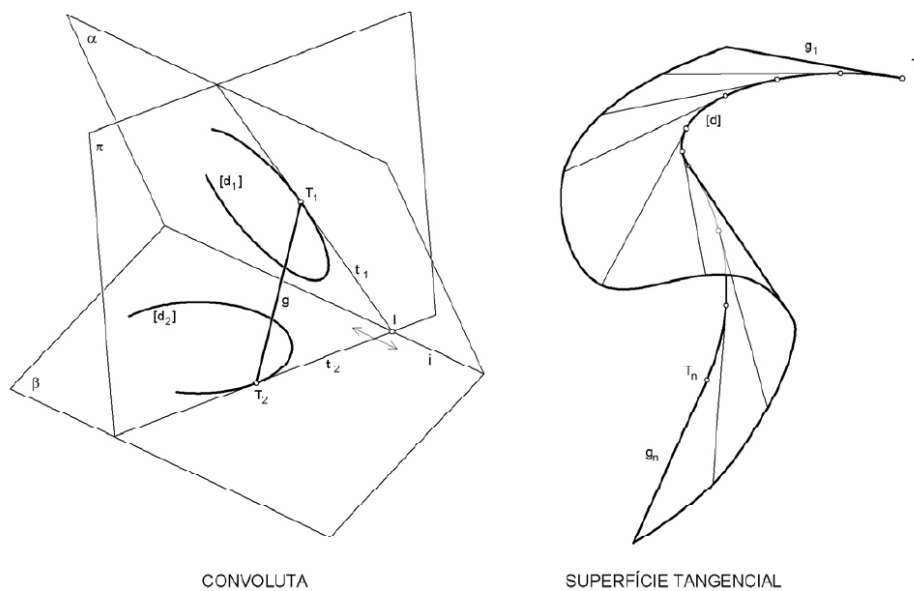


Figura 39

3.2.3.3. Helicóide tangencial

O helicóide tangencial é uma caso particular de uma superfície tangencial. Neste caso a linha directriz é uma hélice cilíndrica.

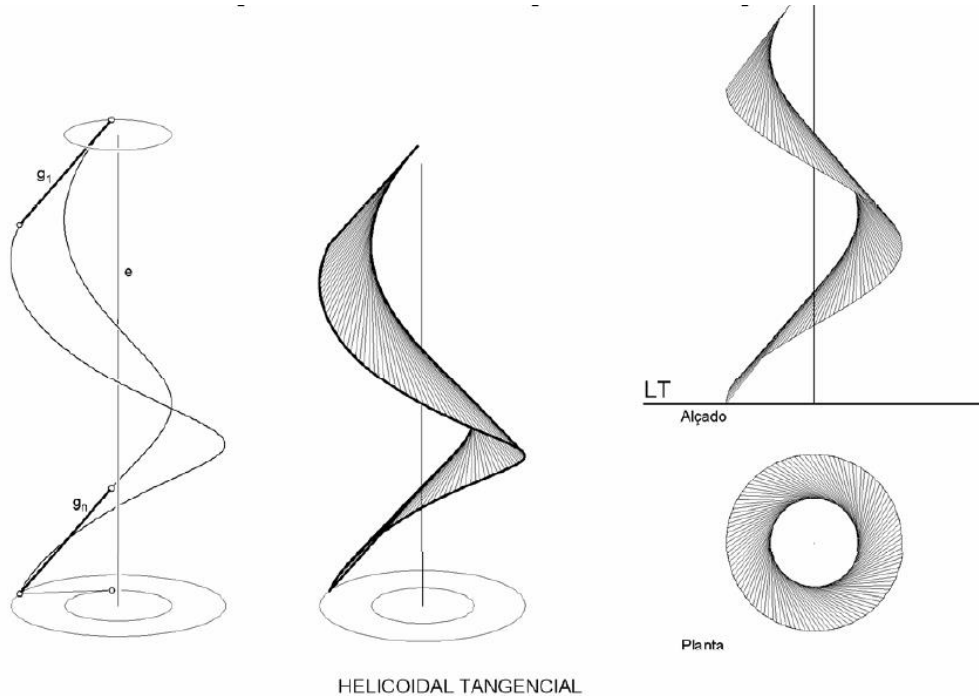
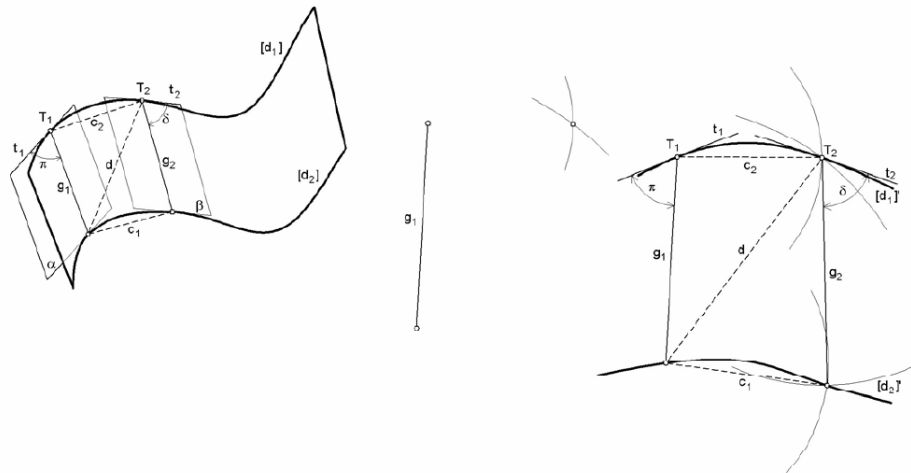


Figura 40

3.2.3.4. Planificação (método gráfico)

A planificação de uma superfície consiste no “desenrolar” da mesma para um plano. Uma aproximação a esse processo é a definição da superfície por meio de uma triangulação e de seguida proceder ao ajuste desses triângulos no plano. Este processo acaba por ser válido para a “planificação” de superfícies não planificáveis uma vez que todas as superfícies podem ser aproximadas por uma triangulação.



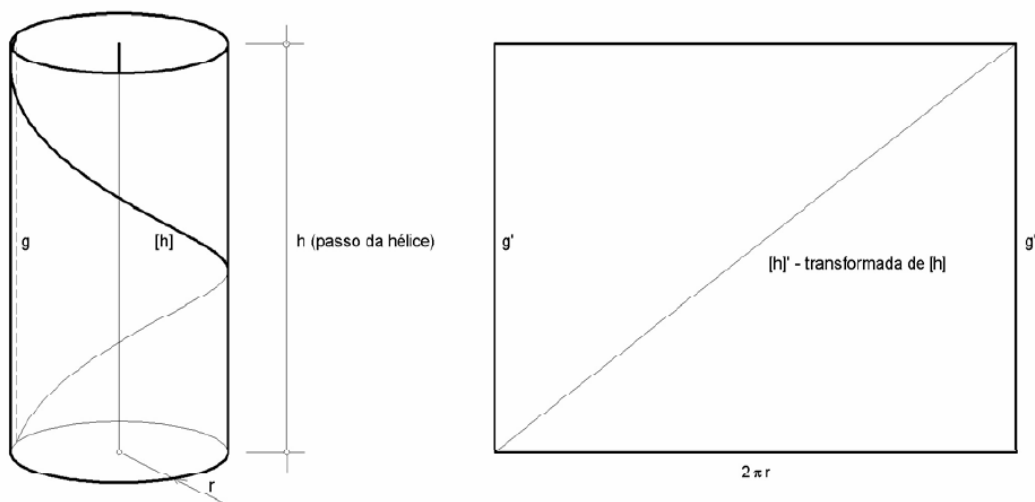
PLANIFICAÇÃO (método gráfico princípio geral)

Figura 41

Algumas ferramentas de modelação 3D implementam funções de planificação de superfícies, como é o caso do *software* Rhinoceros. Porém, verifica-se que os resultados não são correctos quando se procura generalizar a superfície.

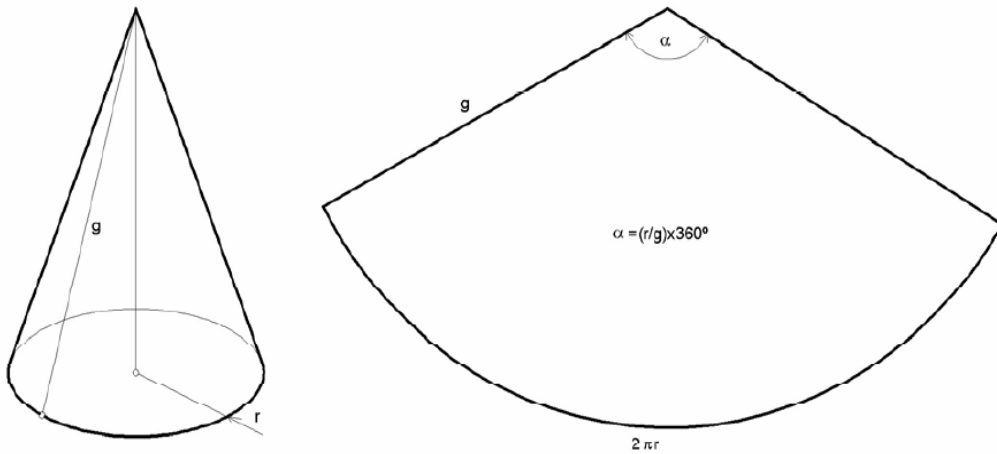
3.2.3.5. Planificação da superfície do cilindro e do cone de revolução

Porém, há figuras cuja planificação é bastante simples. Trata-se da planificação da superfície do cilindro de revolução, que resulta num rectângulo, e a planificação do cone de revolução que resulta num sector circular.



PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO / HÉLICE CILÍNDRICA

Figura 42

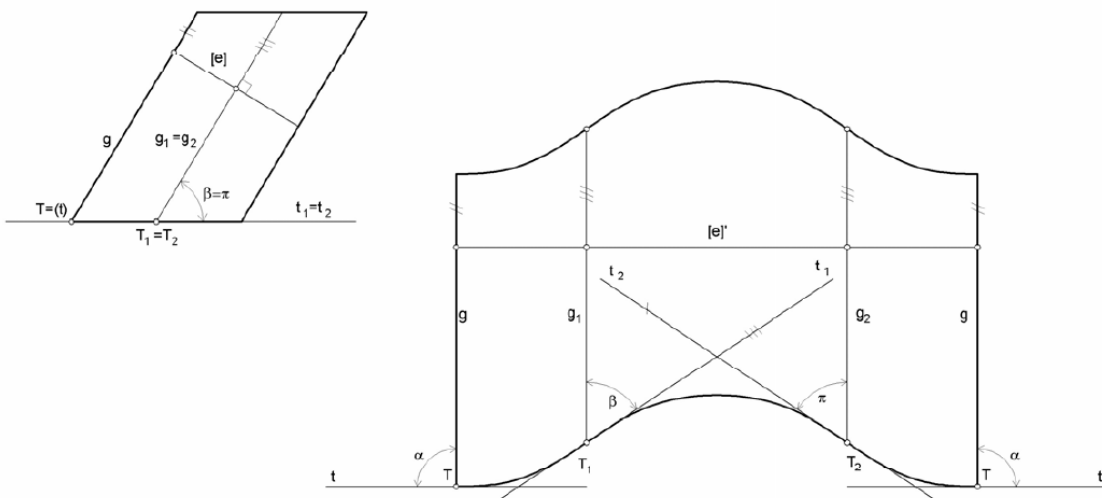


PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CONE DE REVOLUÇÃO

Figura 43

3.2.3.6. Planificação da superfície do cilindro e do cone oblíquo

A planificação do cilindro oblíquo pode fazer-se por meio da aproximação da sua superfície à de um prisma, e a planificação do cone oblíquo pode fazer-se meio da aproximação da sua superfície à de uma pirâmide. O resultado é tanto melhor quanto mais refinada for a aproximação.



PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO OBLÍQUO

Figura 44

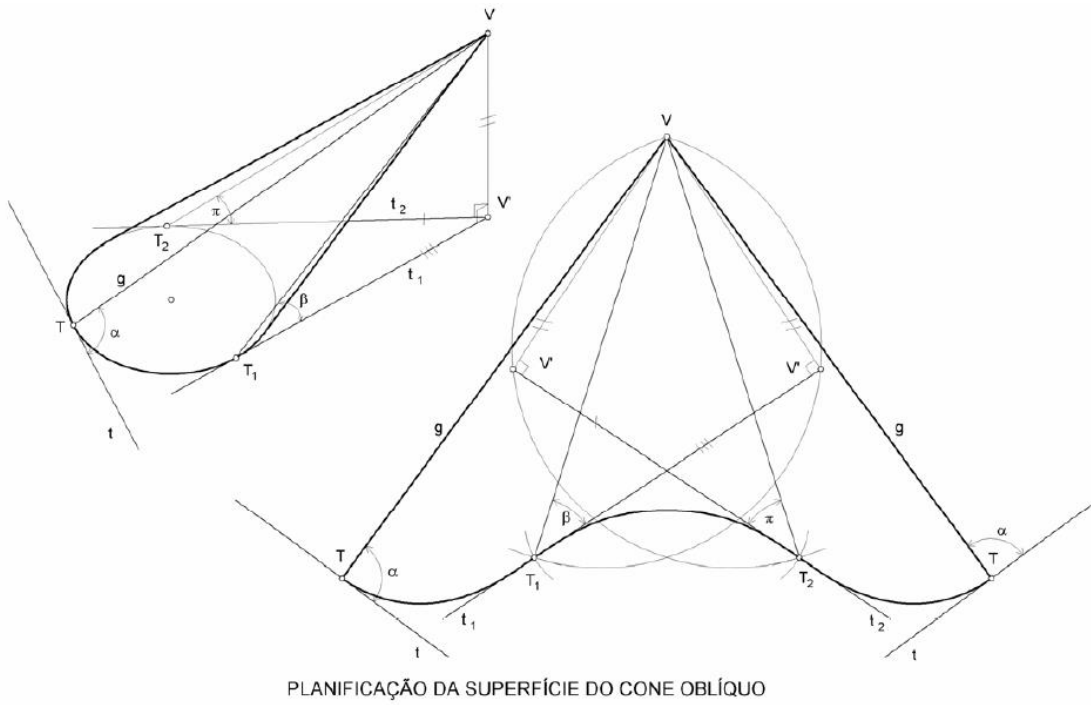


Figura 45

3.2.3.7. Planificação da superfície do helicóide tangencial

Pela sua regularidade, o cálculo da planificação da superfície do helicóide tangencial também é relativamente simples, como ilustrado na figura.

