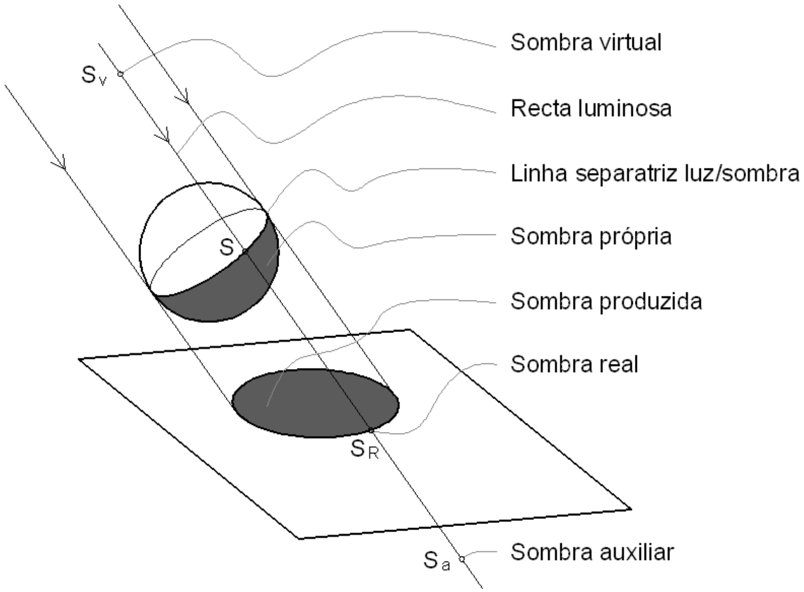
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 5

Estudo das sombras - isofotos.

# Estudo das sombras

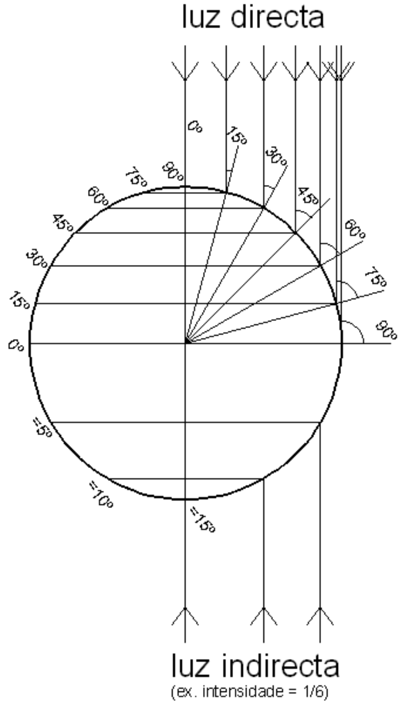


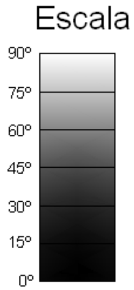

Se o objecto produzir sombra sobre si próprio acresce ainda a SOMBRA AUTO-PRODUZIDA.
O foco luminoso pode ser próprio ou impróprio. Se for impróprio todas as rectas luminosas são paralelas entre si e fala-se de direcção luminosa.

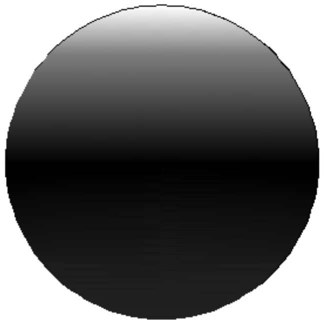
Embora este tópico incida sobre a perspectiva e a axonometria, ilustraremos o estudo das sombras apenas com alguns exemplos em perspectiva, a comentar na aula, deixando para as aulas práticas a resolução de exercícios relativos à axonometria.

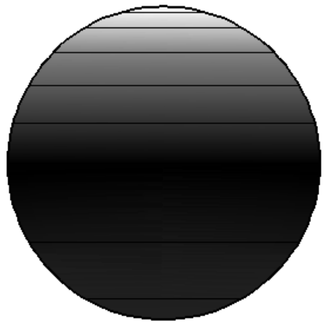
# Estudo das sombras – modelação luminosa

Se considerarmos a inclinação da luz relativamente às superfícies devemos notar que existe uma relação entre esta e a intensidade luminosa da luz reflectida. Acresce a isto o efeito da luz indirecta (atmosférica) de intensidade inferior à da luz directa. O resultado é o tratamento da luz nas superfícies através de uma escala de cinza em função da inclinação da direcção luminosa. Linhas correspondentes a igual inclinação luminosa designam-se por LINHAS DE ISOFOTO. Na figura são apresentadas as linhas de 0º, 15º, 30º, 45º, 60º, 75º e o ponto brilhante (correspondente a 90º). A separatriz corresponde à linha de isofoto de 0º.





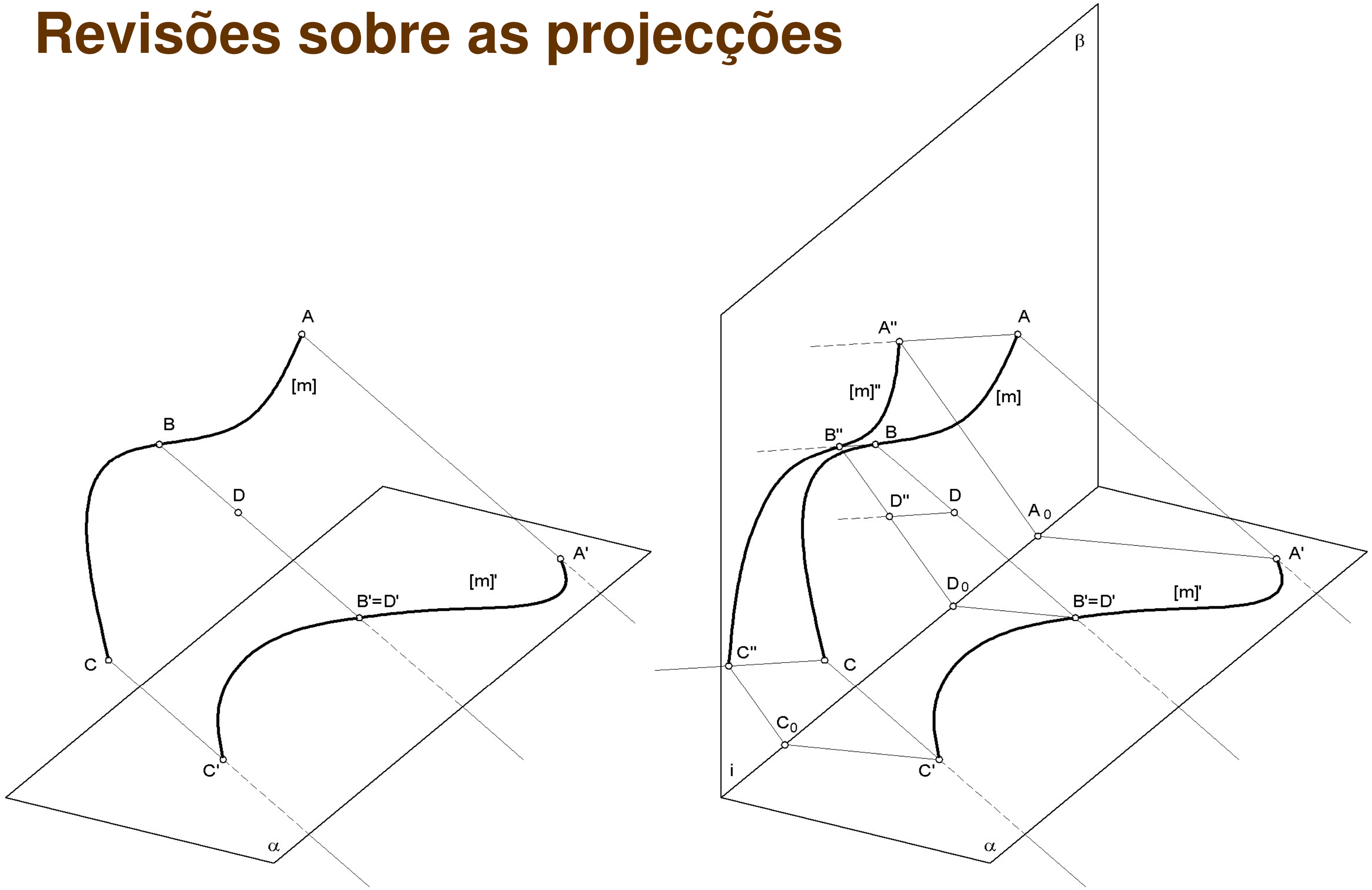
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 6

O sistema da múltipla projecção ortogonal.
Estudo das superfícies:
- Noções gerais.
- Critérios de classificação.

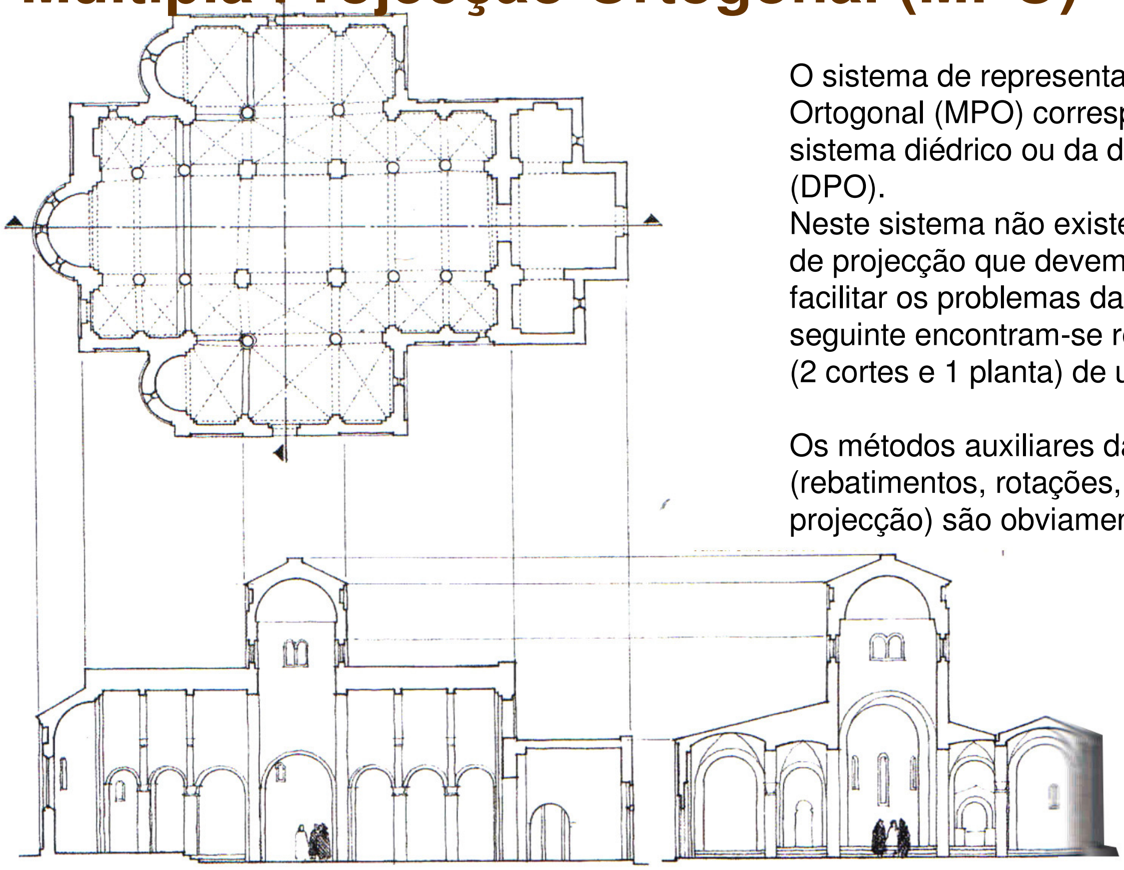
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Revisões sobre as projecções



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Múltipla Projecção Ortogonal (MPO)




O sistema de representação da Múltipla Projecção Ortogonal (MPO) corresponde a uma extensão do sistema diédrico ou da dupla projecção ortogonal (DPO).
Neste sistema não existe limite ao número de planos de projecção que devem ser orientados de modo a facilitar os problemas da representação. Na figura seguinte encontram-se relacionadas três projecções (2 cortes e 1 planta) de um edifício.

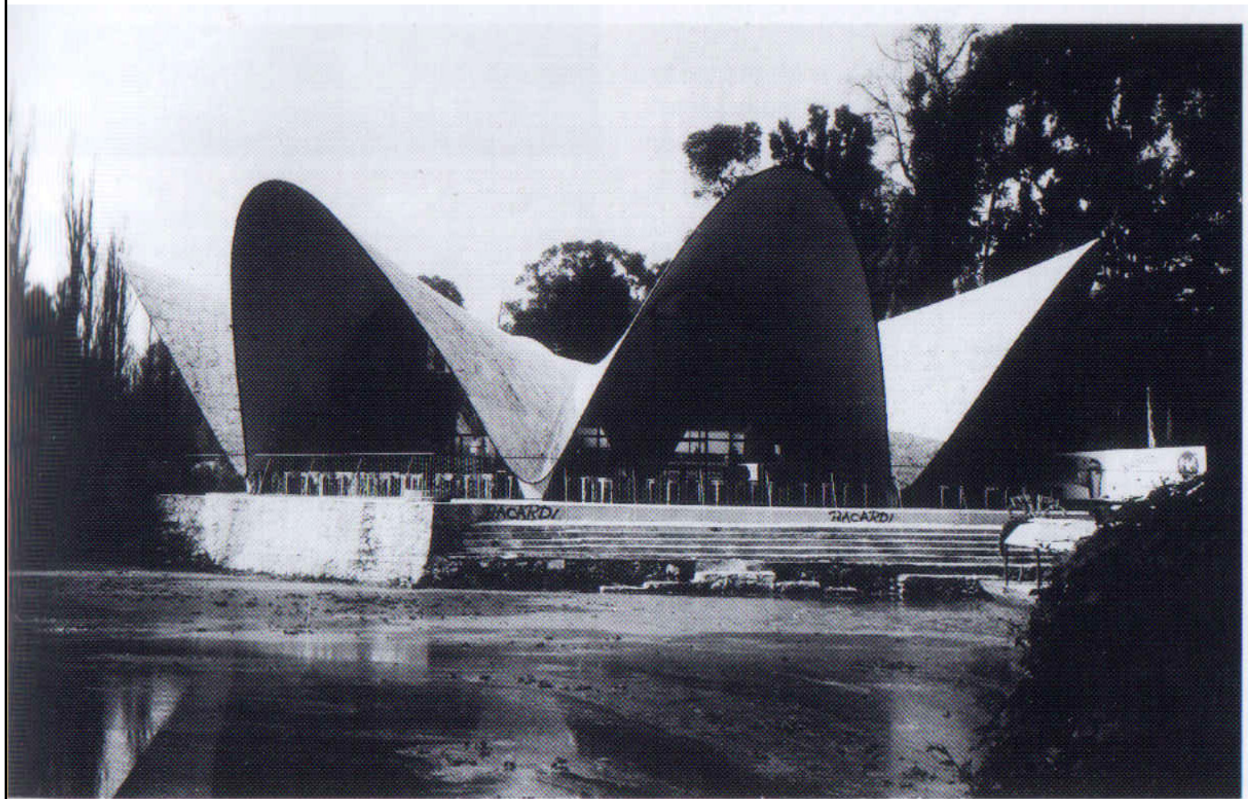
Os métodos auxiliares da representação da DPO (rebatimentos, rotações, mudanças de plano de projecção) são obviamente válidos na MPO.

In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> SUPERFÍCIES NA ARQUITECTURA

## >> SUPERFÍCIES NA ARQUITECTURA

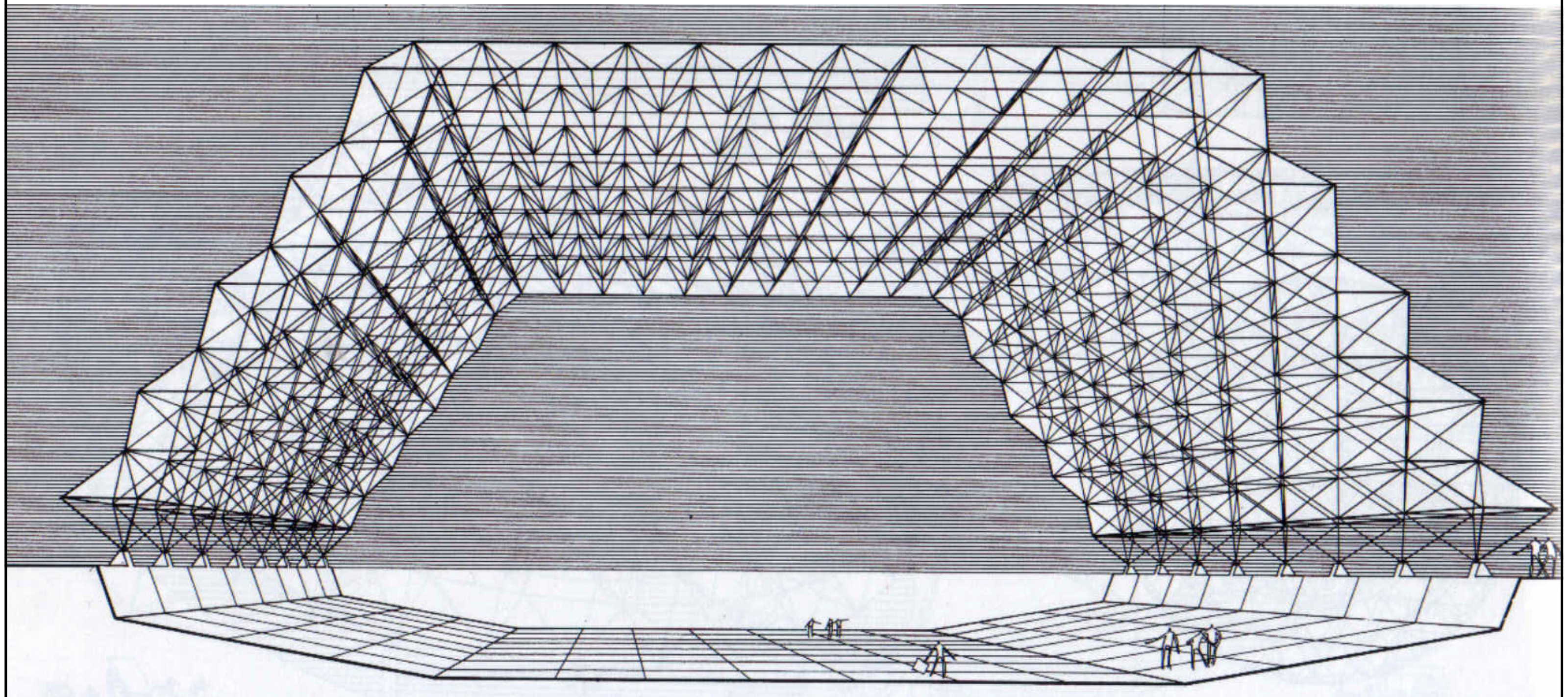



Felix Candela's delightful hyperboloid concrete shell structure for a restaurant in Xochimilco, Mexico, 1958. The concrete is only 10 cm (4in.) thick, and its strength depends entirely on its curvature. [2.19]

In
BERGER H: Light structures – structures of light. 1996. Birkhauser. ISBN 3-7643-5352-X

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# >> SUPERFÍCIES NA ARQUITECTURA



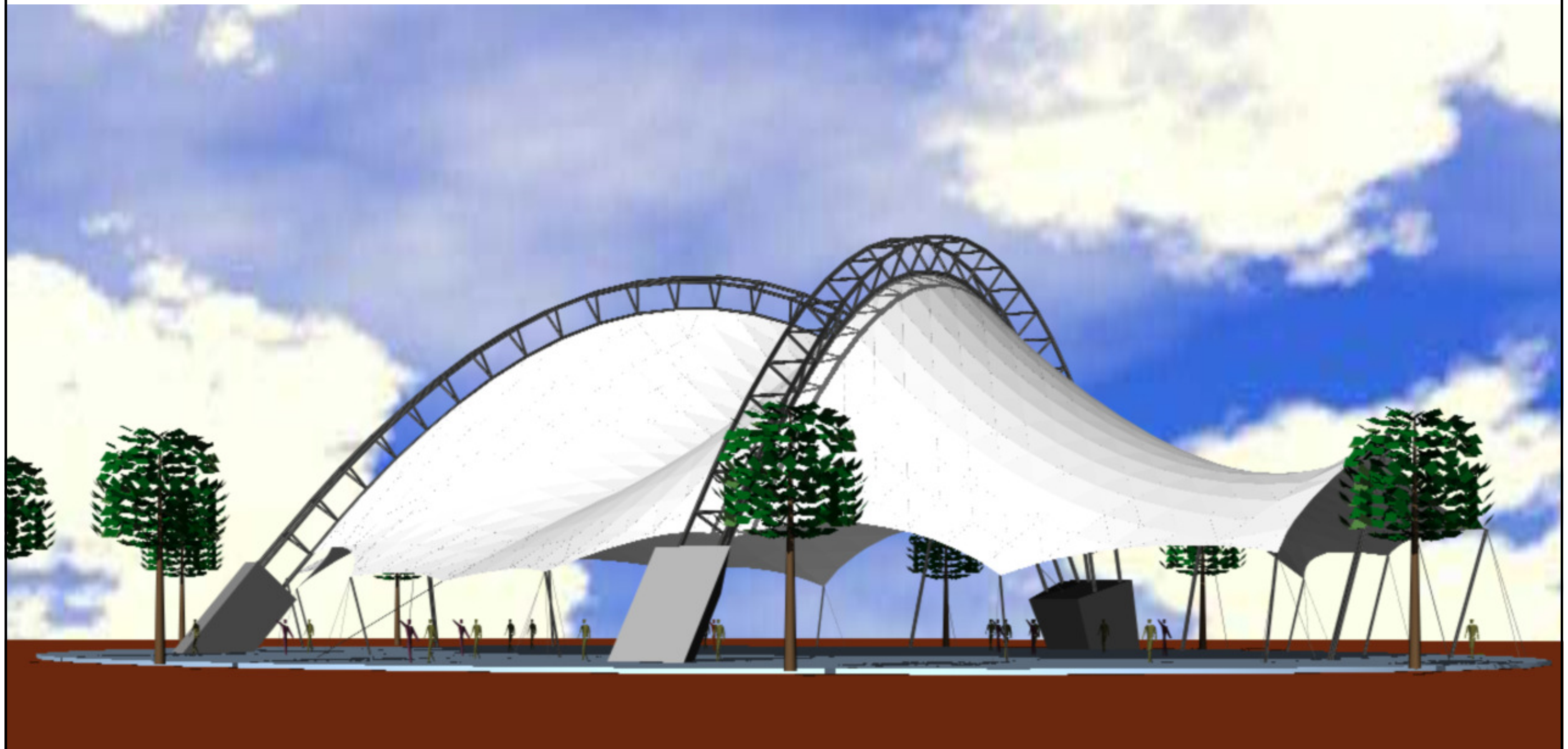
Malla espacial en un plano para cerramiento superior y lateral

Treliça espacial plana para estrutura de cobertura/parede inteiriça

In
ENGEL H: Sistemas estruturais. 1997. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1800-4

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> SUPERFÍCIES NA ARQUITECTURA



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito.

A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

Cada plano tem uma ORIENTAÇÃO; orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si.

Cada plano contém uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito.

A cada orientação de planos corresponde apenas uma recta imprópria, isto é, todos os planos paralelos entre si têm a mesma recta do infinito, daí dizer-se que planos paralelos se intersectam no infinito.

Uma orientação contém uma infinidade de direcções.

O lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as rectas impróprias é o PLANO IMPRÓPRIO, isto é, o plano do infinito.

A SUPERFÍCIE é uma entidade bidimensional gerada pelo movimento contínuo da linha.

A GERATRIZ é a linha, deformável ou indeformável, que se move no espaço para gerar a superfície.

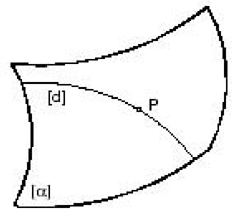
A DIRECTRIZ é a linha ou superfície em que se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a directriz for uma superfície, então a superfície gerada diz-se de NÚCLEO.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

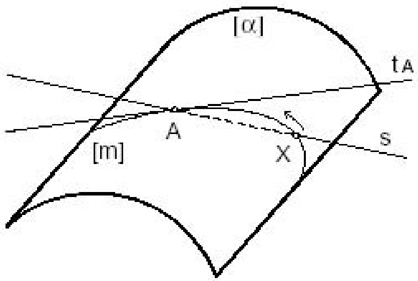
# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Condições de pertença**




Se o ponto $P$ pertencer à linha $[d]$ e a linha $[d]$ pertencer à superfície $[\alpha]$, então o ponto $P$ pertence à superfície $[\alpha]$.

**Recta tangente**




O ponto $A$ pertence à linha $[m]$ e a linha $[m]$ pertence à superfície $[\alpha]$.

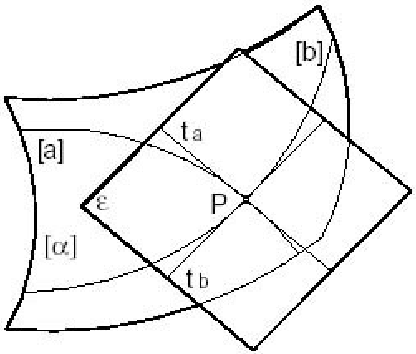
A recta $t_A$, tangente à linha $[m]$ no ponto $A$, é a posição limite da recta secante $s$, quando o ponto $X$ tende para o ponto $A$.

Se a recta $t_A$ é tangente à linha $[m]$, é também tangente à superfície $[\alpha]$.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Plano tangente**




Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas, pertencentes à superfície $[\alpha]$, concorrentes no ponto $P$.

Sejam $t_a$ e $t_b$ as rectas tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, no ponto $P$.

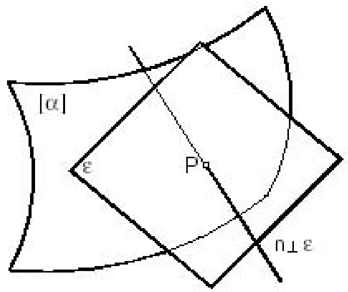
O plano $\varepsilon$, definido pelas rectas $t_a$ e $t_a$, é o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

O plano $\varepsilon$ é o lugar geométrico de todas as rectas tangentes à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

Do plano tangente a uma superfície diz-se que é OSCULANTE.

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Recta normal e plano normal**



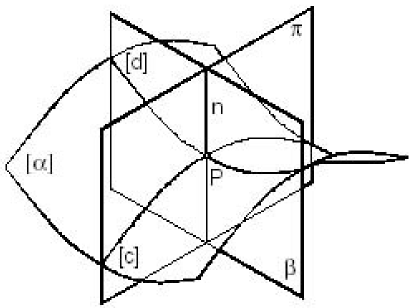

Seja $\varepsilon$ o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

Seja $n$ uma recta perpendicular ao plano $\varepsilon$ no ponto $P$.

A recta $n$ diz-se NORMAL à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

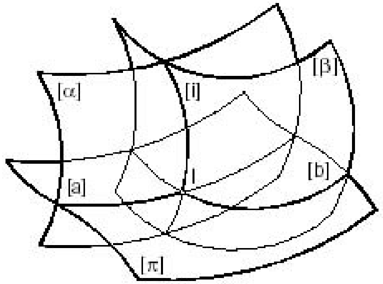
De um plano que contenha a recta $n$ diz-se que é normal à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

**Curvatura de uma superfície**

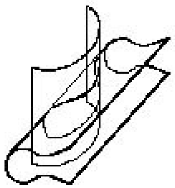


# Estudo das Superfícies - Noções gerais

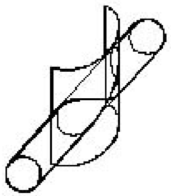
**Intersecção de superfícies**



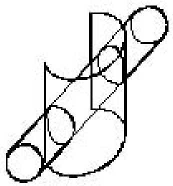

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto $I$ da linha $[i]$.



Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.



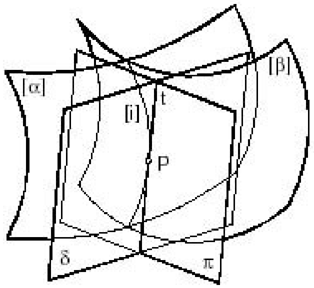
Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.



Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Recta tangente à linha de intersecção**




Seja $[i]$ a linha de intersecção entre as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja $P$ um ponto da linha $[i]$, logo ponto comum $[\alpha]$ e $[\beta]$.

Seja $\delta$ o plano tangente à superfície $[\alpha]$ no ponto $P$.

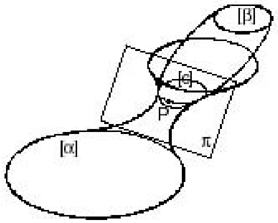
Seja $\pi$ o plano tangente à superfície $[\beta]$ no ponto $P$.

A recta $t$, de intersecção entre os planos $\delta$ e $\pi$, é a recta tangente à linha $[i]$ no ponto $P$.

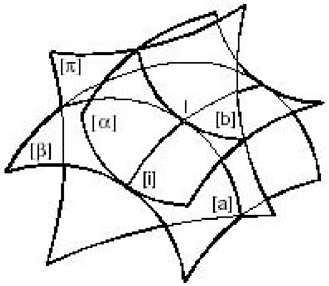
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Concordância entre superfícies**




Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ admitirem os mesmos planos tangentes $\pi$ em todos os pontos $P$ da linha $[c]$ comum a ambas, então as duas superfícies dizem-se concordantes segundo a linha $[c]$.

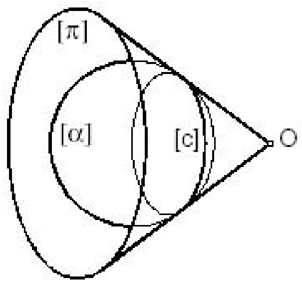



Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta as superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ segundo as linhas $[b]$ e $[a]$, respectivamente, de tal modo que as linhas $[b]$ e $[a]$ são tangentes entre si num ponto $I$ da linha $[i]$.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Noções gerais

**Contorno aparente**




O contorno aparente de uma superfíce $[\alpha]$ para um "observador" (centro de projecções) $O$ é a linha $[c]$ de concordância entre a superfície $[\alpha]$ e uma superfície cónica $[\pi]$ de vértice $O$, que projectada a partir de $O$ sobre uma superfície $[\beta]$ qualquer determina nesta uma linha $[c']$ que delimita a projecção de $[\alpha]$.

Se o observador estiver no infinito, então $[\pi]$ é uma superfície cilíndrica.