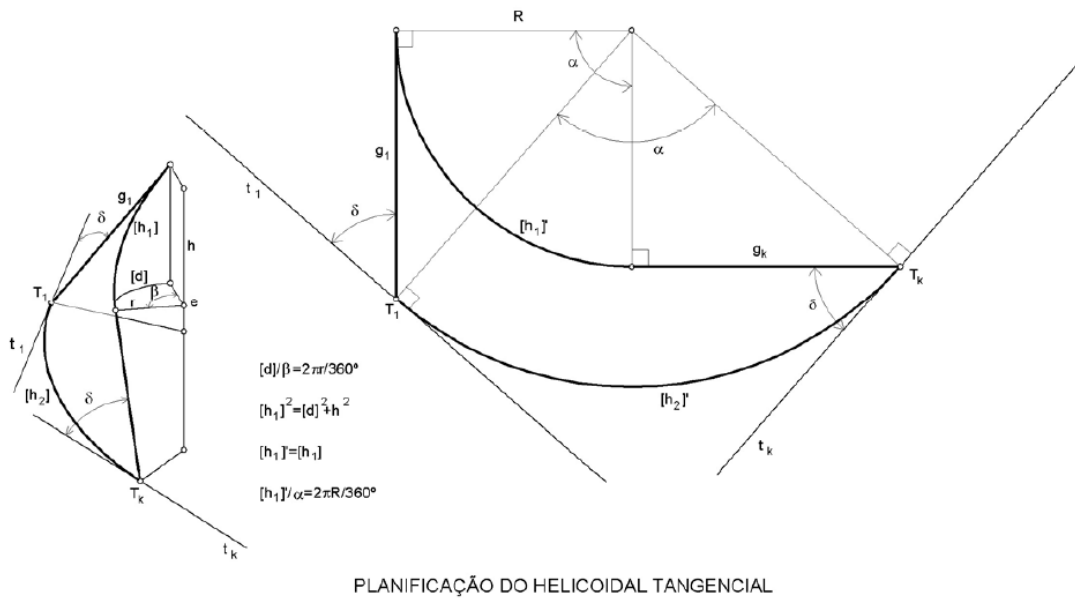


Figura 46

3.2.4. Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)

Uma superfície regrada não é planificável se duas geratrizes infinitamente próximas não se intersectarem. Esta condição é em geral cumprida quando a superfície é definida por três directrizes quaisquer. Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regrada ou em que esta degenera numa superfície planificável.

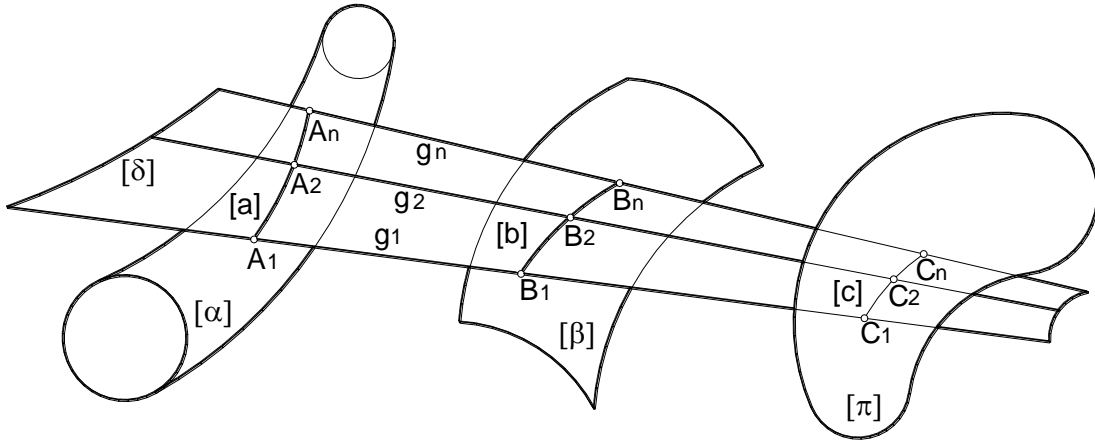


Figura 47

A condição que se impõe para que as rectas g_1, g_2, g_n definam uma superfície regrada $[\delta]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[\delta]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ segundo linhas $[a], [b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas g_1, g_2, g_n designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfícies directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.

Se a superfície $[\delta]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n , então diz-se que é SIMPLEMENTE REGRADA.

Se a superfície $[\delta]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n e j_1, j_2, j_n , então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas às geratrizes d_1, d_2, d_n de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.

Contudo, deve notar-se que mesmo que a superfície seja definida por 3 directrizes próprias ela gozará obrigatoriamente da propriedade de ser de plano director ou de cone director, uma vez que todas as rectas têm pontos impróprios. Em todo o caso, em termos de classificação quanto à directriz, é conveniente distinguir as que são de plano director ou cone director e as ORDINÁRIAS.

Como consequência, apresenta-se o seguinte quadro de classificação de superfícies regradas não planificáveis (empenadas) definidas por três directrizes.

SUPERFÍCIES REGRADAS EMPENADAS DEFINIDAS POR 3 DIRECTRIZES (linhas e/ou superfícies) R (recta) ; C (curva) ; S (superfície) ; R ∞ (recta imprópria) ; C ∞ (curva imprópria)	TIPO	DIRECTRIZES	exemplos
	ORDINÁRIA		R R R
		R R C	
		R C C	Superfícies de arco enviesado (corno de vaca; arriere-vousure)
		C C C	
		R R S	
		R C S	
		C C S	
		R S S	
		C S S	
		S S S	
DE PLANO DIRECTOR		R ∞ R R	Parabolóide hiperbólico
		R ∞ R C	Superfícies de conóide; Superfícies helicoidais
		R ∞ C C	Superfícies de cilindróide
		R ∞ R S	Superfícies de conóide com um núcleo
		R ∞ C S	Superfícies de cilindróide com um núcleo; Superfícies helicoidais com núcleo
		R ∞ S S	Superfícies de cilindróide com dois núcleos
DE CONE DIRECTOR		C ∞ R R	Tetraedróide
		C ∞ C R	Superfícies helicoidais
		C ∞ C C	
		C ∞ R S	
		C ∞ C S	Superfícies helicoidais com núcleo
		C ∞ S S	

Tabela 2

3.2.4.1. Hiperbolóide de revolução de uma folha

O hiperbolóide de revolução de uma folha acumula a dupla condição de ser superfície de revolução e superfície regrada. Com efeito, a mesma superfície pode ser gerada pela rotação de uma hipérbole pela rotação de uma recta enviesada ao eixo.

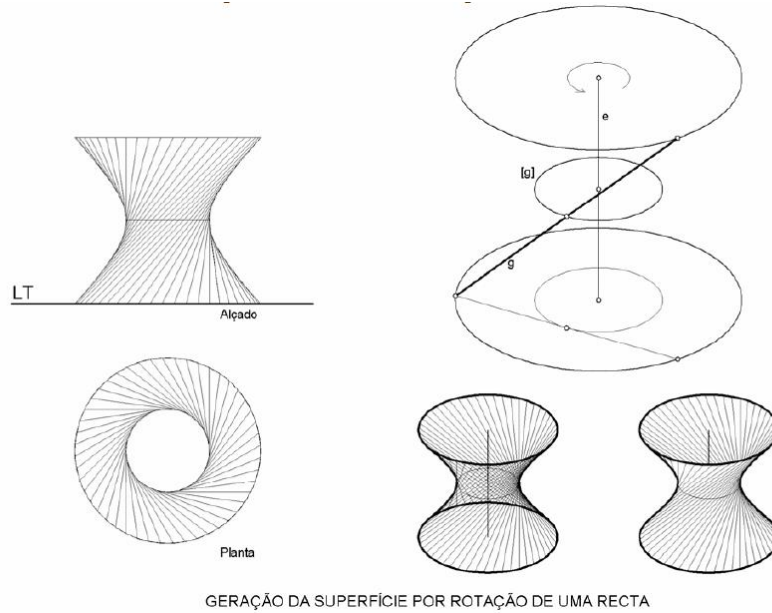


Figura 48

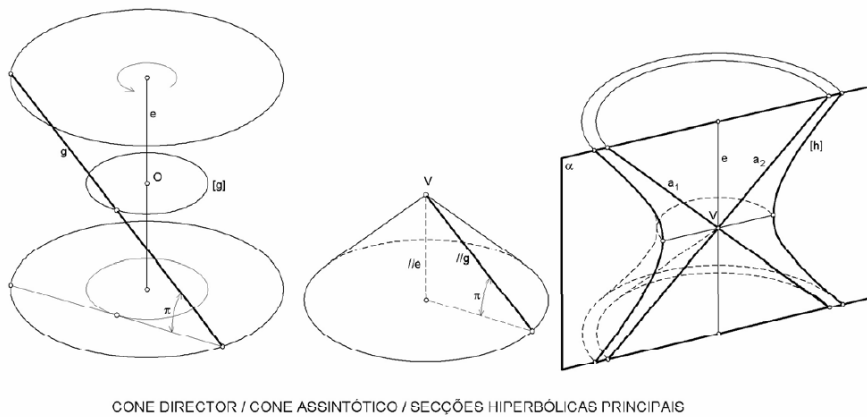
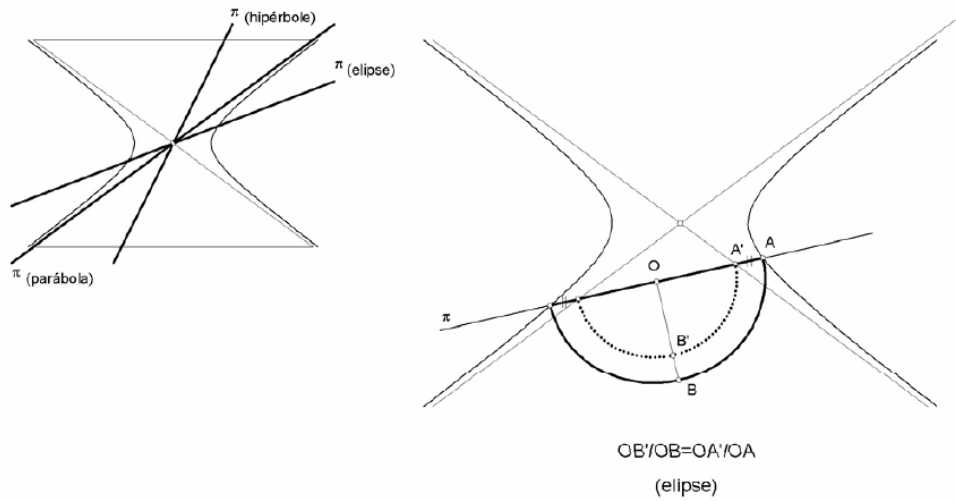


Figura 49

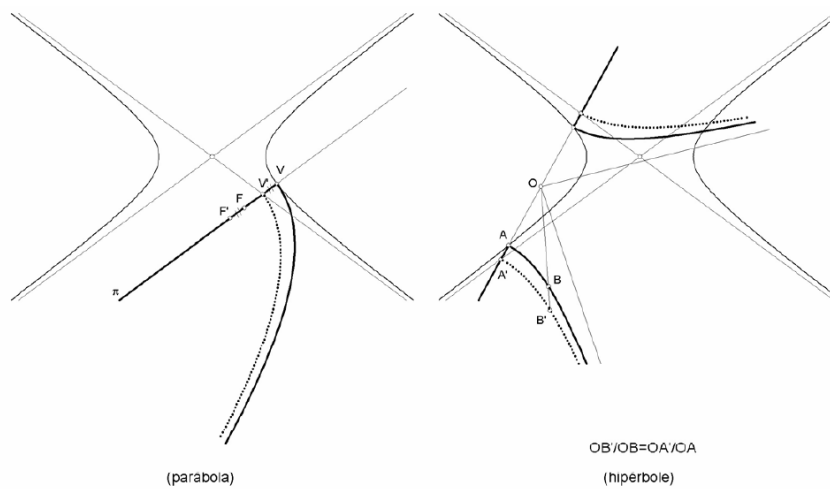
Uma das propriedades interessantes do hiperbolóide de revolução de uma folha é o facto de as suas geratrizes serem paralelas às geratrizes de uma família de superfícies cónicas de revolução, os designados cones directores.



INTERSECÇÕES PLANAS

Figura 50

As intersecções que é possível produzir nesta superfície são do mesmo tipo que as que se podem produzir numa superfície cónica de revolução, isto é, são linhas cónicas. Planos com uma determinada orientação produzem intersecções do mesmo tipo das produzidas nos cones directores.



INTERSECÇÕES PLANAS

Figura 51

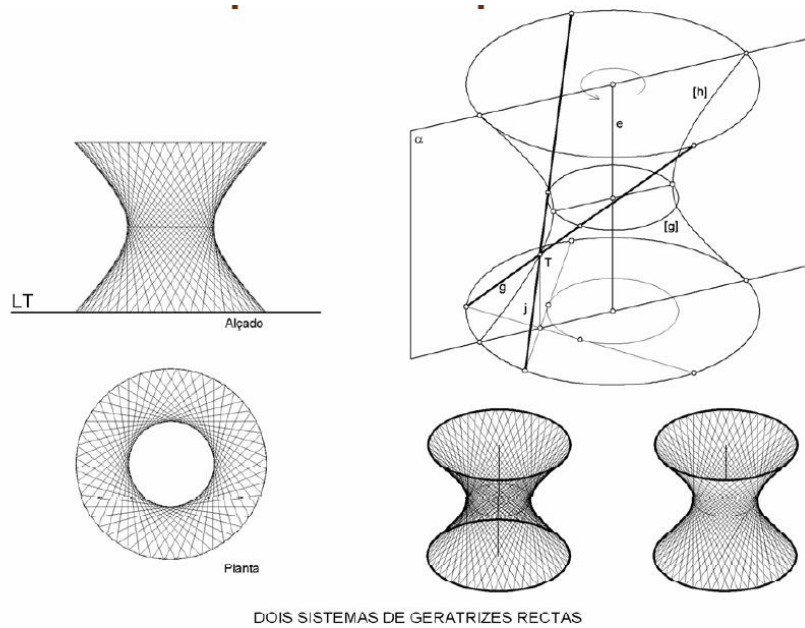


Figura 52

Uma propriedade interessante desta superfície é o facto de ser duplamente regrada, isto é, a mesma superfície pode ser gerada de dois modos distintos pela rotação de uma recta. Assim, esta superfície admite dois sistemas de geratrizes, ou dito de outra forma, a superfície pode ser concebida como uma rede de linhas rectas no espaço que se intersectam.

3.2.4.2. Hiperbolóide empenado escaleno

O hiperbolóide empenado escaleno pode obter-se do anterior por meio de uma transformação afim, e goza de propriedades muito semelhantes àquele.

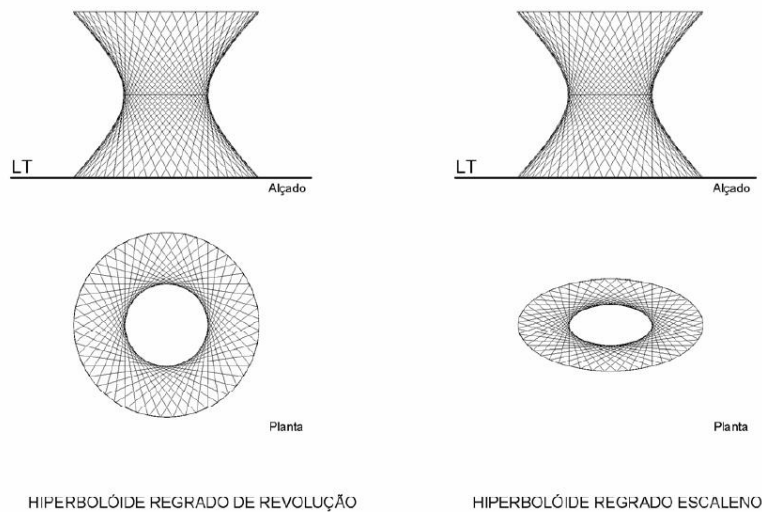
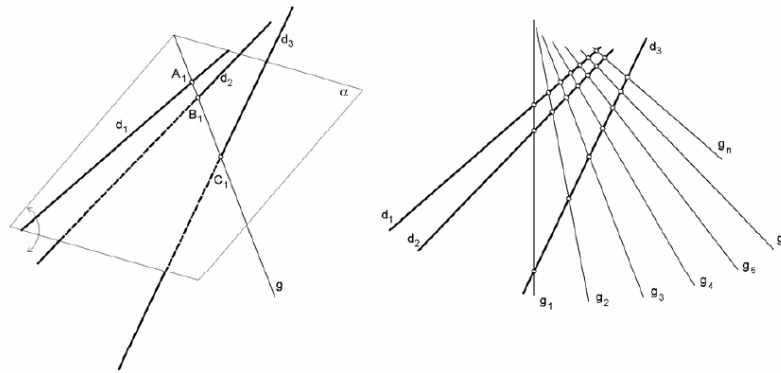


Figura 53

Porém, outra forma de gerar o hiperbolóide empanado escaleno é a que se ilustra na figura seguinte. Das três rectas enviesadas quaisquer (directrizes), a superfície é gerada pelo movimento de uma quarta recta (geratriz) que se desloca no espaço apoiada naquelas três. Geratrizes desta superfície podem ser facilmente obtidas através da intersecção de um feixe de planos com duas directrizes, tendo por base a outra geratriz.

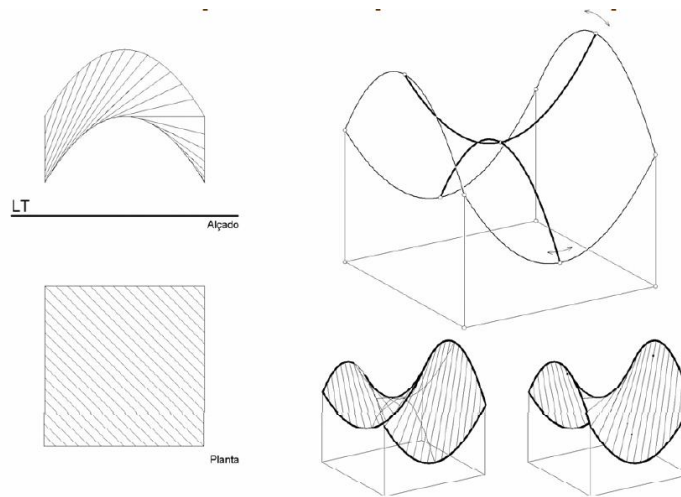


DEFINIÇÃO DO HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS

Figura 54

3.2.4.3. Parabolóide hiperbólico

O parabolóide hiperbólico também pode ser gerado de vários modos distintos. Na figura seguinte, ilustra-se a sua geração por deslocamento de uma parábola (que preserva a orientação) apoiada noutra parábola.



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR MOVIMENTO DE UMA PARÁBOLA APOIADA NOUTRA PARÁBOLA

Figura 55

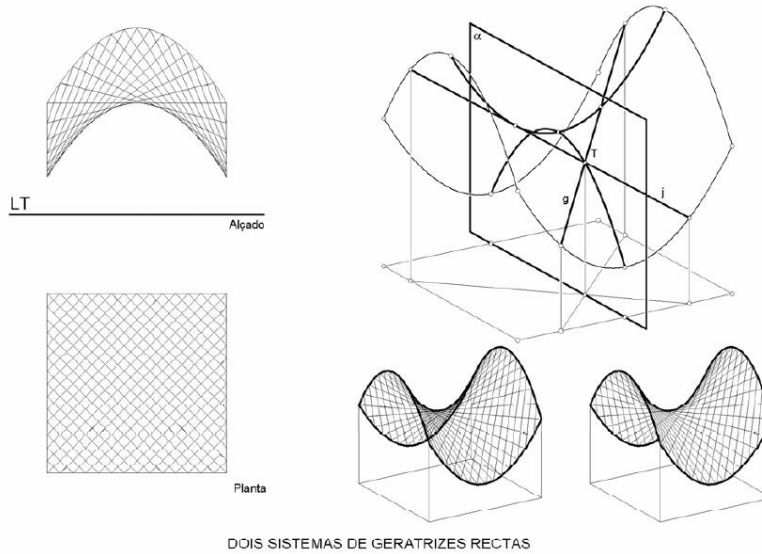


Figura 56

Trata-se também de uma superfície duplamente regrada. Isto é, também pode ser considerado gerado de dois modos distintos pelo movimento de uma recta no espaço apoiada sobre três rectas enviesadas. Embora neste caso uma das rectas seja imprópria. Isto quer dizer, na prática, que a geratriz se desloca mantendo-se apoiada em duas directrizes enviesadas e conservando o paralelismo a um plano (orientação de planos), designado plano director. Face às propriedades descritas, verifica-se que o parabolóide hiperbólico admite duas orientações de planos directores.

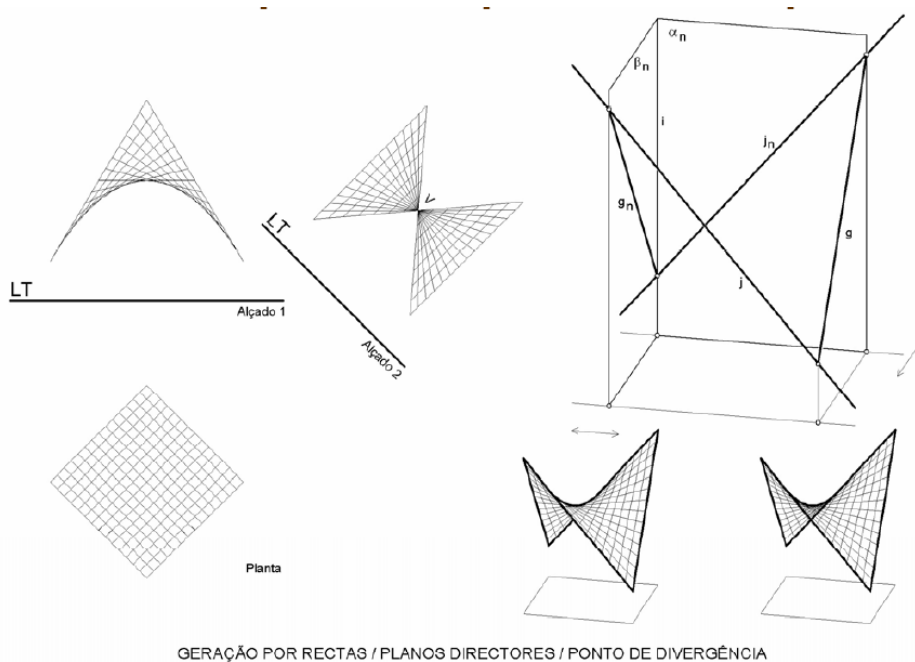


Figura 57

A forma mais simples de definir um parabolóide hiperbólico é através de um quadrilátero enviesado. As direcções de dois lados opostos definem a orientação do plano director daquela família de geratrizes, e as direcções dos outros dois lados definem a orientação do plano director da outra família de geratrizes.

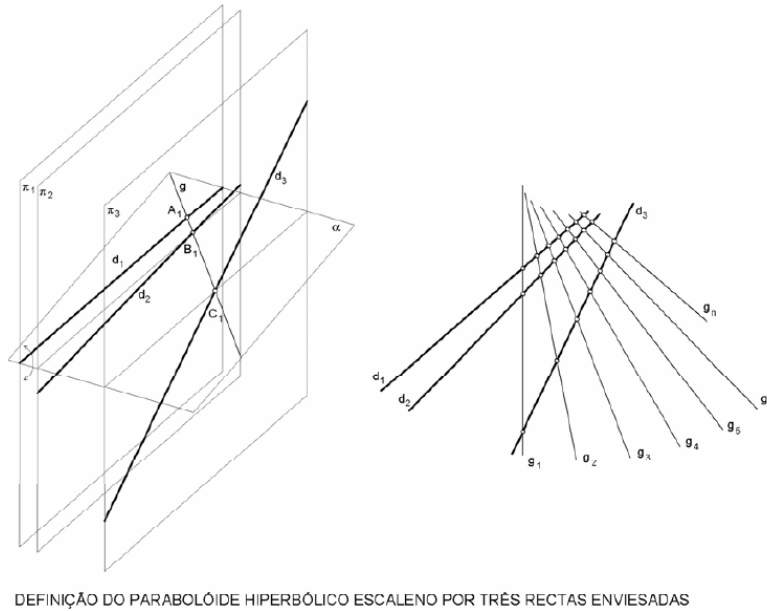


Figura 58

Para se definir o parabolóide hiperbólico dadas três geratrizes da mesma família, deve impor-se a condição de que as direcções destas rectas estejam contidas numa única orientação (a orientação do plano director daquela família de geratrizes).

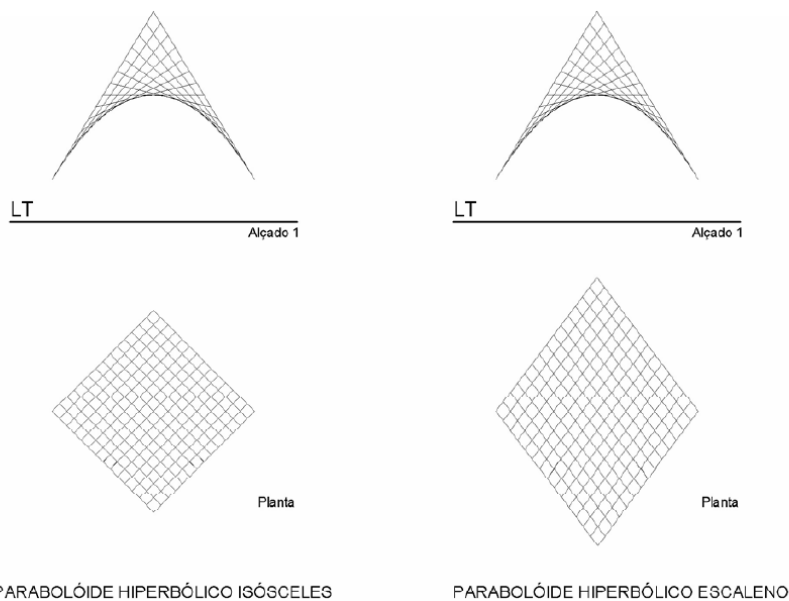


Figura 59

O parabolóide hiperbólico admite dois tipos de secções cónicas. Se um plano contiver a direcção comum aos dois planos directores, então a intersecção é do tipo parábola. Caso contrário é do tipo hipérbole.

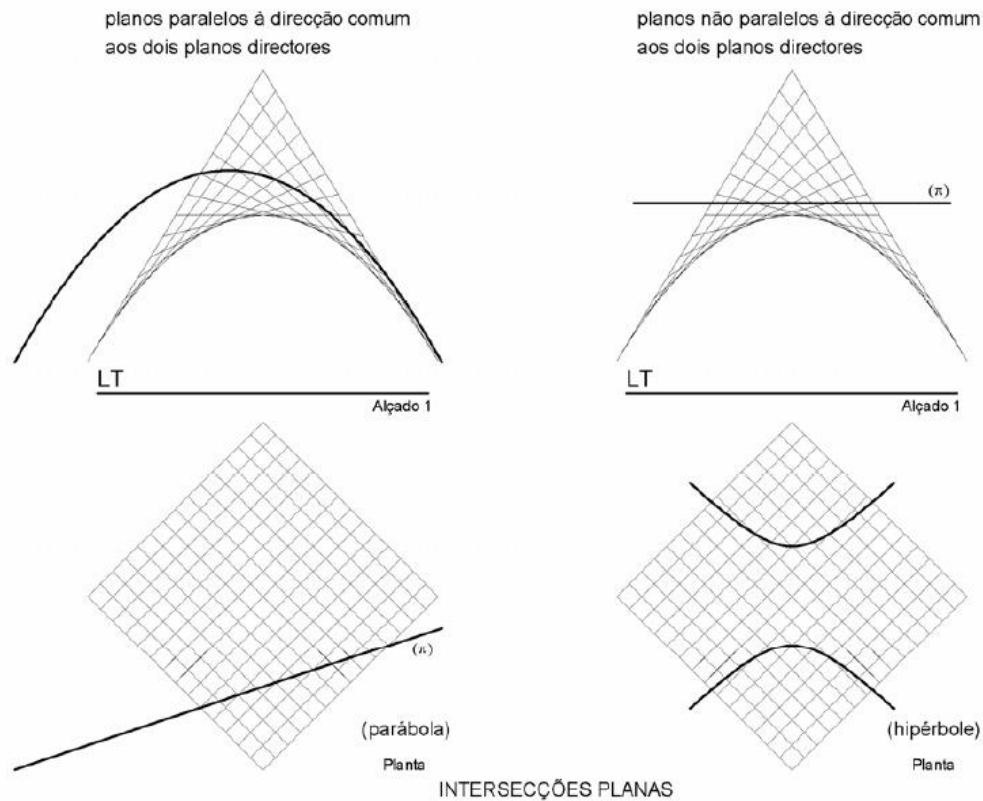


Figura 60

Claro está, que não se está aqui a considerar os casos dos planos osculantes, em que as secções degeneram num par de rectas, rectas essas que se cruzam no ponto de tangência do plano com a superfície.

3.2.4.4. Helicóides regrados

Os helicóides regrados são uma família particular de superfícies regradas empenadas, que têm por directriz uma hélice cilíndrica. Podem ser de cone director ou de plano director. Podem ter núcleo central ou ser axiais.

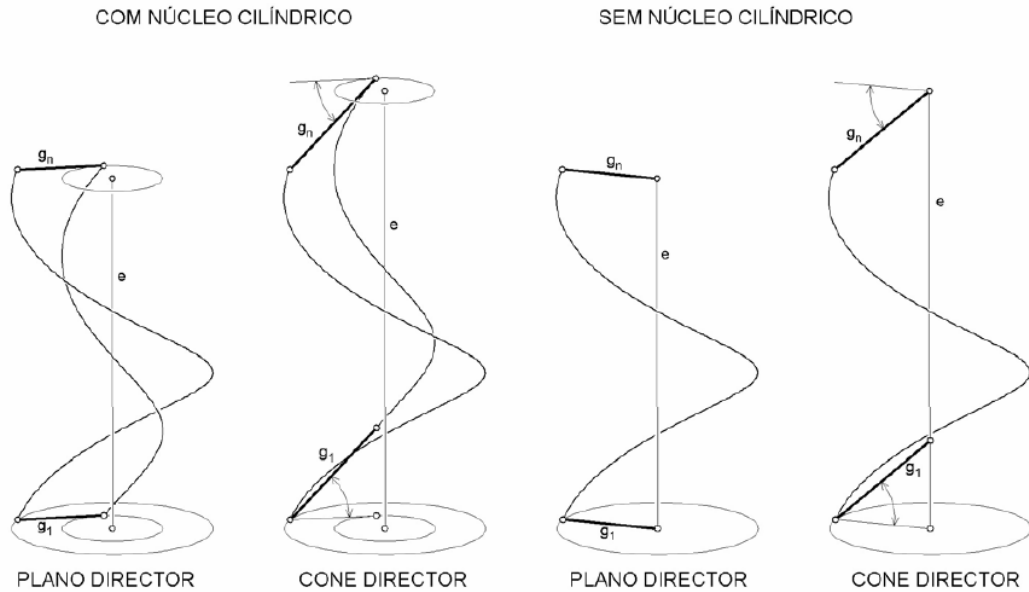


Figura 61

Quando se diz que o helicóide é axial, quer-se dizer que as geratrizes (consideradas extensíveis) são concorrentes com o eixo. Na outra situação, as geratrizes são tangentes à superfície de um cilindro de revolução co-axial com o helicóide. Quando são de plano director, as geratrizes conservam uma direcção contida numa orientação, em geral ortogonal ao eixo da superfície. Quando são de cone director, mantêm um ângulo constante com o eixo, com a particularidade desse ângulo nunca ser 90° .