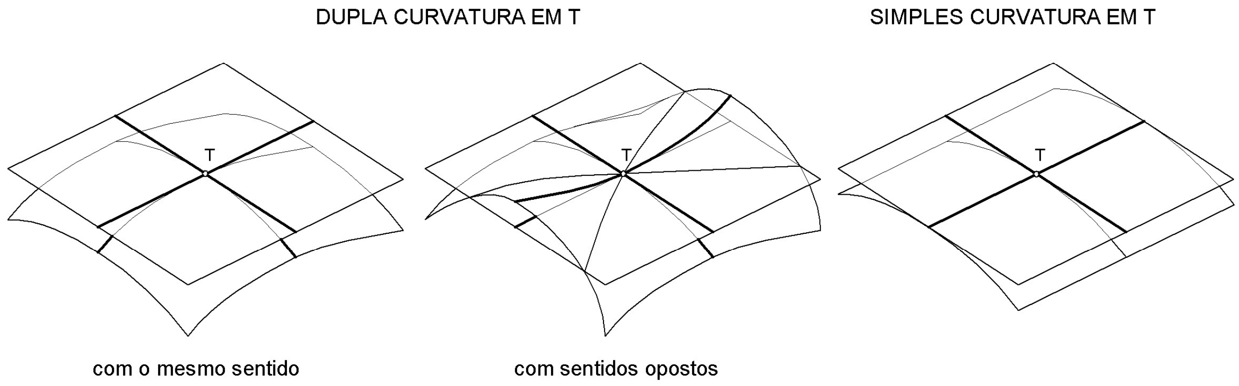
**Distinção entre superfície e sólido**

Uma superfície é a entidade que delimita o volume do sólido.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - critérios de classificação

1. **Quanto ao tipo de geratriz (regradas - geradas pelo movimento de uma recta; e curvas - não regradas)**
2. **Quanto à ordem (número máximo de pontos que uma recta pode ter em comum com a superfície)**
3. **Quanto à curvatura**



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - critérios de classificação

| CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ | | | exemplos |
|---|---|---|---|
| | | SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS | poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares |
| REGRADAS | PLANIFICÁVEIS | SUPERFÍCIE PLANA | plano |
| | | definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ | cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1] |
| | | definidas por 2 DIRECTRIZES | convolutas; superfícies de igual pendente |
| | | SUPERFÍCIES TANGENCIAIS | helicoidal tangencial |
| | | outras | |
| | NÃO PLANIFICÁVEIS | definidas por 3 DIRECTRIZES | parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1] |
| | | outras | superfície regrada de uma só face |
| CURVAS | | SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2] | esférica; tórica; elipsoidal |
| | | outras | serpentina; superfícies mínimas |

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 7

Estudo das superfícies:
- Poliedros.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - poliedros

| CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ | | | exemplos |
|---|---|---|---|
| | | SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS | poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares |
| REGRADAS | PLANIFICÁVEIS | SUPERFÍCIE PLANA | plano |
| | | definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ | cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1] |
| | | definidas por 2 DIRECTRIZES | convolutas; superfícies de igual pendente |
| | | SUPERFÍCIES TANGENCIAIS | helicoidal tangencial |
| | | outras | |
| | NÃO PLANIFICÁVEIS | definidas por 3 DIRECTRIZES | parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1] |
| | | outras | superfície regrada de uma só face |
| CURVAS | | SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2] | esférica; tórica; elipsoidal |
| | | outras | serpentina; superfícies mínimas |

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - poliedros

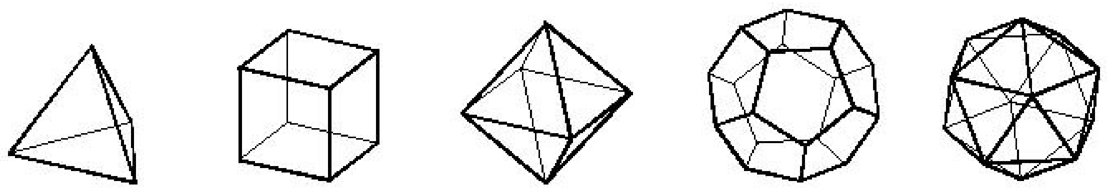
**Superfícies Poliédricas**

( Apenas serão considerados poliedros convexos topologicamente equivalentes à esfera)

A relação entre o número de arestas ( **A** ), vértices ( **V** ) e faces ( **F** ) de qualquer poliedro topologicamente equivalente a uma esfera vem dada pela fórmula de Euler:

$$A + 2 = V + F$$

**Poliedros regulares:** Todas as faces são poligonos regulares de apenas um tipo; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os "Sólidos platónicos".



Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

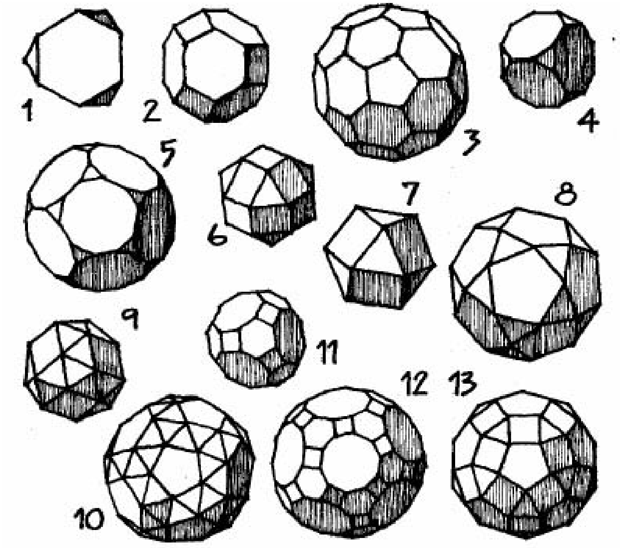
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - poliedros

**Poliedros semi-regulares:**

**- poliedros de Arquimedes**

Todas as faces são poligonos regulares de dois ou mais tipos sendo o comprimento da aresta uma constante; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os "Sólidos Arquimedianos"; todas as arestas e vértices são congruentes e podem obter-se dos poliedros regulares por algum processo de transformação geométrica. Também podem considerar-se nesta categoria os prismas regulares e os antiprismas regulares embora normalmente não seja comum.




1- Troncotetraedro
2- Troncoctaedro
3- Troncoicosaedro
4- Troncocubo
5- Troncododecaedro
6- Rombicuboctaedro
7- Cuboctaedro
8- Icosidodecaedro
9- Cubo achatado
10- Dodecaedro achatado
11- Troncocuboctaedro
12- Troncoicosidodecaedro
13- Rombicosidodecaedro

*in* "EDROS"

# Estudo das Superfícies - poliedros

**Poliedros irregulares:**

Todas as faces são polígonos de vários tipos; os vértices podem ou não pertencer a uma superfície esférica; o comprimento da aresta não é constante.

**- pirâmides, bipirâmides, troncos de pirâmide, prismas, troncos de prisma**

Uma bipirâmide é um sólido gerado pela "soma" de uma pirâmide com a sua simétrica relativamente ao plano da base.

**- sólidos de Johnson**

São poliedros em que todas as faces são regulares de mais que um tipo, não sendo, no entanto, poliedros regulares, semi-regulares, prismas regulares ou antiprismas regulares. Existem 92 ao todo.

Um poliedro que tenha por vértices os centros das faces de um outro poliedro diz-se DUAL daquele.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - poliedros

- antiprismas, antipiramóides, tronco-antiprismas, antiprismóides, *outros*

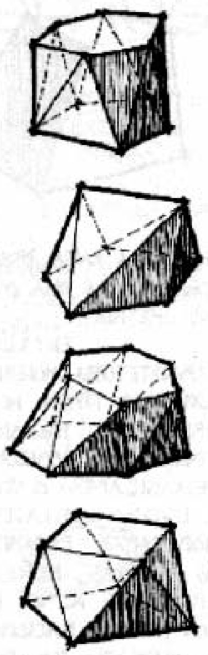
QUANDO LIGAMOS OS VÉRTICES DE DOIS POLÍGONOS NÃO COPLANARES, DE MODO A DEFINIR TRIÂNGULOS ENTRE ELES, FORMAM-SE POLIEDROS CONHECIDOS POR:

1- ANTIPRISMÓIDES – QUANDO OS POLÍGONOS NÃO TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS.

2- ANTIPIRAMÓIDES – QUANDO UM DOS POLÍGONOS É SUBSTITUÍDO POR UM SEGMENTO DE RETA.

3- TRONCO-ANTIPRISMAS – QUANDO OS POLÍGONOS TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS E NÃO SÃO DE PLANOS PARALELOS.

4- ANTIPRISMAS – QUANDO OS POLÍGONOS TÊM MESMO NÚMERO DE LADOS E ESTÃO EM PLANOS PARALELOS.



*in* "EDROS"

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 8

Estudo das superfícies:
- Superfícies planificáveis.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis

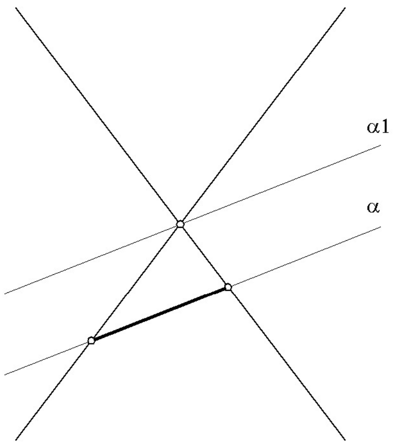
| CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ | | | exemplos |
|---|---|---|---|
| | | SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS | poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares |
| REGRADAS | PLANIFICÁVEIS | SUPERFÍCIE PLANA | plano |
| | | definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ | cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1] |
| | | definidas por 2 DIRECTRIZES | convolutas; superfícies de igual pendente |
| | | SUPERFÍCIES TANGENCIAIS | helicoidal tangencial |
| | | outras | |
| | NÃO PLANIFICÁVEIS | definidas por 3 DIRECTRIZES | parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1] |
| | | outras | superfície regrada de uma só face |
| CURVAS | | SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2] | esférica; tórica; elipsoidal |
| | | outras | serpentina; superfícies mínimas |

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

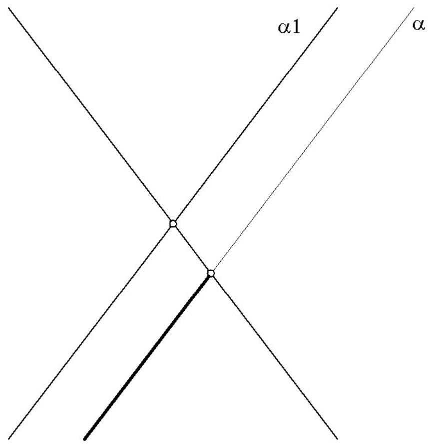
[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

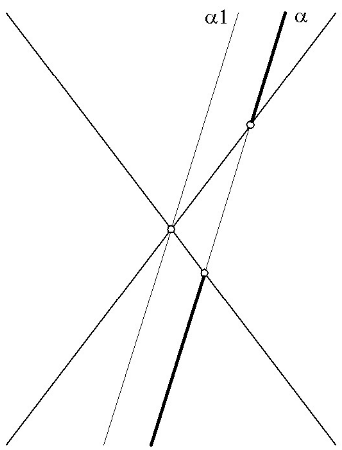
# As cónicas como intersecções planas em cones




ELIPSE




PARÁBOLA




HIPÉRBOLE

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis

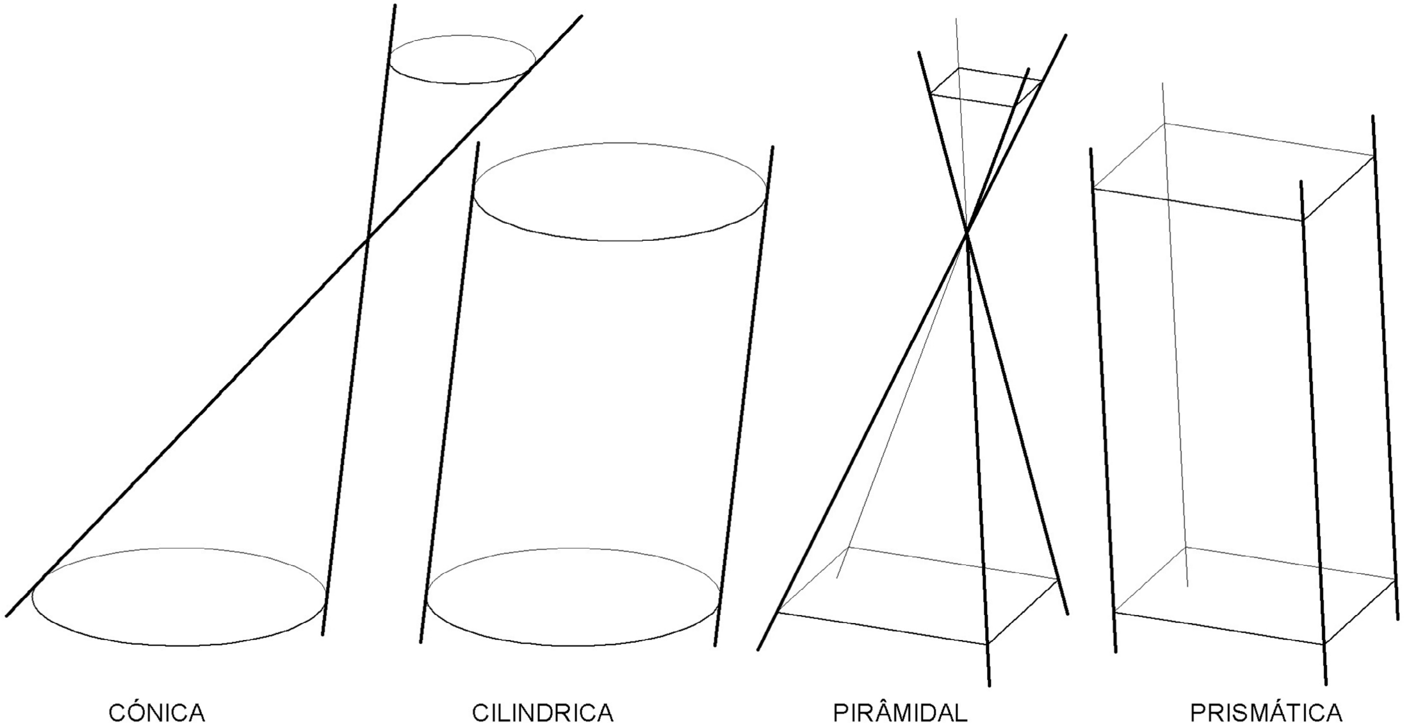
**Superfícies planificáveis**

Para que uma superfície seja planificável deve ser regrada. Mas esta condição só por si não implica que a superfície seja planificável. Para além de ser regrada deve ainda acontecer que cada para de geratrizes infinitamente próximas entre si sejam concorrentes, isto é complanares. Do enunciado resulta que uma superfície planificável apenas admite um plano tangente por cada geratriz. A planificação corresponde ao "desenrolar" da superfíce até que esta coincida com uma dos planos tangentes. Nesta operação a superfíce não "estica" nem "encolhe", não se "rasga" nem adquire "pregas". Nesta operação preservam-se os comprimentos e os ângulos.

A resolução de problemas concretos depende, obviamente, do tipo particular de superfíce que se tem em presença. Assim, diferentes métodos serão utilizados para planificar superfícies cónicas ou cilindricas de revolução, cónicas ou cilindricas obliquas, convulutas, tangenciais, etc.

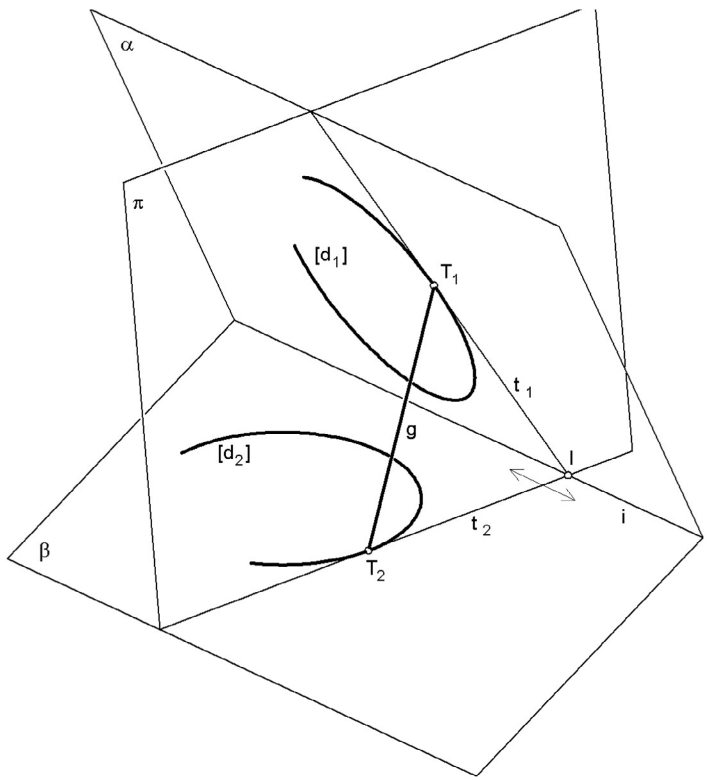
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis

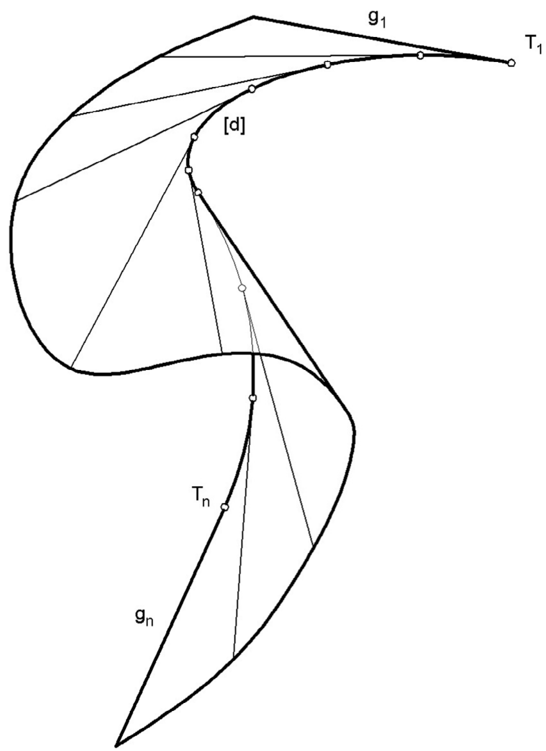


Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis



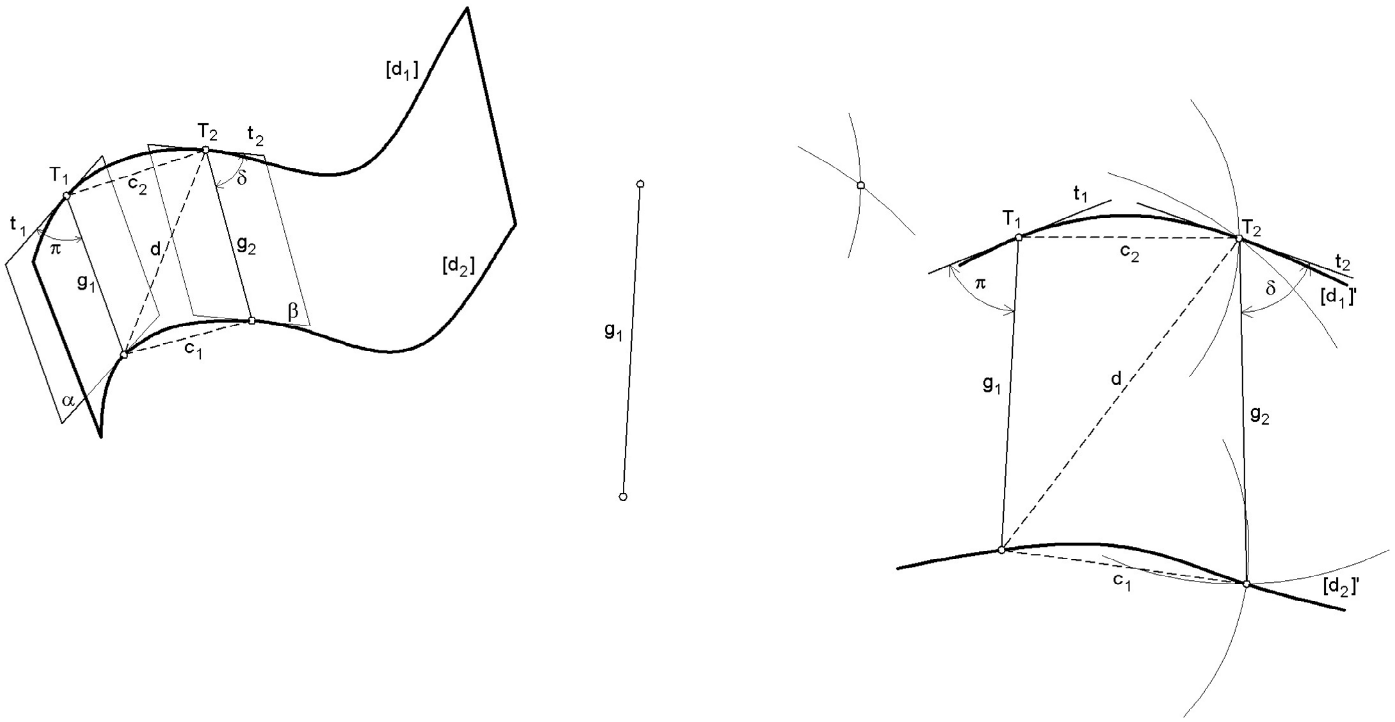

CONVOLUTA




SUPERFÍCIE TANGENCIAL

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




PLANIFICAÇÃO (método gráfico - princípio geral)

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis

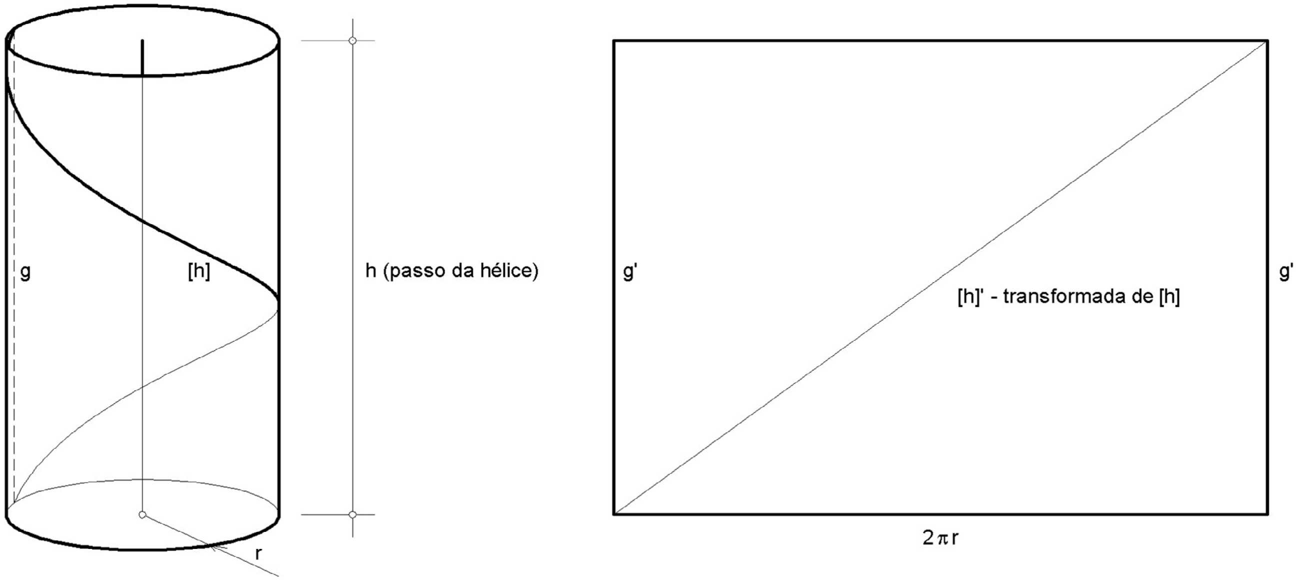
**Teorema de Olivier**

Este teorema aplica-se às transformadas das linhas de intersecção plana de superfícies cónicas e cilíndricas por planificação destas e pode ser enunciado do seguinte modo:

Se uma superfície, cónica ou cilíndrica, admite planos tangentes perpendiculares ao plano que produz a intersecção, então, os pontos de tangência entre a linha de intersecção e as rectas de intersecção entre os planos tangentes e o plano da intersecção correspondem, na planificação, aos pontos de inflexão da linha transformada da intersecção.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

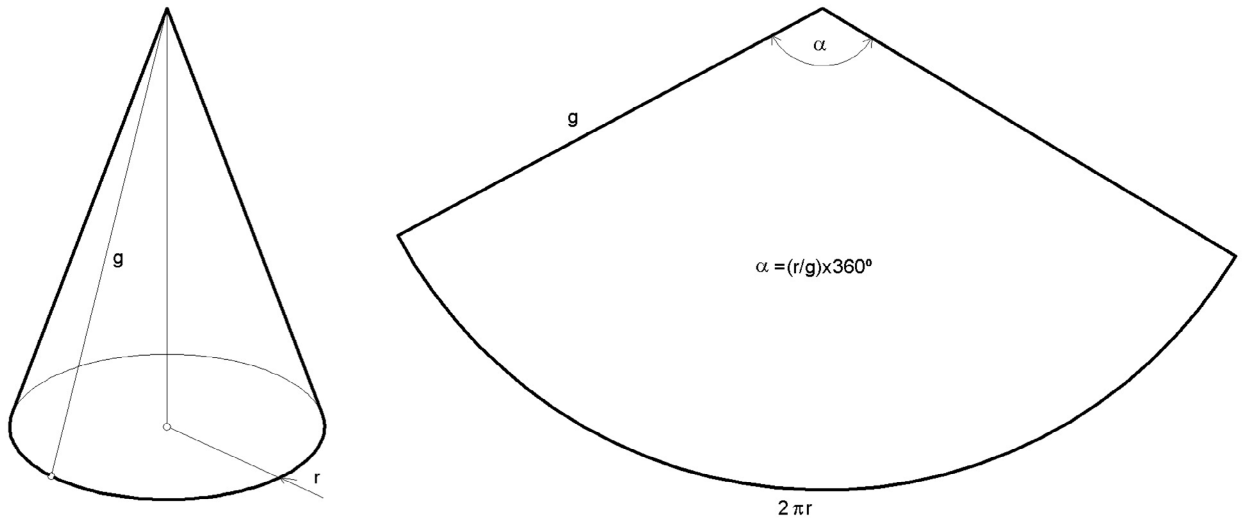
# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO DE REVOLUÇÃO / HÉLICE CILÍNDRICA

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

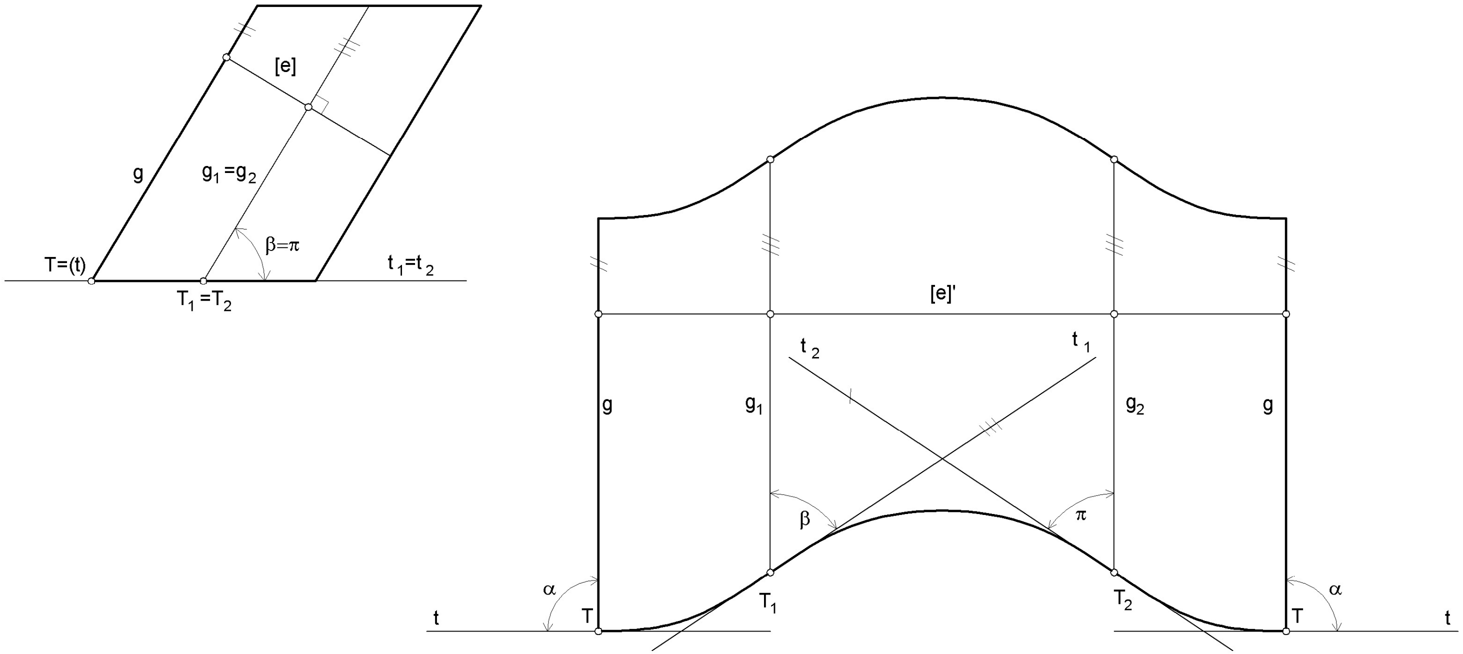
# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CONE DE REVOLUÇÃO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