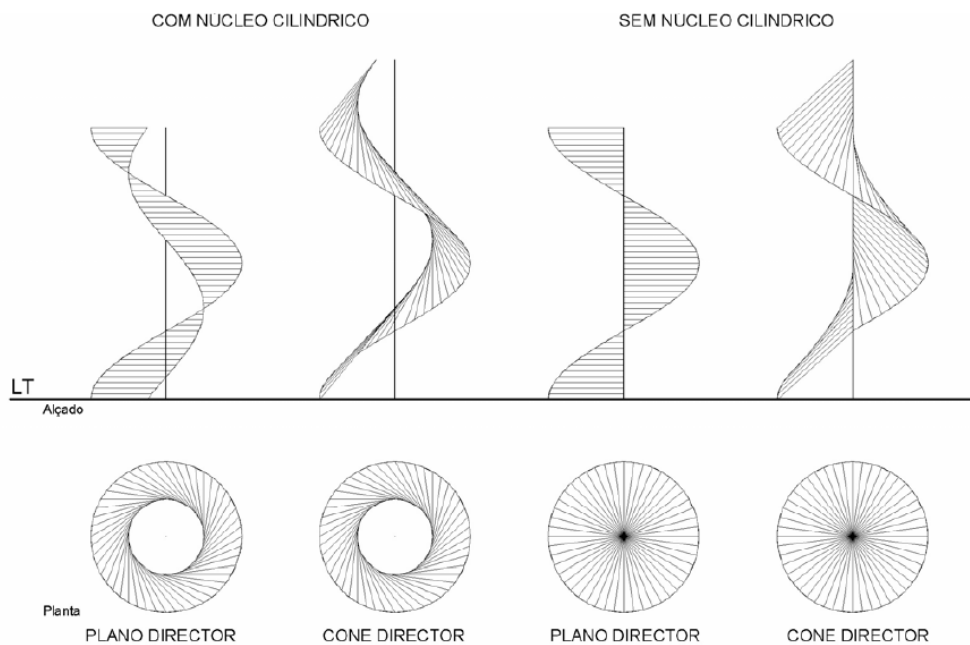


Figura 62

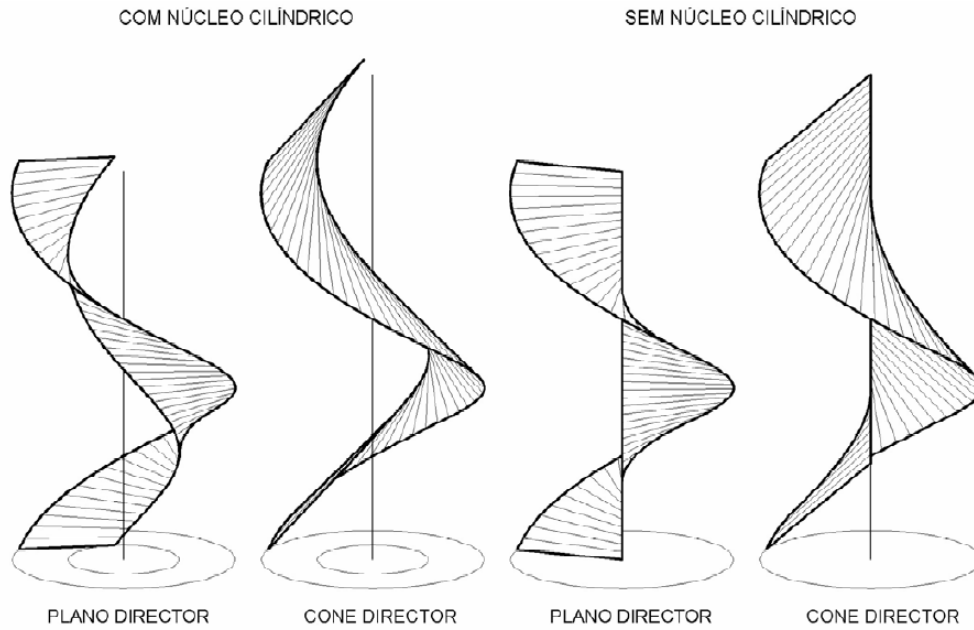


Figura 63

3.2.4.5. Superfícies de conóide

As superfícies de conóide podem ser geradas pelo deslocamento de uma recta (geratriz) que se apoia numa recta e numa curva, conservando o paralelismo relativamente a uma orientação de planos. Isto é, trata-se uma superfície simplesmente regradada de plano director.

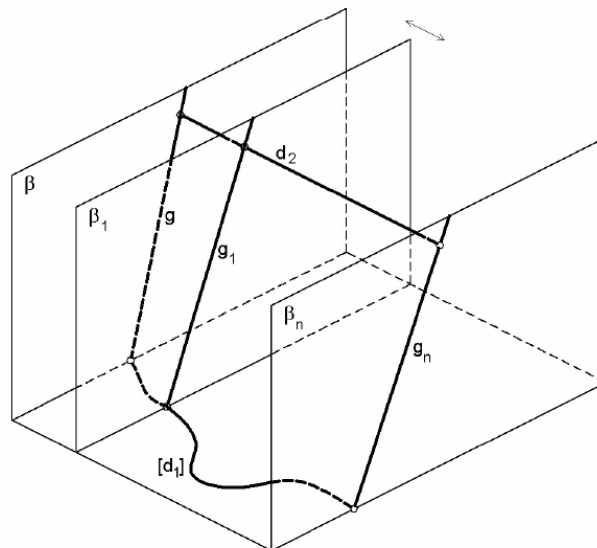


Figura 64

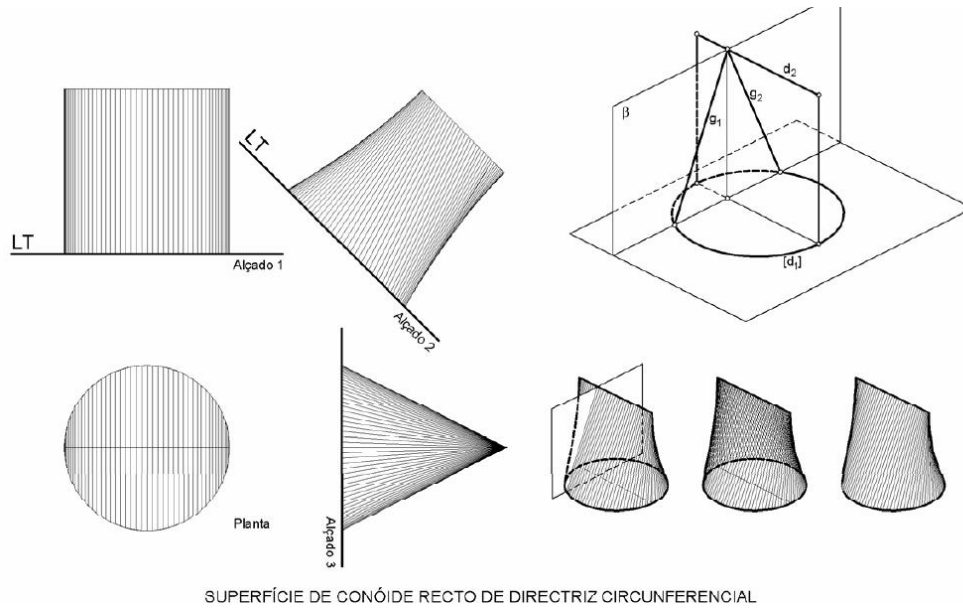


Figura 65

3.2.4.6. Superfícies de cilindróide

A superfície de cilindróide é em tudo semelhante à anterior, porém a geratriz apoia-se em duas curvas.

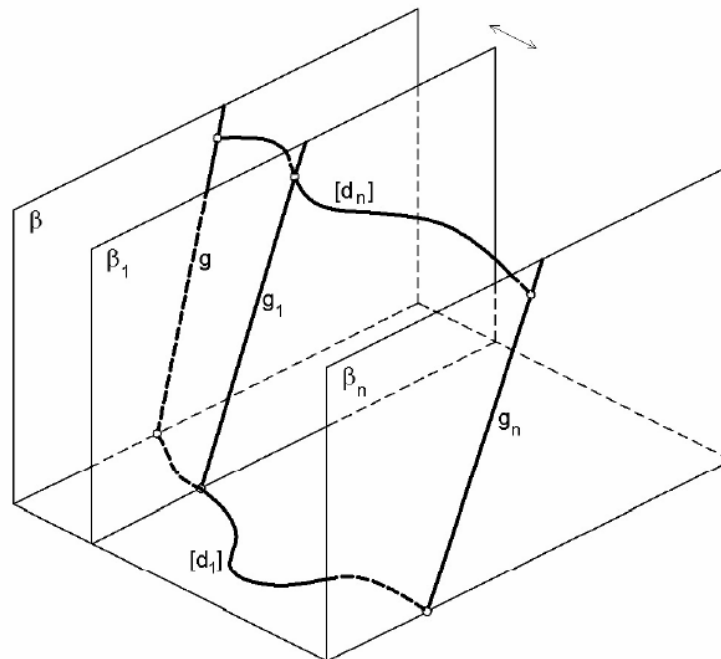
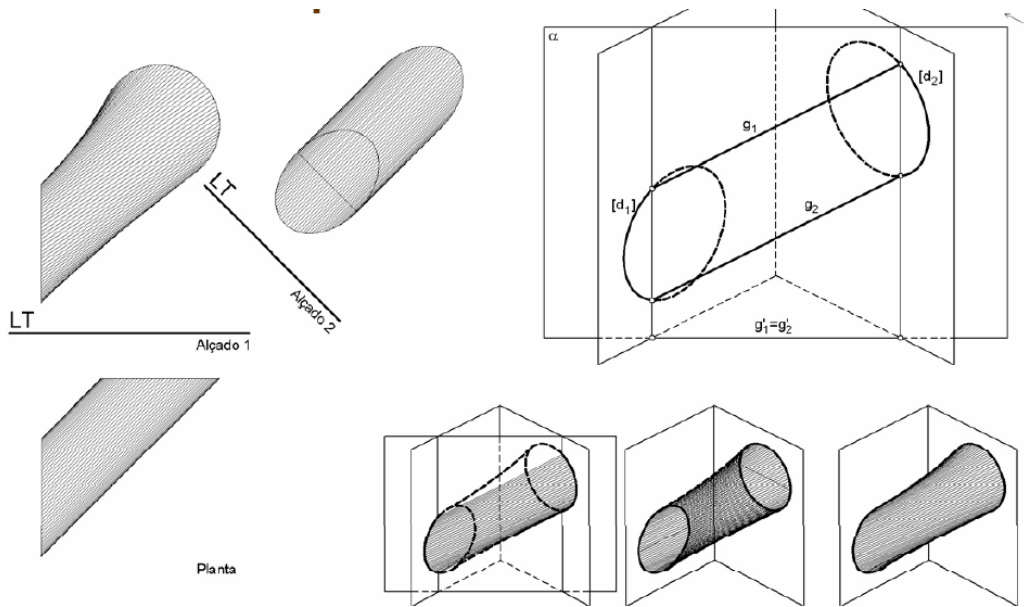


Figura 66

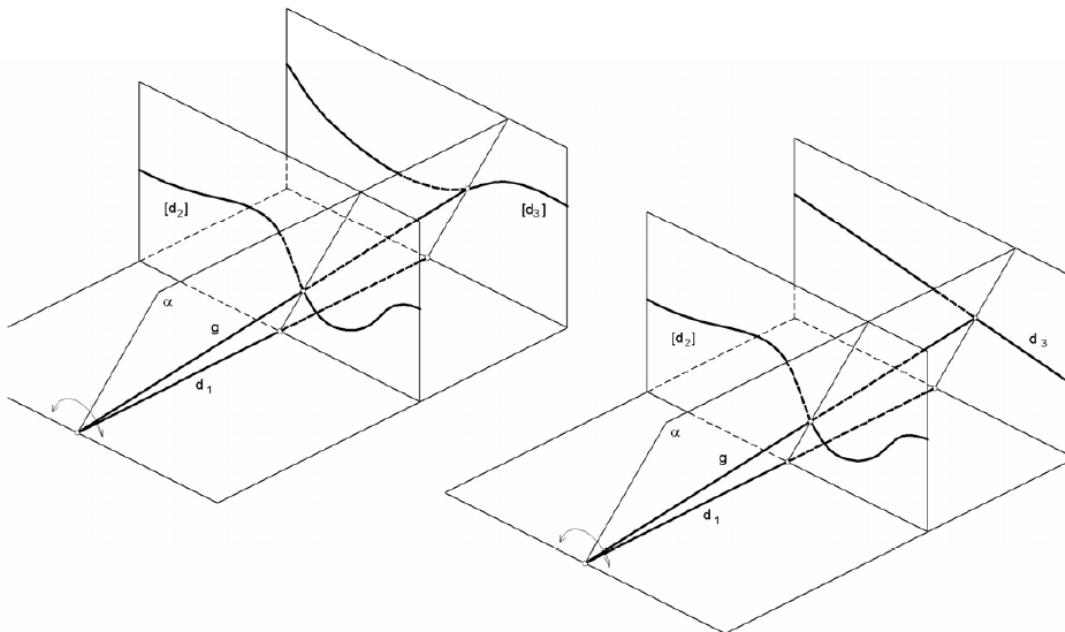


SUPERFÍCIE DE CILINDRÓIDE DE DIRECTRIZES CIRCUNFERENCIAIS

Figura 67

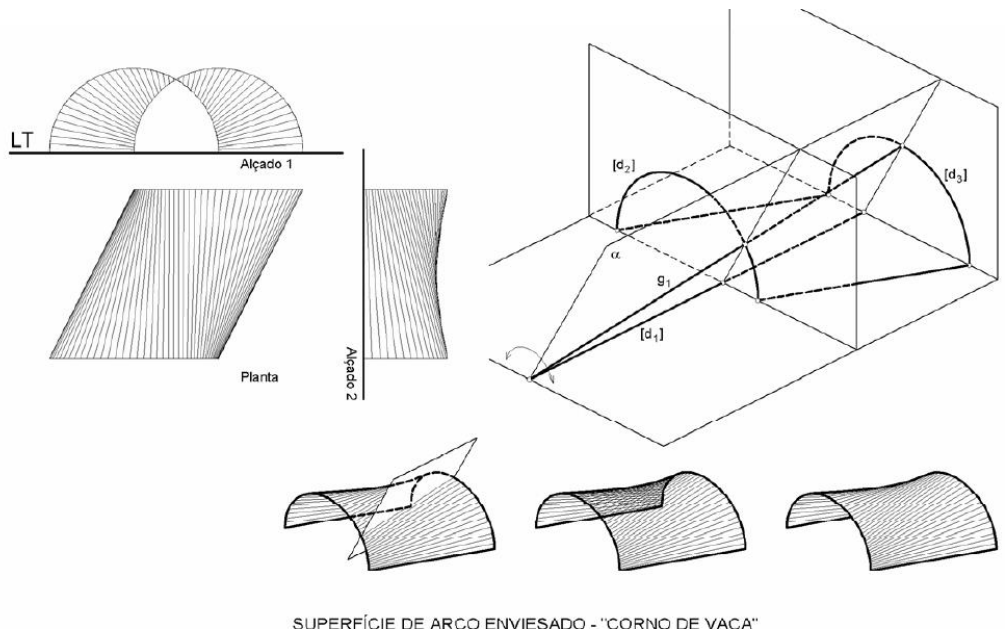
3.2.4.7. Superfícies de arco enviesado

As superfícies de arco enviesado são geradas pelas rectas definidas pelas intersecções sucessivas de um feixe de planos relativamente a duas curvas ou uma curva e uma recta.