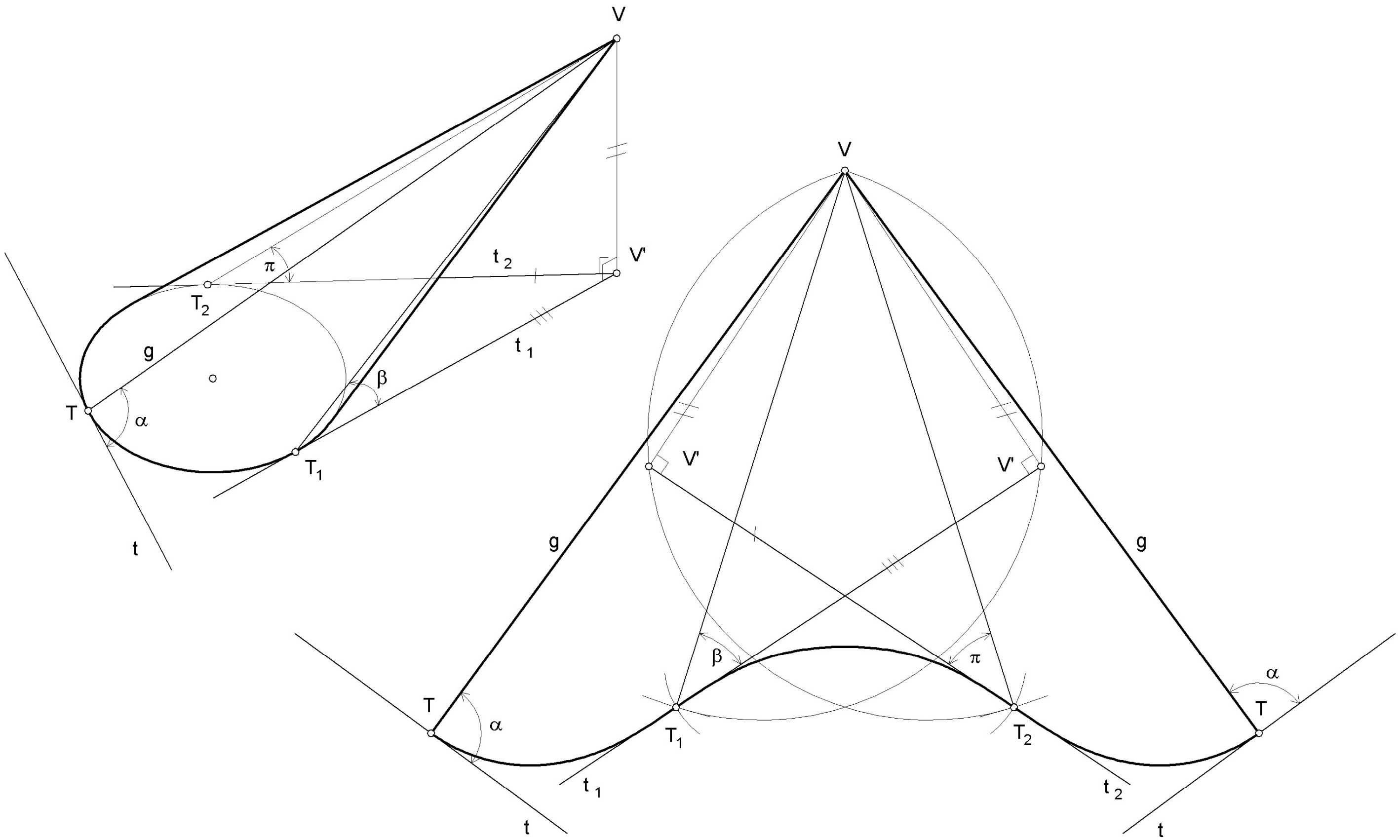
# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CILINDRO OBLÍQUO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

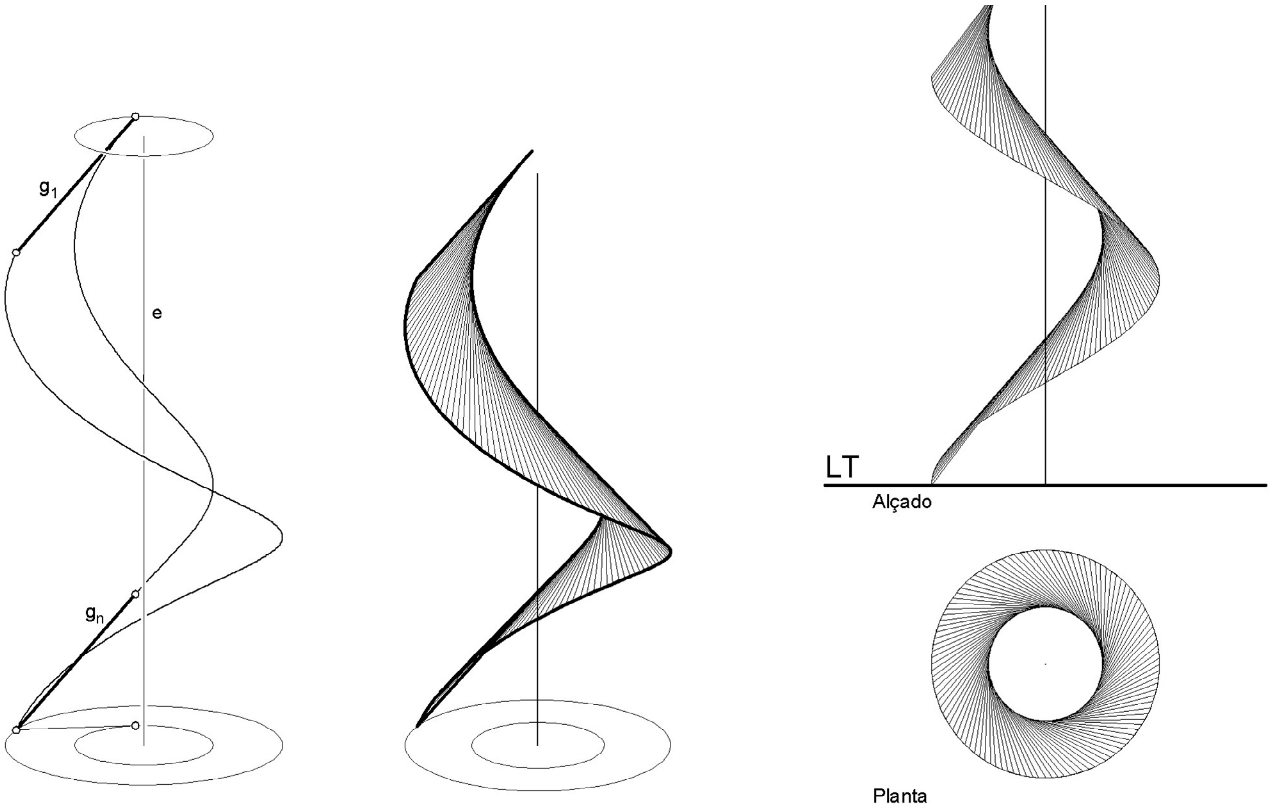
# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




PLANIFICAÇÃO DA SUPERFÍCIE DO CONE OBLÍQUO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

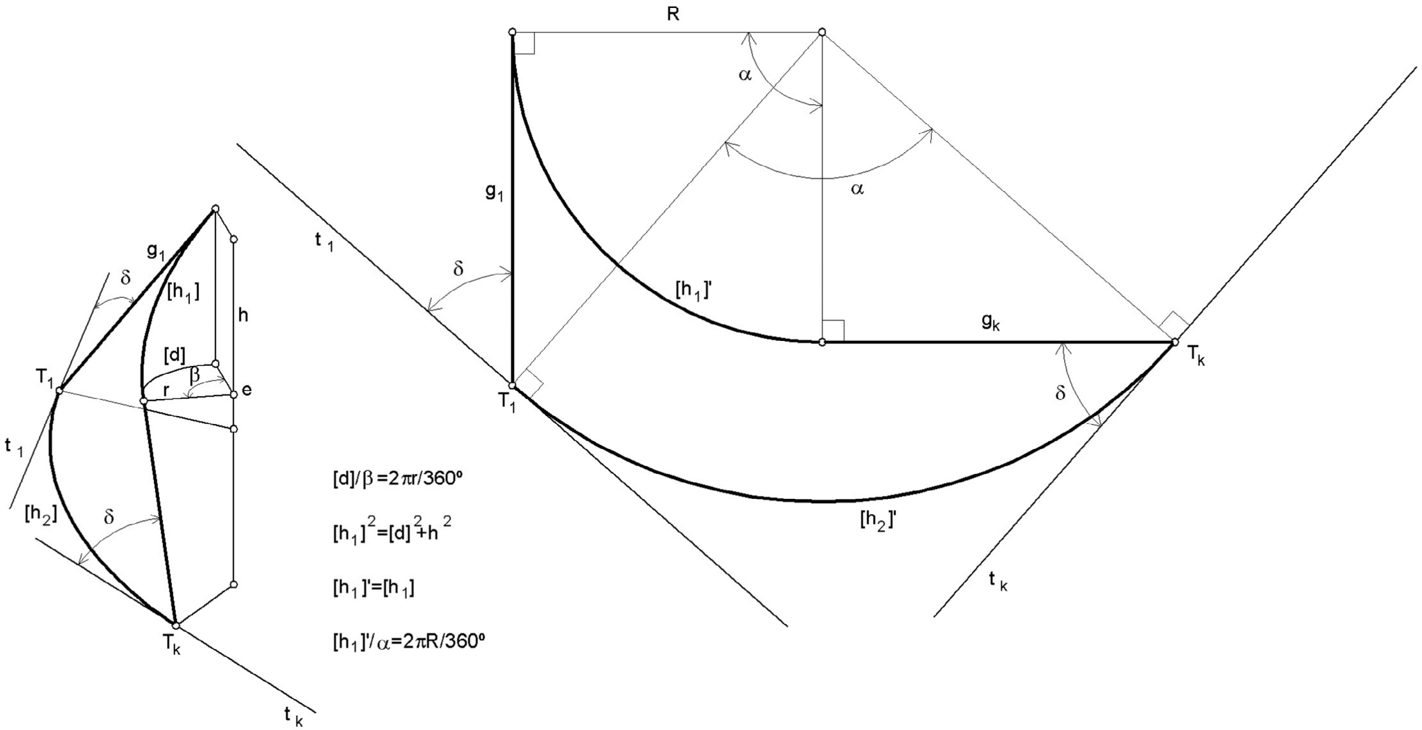
# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




HELICOIDAL TANGENCIAL

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies planificáveis




$[d]/\beta = 2\pi r/360º$

$[h_1]^2 = [d]^2 + h^2$

$[h_1]' = [h_1]$

$[h_1]'/\alpha = 2\pi R/360º$

PLANIFICAÇÃO DO HELICOIDAL TANGENCIAL

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 9

Estudo das superfícies:
- Superfícies de revolução.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

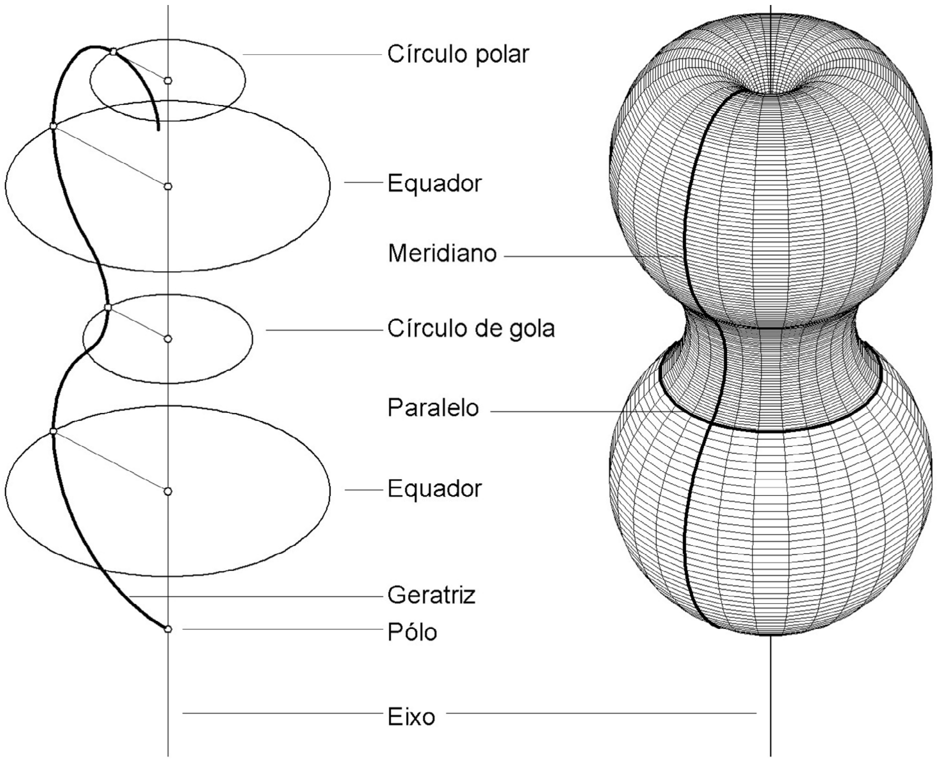
| CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ | | | exemplos |
|---|---|---|---|
| | | SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS | poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares |
| REGRADAS | PLANIFICÁVEIS | SUPERFÍCIE PLANA | plano |
| | | definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ | cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1] |
| | | definidas por 2 DIRECTRIZES | convolutas; superfícies de igual pendente |
| | | SUPERFÍCIES TANGENCIAIS | helicoidal tangencial |
| | | outras | |
| | NÃO PLANIFICÁVEIS | definidas por 3 DIRECTRIZES | parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1] |
| | | outras | superfície regrada de uma só face |
| CURVAS | | SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2] | esférica; tórica; elipsoidal |
| | | outras | serpentina; superfícies mínimas |

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

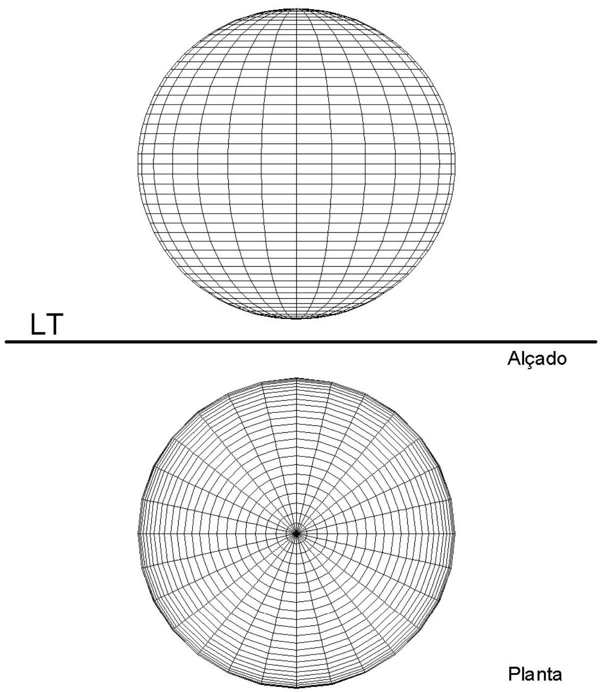
# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

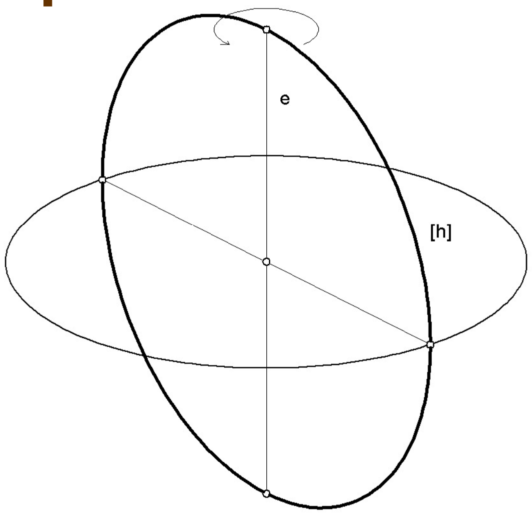


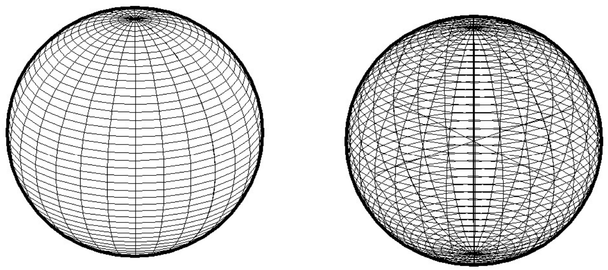

SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

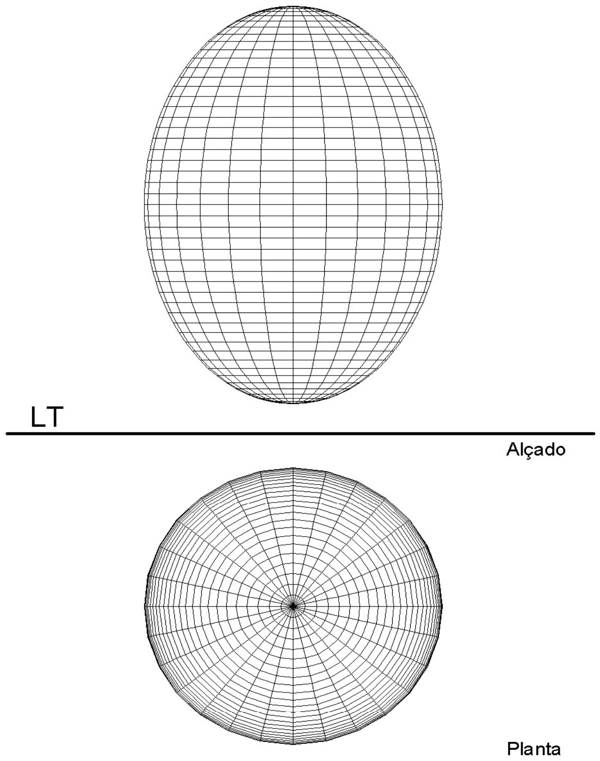


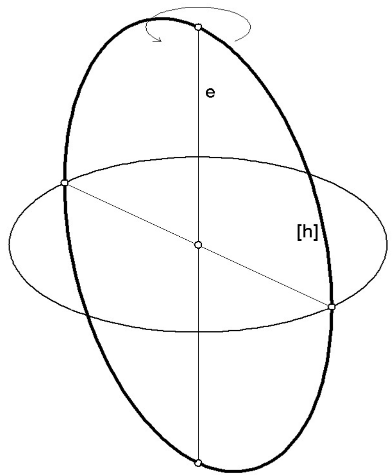



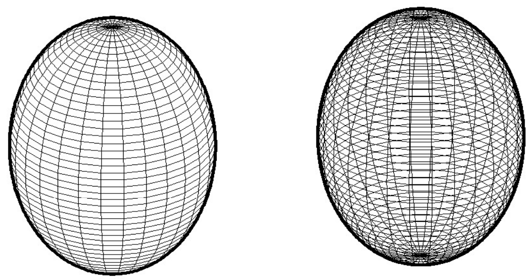



GERAÇÃO DA ESFERA POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM DIÂMETRO

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

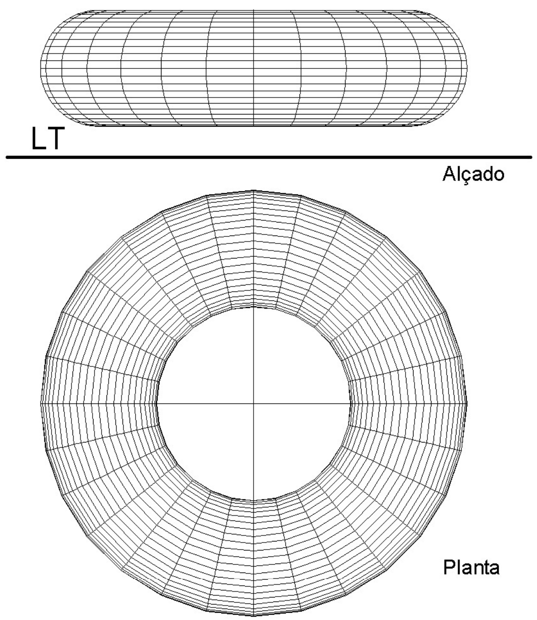


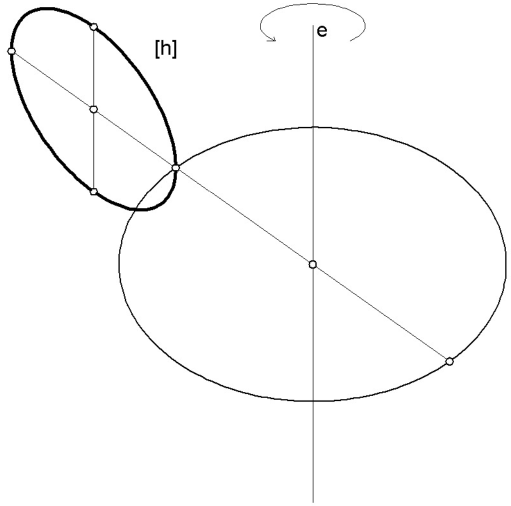



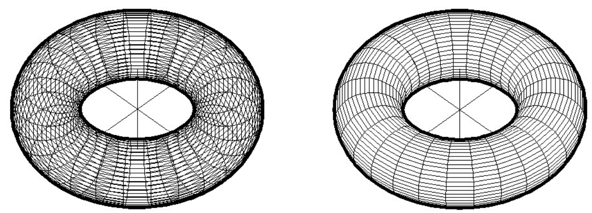



GERAÇÃO DO ELIPSÓIDE POR ROTAÇÃO DE UMA ELIPSE EM TORNO DE UM EIXO

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução



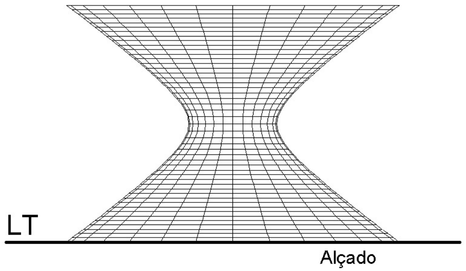



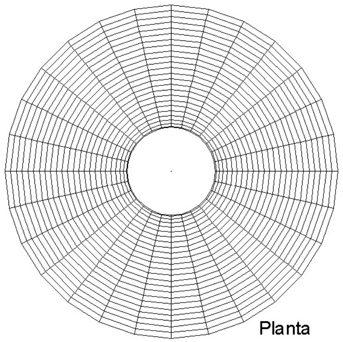



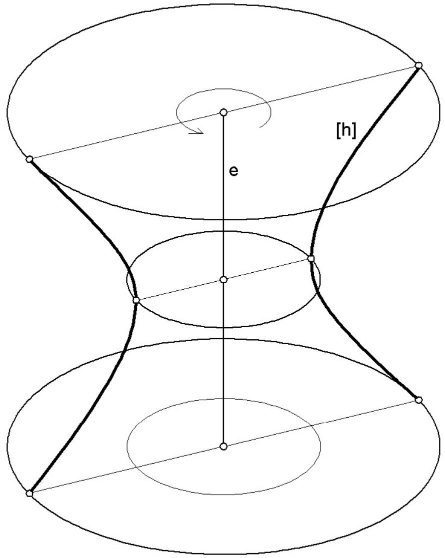
GERAÇÃO DO TORO POR ROTAÇÃO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DE UM EIXO COMPLANAR

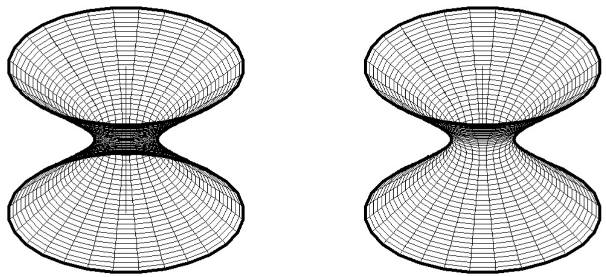
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução



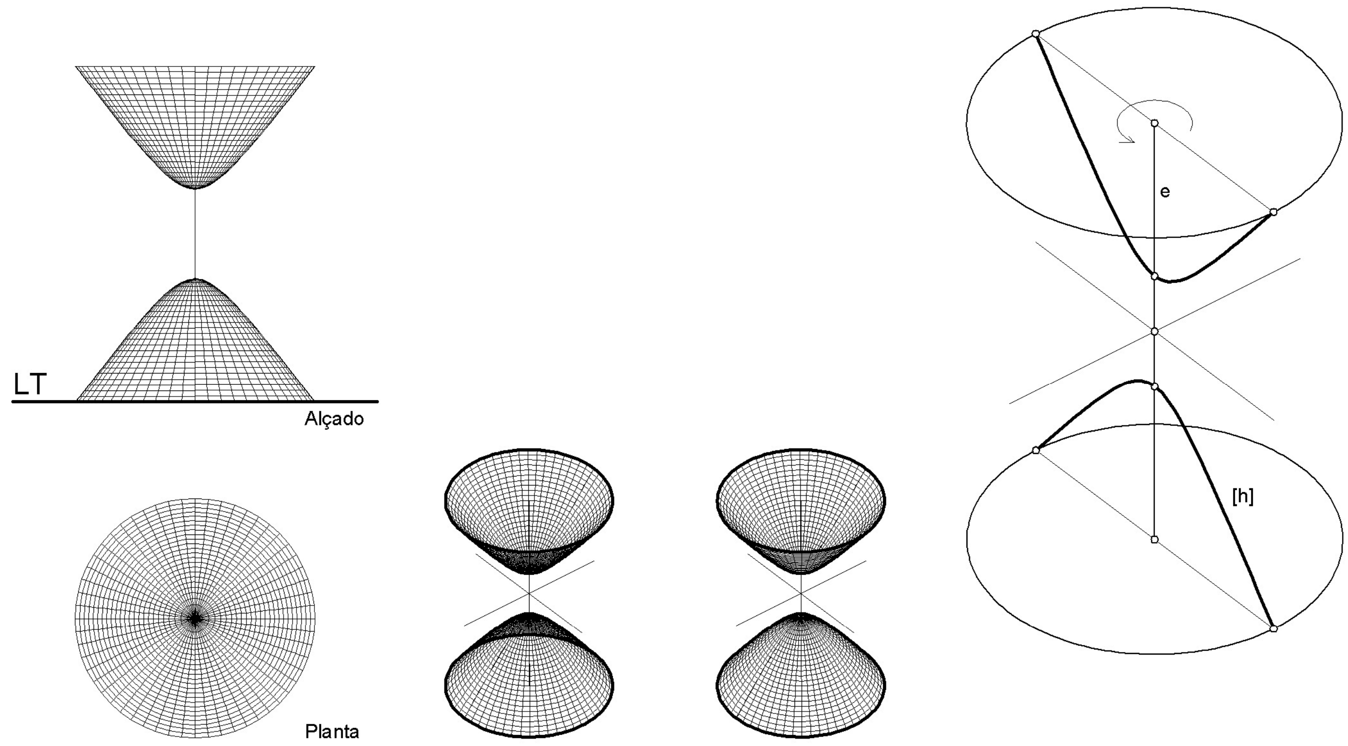



GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO REGRADO POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO TRANSVERSO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

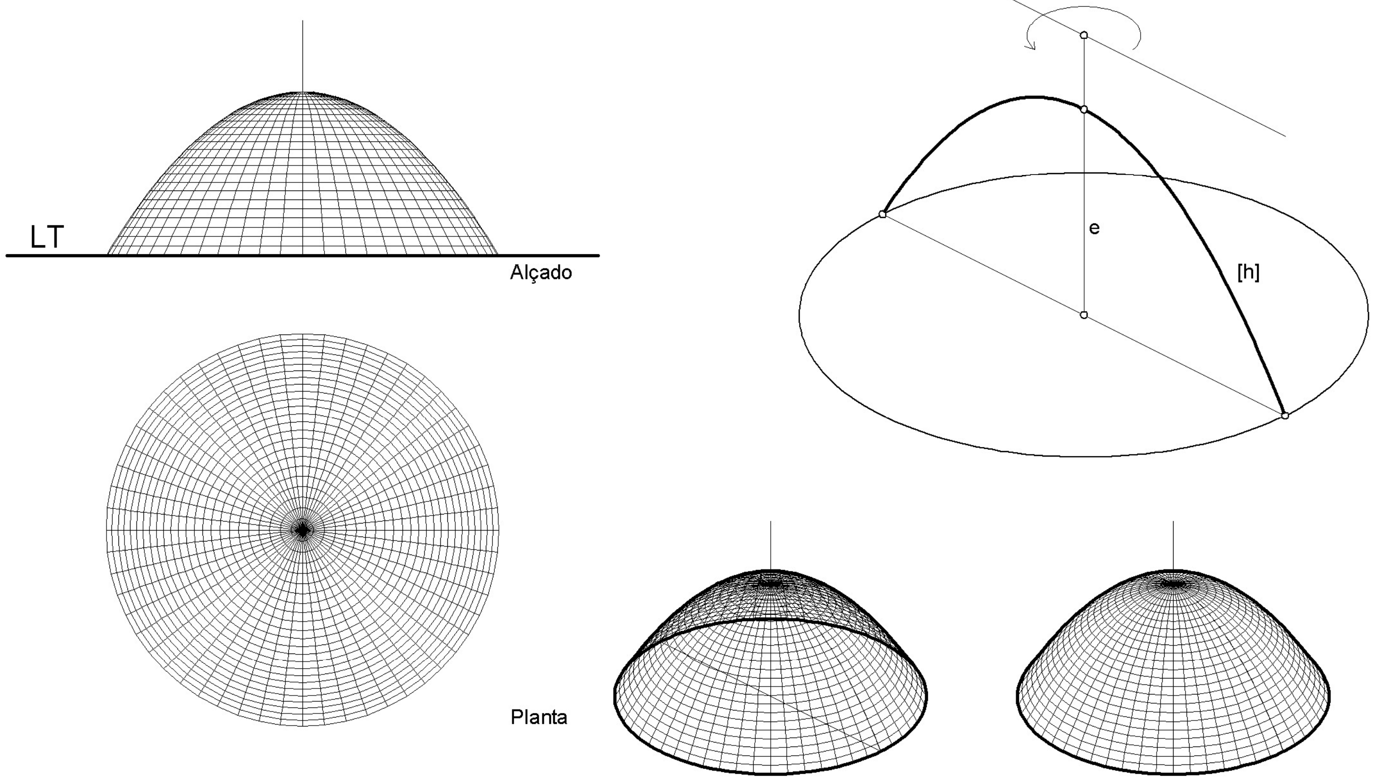
# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução




GERAÇÃO DO HIP. DE REVOLUÇÃO DE 2 FOLHAS POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO REAL

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução




GERAÇÃO DO PARABOLÓIDE DE REVOLUÇÃO POR ROTAÇÃO DA PARÁBOLA EM TORNO DO SEU EIXO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

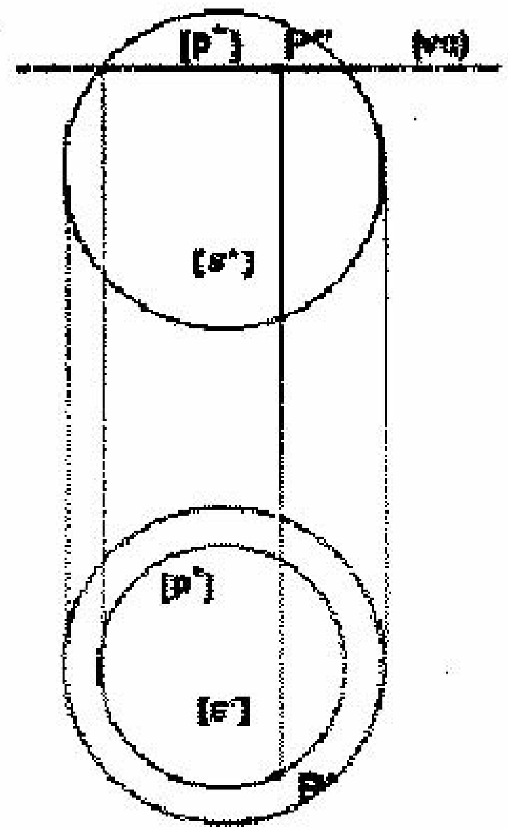
# Estudo das Superfícies - superfícies de revolução