SUPERFÍCIES DE ARCO ENVIESADO

Figura 68



SUPERFÍCIE DE ARCO ENVIÉSADO - "CORNO DE VACA"

Figura 69

3.2.4.8. Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada

Numa superfície empenada simplesmente regrada $[\alpha]$ o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , contém a geratriz recta g que por ele passa. Este plano intersecta a superfície segundo a recta g e segundo uma linha $[a]$. O plano π contém a recta t tangente à linha $[a]$ no ponto T .

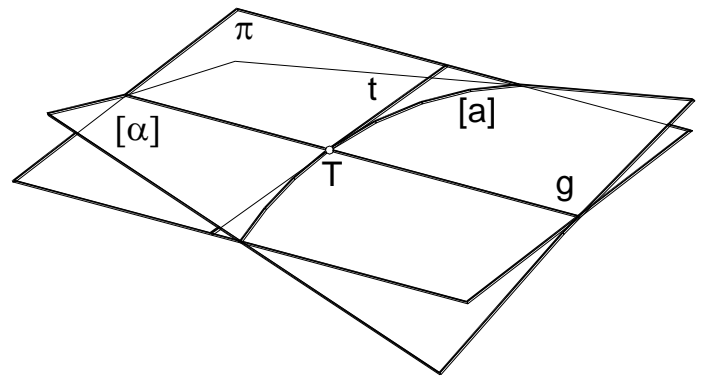


Figura 70

3.2.4.9. Plano tangente a uma superfície duplamente regrada

Numa superfície empenada duplamente regrada, $[\alpha]$, o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , fica definido pelas duas geratrizes rectas, g e j , que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.

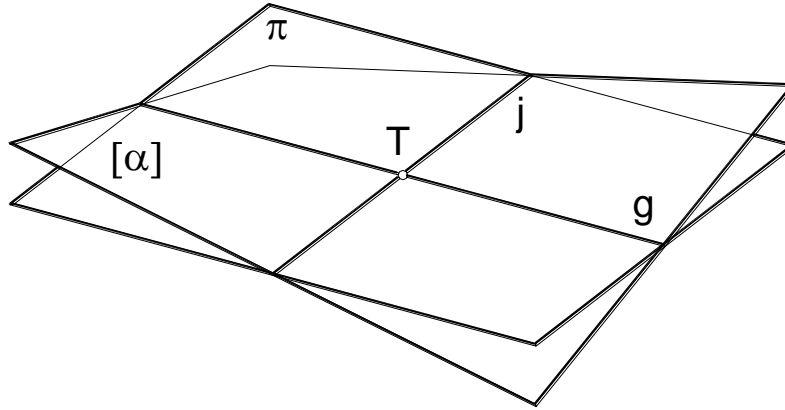


Figura 71

3.2.4.10. Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz

Considere-se a superfície empenada regrada $[\delta]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja g uma geratriz recta, da superfície $[\delta]$, que contém os pontos A , B e C pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos α_A , α_B e α_C tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente, ficam definidos pela geratriz g e pelas rectas t_A , t_B e t_C , respectivamente tangentes a $[a]$ em A , a $[b]$ em B e a $[c]$ em C .

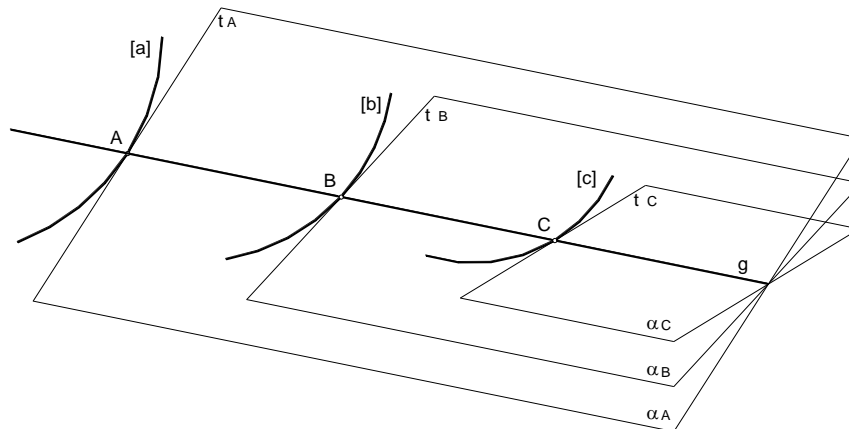


Figura 72

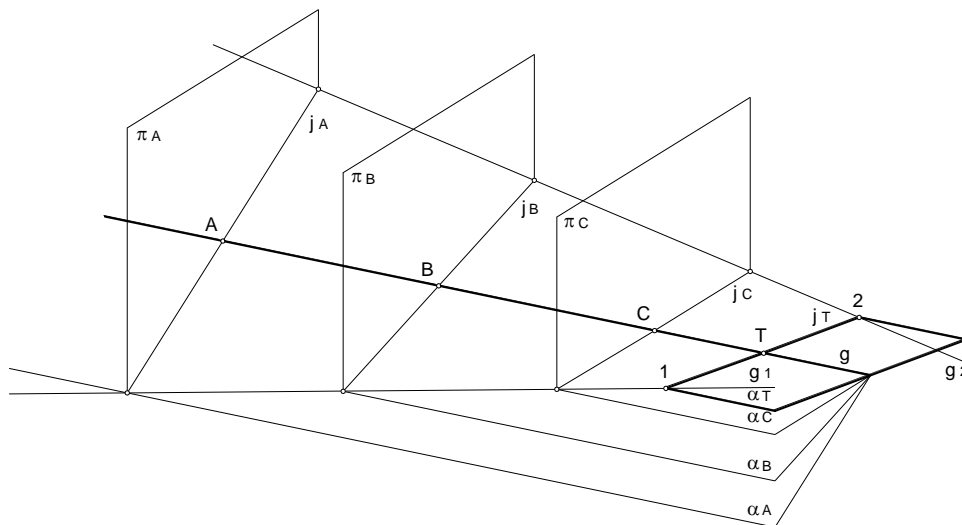


Figura 73

Na sequência do exposto para a Figura 72 tem-se:

Se se intersectar o plano α_A com um plano π_A qualquer (passante pelo ponto A), o plano α_B com um plano π_B qualquer (passante pelo ponto B), e o plano α_C com um plano π_C qualquer (passante pelo ponto C), obtêm-se, respectivamente, as rectas j_A , j_B e j_C tangentes à superfície regrada empenada $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Como os planos π_A , π_B e π_C podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

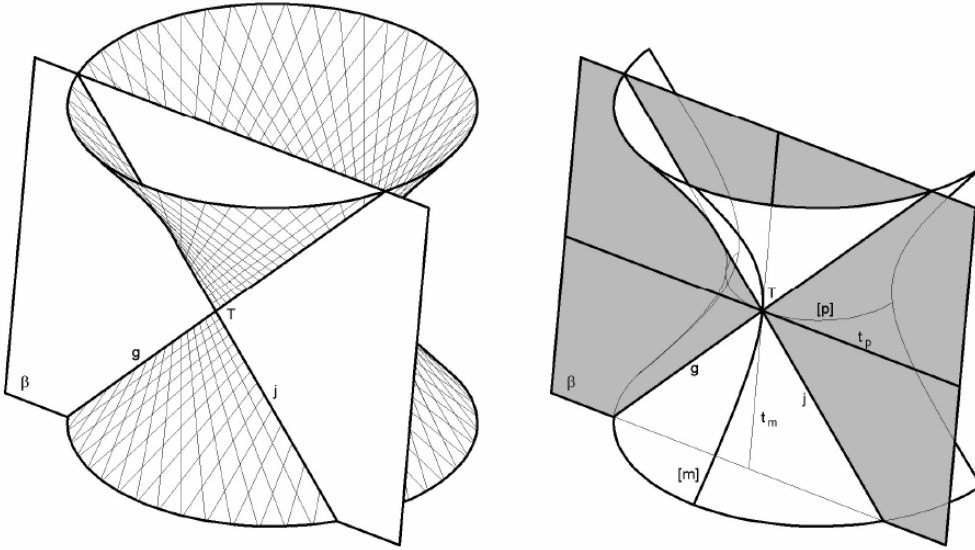
Se os três planos π_A , π_B e π_C forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.

Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Determinar o plano α_T , tangente à superfície $[\delta]$ num ponto T qualquer da geratriz g , consiste em determinar a geratriz j_T (do sistema contrário ao de g e concorrente com g no ponto T) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.

3.2.4.11. Hiperbolóide de revolução (planos tangentes)

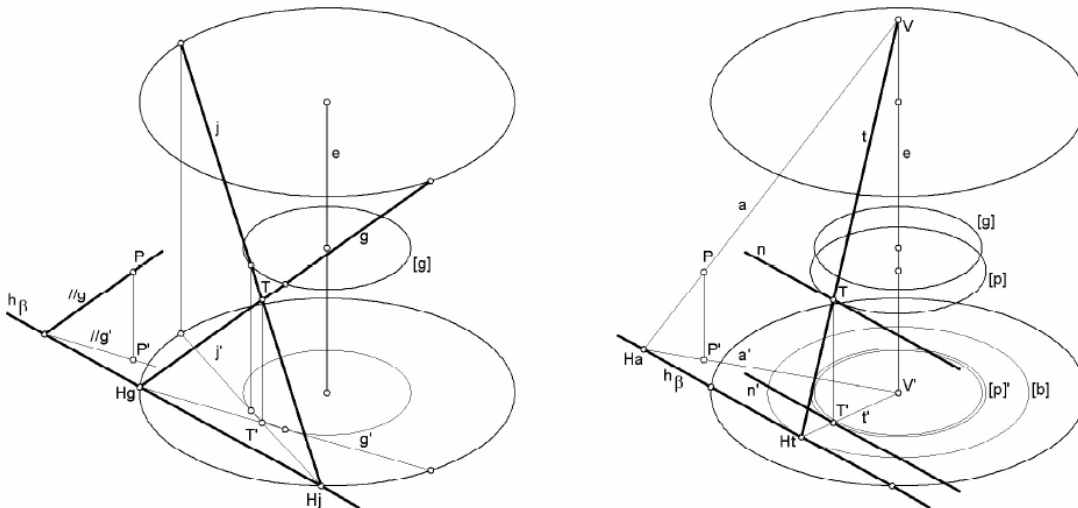
Como a superfície do hiperbolóide de revolução é duplamente regrada, o plano tangente fica definido pelas duas geratrizes, de sistemas contrários, que se intersectam no ponto de tangência.



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO DA SUPERFÍCIE

Figura 74

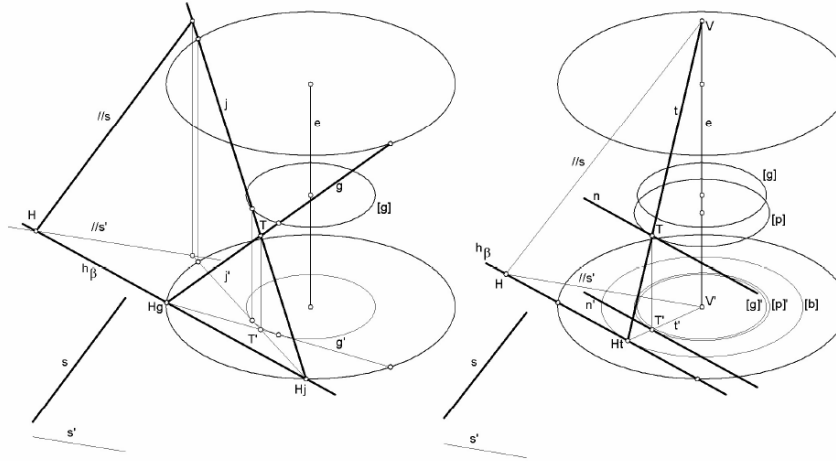
Porém, tal como para qualquer superfície, o plano pode ser definido por um par de rectas tangentes a duas secções que se cruzam, no ponto de tangência.



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR PONTO EXTERIOR

Figura 75

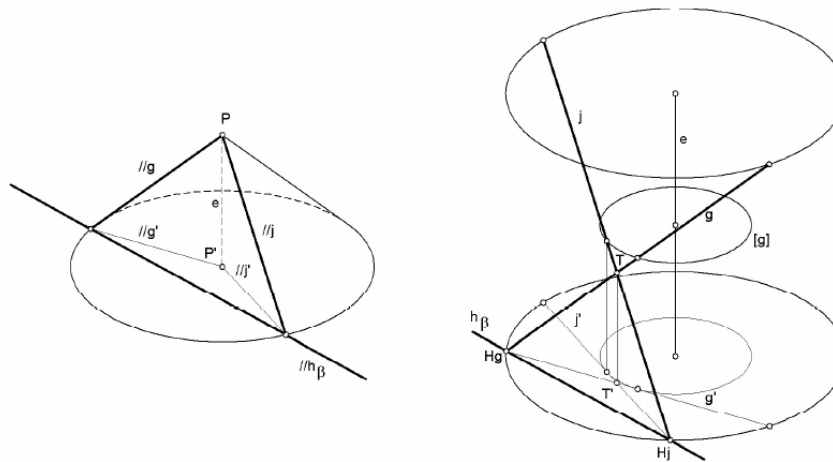
Dado um ponto exterior, é possível conduzir uma infinidade de planos tangentes à superfície. Uma forma de restringir o número de soluções é seleccionar uma linha da superfície (em princípio recta) sobre a qual se determina o plano tangente. Deste modo o número de soluções fica restringido a uma na generalidade dos casos.



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

Figura 76

Conduzir o plano tangente paralelo a uma recta implica conduzir por uma geratriz qualquer, de um dos sistemas de geratrizes, uma recta concorrente com a direcção dada. O ponto de tangência determina-se identificando a geratriz do outro sistema contida no plano.