## A SUPERFÍCIE ESFÉRICA

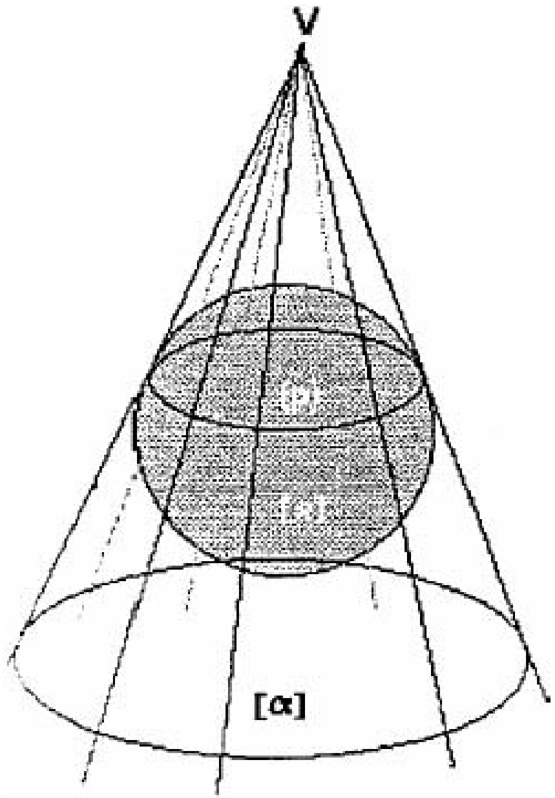
Desenhos da autoria do Professor Pedro Fialho de Sousa

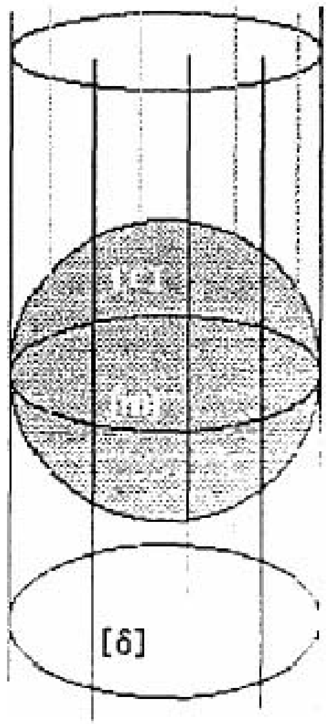
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 1. Marcação de pontos na superfície



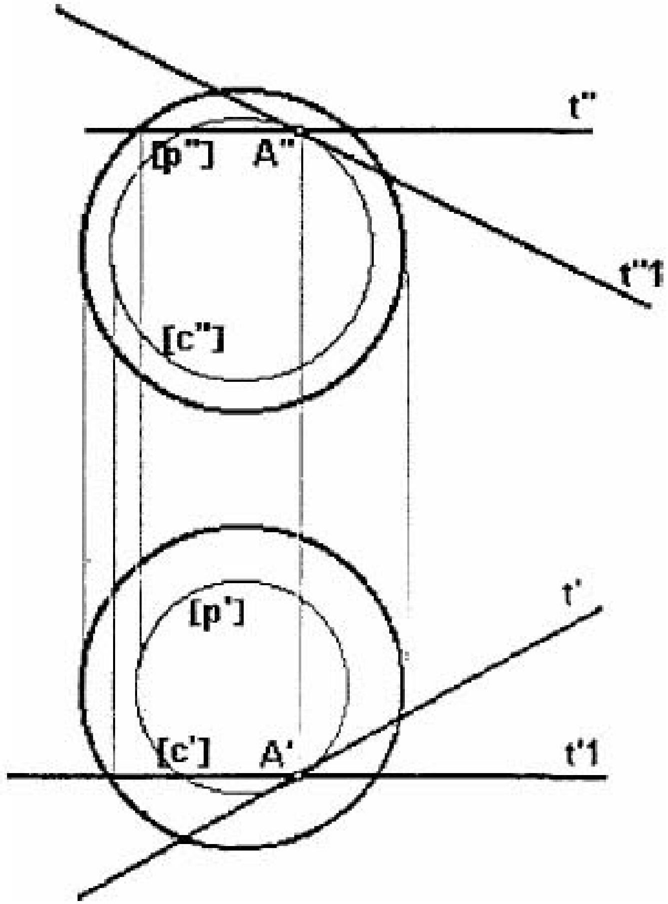
# 2. Concordância com superf. cónicas e cilindricas



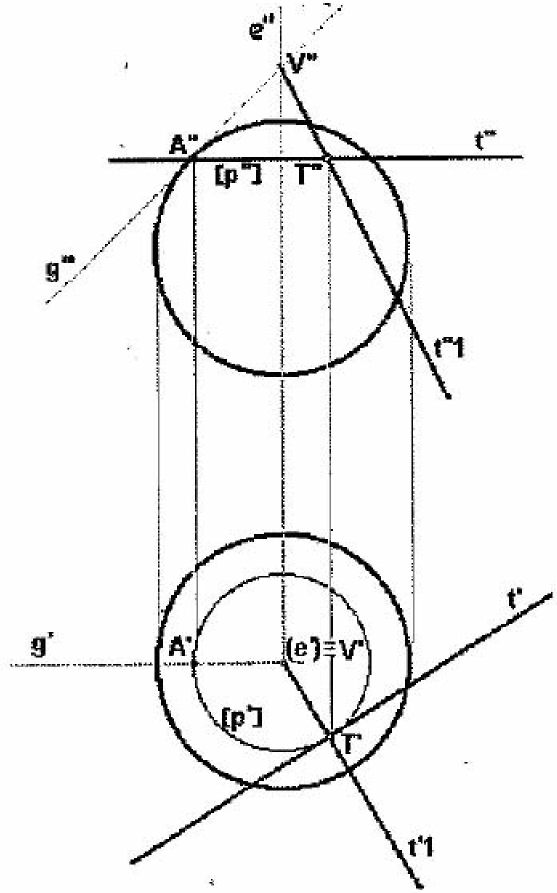



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

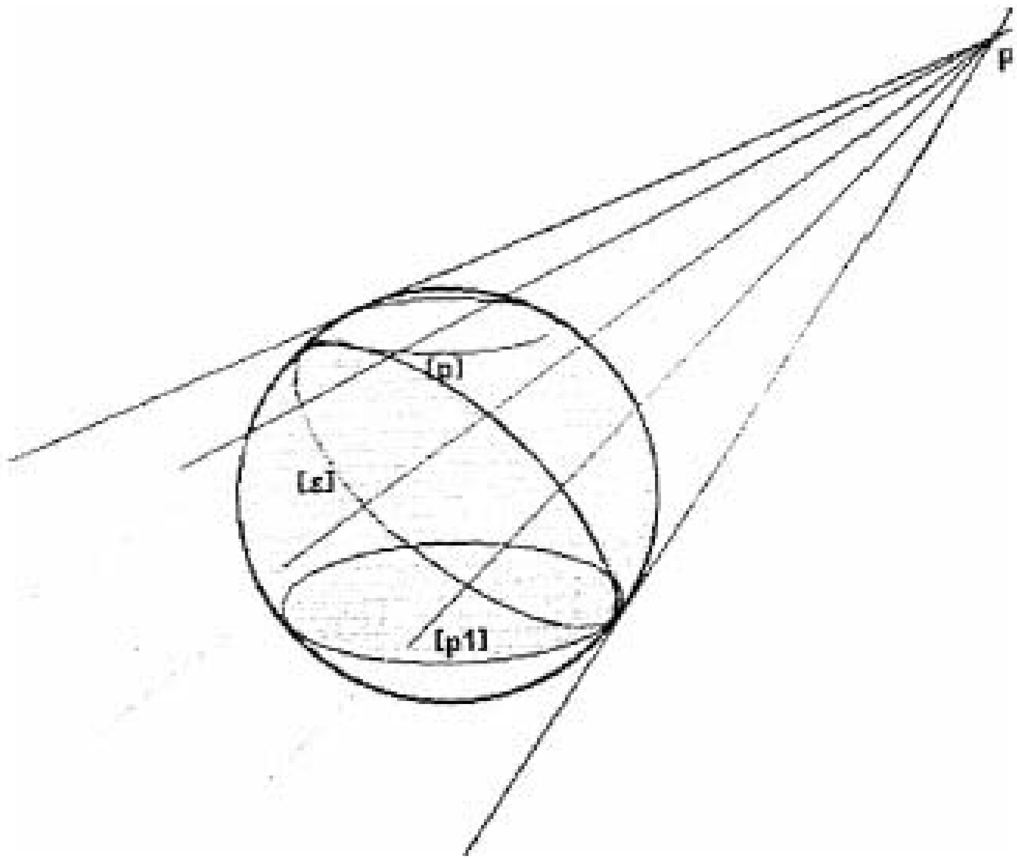
# 3. Plano tangente conduzido por ponto da superf.



# 3. Plano tangente conduzido por ponto da superf.

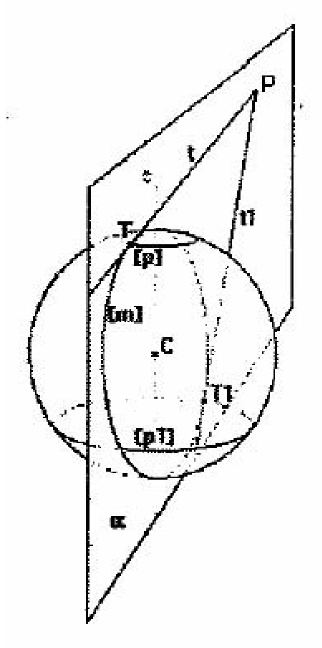


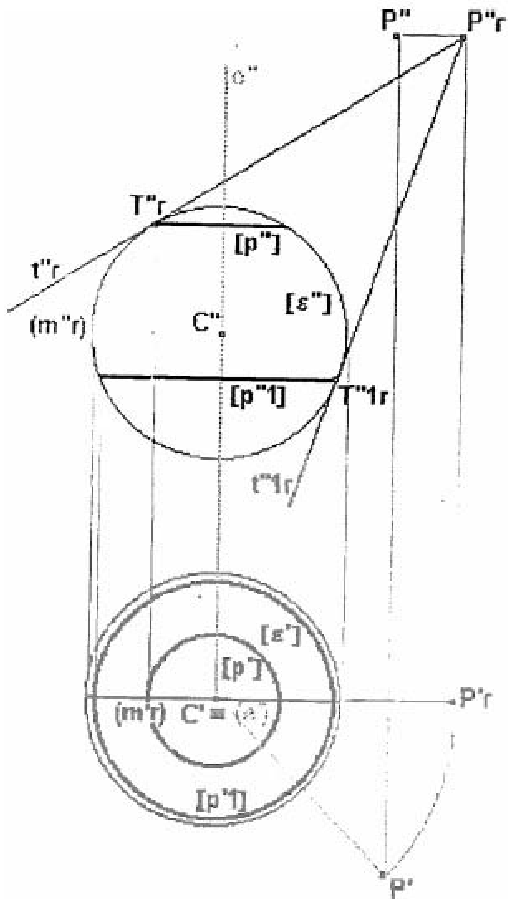
# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

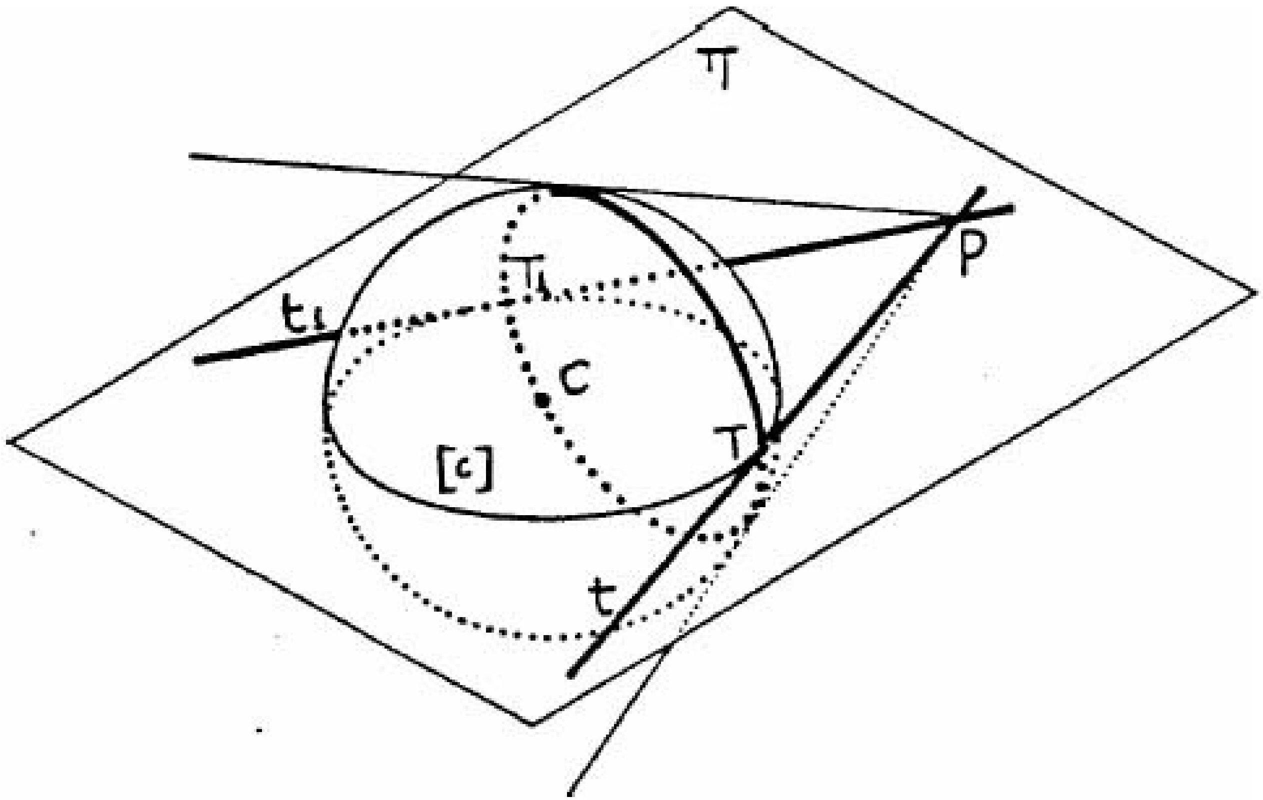
# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



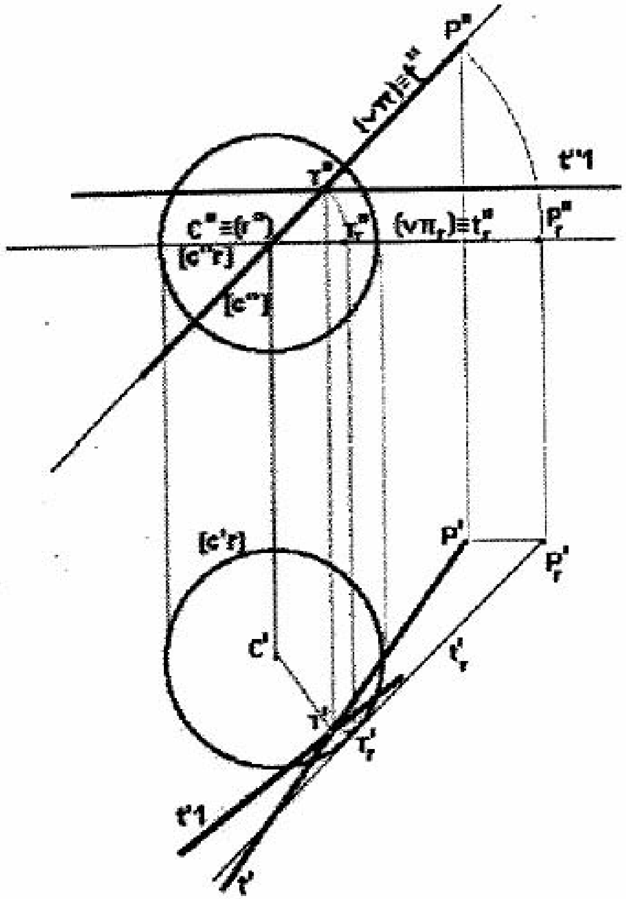
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



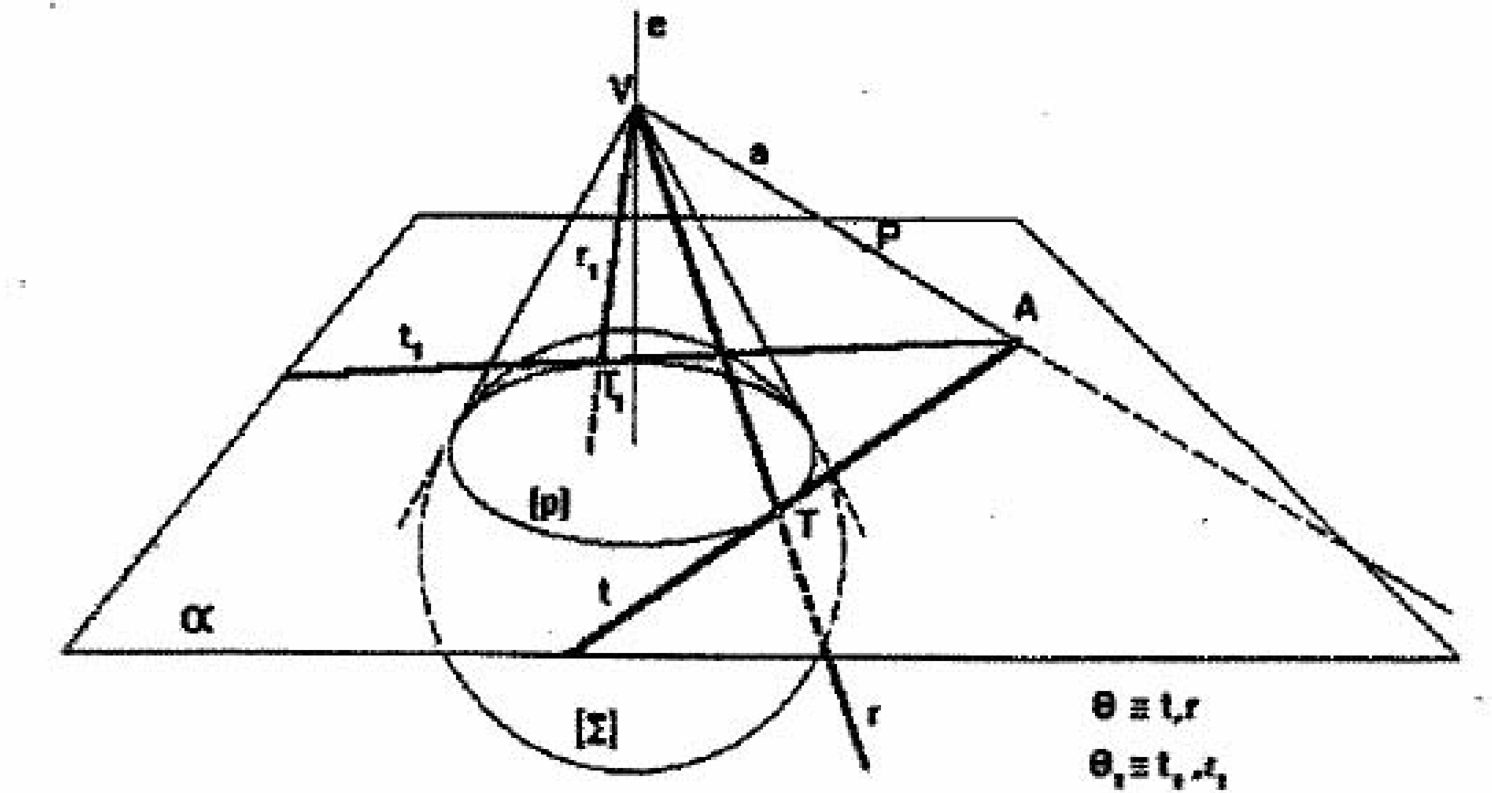
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior



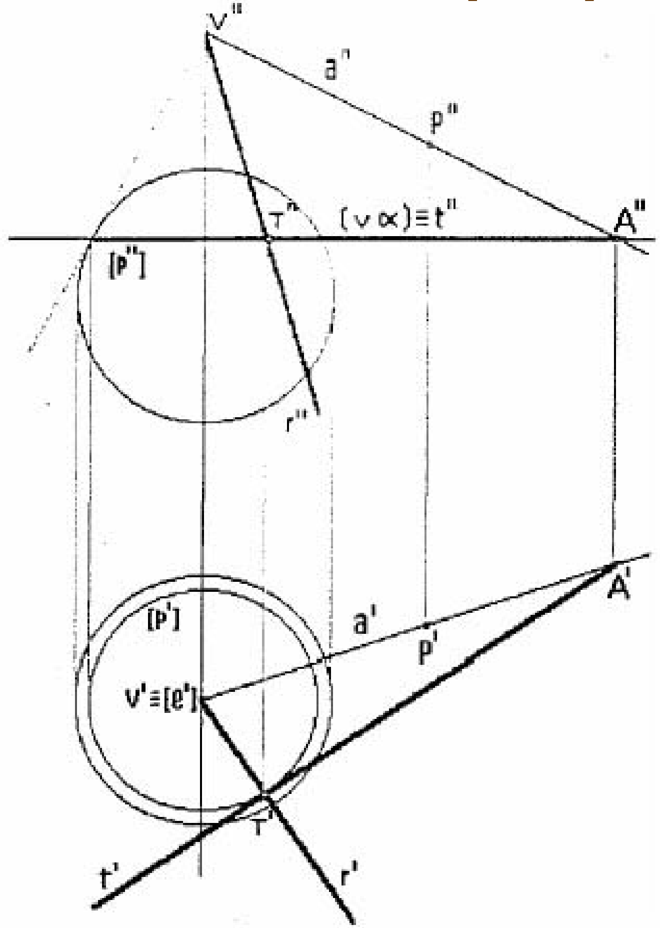
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior

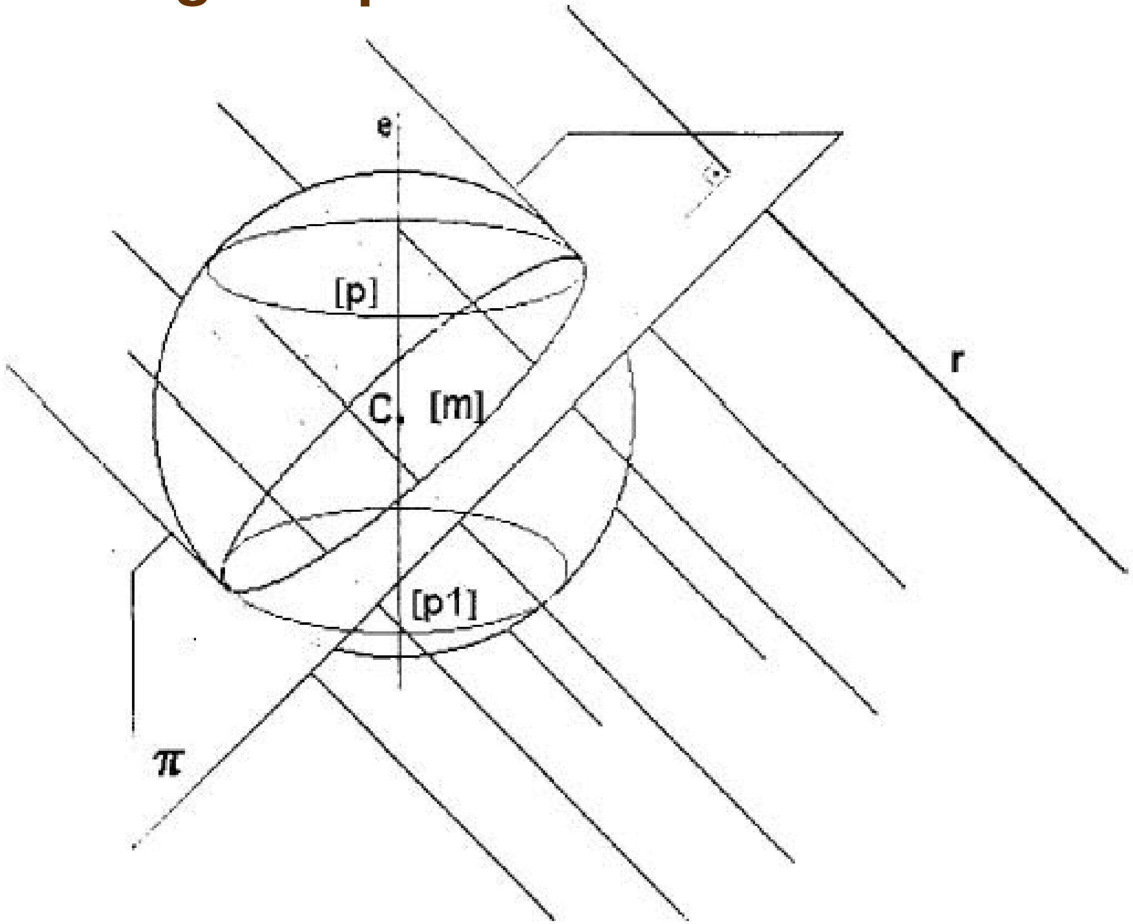


Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 4. Plano tangente conduzido por ponto exterior

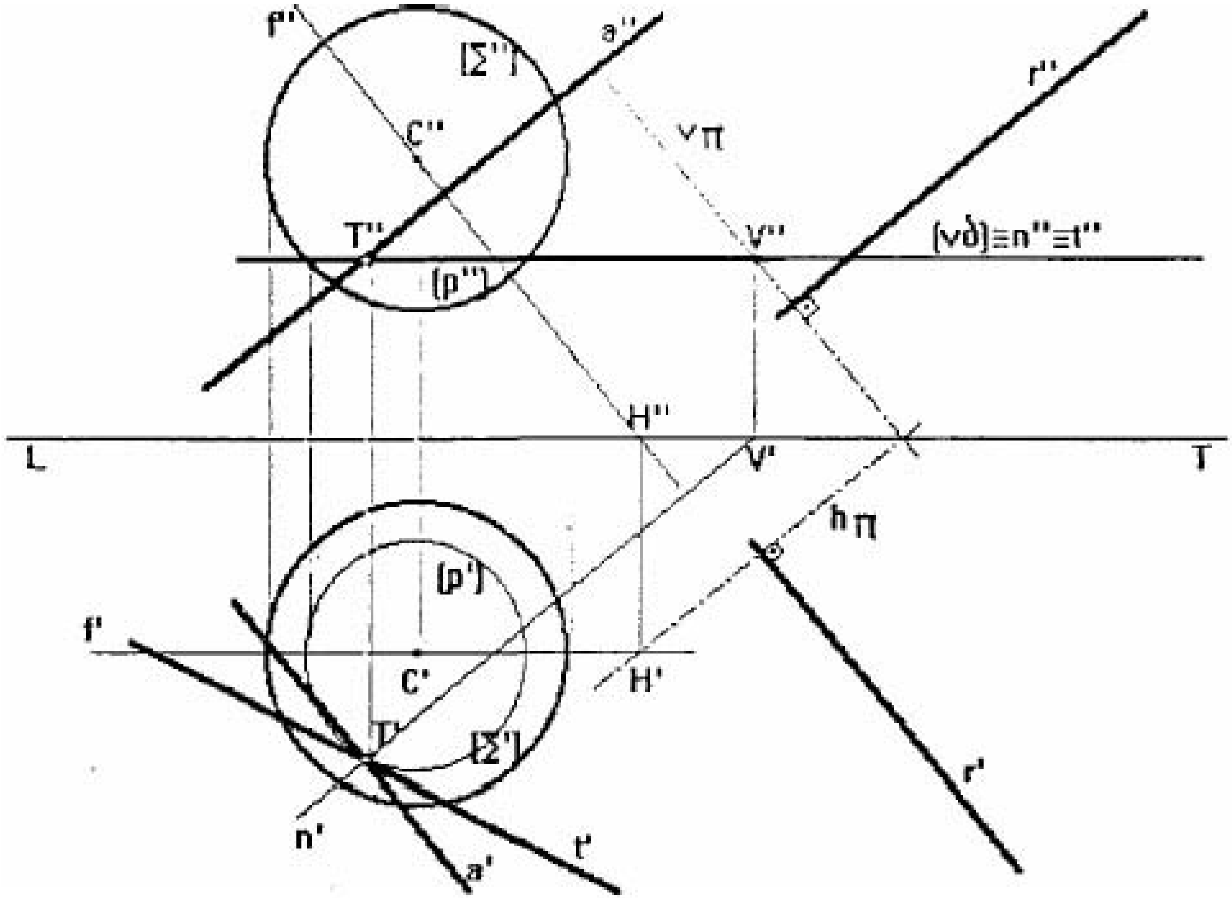


# 5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



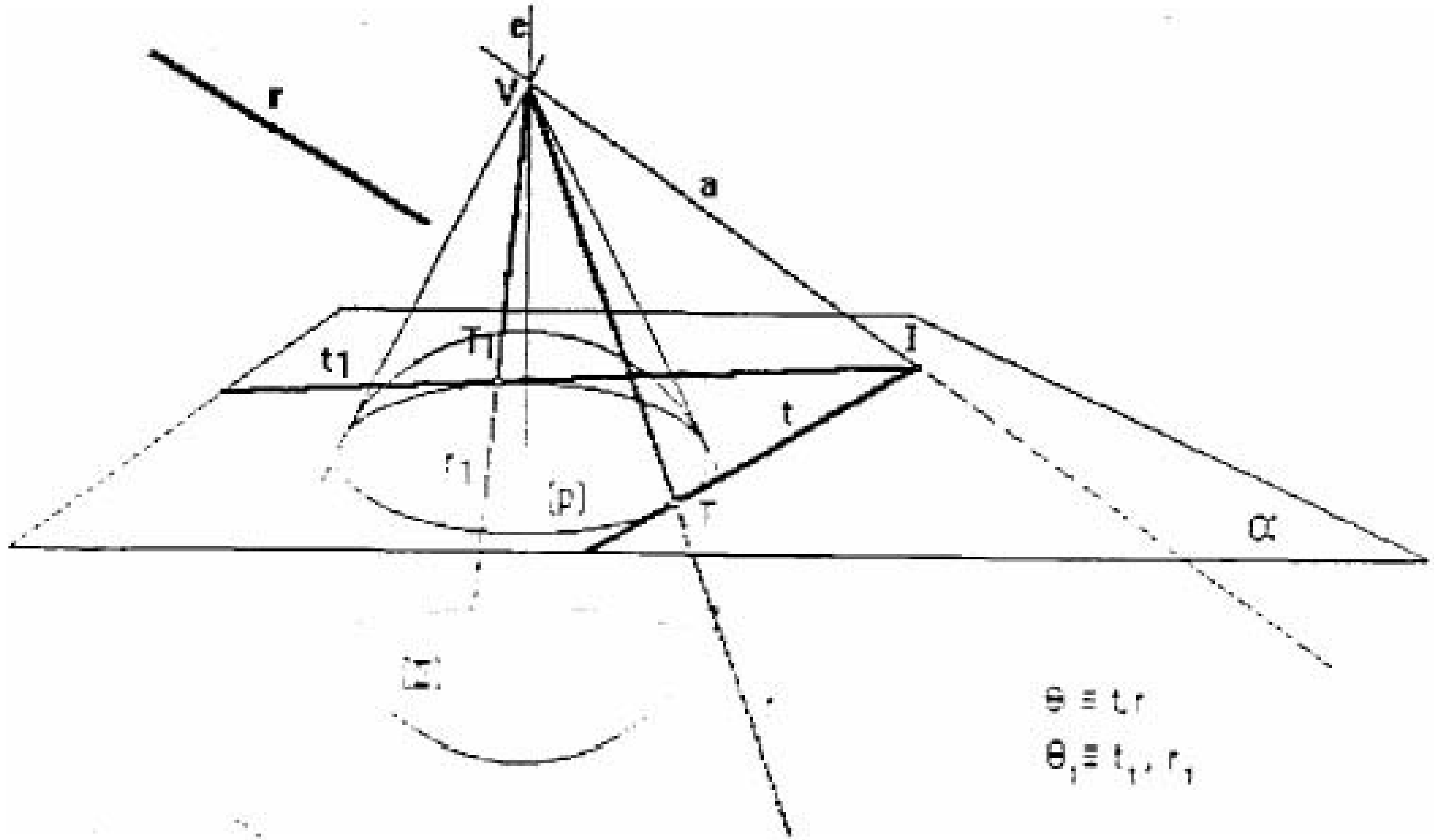
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