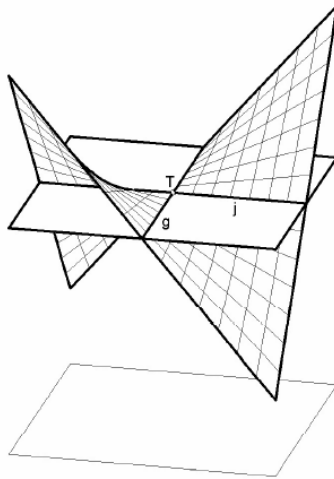


PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

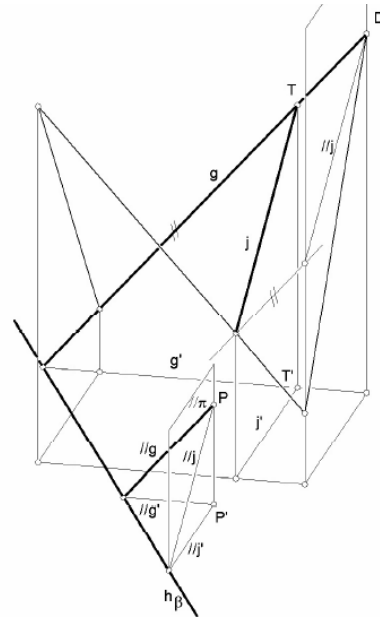
Figura 77

Para verificar se é possível conduzir um plano tangente paralelo a um plano dado, verifica-se se existem, num cone director, direcções comuns com o plano. Em caso afirmativo, o plano tangente fica definido pelas duas geratrizes com aquelas direcções, isto é, as geratrizes paralelas ao plano dado.

3.2.4.12. Parabolóide Hiperbólico (planos tangentes)



PLANO TANGENTE NUM PONTO DA SUPERFÍCIE



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO EXTERIOR

Figura 78

Também com o parabolóide hiperbólico, por ser uma superfície duplamente regradada, o plano tangente num ponto da superfície fica definido pelas duas geratrizes de sistemas contrários que se cruzam no ponto de tangência.

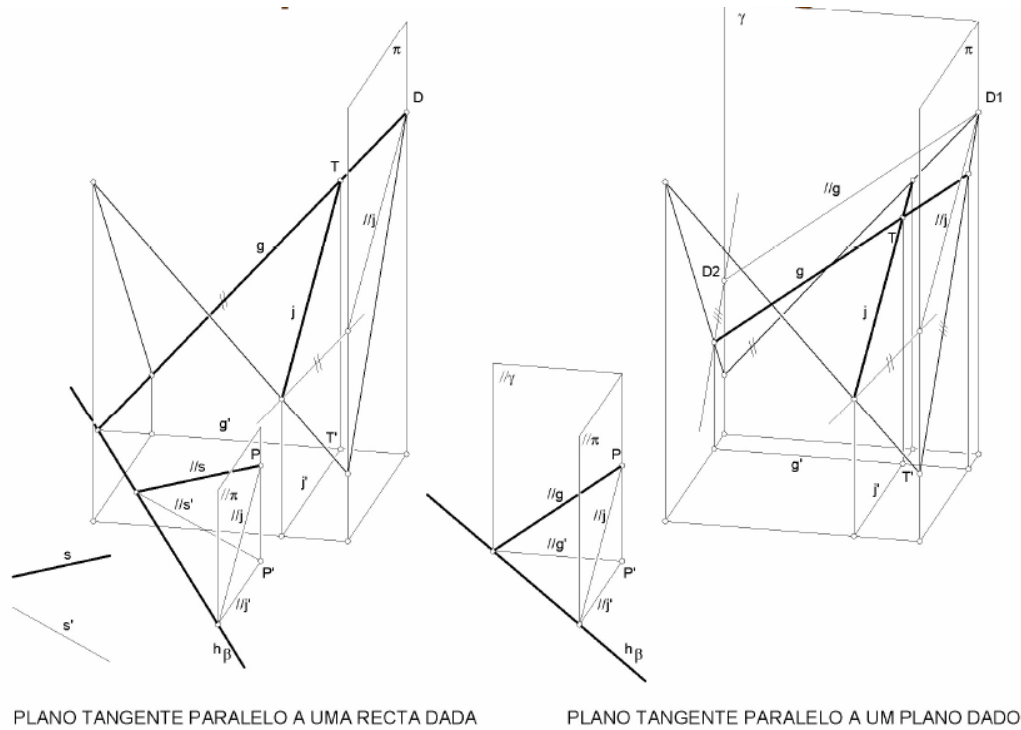


Figura 79

Determinar o plano tangente paralelo a uma recta ou paralelo a um plano dado é em tudo semelhante ao que foi referido para o hiperbolóide regrado. A diferença agora é a necessidade de nos referirmos ao plano director em vez do cone director.

3.2.4.13. Conóide (planos tangentes)

Tal como referido em 3.2.4.8, o plano tangente a uma superfície simplesmente regrada, conduzido por um ponto da superfície, contém a geratriz recta da superfície que passa no ponto. Uma outra recta pode ser obtida através da condução, no ponto em causa, de uma recta tangente a uma curva passante pelo ponto de tangência. Ou, então pode ser determinado, procurando conduzir aquela recta como geratriz de uma superfície duplamente regrada concordante com a superfície inicial, pois como já foi referido, duas superfícies concordantes, partilham os mesmos planos tangentes ao longo da linha de concordância.

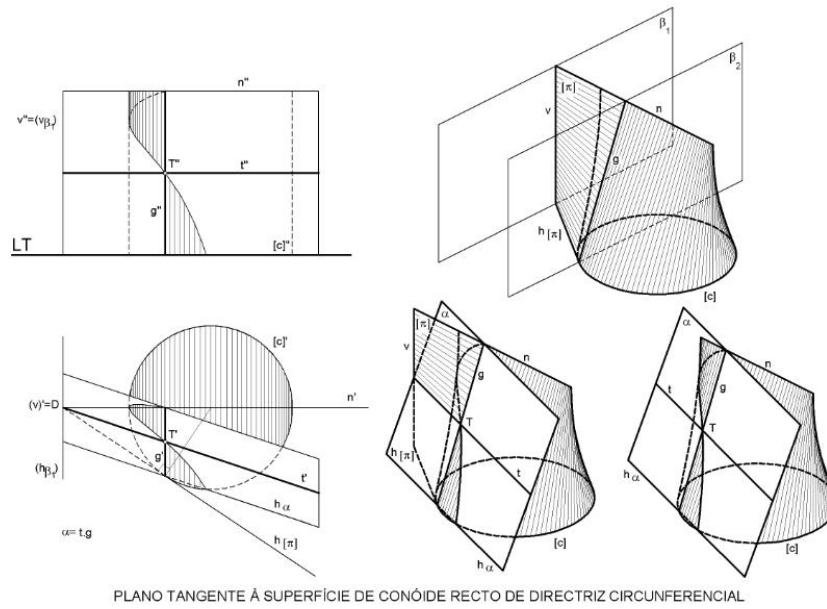
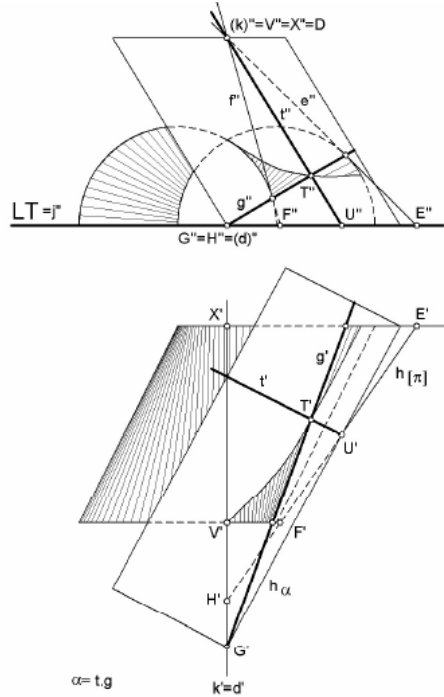


Figura 80

3.2.4.14. Corno de vaca (planos tangentes)

Esta superfície aparece-nos aqui por curiosidade. Com efeito, o modo de a tratar é em tudo idêntico ao caso anterior.



PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DO "CORNO DE VACA"

Figura 81

3.2.4.15. Concordâncias como composição de superfícies

É possível passar suavemente de uma superfície para outra, se elas forem concordantes, isto é, se ao longo da linha comum a ambas, os planos tangentes forem os mesmos. Nas duas figuras dadas abaixo, apresentam-se concordâncias entre várias superfícies e o parabolóide hiperbólico.

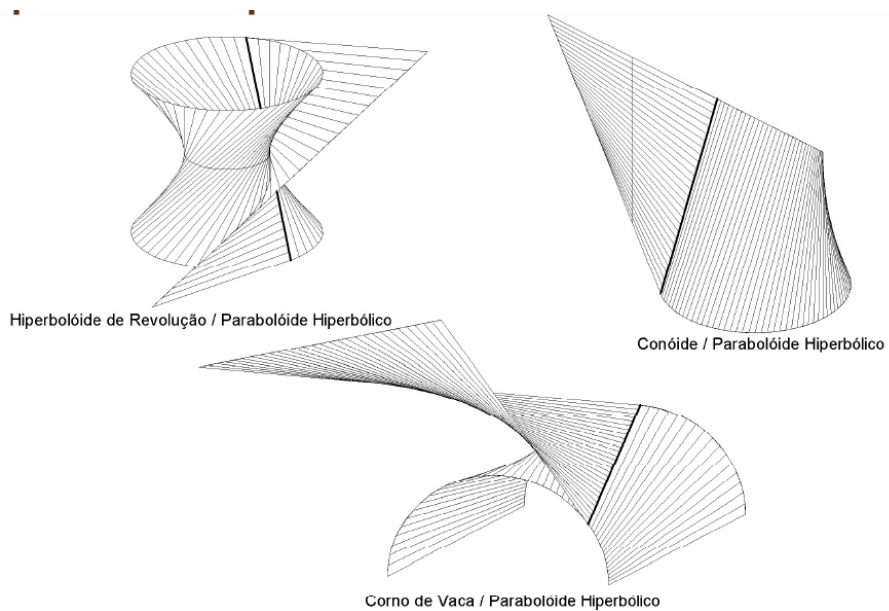


Figura 82

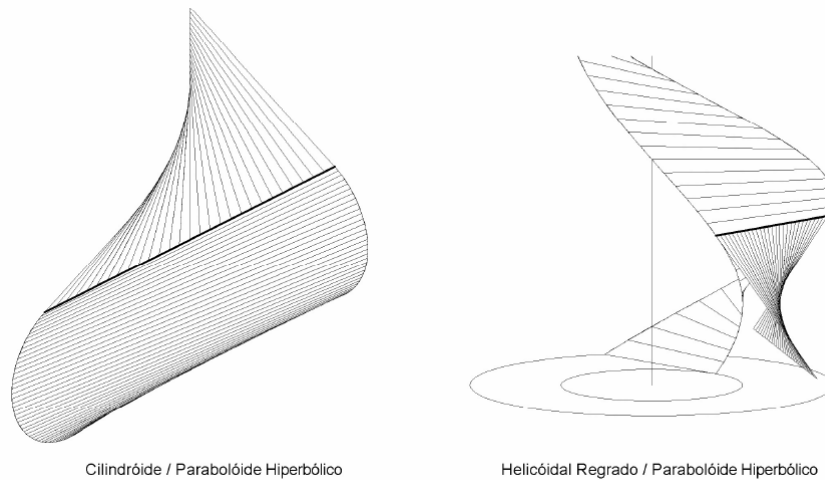


Figura 83

3.2.5. Linhas e Superfícies NURBS no espaço

Tudo aquilo que se referiu relativamente às linhas de Bézier, B-splines e NURBS no plano, pode ser facilmente expandido para o espaço tridimensional. Por exemplo, os segmentos de recta do polígono de controlo de uma curva de Bézier de grau três não têm de estar todos no mesmo

plano. E o mesmo se aplica às B-Splines e às NURBS. Esta é uma forma de generalizar a representação de curvas no espaço.

Estas curvas, quer sejam planas ou não, colocadas espacialmente podem servir de directrizes para a geração de superfícies NURBS.

No ponto anterior, descreveu-se toda uma série de superfícies. Curiosamente, provavelmente não se encontrarão muitas delas como primitivas geométricas em muitas ferramentas de modelação 3D. Uma forma de representação daquelas superfícies é por aproximação através de superfícies NURBS. Note-se porém que, as superfícies NURBS, com os pesos adequados atribuídos aos pontos de controlo, permitem representar de forma rigorosa (geometricamente rigorosa) esferas, parabolóides, etc. Nas duas figuras seguintes pode-se observar o efeito de alterar o peso dos vértices da rede de controlo das superfícies.

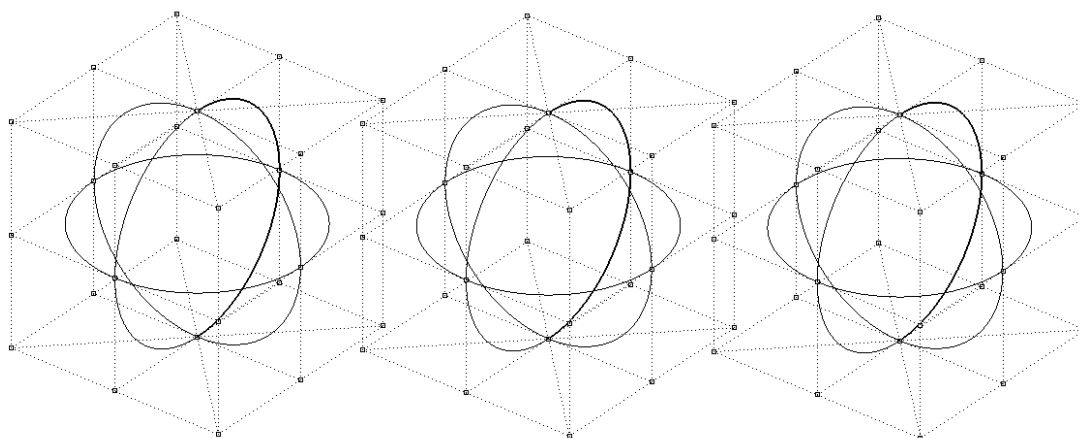


Figura 84

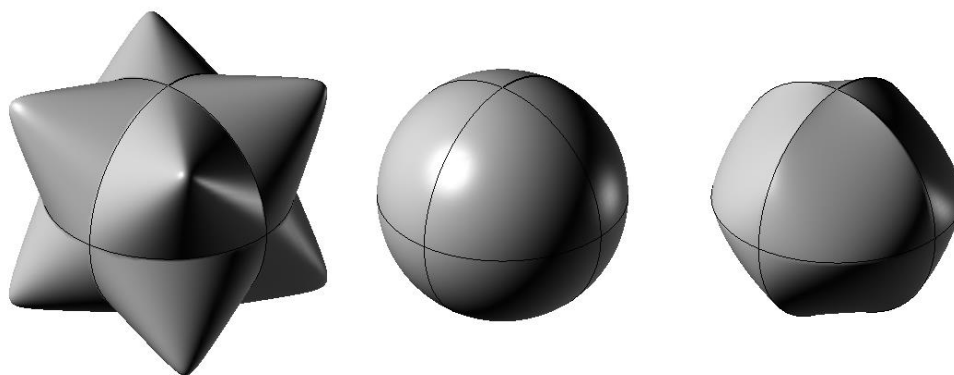


Figura 85

Em relação à figura central (em que se representa uma superfície esférica) foram aumentados os pesos relativos aos vértices do “cubo” de controlo (à esquerda) e diminuídos os pesos dos mesmos vértices (à direita). Isto é possível, porque a superfície está representada como uma NURBS.

Genericamente, uma superfície NURBS fica definida por uma grelha de pontos de controlo, e respectivos pesos associados, e pelo grau (e ordem) das suas geratrizes nas duas direcções paramétricas de desenvolvimento da superfície. Estas duas direcções paramétricas, usualmente notadas pelas letras U e V, podem ser visualmente representadas através de uma grelha de curvas ISOPARAMÉTRICAS.

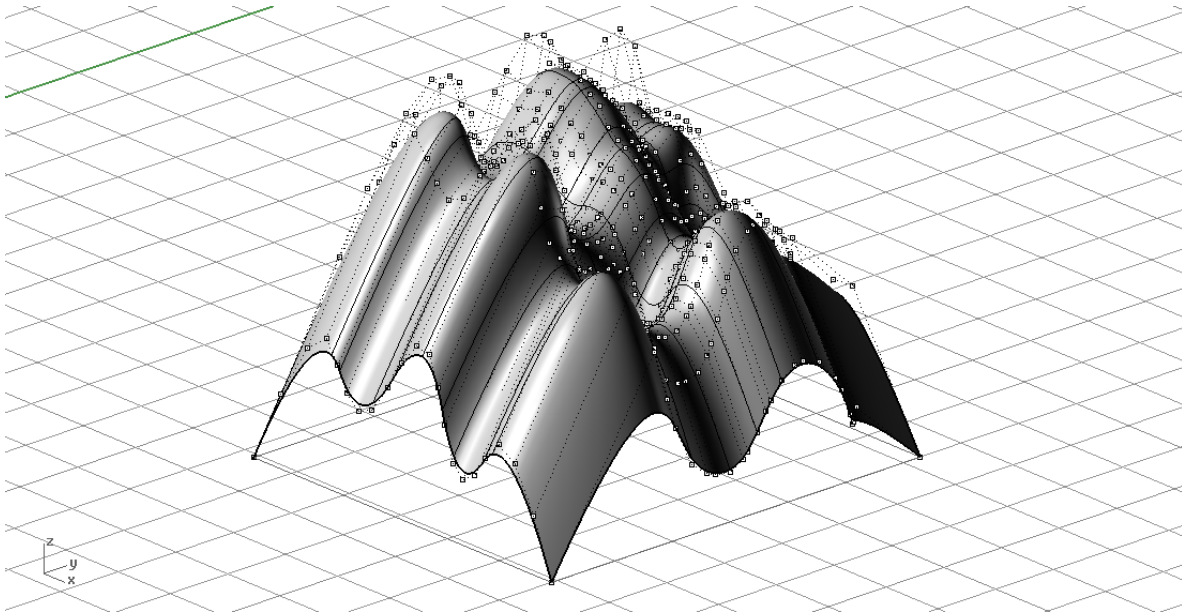


Figura 86

Uma curva isoparamétrica é uma curva que, numa das direcções paramétricas, corresponde a um valor constante de um parâmetro, no espaço paramétrico (que é distinto do espaço geométrico).

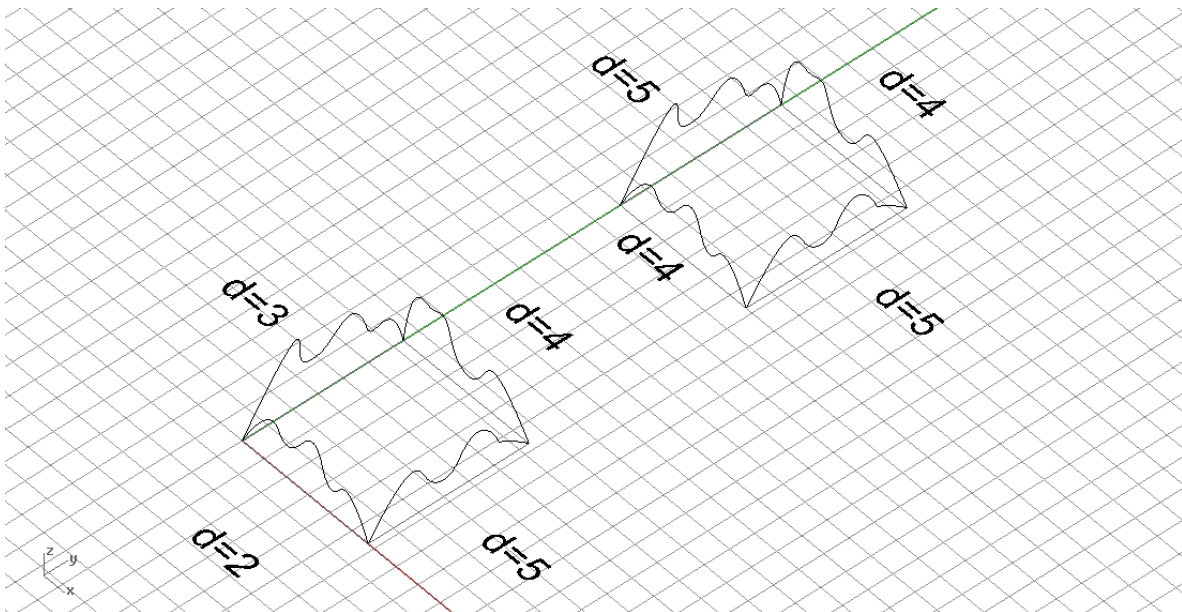


Figura 87

Se uma superfície NURBS for gerada por curvas de graus diferentes numa das direcções paramétricas, em geral é assumido o maior grau para a geração da superfície nessa direcção. Nas duas figuras anteriores, fica ilustrado esse facto. As linhas de entrada para a geração da NURBS tinham grau 2 e 4 numa das direcções paramétricas, e 3 e 5 na outra direcção paramétrica. Assim, na primeira direcção foi assumido o grau 4 para a primeira direcção paramétrica e o grau 5 para a outra direcção paramétrica. Isto deve-se ao facto de ser possível aumentar o grau de uma curva sem lhe alterar a forma, mas não ser possível o contrário.

3.2.5.1. Lógicas de geração de superfícies

As lógicas de modelação podem ser variadas.

Neste ponto apresentam-se as lógicas de modelação implementadas no *software* Rhinoceros, porém, outros softwares podem implementar outras lógicas. Recomenda-se uma leitura cruzada deste ponto com o que está referido nas tabelas das páginas 22 e 36, relativas à classificação de superfícies. As várias lógicas contêm variantes. Aqui apenas se apresentam as ideias gerais.

Polígonos

Os polígonos podem ser gerados de vários modos. Um rectângulo pode ser desenhado através da função *Plane*, um polígono qualquer, de n lados, pode ser gerado definindo as curvas planas que o delimitam (função *PlanarSrf*).

Superfícies de revolução (*revolve*)

Em relação a este tipo de superfícies, veja-se o que foi dito no parágrafo 3.2.2.

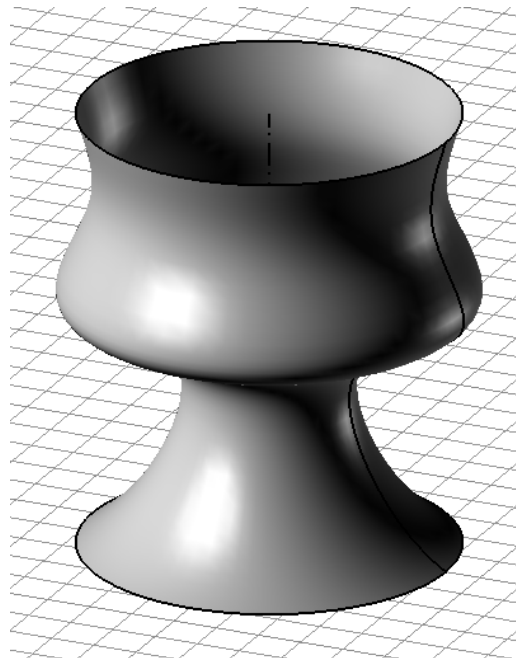


Figura 88

Superfícies de “revolução” (*rail revolve*)

Estas superfícies baseiam-se na ideia de revolução, porém não são verdadeiramente superfícies de revolução. A geratriz roda em torno de um eixo, no entanto deforma-se nessa rotação em função das distâncias dos pontos de uma nova linha (*rail*) em relação ao eixo. Essas sucessivas deformações são, na prática, transformações afins da geratriz em direcções ortogonais ao eixo.

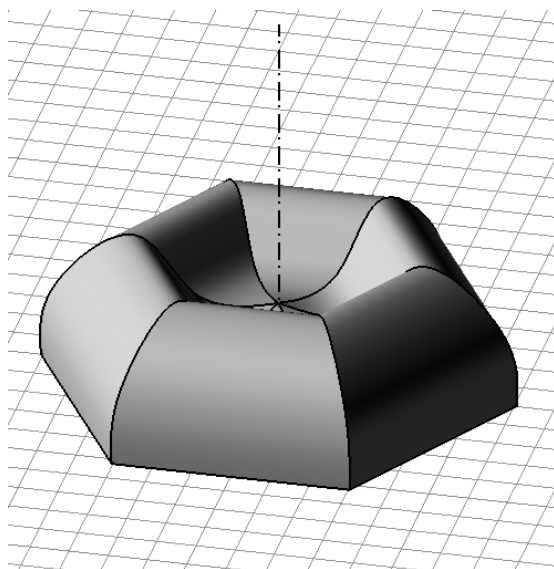


Figura 89

Superfície gerada por deslocamento da geratriz apoiada numa directriz (*sweep 1 rail*)

Estas superfícies baseiam-se no deslocamento da linha geratriz ao longo de uma directriz com a restrição de se manter o ângulo entre ambas em todo o movimento.

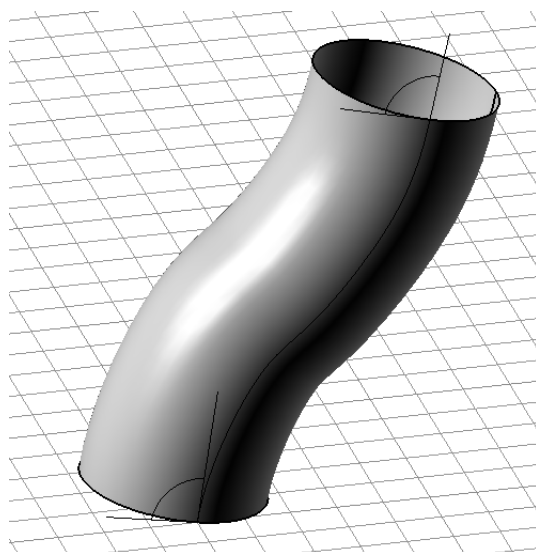


Figura 90

Superfície gerada por deslocamento da geratriz apoiada em duas directrizes (*sweep 2 rails*)

Neste exemplo foram dadas duas directrizes horizontais (*rails*) ao longo das quais a geratriz se moveu, e as posições extremas de uma geratriz, que sendo diferentes, supõem que a geratriz é deformável. A geratriz começa por ser um arco de semi-circunferência para terminar num arco de semi-elipse. Nas posições intermédias, o rácio entre eixo menor e eixo maior vai variando pelas situações intermédias às dos dois extremos das posições da geratriz.

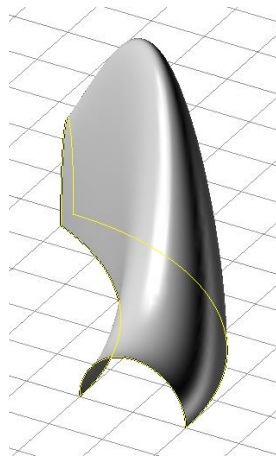


Figura 91

É possível definir mais que duas posições (e geometrias) para a geratriz.

Superfície gerada por extrusão (*extrude*)

A ideia base de uma extrusão consiste na definição de uma geratriz que se desloca segundo uma directriz. Neste deslocamento a geratriz mantém a orientação.

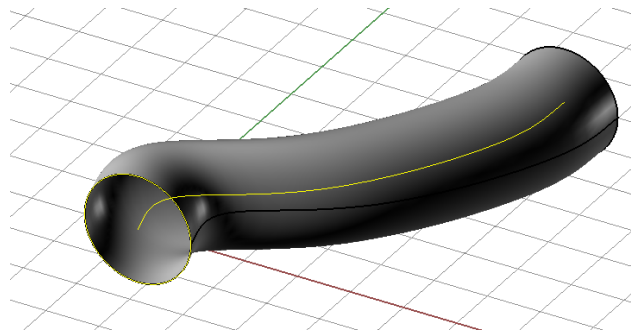


Figura 92

Há no entanto outros tipos de extrusão, podendo a geratriz alterar a sua dimensão e proporções

Superfície gerada por interpolação de posições de curvas (*loft*)

Consideradas várias curvas dadas espacialmente numa determinada sequência, a superfície é gerada ajustando-se às mesmas.

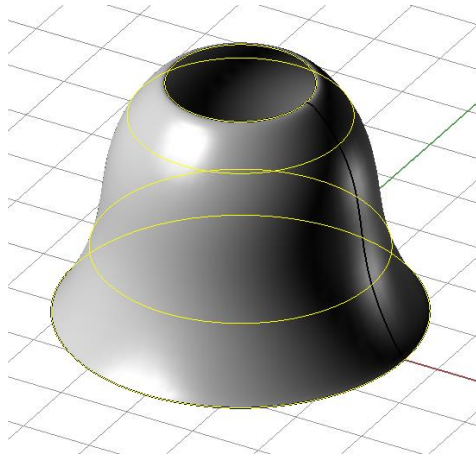


Figura 93

Superfície gerada por interpolação de uma rede espacial de curvas (*curve network*)

À semelhança do caso anterior, a superfície é gerada por interpolação. No entanto, neste caso, é dada uma rede de curvas no espaço que informam sobre o “esqueleto” da superfície.

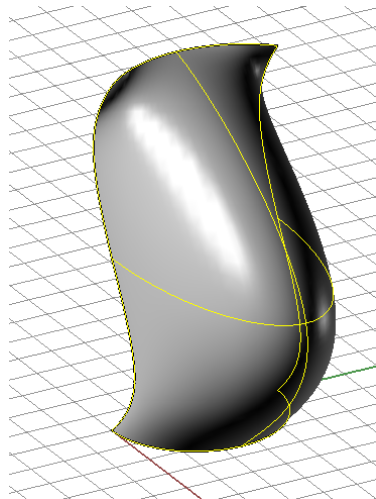


Figura 94

Um modo idêntico de gerar superfícies é através da definição de uma rede espacial de pontos (função *SrtPtGrid*). Cada linha de pontos corresponde, na prática, a uma linha geratriz da superfície numa das direcções paramétricas da mesma.

Superfície dados quatro vértices (*corner points*)

A superfície gerada deste modo é o parabolóide hiperbólico.