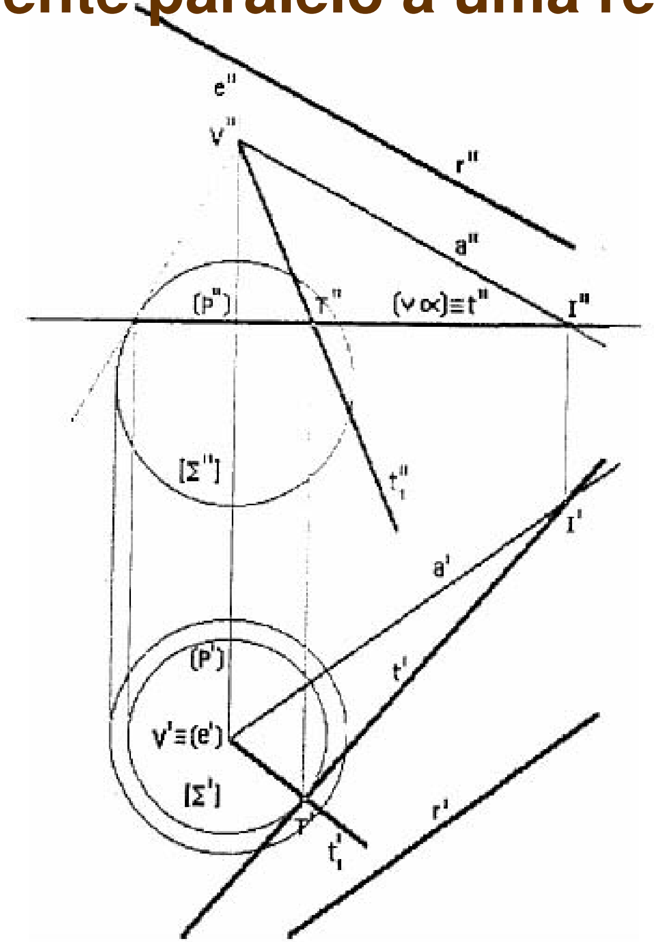
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



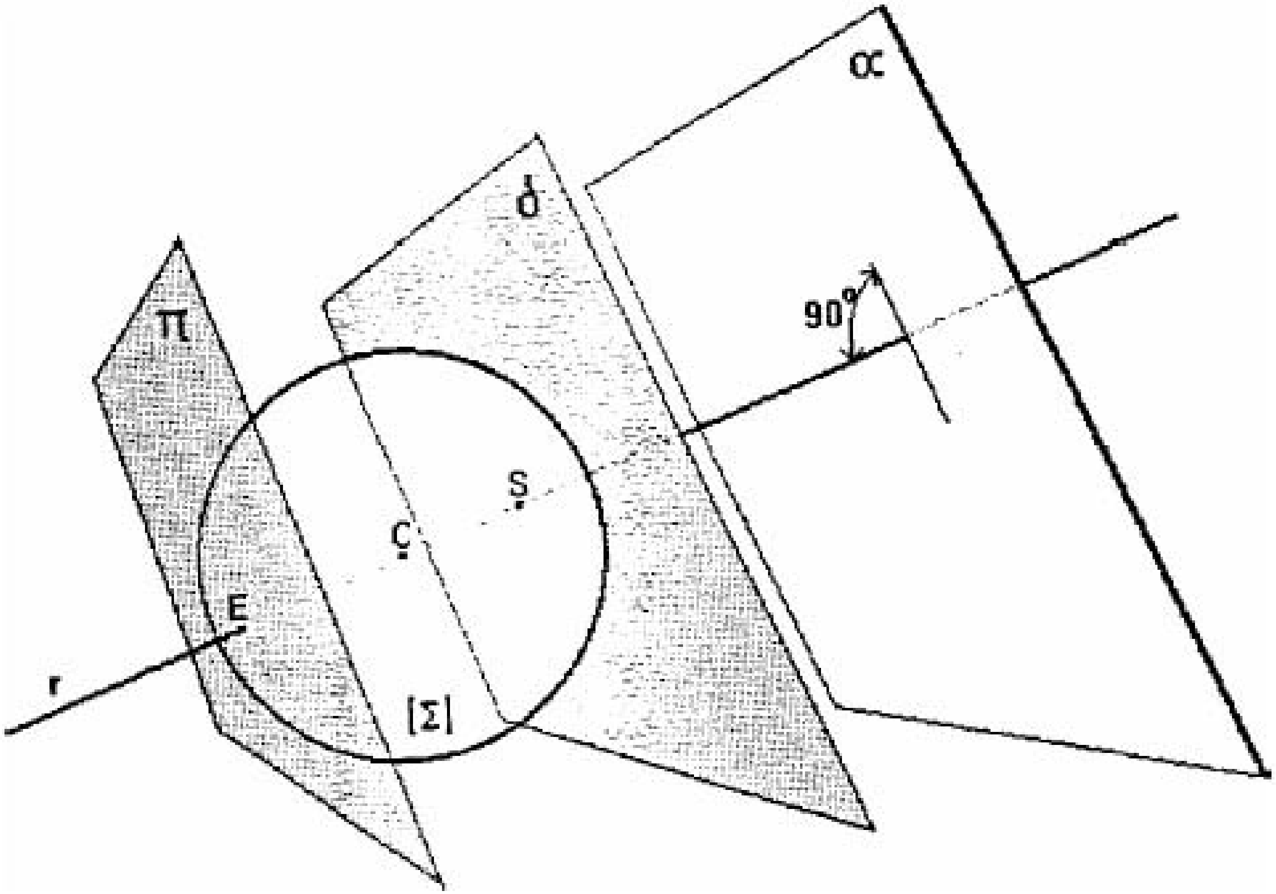
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 5. Plano tangente paralelo a uma recta dada



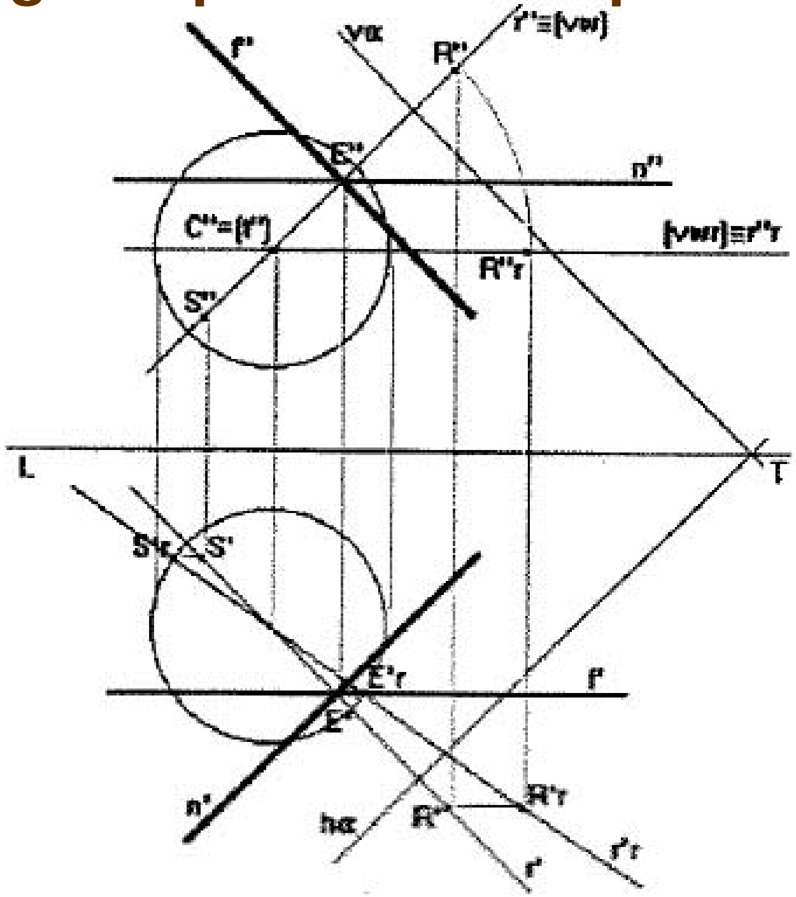
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 6. Plano tangente paralelo a um plano dado



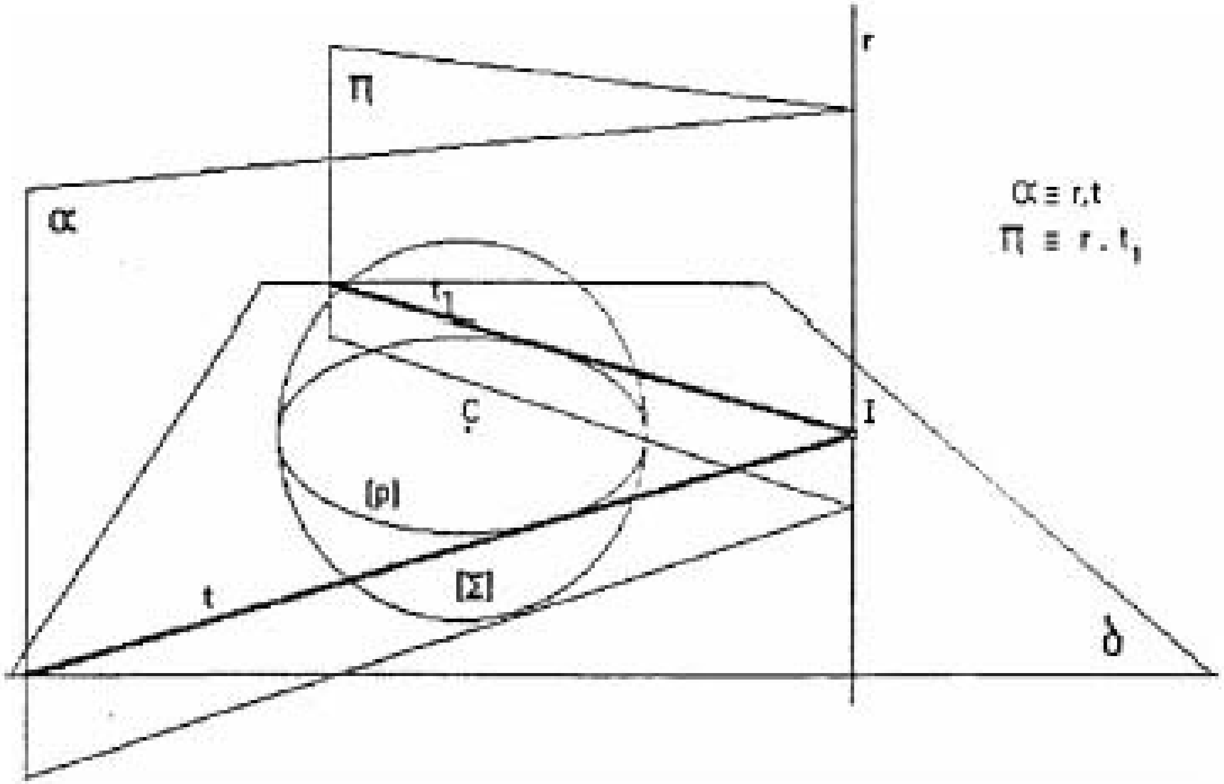
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 6. Plano tangente paralelo a um plano dado

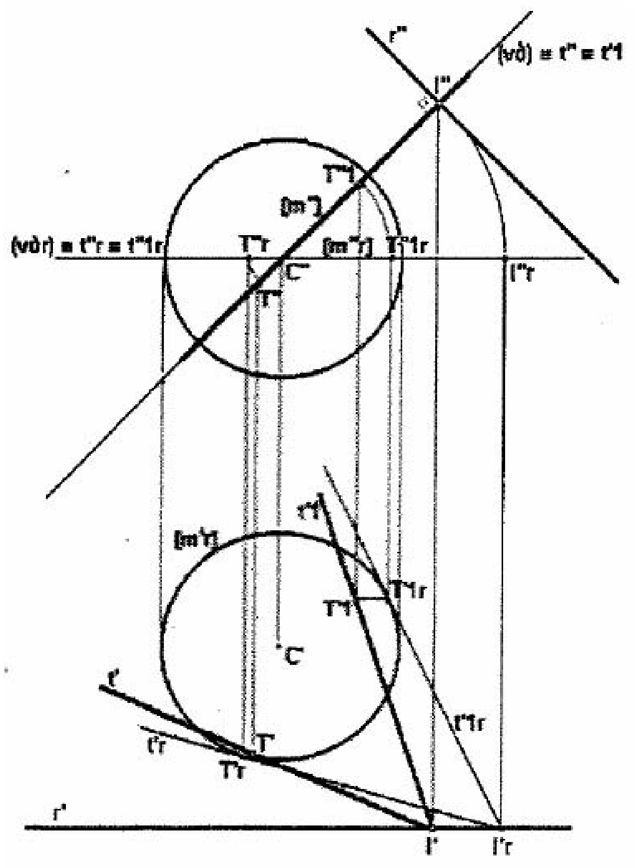


Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# 7. Plano tangente passante por uma recta dada



# 7. Plano tangente passante por uma recta dada

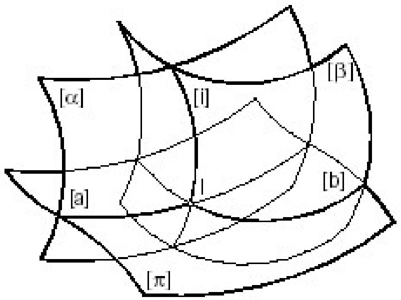


Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

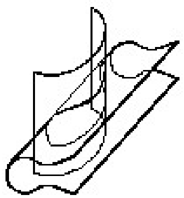
# GDC I – AULA TEÓRICA 10

Estudo das superfícies:
- Intersecções entre superfícies.

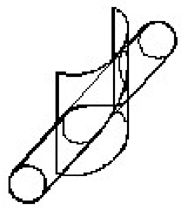
# Estudo das Superfícies - Intersecções (superfície)



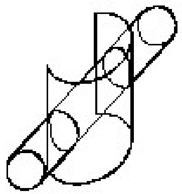

Se duas superfícies $[\alpha]$ e $[\beta]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[\pi]$ que intersecta a superfície $[\alpha]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[\beta]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto $I$ da linha $[i]$.



Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.



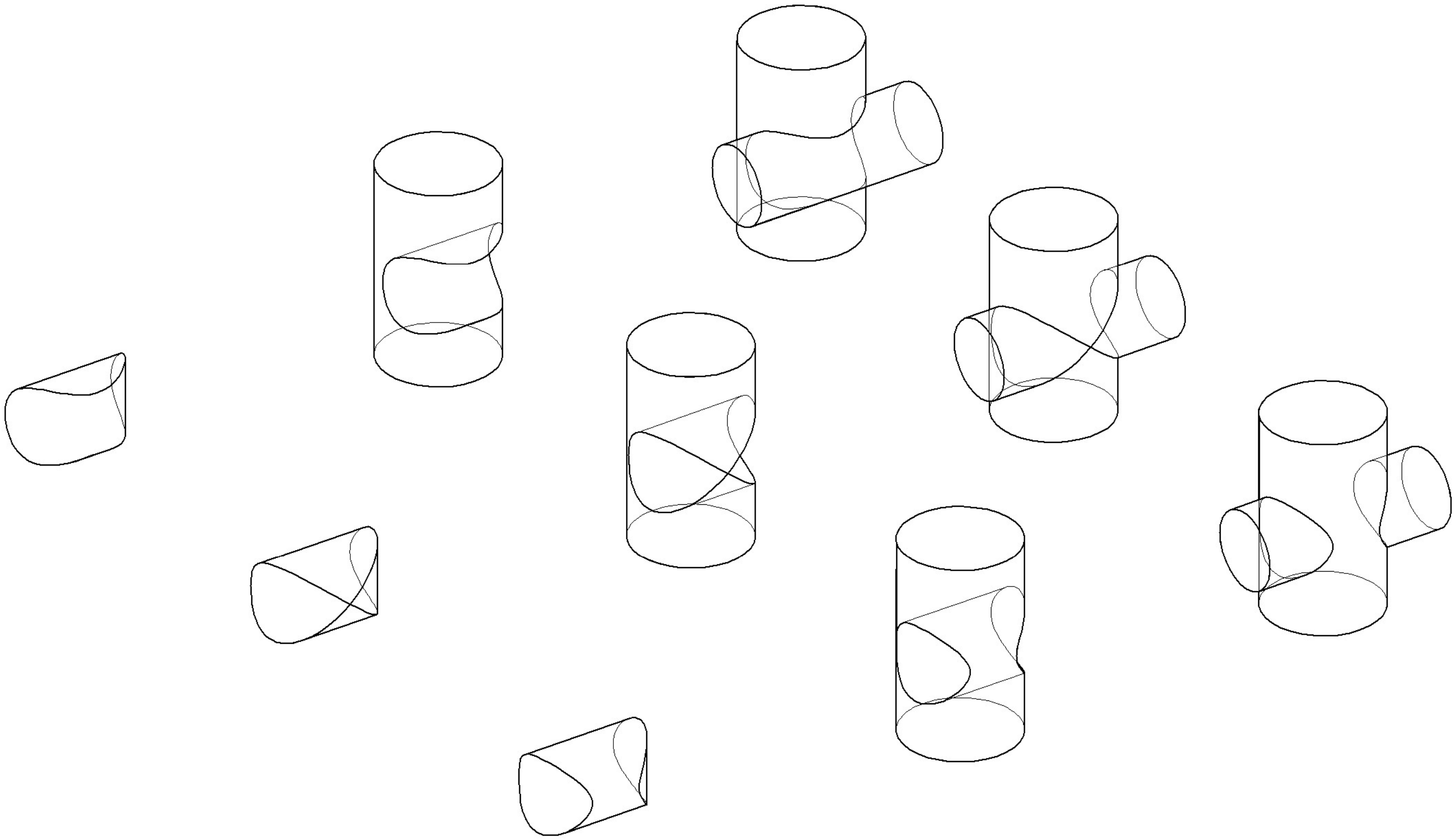
Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.



Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

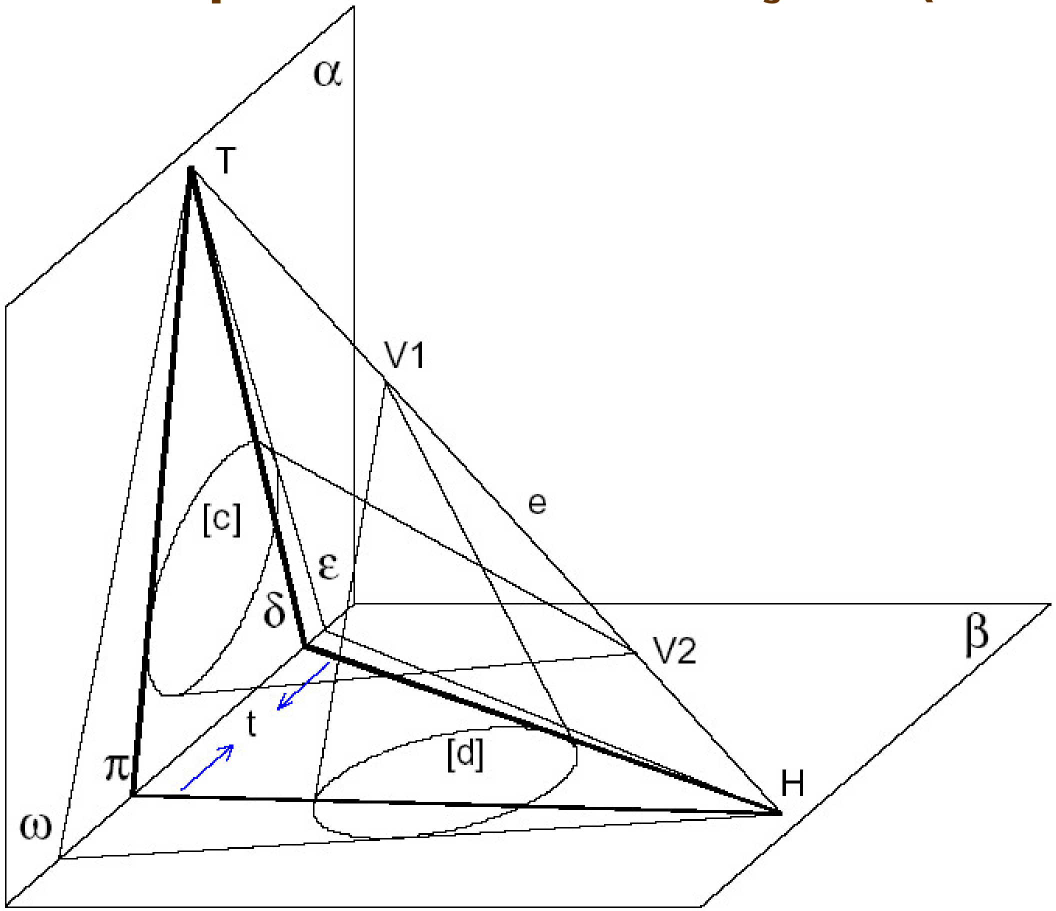
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Intersecções (sólido)



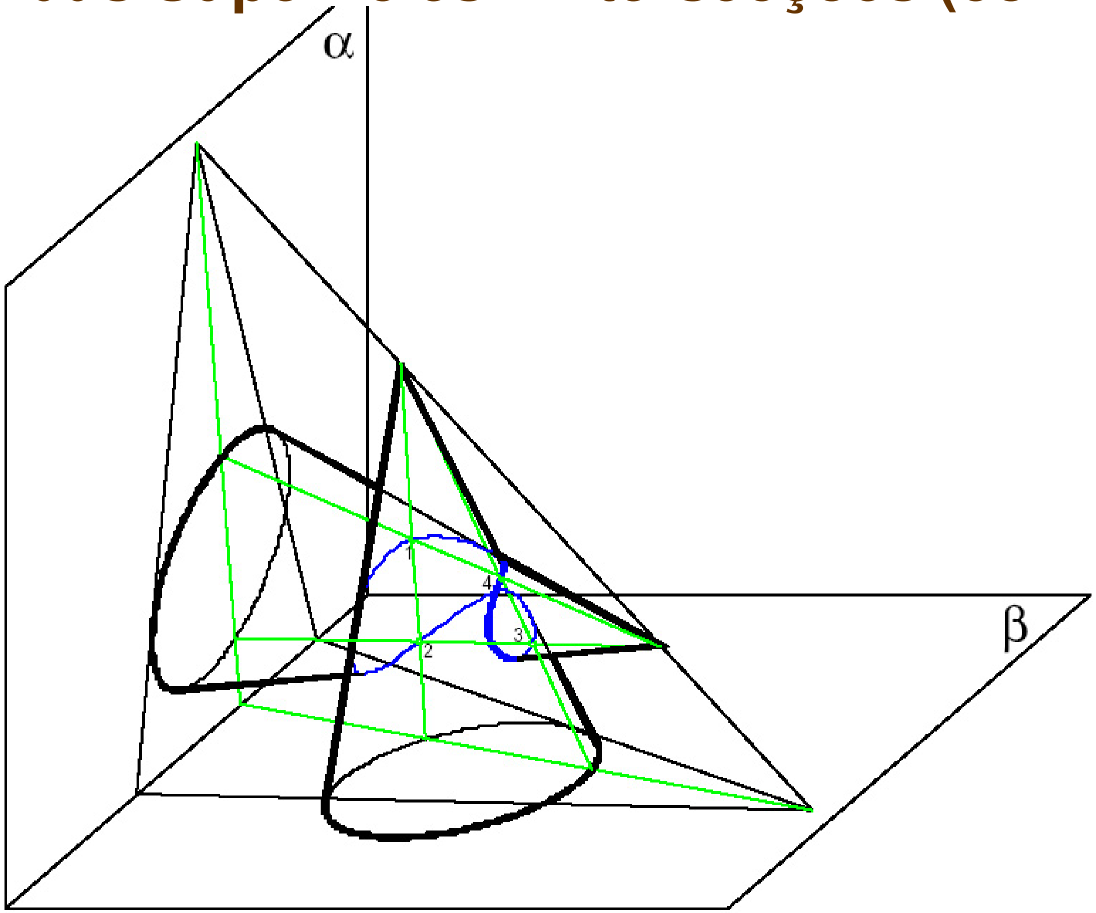
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Intersecções (cónicas)



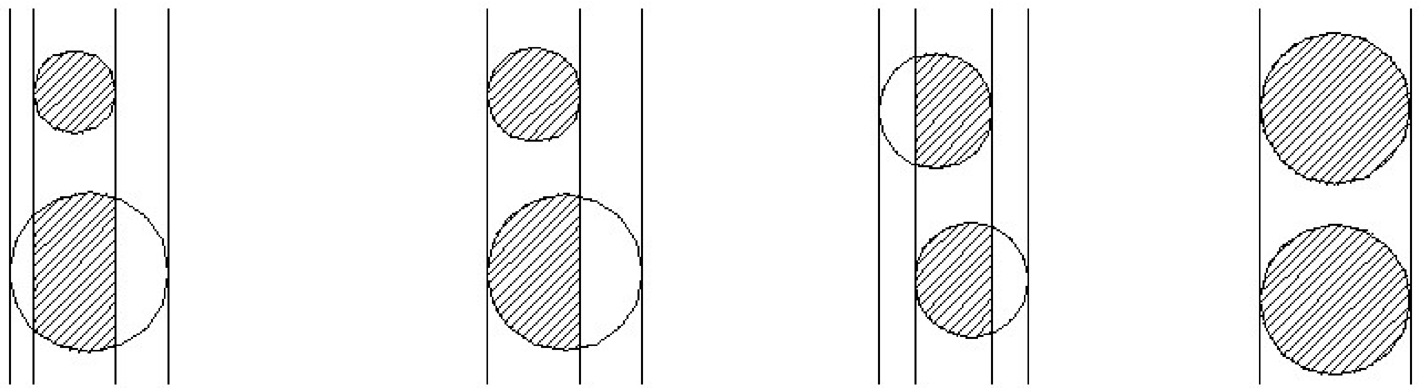
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Intersecções (cónicas)



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

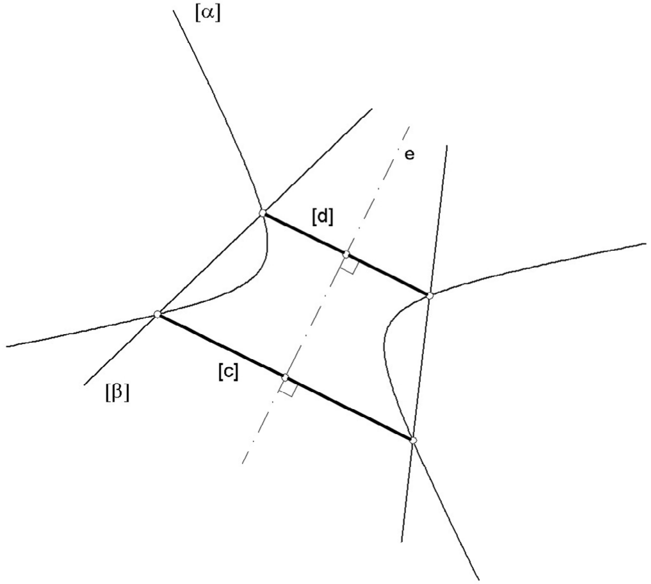
# Estudo das Superfícies - Intersecções (cónicas)

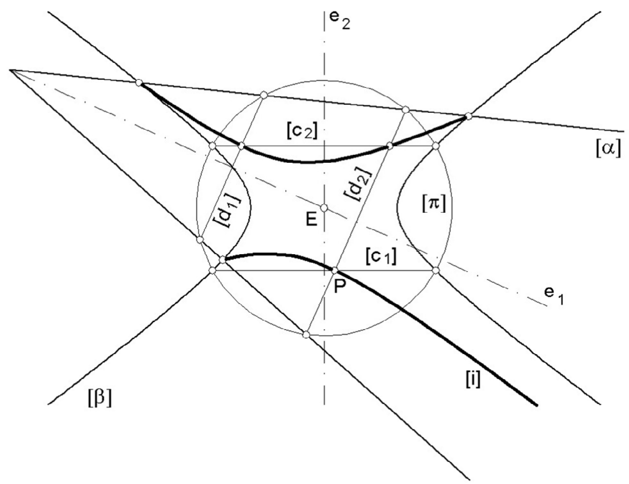


Penetração    Beijamento    Arrancamento    Beijamento Duplo

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - Intersecções (revolução)



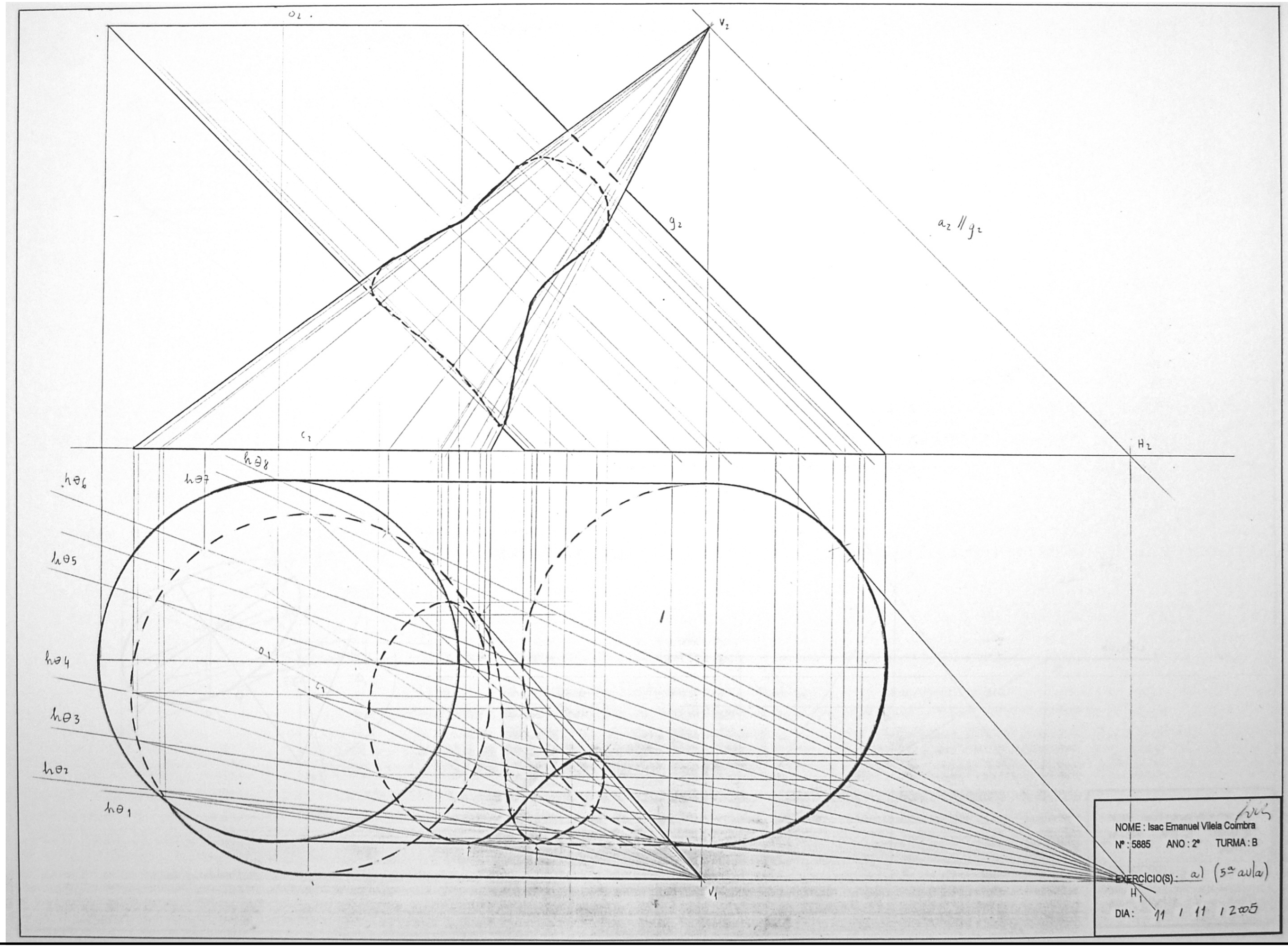




Duas superfícies de revolução com eixo comum intersectam-se segundo circunferências contidas em planos perpendiculares ao eixo.

Para intersectar duas superfícies de revolução com eixos concorrentes, utilizam-se superfícies esféricas auxiliares

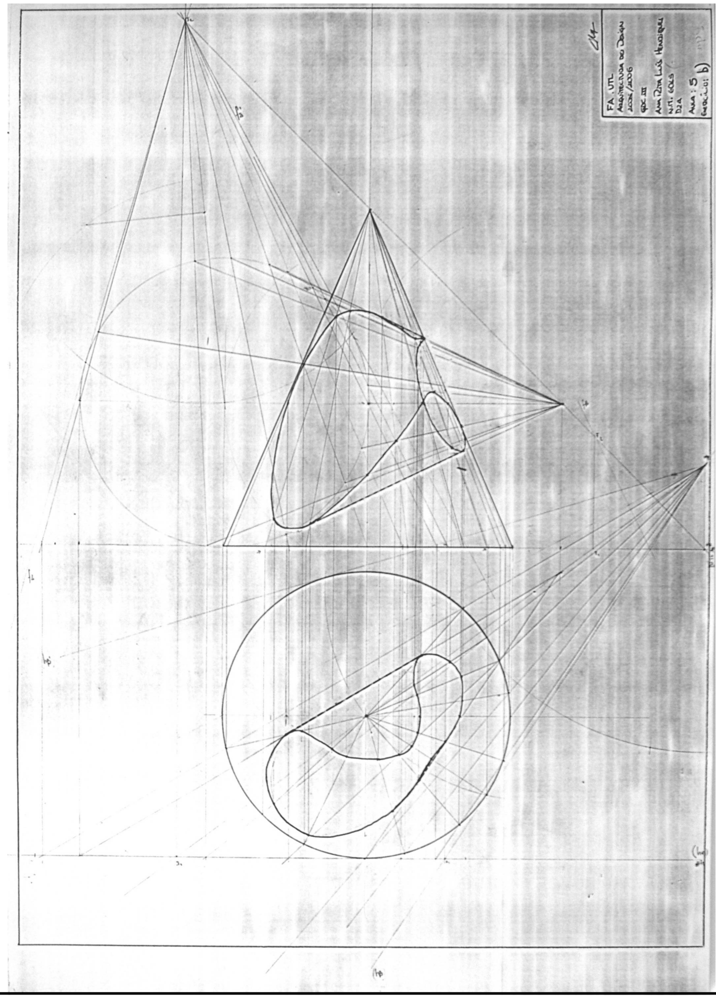
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Exercícios resolvidos



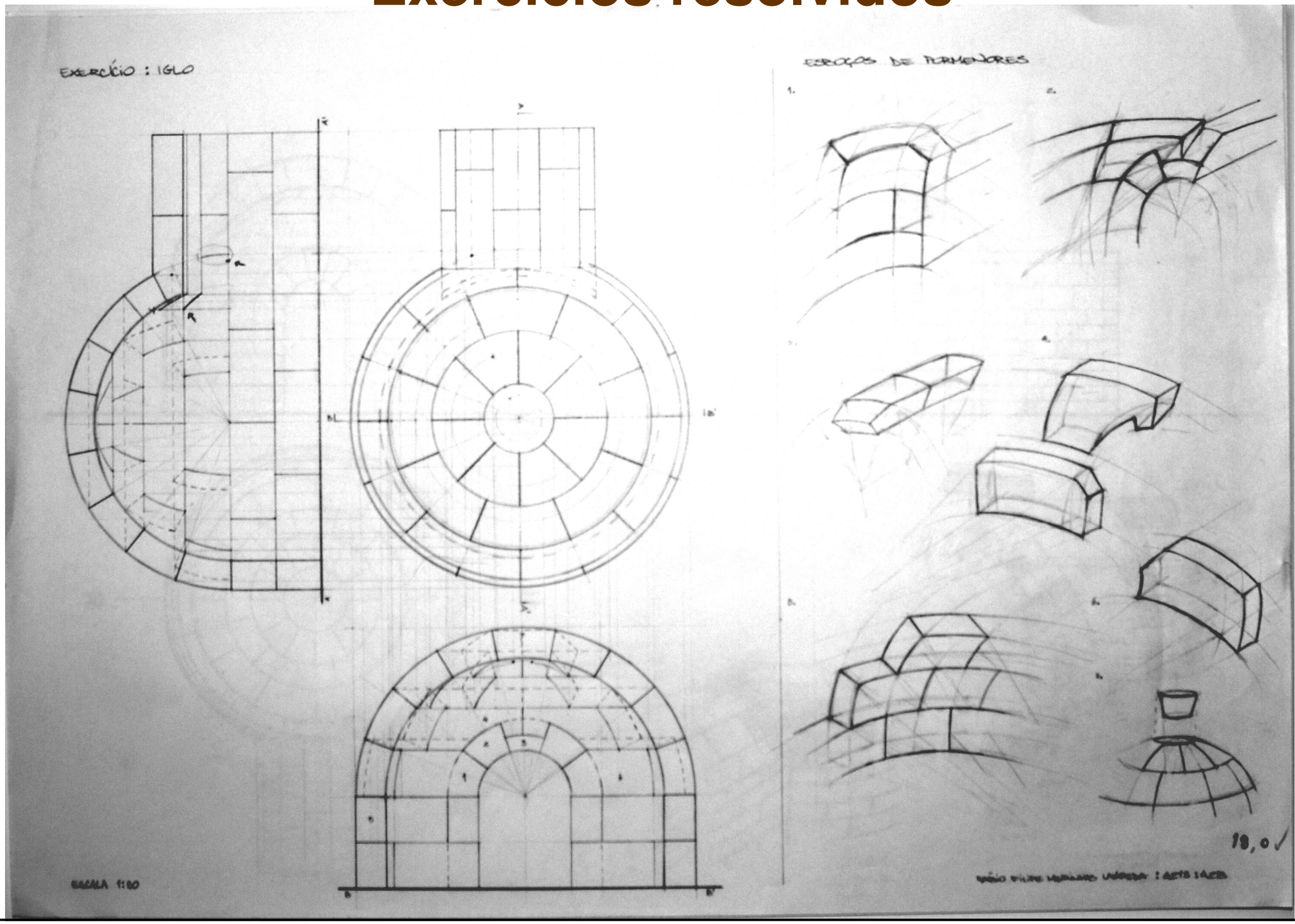
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Exercícios resolvidos



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Exercícios resolvidos



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC I – AULA TEÓRICA 11

Estudo das superfícies:
- Superfícies regradas não planificáveis (empenadas).

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

| CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ | | | exemplos |
|---|---|---|---|
| | | SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS | poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares |
| REGRADAS | PLANIFICÁVEIS | SUPERFÍCIE PLANA | plano |
| | | definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ | cónica; cilíndrica; prismática; piramidal [1] |
| | | definidas por 2 DIRECTRIZES | convolutas; superfícies de igual pendente |
| | | SUPERFÍCIES TANGENCIAIS | helicoidal tangencial |
| | | outras | |
| | NÃO PLANIFICÁVEIS | definidas por 3 DIRECTRIZES | parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado [1] |
| | | outras | superfície regrada de uma só face |
| CURVAS | | SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO [2] | esférica; tórica; elipsoidal |
| | | outras | serpentina; superfícies mínimas |

[1] Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

[2] Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

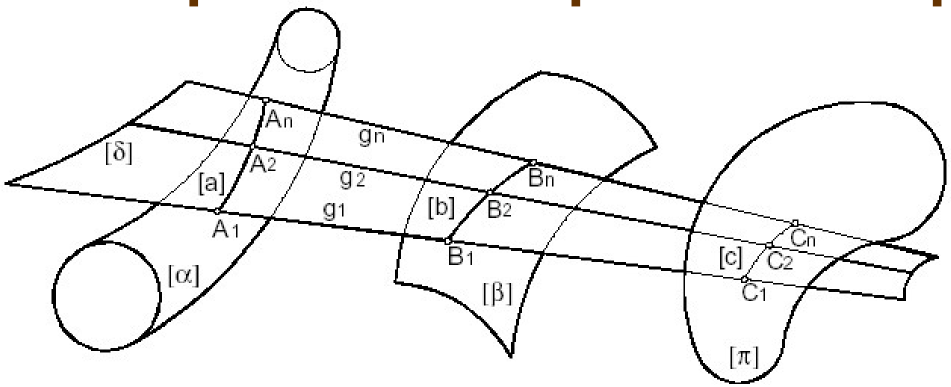
# Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

**Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)**

Uma superfície regrada não é planificável se duas geratrizes infinitamente próximas não se intersectarem. Esta condição é em geral cumprida quando a superfície é definida por três directrizes quaisquer . Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regrada ou em que esta degenera numa superfície planificável.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies empenadas




A condição que se impõe para que as rectas $g_1$, $g_2$, $g_n$ definam uma superfície regrada $[\delta]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\pi]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[\delta]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[\alpha]$, $[\beta]$ e $[\pi]$ segundo linhas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas $g_1$, $g_2$, $g_n$ designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfíces directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

Se a superfície $[\delta]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas $g_1$, $g_2$, $g_n$, então diz-se que é SIMPLESMENTE REGRADA.

Se a superfície $[\delta]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas $g_1$, $g_2$, $g_n$ e $j_1$, $j_2$, $j_n$, então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes $g_1$, $g_2$, $g_n$ são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

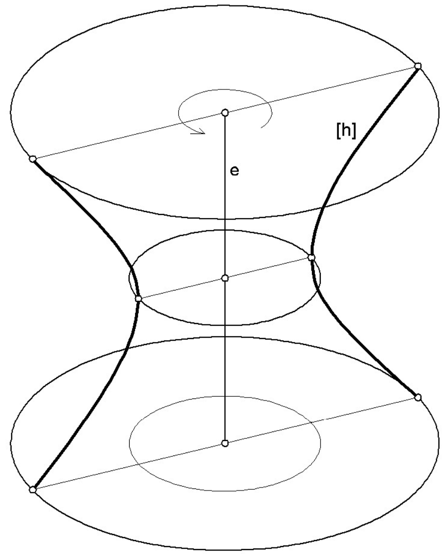
Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes $g_1$, $g_2$, $g_n$ são paralelas às geratrizes $d_1$, $d_2$, $d_n$ de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.

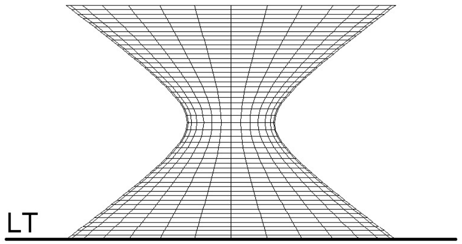
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

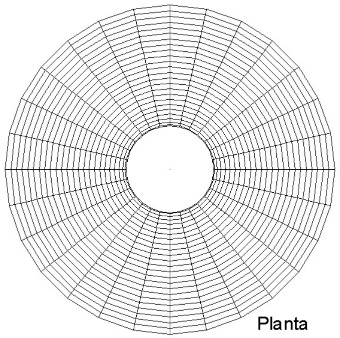
# Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

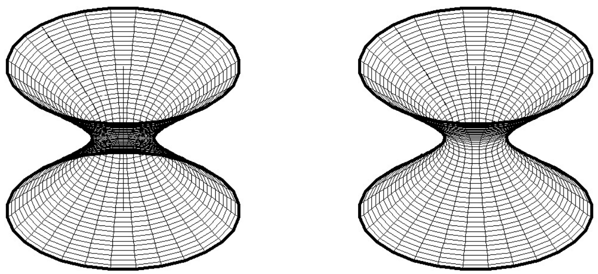
| SUPERFÍCIES REGRADAS EMPENADAS DEFINIDAS POR 3 DIRECTRIZES (linhas e/ou superfícies) R (recta) ; C (curva) ; S (superfície) ; R∞ (recta imprópria) ; C∞ (curva imprópria) | TIPO | DIRECTRIZES | exemplos |
|---|---|---|---|
| | ORDINÁRIA | R R R | Hiperbolóide escaleno; Hiperbolóide de revolução de uma folha |
| | | R R C | |
| | | R C C | Superfícies de arco enviesado (corno de vaca; arriere-voussure) |
| | | C C C | |
| | | R R S | |
| | | R C S | |
| | | C C S | |
| | | R S S | |
| | | C S S | |
| | | S S S | |
| | DE PLANO DIRECTOR | R∞ R R | Parabolóide hiperbólico |
| | | R∞ R C | Superfícies de conóide; Superfícies helicoidais |
| | | R∞ C C | Superfícies de cilindróide |
| | | R∞ R S | Superfícies de conóide com um núcleo |
| | | R∞ C S | Superfícies de cilindróide com um núcleo; Superfícies helicoidais com núcleo |
| | | R∞ S S | Superfícies de cilindróide com dois núcleos |
| | DE CONE DIRECTOR | C∞ R R | Tetraedróide |
| | | C∞ C R | Superfícies helicoidais |
| | | C∞ C C | |
| | | C∞ R S | |
| | | C∞ C S | Superfícies helicoidais com núcleo |
| | | C∞ S S | |

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



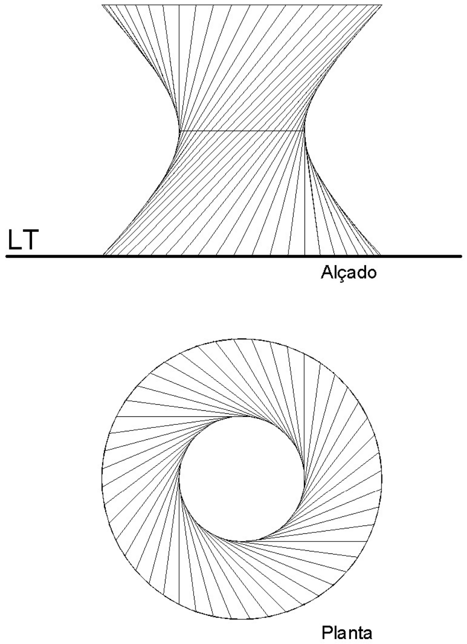



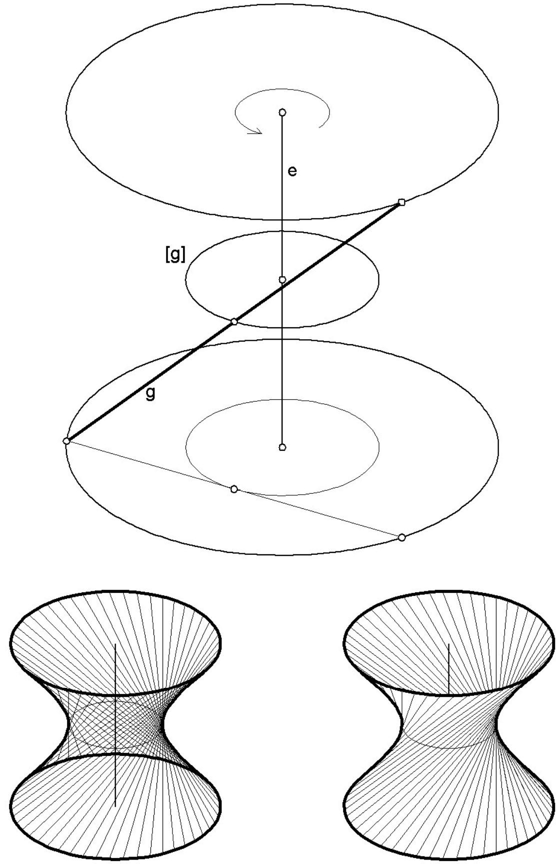



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO TRANSVERSO

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução

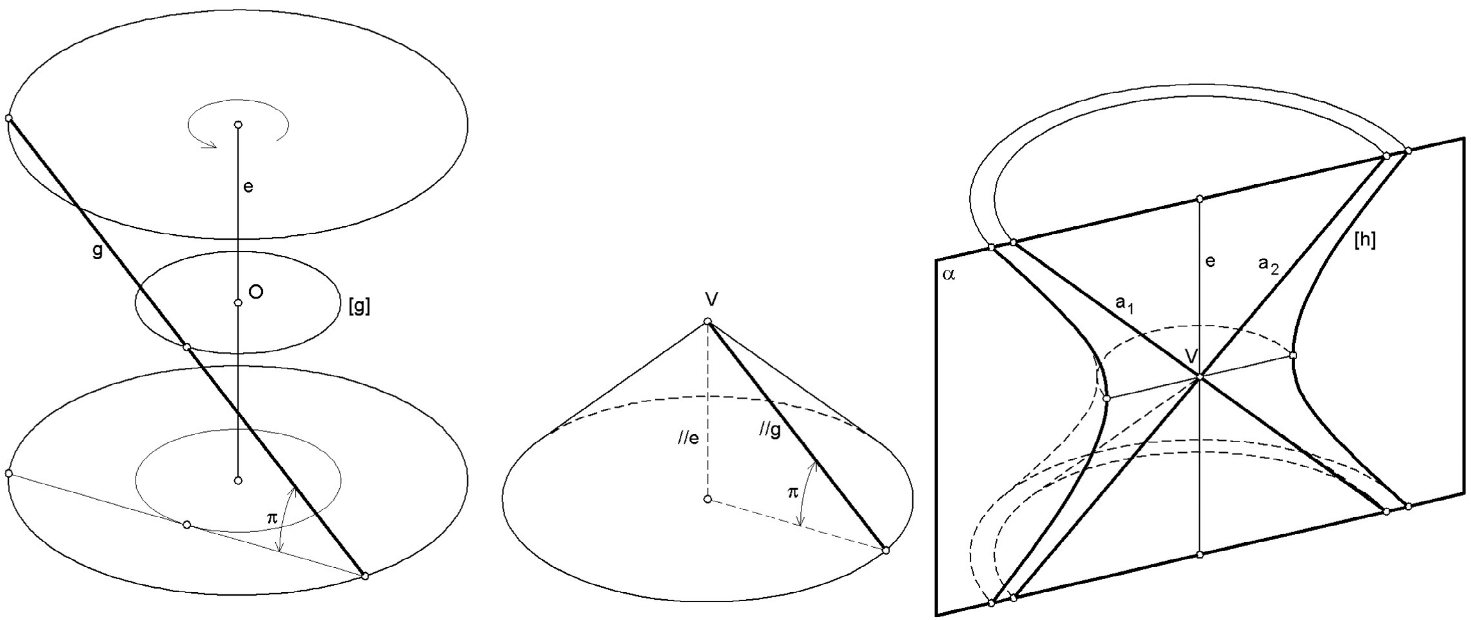



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR ROTAÇÃO DE UMA RECTA

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

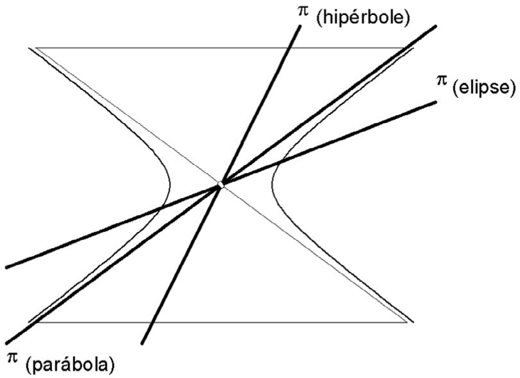
# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução

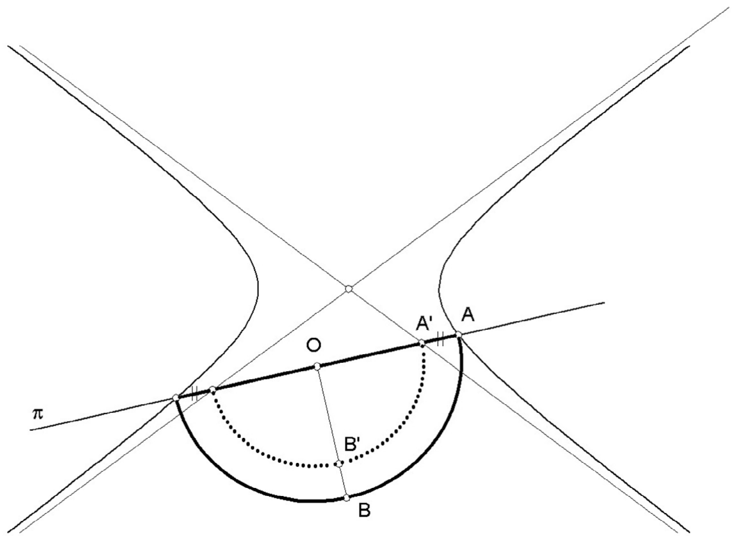



CONE DIRECTOR / CONE ASSINTÓTICO / SECÇÕES HIPERBÓLICAS PRINCIPAIS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



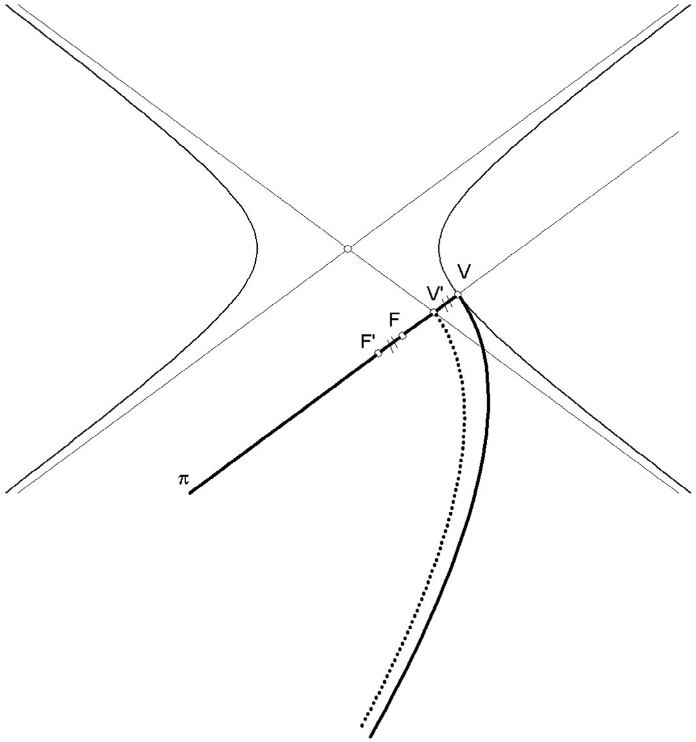

OB'/OB=OA'/OA

(elipse)

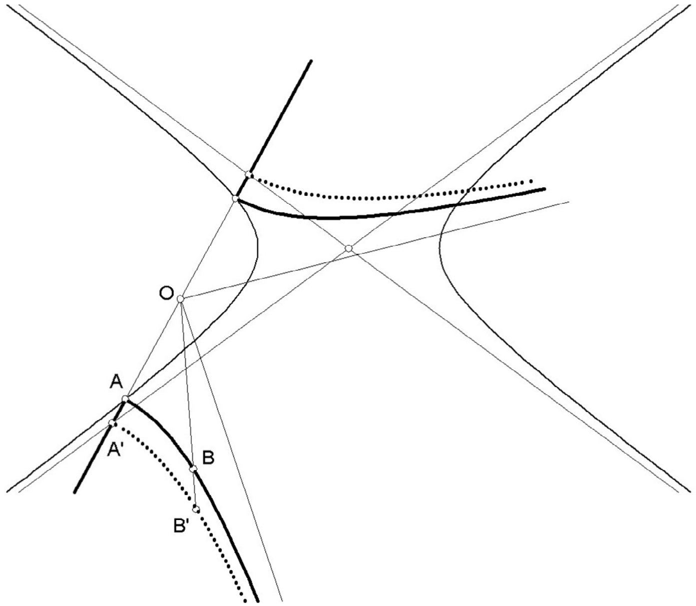
INTERSECÇÕES PLANAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução




(parábola)



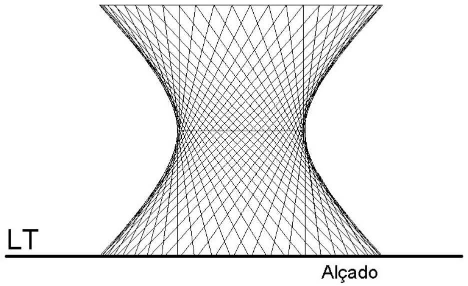

OB'/OB=OA'/OA

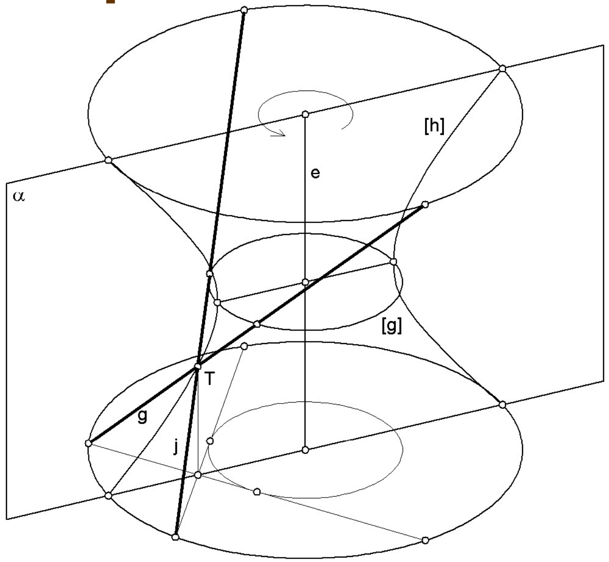
(hipérbole)

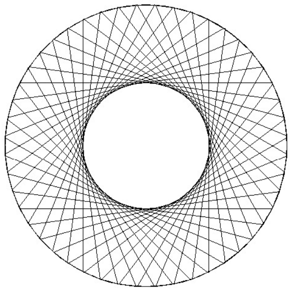
INTERSECÇÕES PLANAS

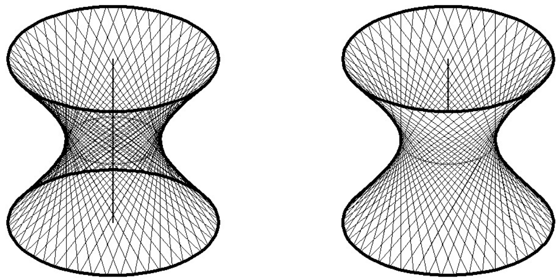
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



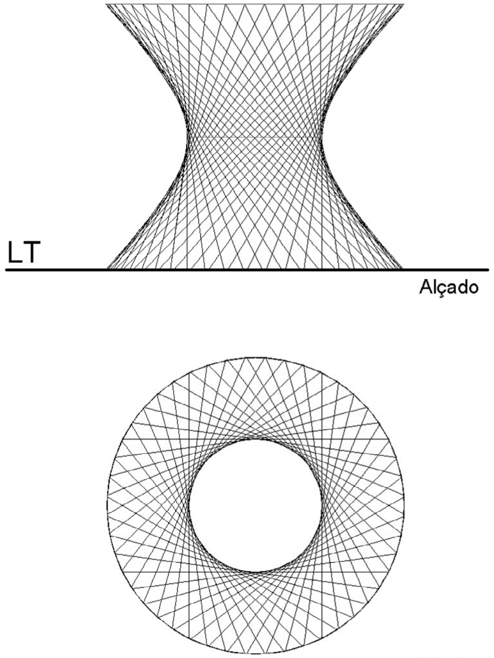



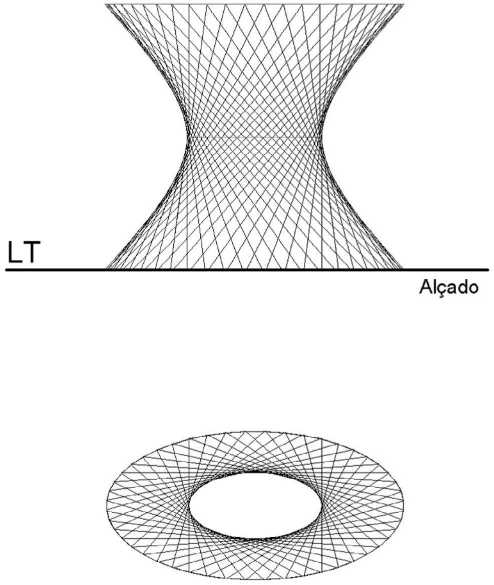
DOIS SISTEMAS DE GERATRIZES RECTAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