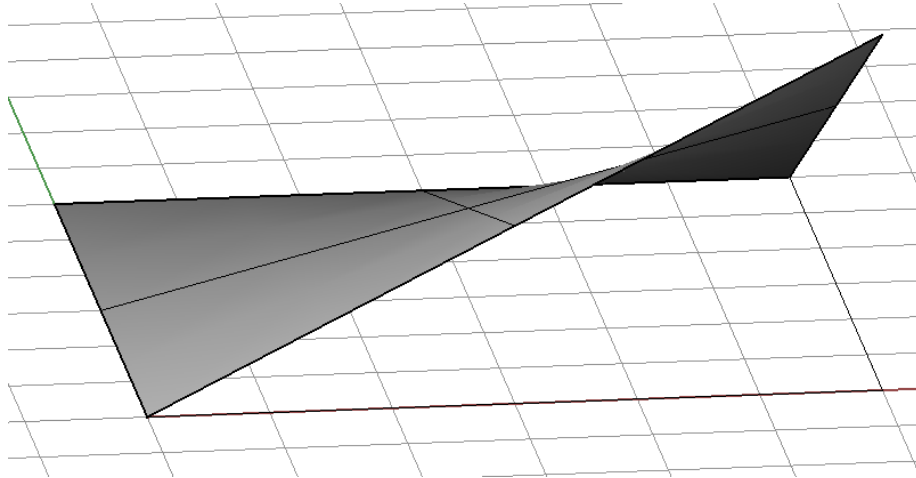


Figura 95

Superfície dadas linhas de contorno (*edge curves*)

Neste caso, a superfície pode ser definida por 2, 3 ou 4 linhas. Idealmente essas devem ser linhas do contorno para melhor controle do resultado

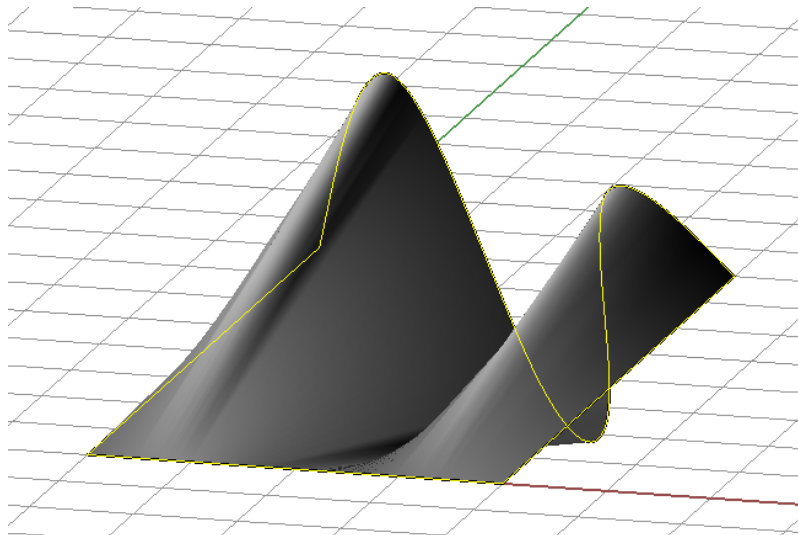


Figura 96

Superfície passante por um conjunto de linhas (*patch*)

Neste caso, as linhas também podem ser limites de superfícies. E assim sendo, pode ser controlada a tangência relativamente a essas superfícies.

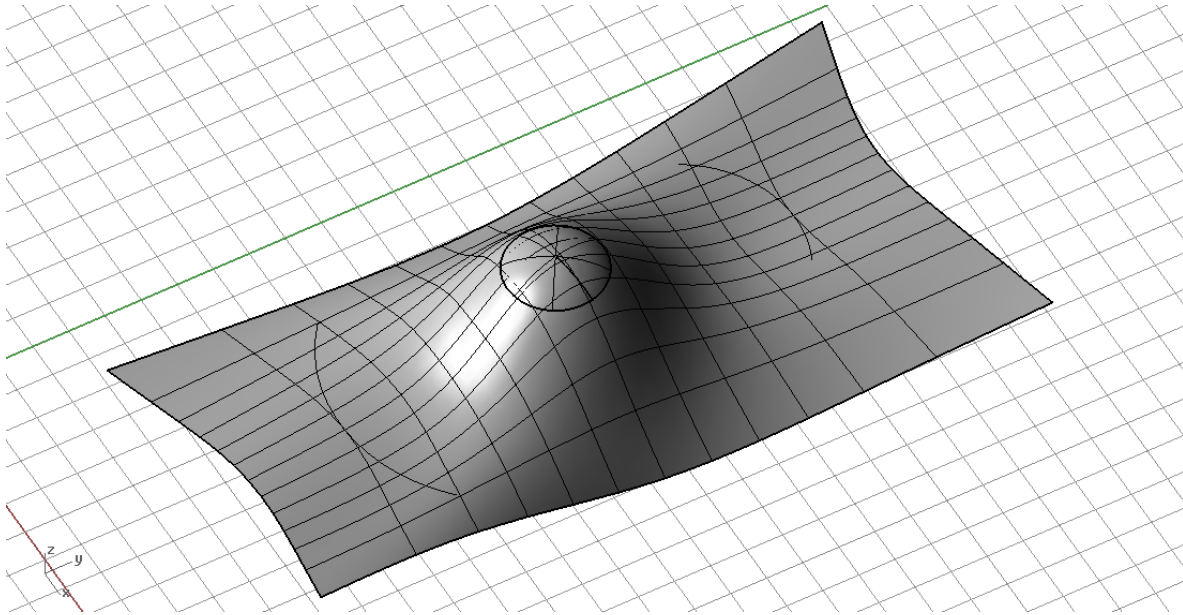


Figura 97

Superfície gerada por panejamento sobre superfícies dadas (*drape*)

A metáfora para a geração deste tipo de superfície é a de cobrir um conjunto de superfícies dadas com uma nova superfície como se fossem cobertas com um pano ou com uma rede elástica. É importante notar que, no *software Rhinoceros* este tipo de superfície é sempre gerada considerando a vista corrente. É também importante notar que o controlo da profundidade da superfície é função do ponto mais próximo e do ponto mais afastado da câmara na vista corrente.

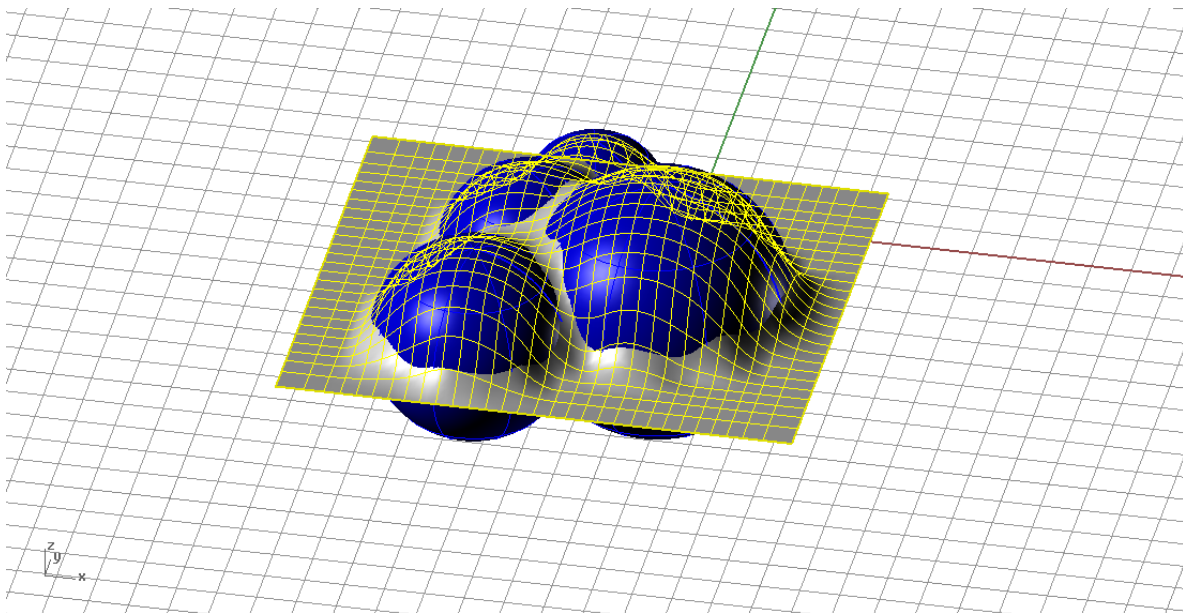


Figura 98

3.3. Linhas a partir de superfícies

Se por um lado, as linhas são o que dá origem às superfícies através do seu movimento no espaço, também é facto que podem ser geradas linhas a partir das superfícies.

De uma superfície limitada podem ser extraídos esses limites. De uma superfície NURBS podem ser extraídas linhas isoparamétricas. É possível mapear linhas em superfícies através de diferentes tipos de transformação (projectão paralela, projectão normal à superfície, correspondência paramétrica).

Porém o modo mais popular de gerar linhas através de superfícies é através da intersecção, conforme se ilustra na figura seguinte.

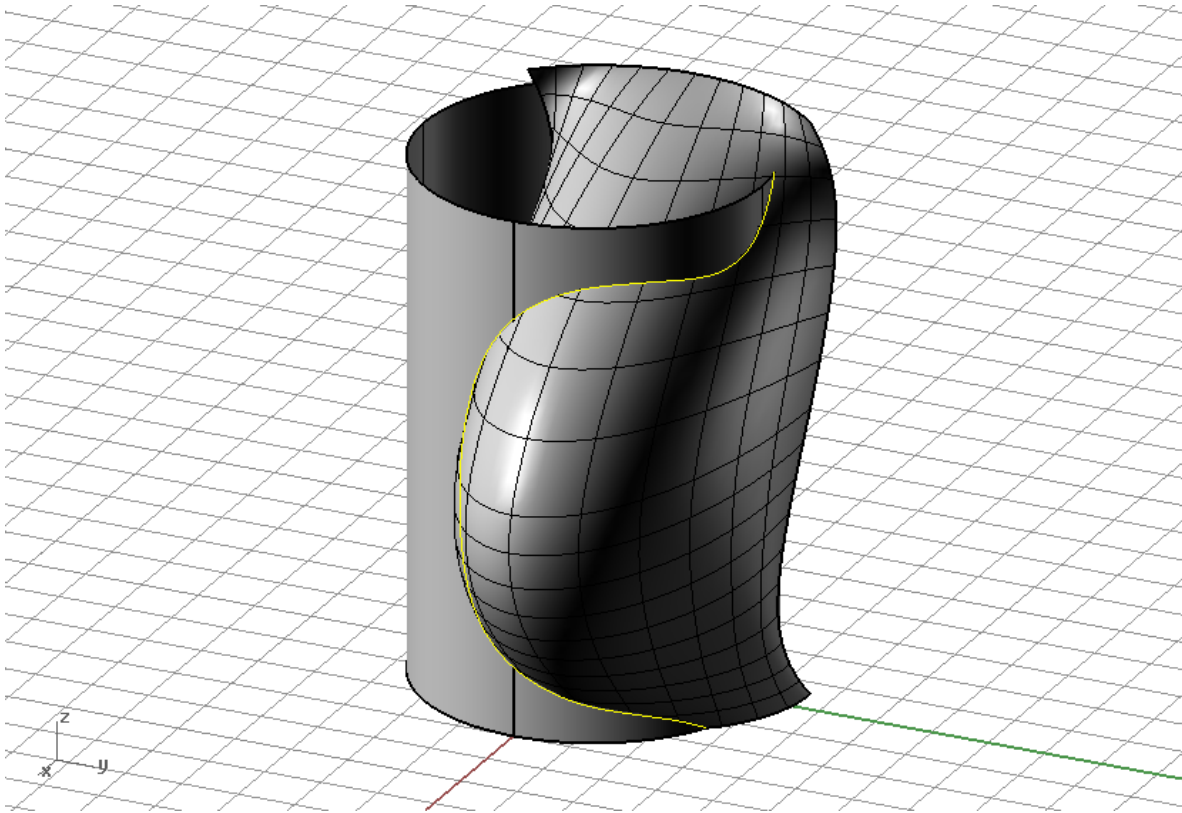


Figura 99

4. SÓLIDOS

Qualquer configuração de superfícies no espaço que encerre um volume, pode ser, conceptualmente associada a um sólido. As arestas desse sólido (não necessariamente rectas) serão as linhas de intersecção das várias superfícies, e estas linhas delimitarão as faces do sólido (não necessariamente planas).

4.1. Operações booleanas entre sólidos

As operações booleanas são de três tipos: a) união, b) subtracção, e c) intersecção.

A operação união corresponde a considerar tudo o que é comum e não comum aos sólidos base.

A operação subtração corresponde à diferença entre os sólidos base, isto é, aquilo que dos vários sólidos base é comum ao primeiro, é subtraído a este.

A operação de intersecção corresponde a considerar apenas a porção de volume comum aos sólidos base.

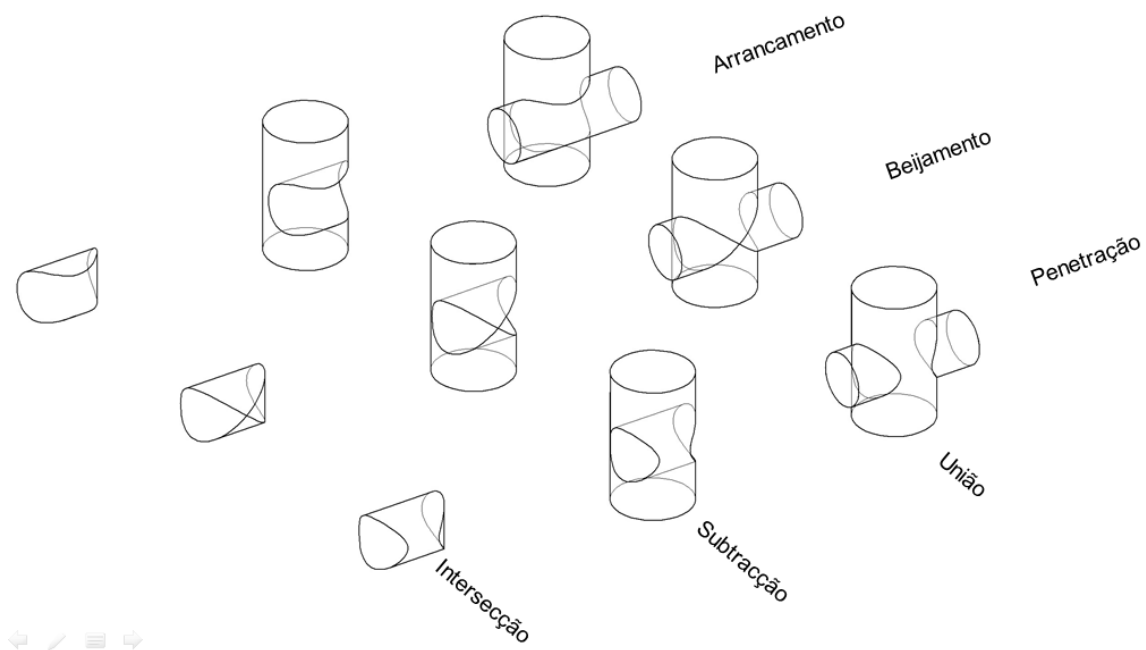


Figura 100

Em todos os casos, as arestas dos sólidos finais resulta sempre da intersecção das superfícies dos sólidos base.

Para além desta classificação das intersecções, é possível considerar outras, em particular no que concerne às características das linhas de intersecção entre as superfícies. Destas interessa-nos colocar particular relevo numa situação designada por BEIJAMENTO uma vez que o seu controlo é mais exigente. A condição que deve ser cumprida para que exista um ponto duplo na linha de intersecção entre duas superfícies é a de existir um plano tangente comum a ambas.