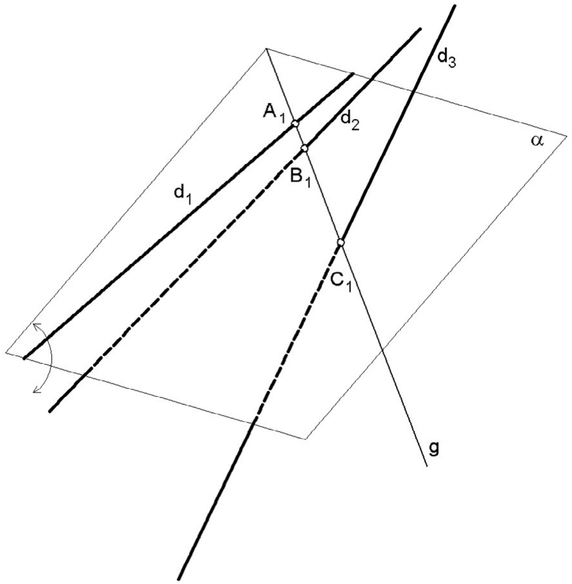

HIPERBOLÓIDE REGRADO DE REVOLUÇÃO

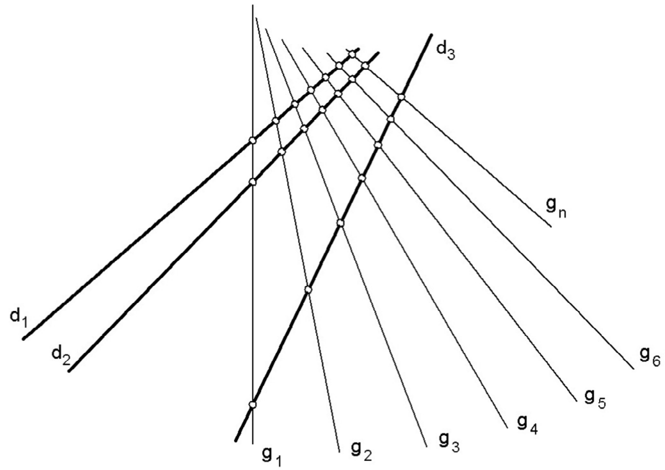



HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - hiperbolóide escaleno

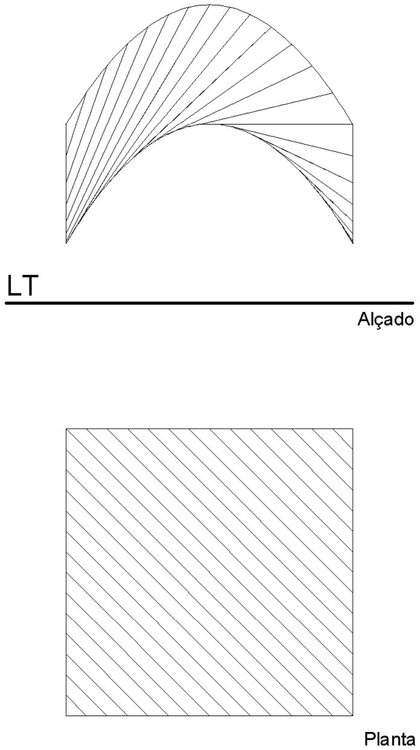


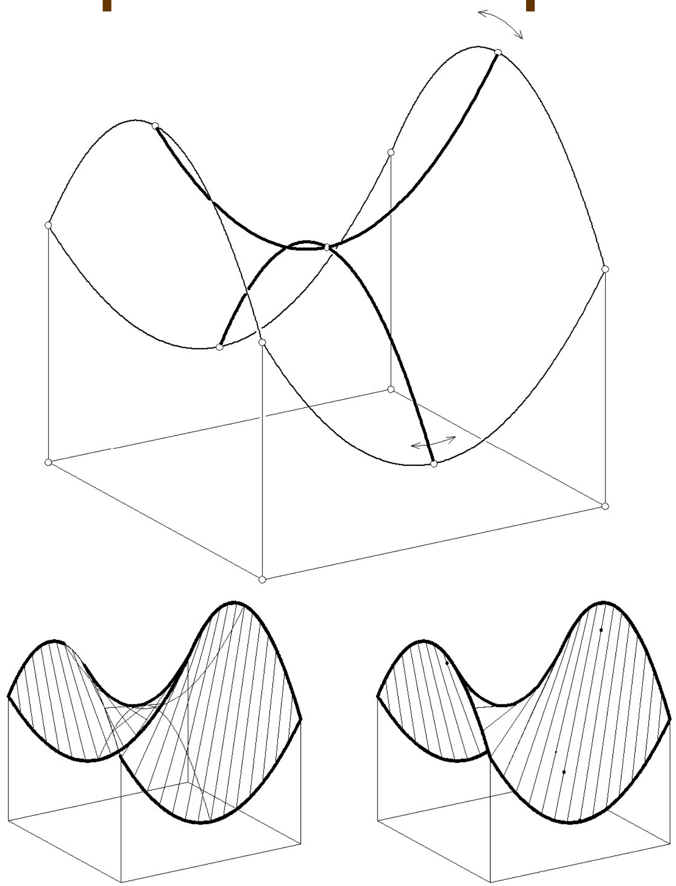




DEFINIÇÃO DO HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

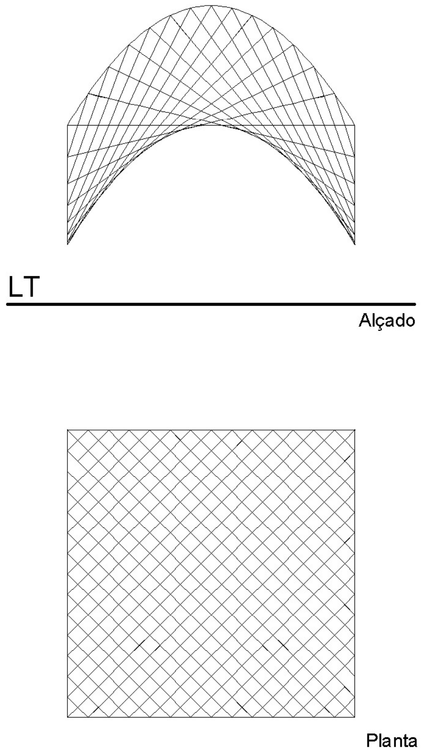
# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico

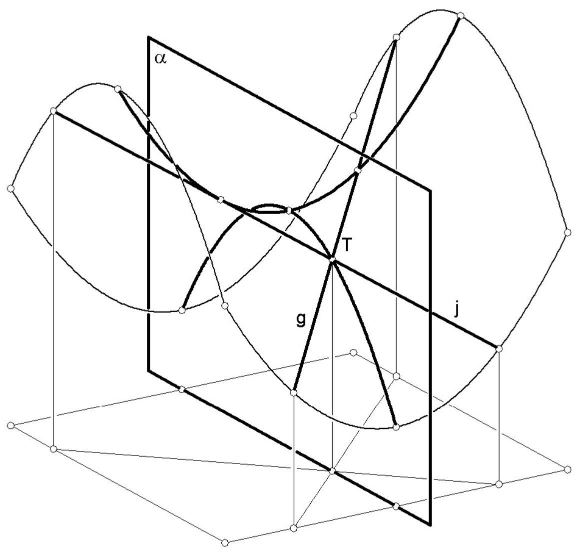


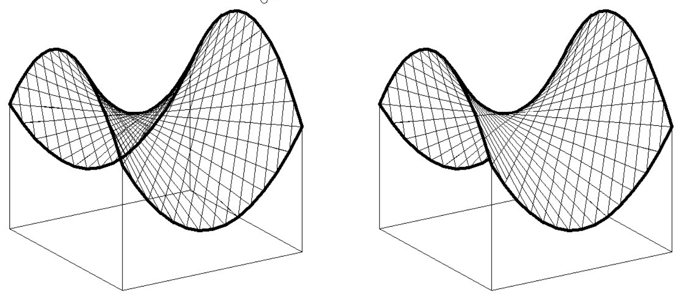



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR MOVIMENTO DE UMA PARÁBOLA APOIADA NOUTRA PARÁBOLA

# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



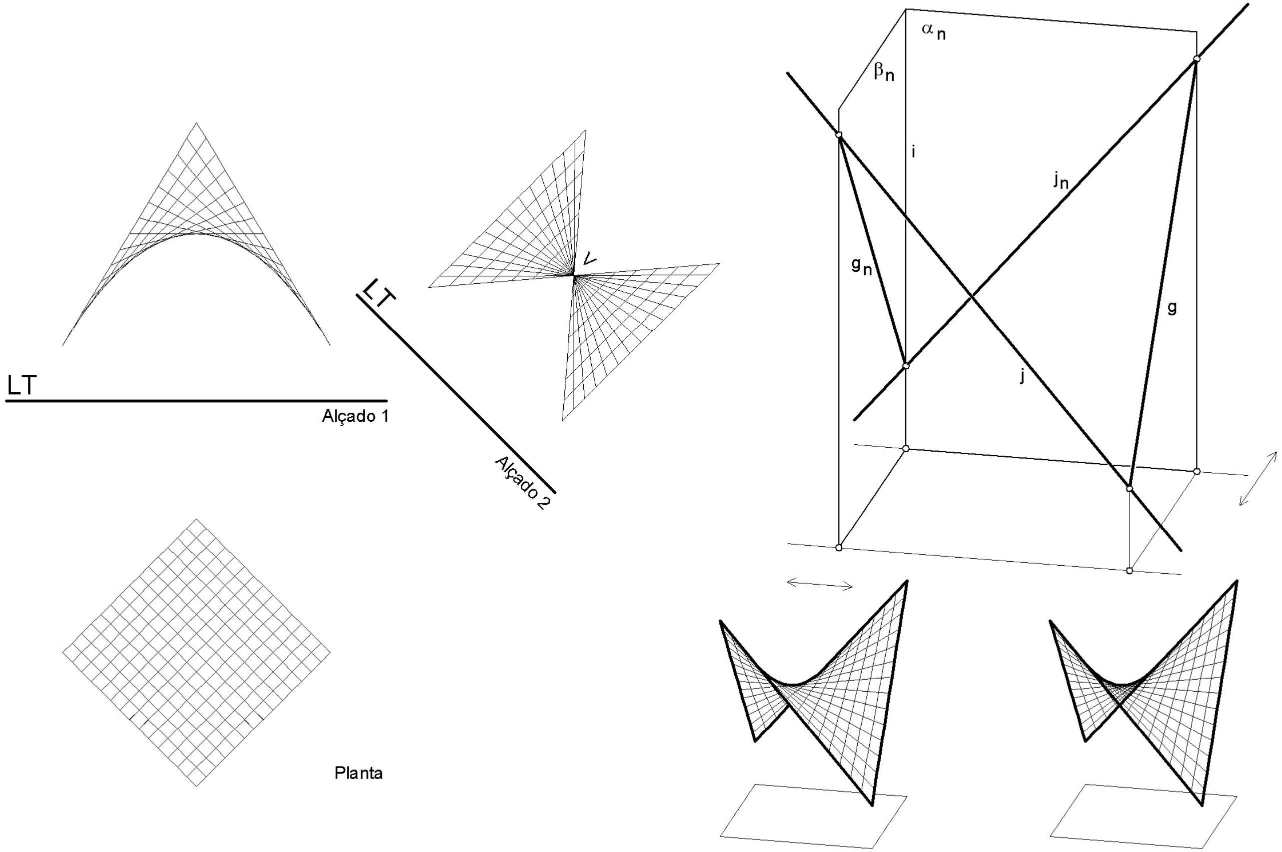



DOIS SISTEMAS DE GERATRIZES RECTAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

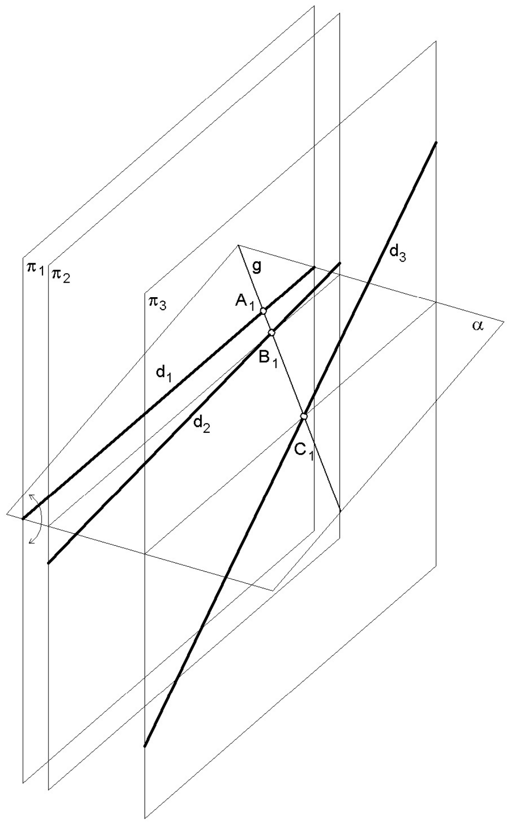
# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico

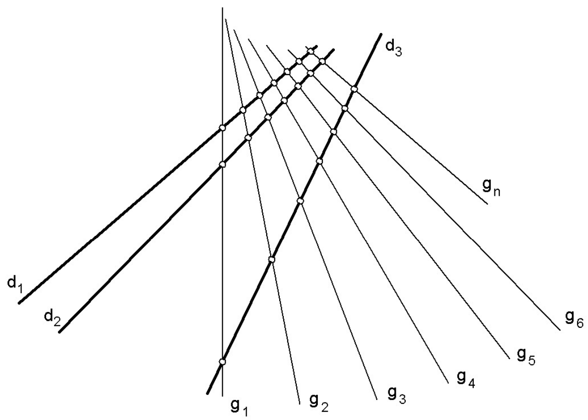



GERAÇÃO POR RECTAS / PLANOS DIRECTORES / PONTO DE DIVERGÊNCIA

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico

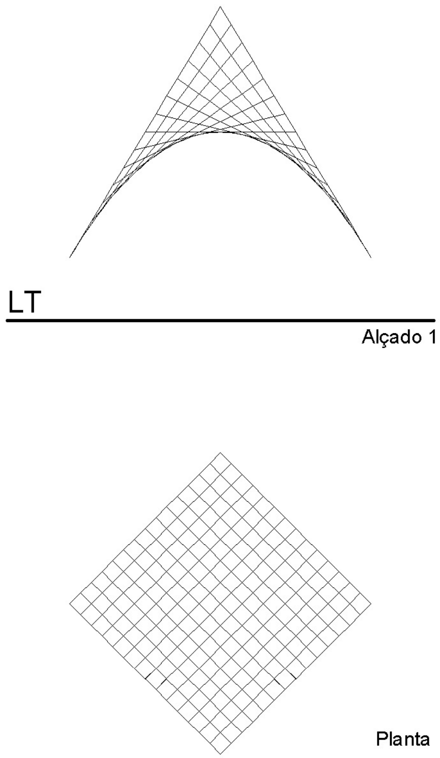


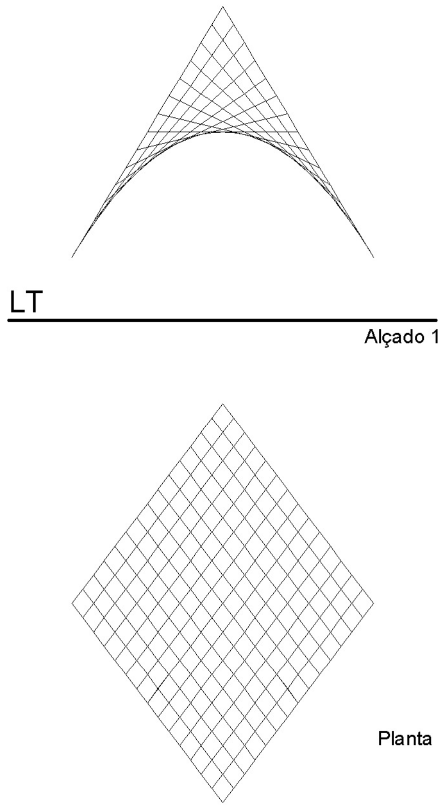

DEFINIÇÃO DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



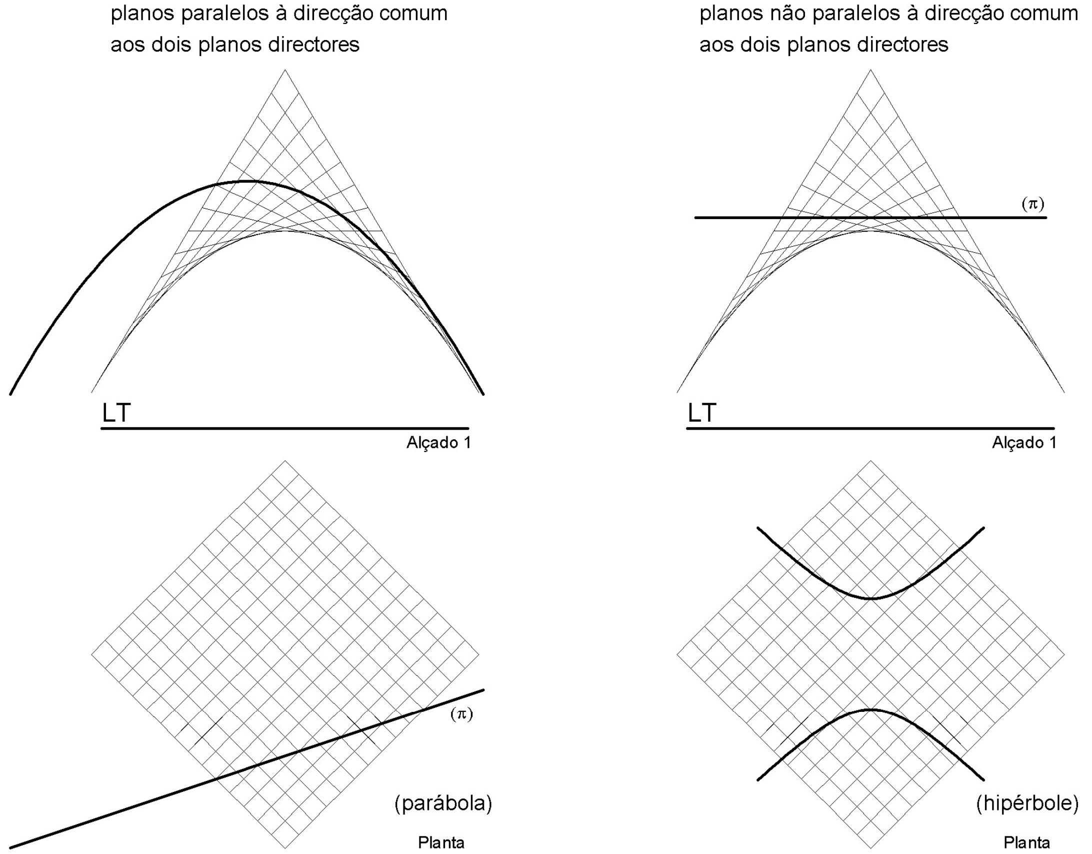

PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ISÓSCELES




PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

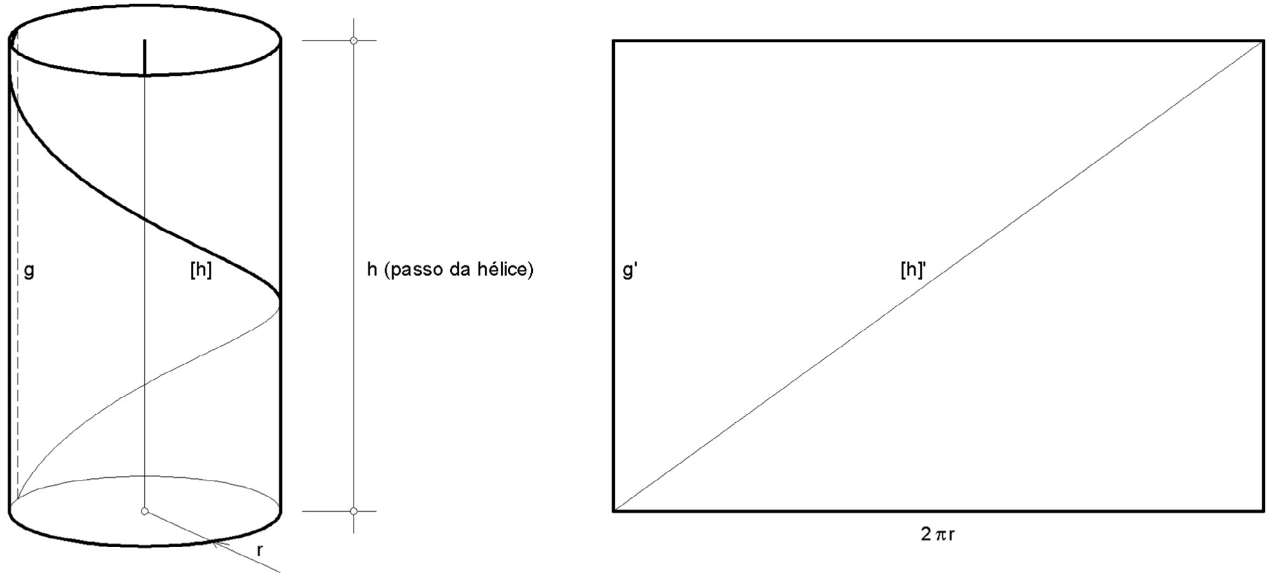
# Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico




INTERSECÇÕES PLANAS

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - helicoidais empenados



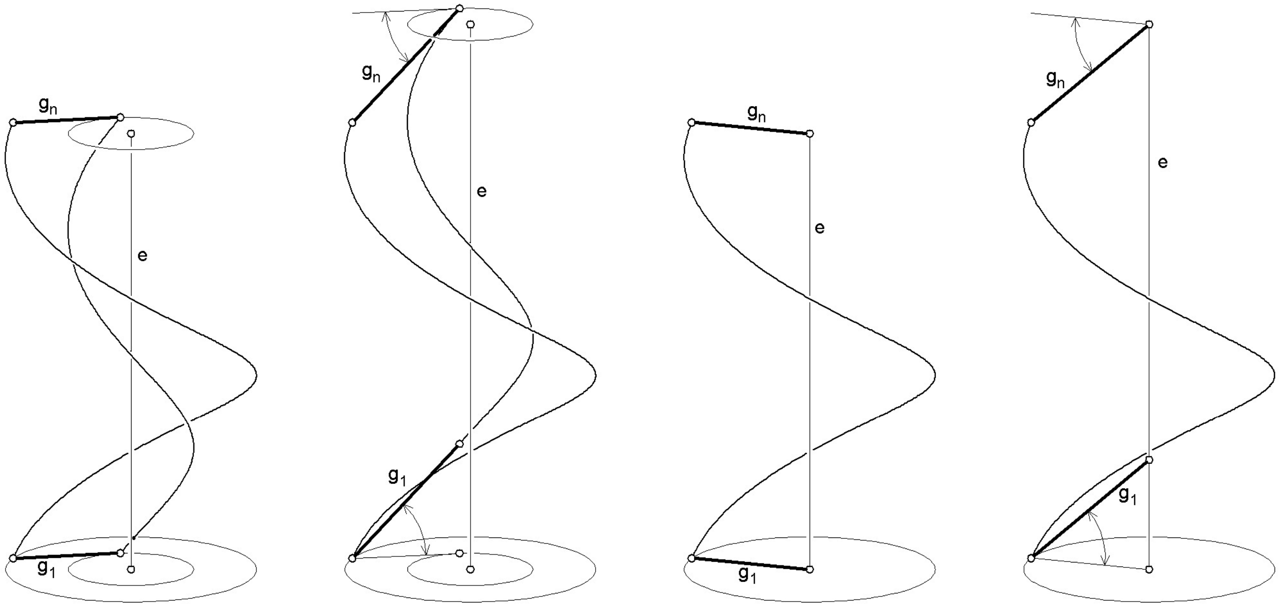

HÉLICE CILÍNDRICA

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - helicoidais empenados

COM NÚCLEO CILÍNDRICO

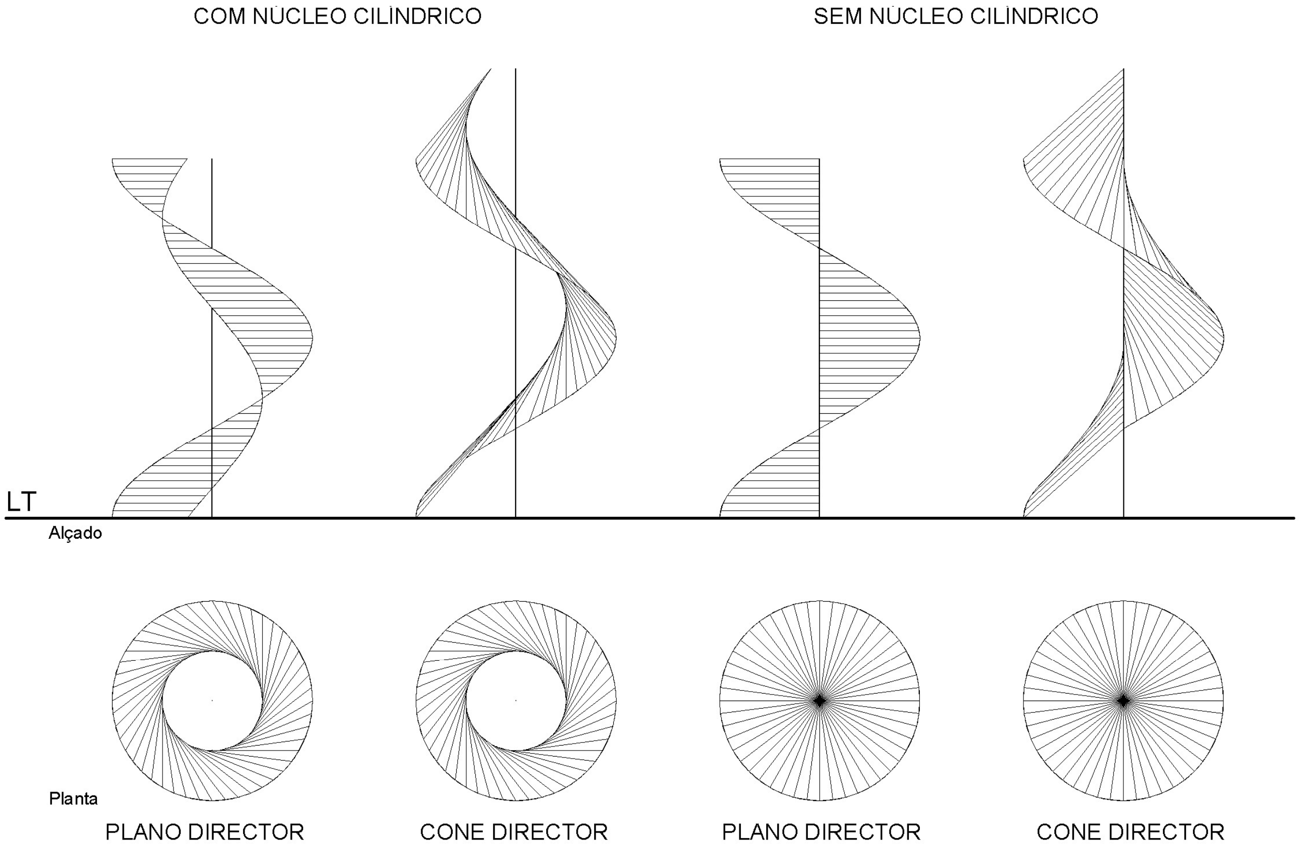
SEM NÚCLEO CILÍNDRICO




PLANO DIRECTOR CONE DIRECTOR PLANO DIRECTOR CONE DIRECTOR

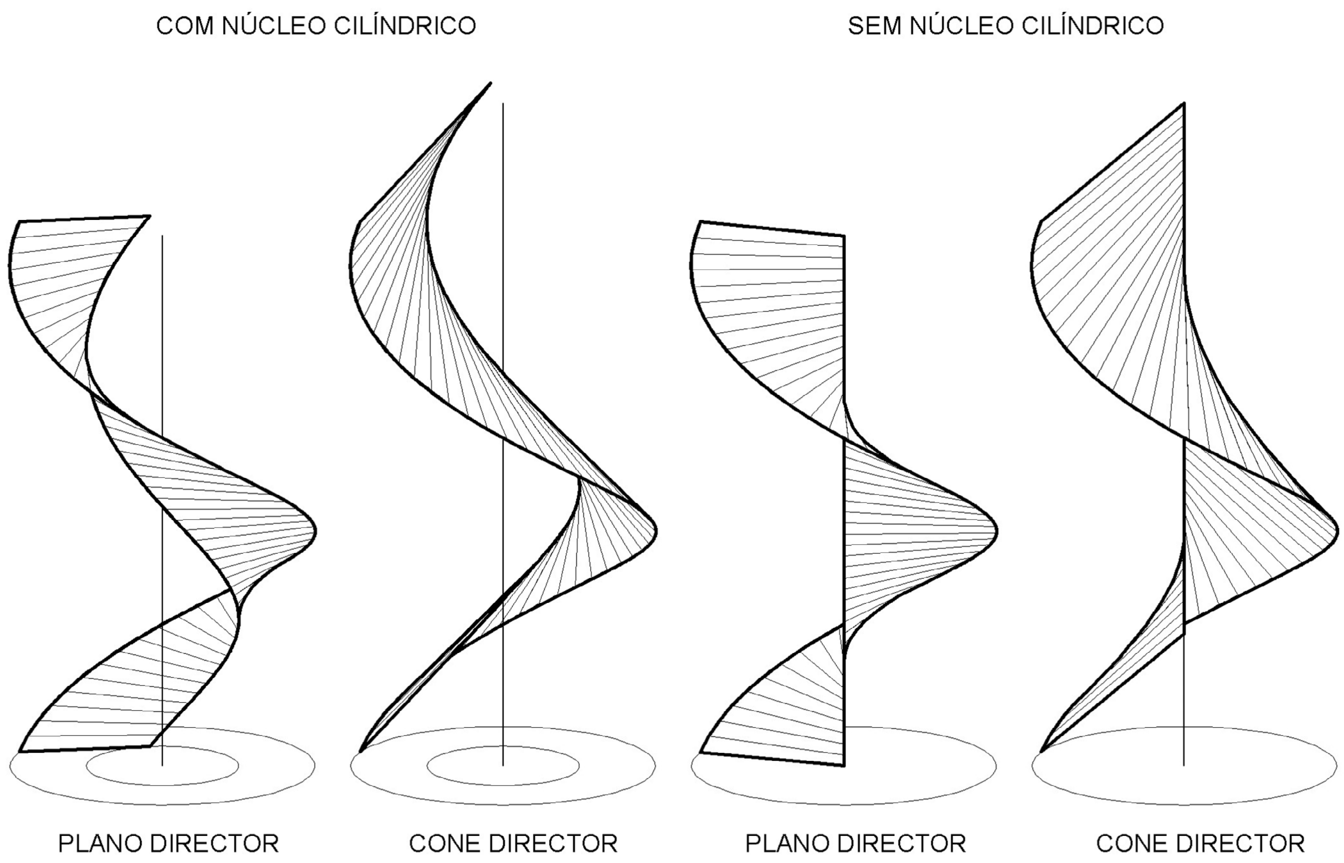
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - helicoidais empenados



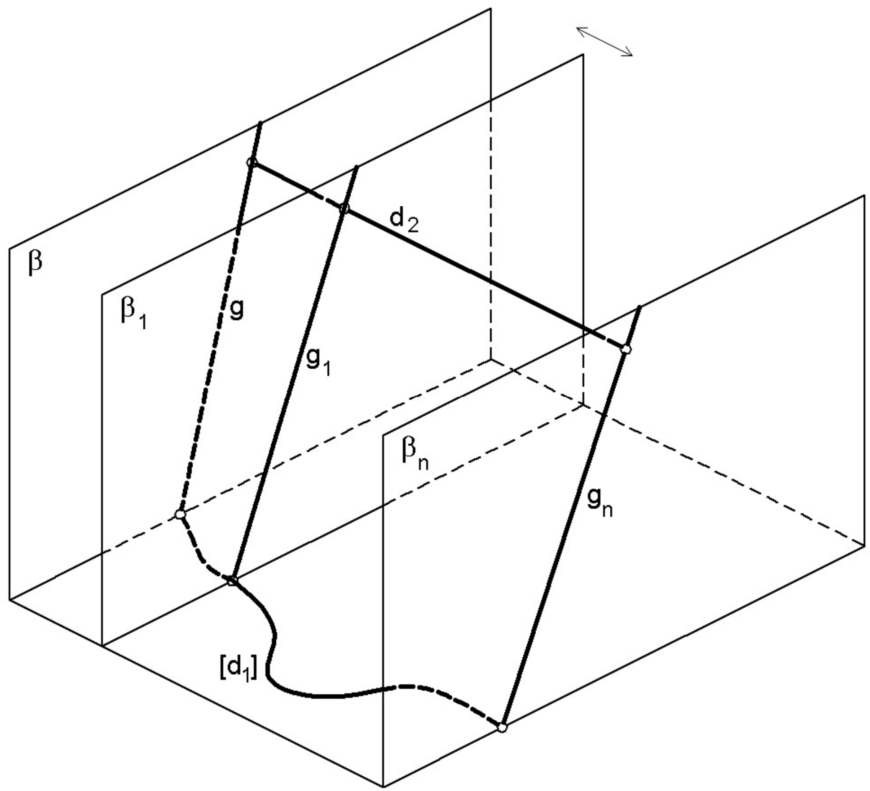
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - helicoidais empenados



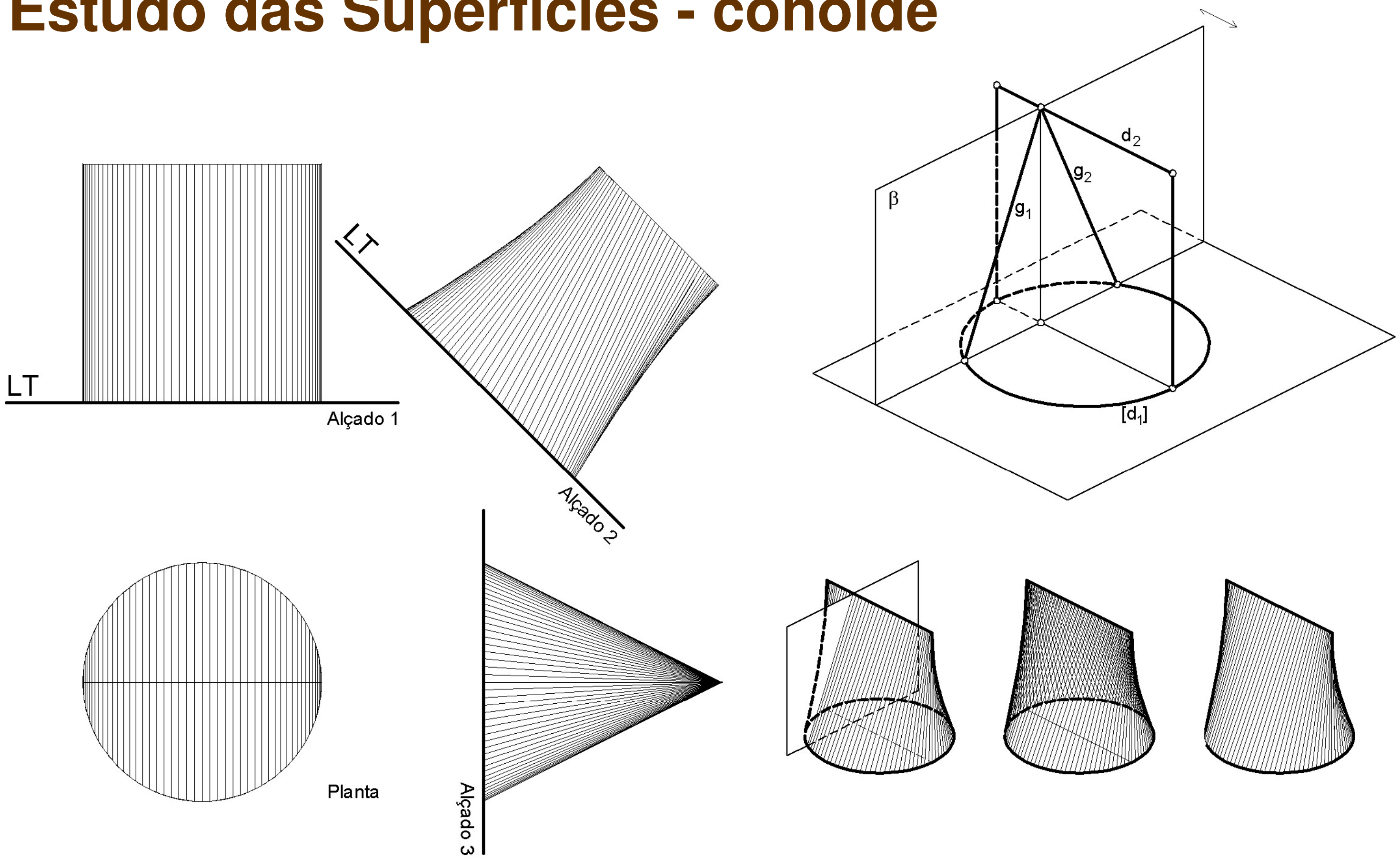
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Estudo das Superfícies - conóide



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

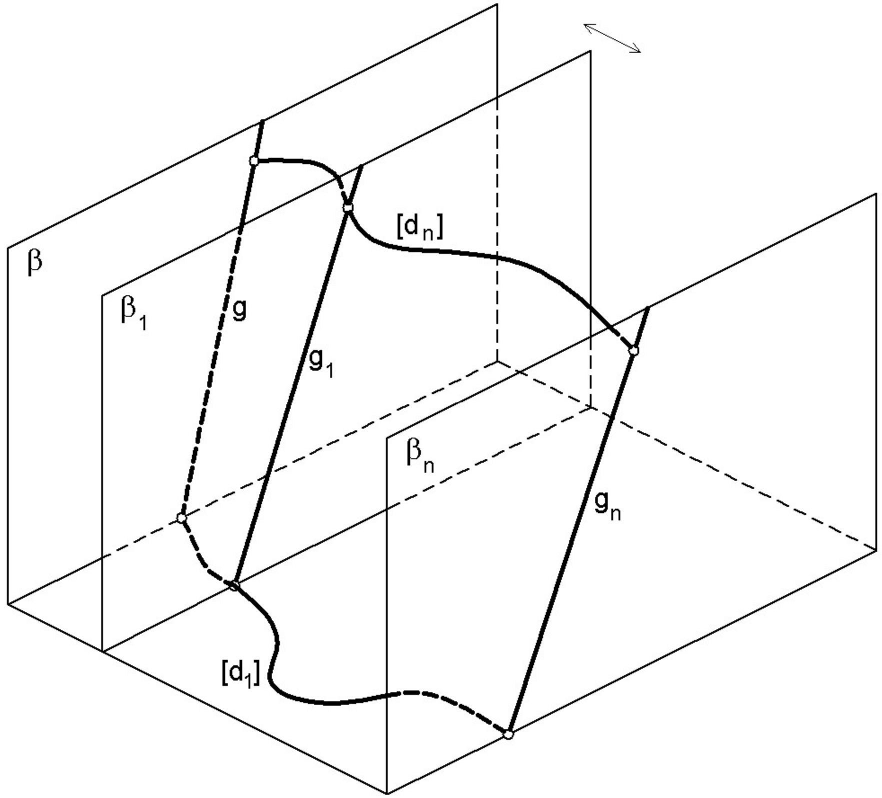
# Estudo das Superfícies - conóide



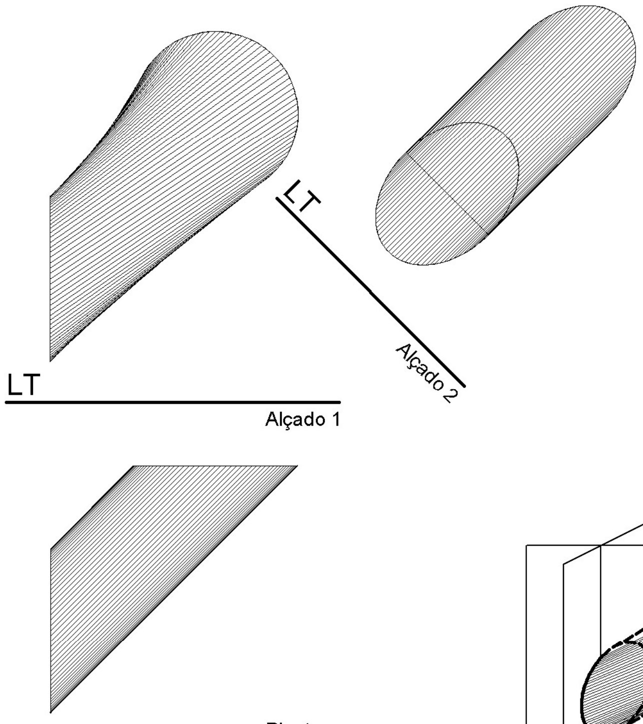

SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

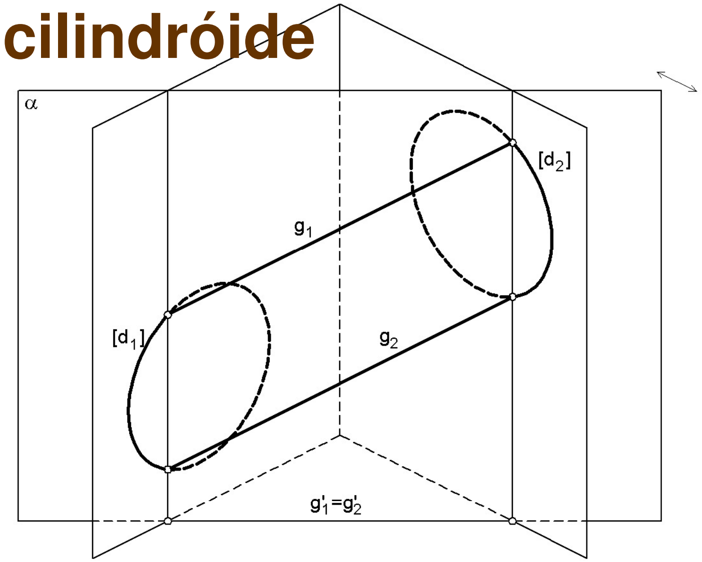
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

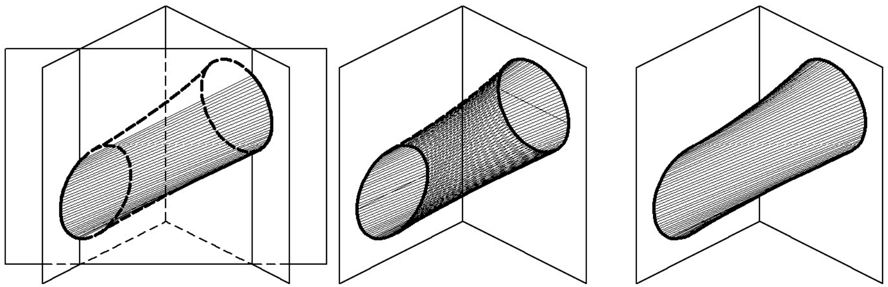
# Estudo das Superfícies - cilindróide



# Estudo das Superfícies - cilindróide



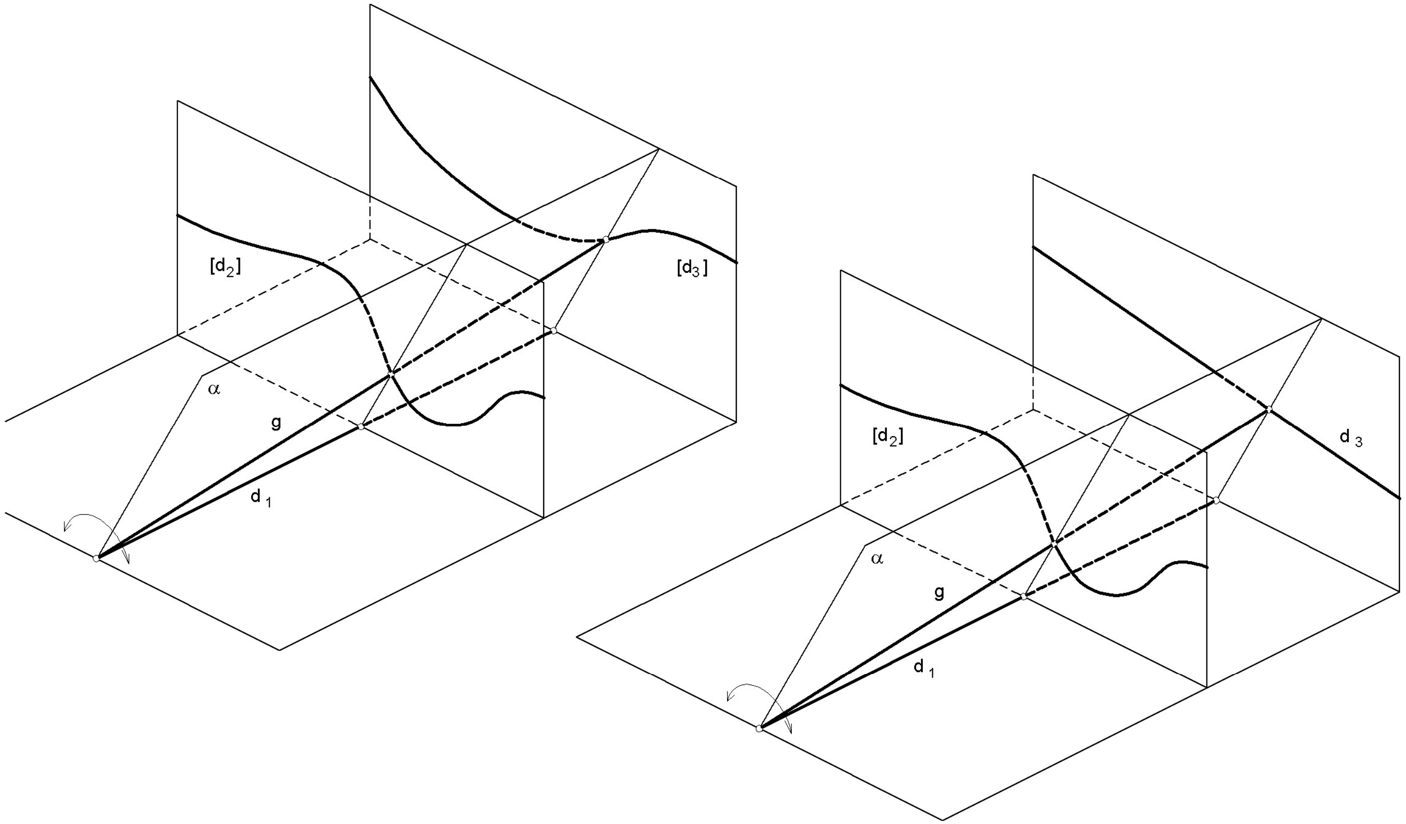



SUPERFÍCIE DE CILINDRÓIDE DE DIRECTRIZES CIRCUNFERENCIAIS

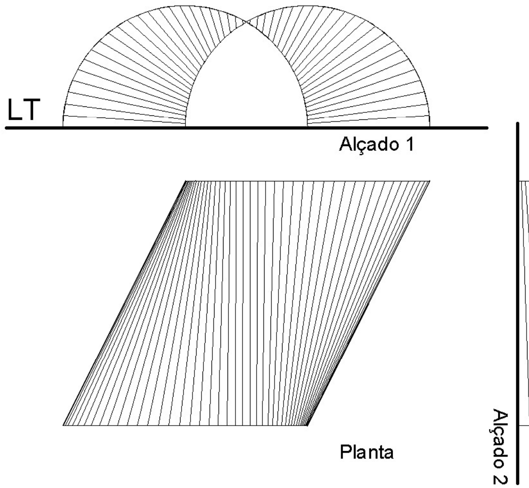
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

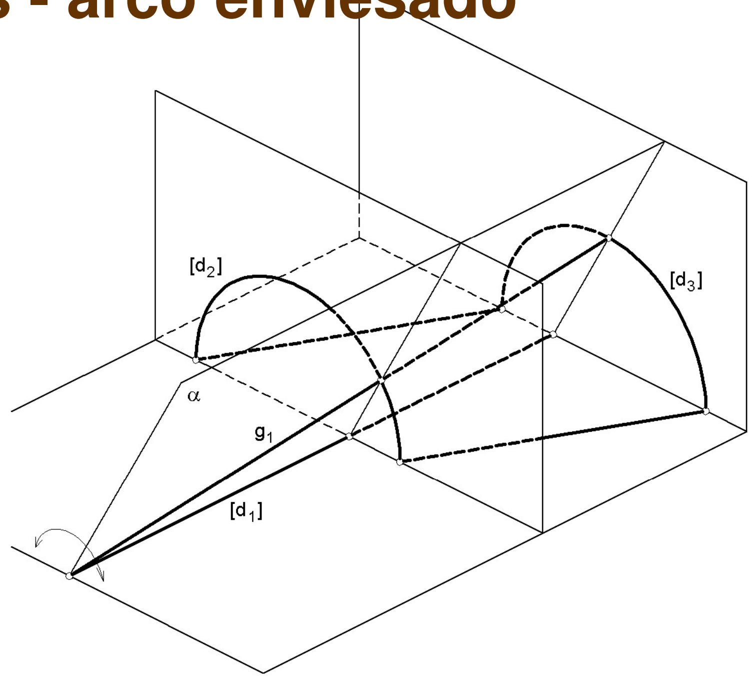
# Estudo das Superfícies - arco enviesado

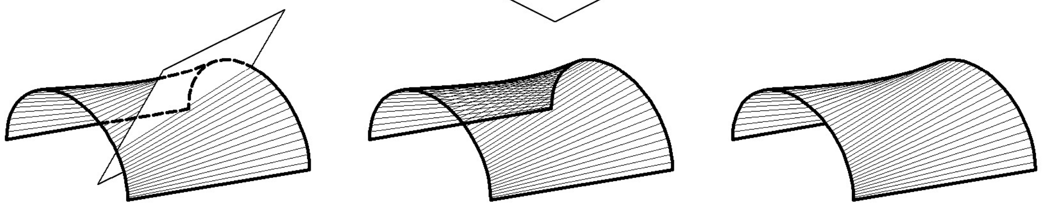



SUPERFÍCIES DE ARCO ENVIESADO

# Estudo das Superfícies - arco enviesado



SUPERFÍCIE DE ARCO ENVIESADO - "CORNO DE VACA"

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

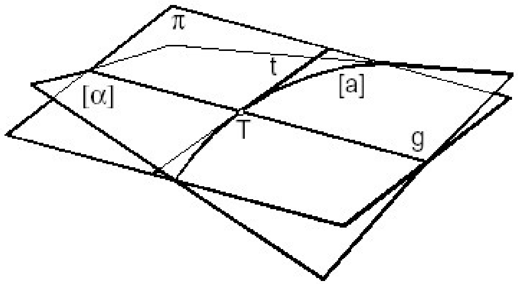
# GDC I – AULA TEÓRICA 12

Estudo das superfícies:
- Superfícies regradas não planificáveis (empenadas) – planos tangentes e concordâncias.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

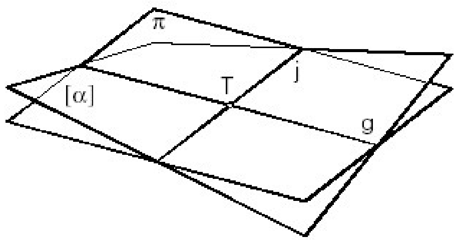
# Superfícies empenadas - Planos tangentes

**Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada**




Numa superfíce empenada simplesmente regrada $[\alpha]$ o plano $\pi$, tangente a $[\alpha]$ num ponto $T$, contém a geratriz recta $g$ que por ele passa. Este plano intersecta a superfíce segundo a recta $g$ e segundo uma linha $[a]$. O plano $\pi$ contém a recta $t$ tangente à linha $[a]$ no ponto $T$.

**Plano tangente a uma superfície duplamente regrada**

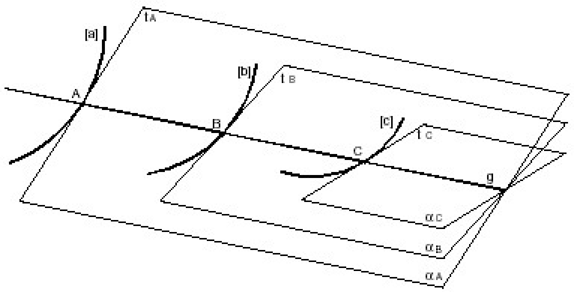



Numa superfície empenada duplamente regrada, $[\alpha]$, o plano $\pi$, tangente a $[\alpha]$ num ponto $T$, fica definido pelas duas geratrizes rectas, $g$ e $j$, que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Superfícies empenadas - Planos tangentes

**Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz**



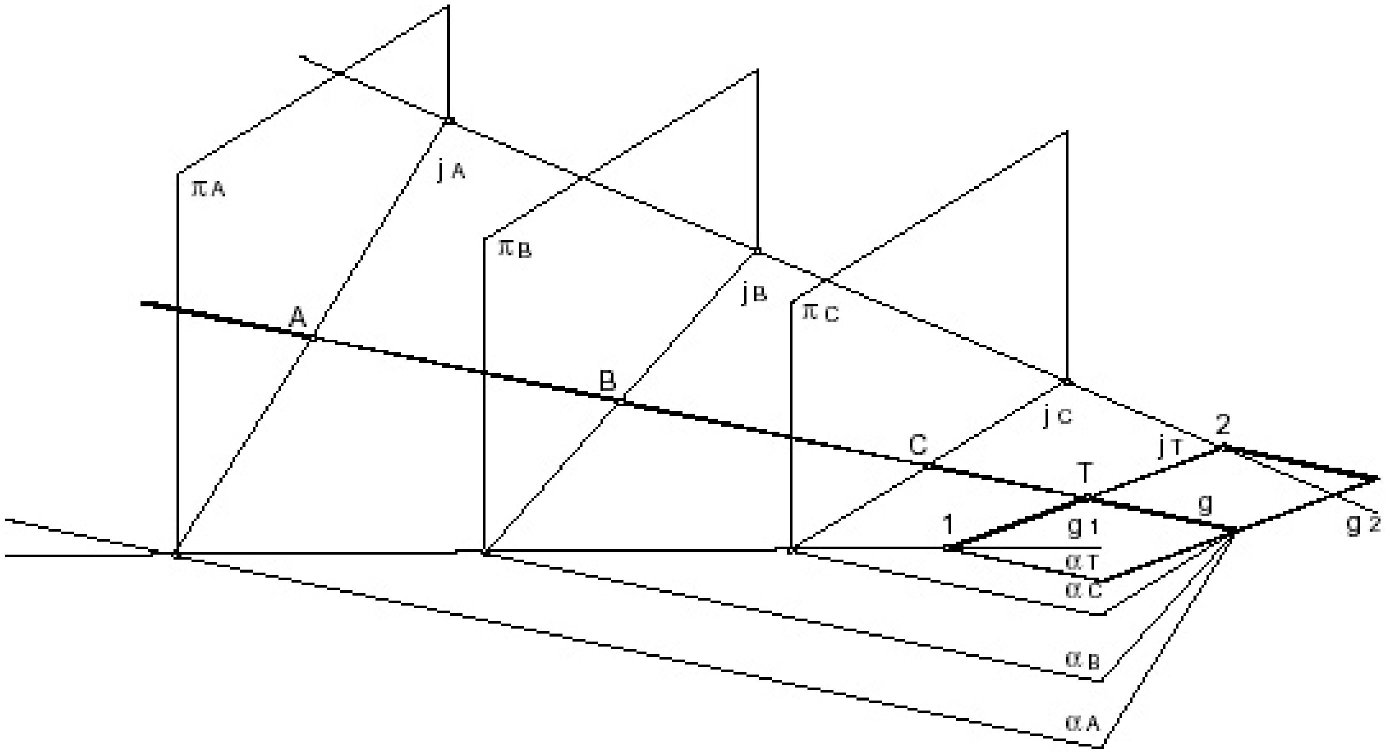

Considere-se a superfície empenada regrada $[\delta]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja $g$ uma geratriz recta, da superfície $[\delta]$, que contém os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos $\alpha_A$, $\alpha_B$ e $\alpha_C$ tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos $A$, $B$ e $C$, respectivamente, ficam definidos pela geratriz $g$ e pelas rectas $t_A$, $t_B$ e $t_C$, respectivamente tangentes a $[a]$ em $A$, a $[b]$ em $B$ e a $[c]$ em $C$.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Superfícies empenadas - Planos tangentes



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Superfícies empenadas - Planos tangentes

Se se intersectar o plano $\alpha_A$ com um plano $\pi_A$ qualquer (passante pelo ponto $A$), o plano $\alpha_B$ com um plano $\pi_B$ qualquer (passante pelo ponto $B$), e o plano $\alpha_C$ com um plano $\pi_C$ qualquer (passante pelo ponto $C$), obtêm-se, respectivamente, as rectas $j_A$, $j_B$ e $j_C$ tangentes à superfície regrada empenada $[\delta]$ nos pontos $A$, $B$ e $C$, respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz $g$.

Como os planos $\pi_A$, $\pi_B$ e $\pi_C$ podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz $g$.

Se os três planos $\pi_A$, $\pi_B$ e $\pi_C$ forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

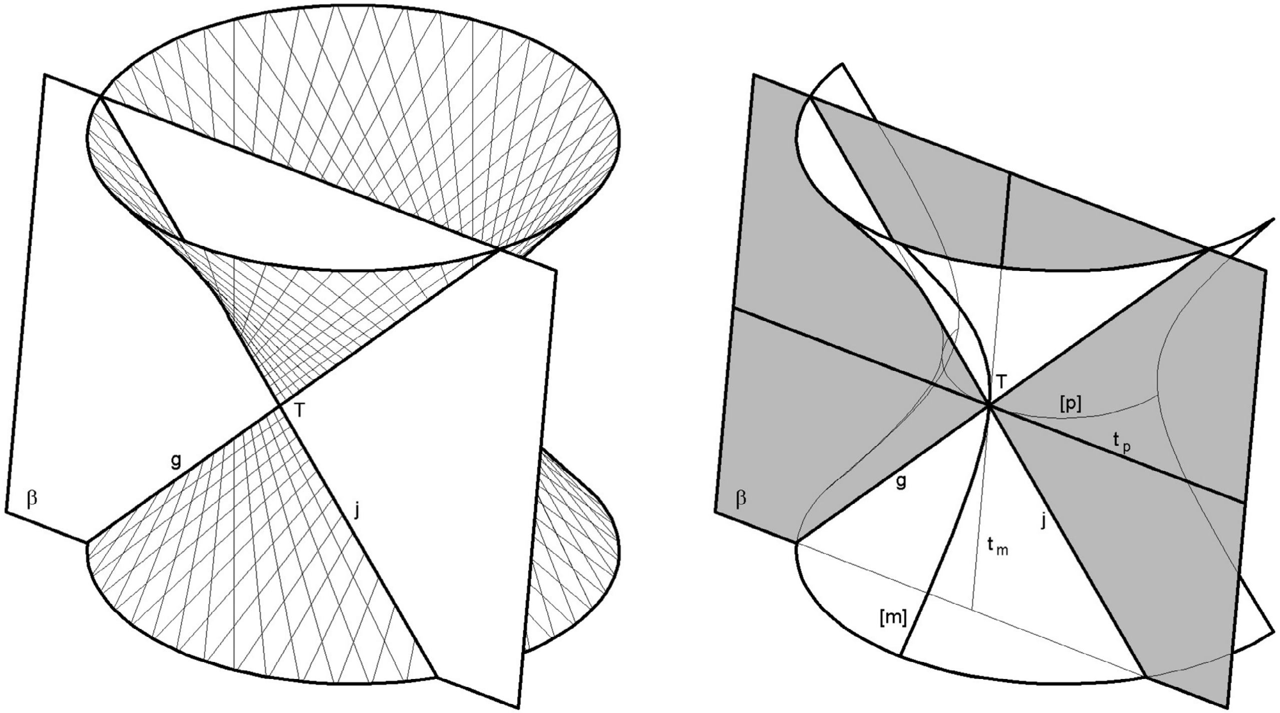
# Superfícies empenadas - Planos tangentes

Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfíce $[\delta]$ ao longo da geratriz $g$.

Determinar o plano $\alpha_T$, tangente à superfície $[\delta]$ num ponto $T$ qualquer da geratriz $g$, consiste em determinar a geratriz $j_T$ (do sistema contrário ao de $g$ e concorrente com $g$ no ponto $T$) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.

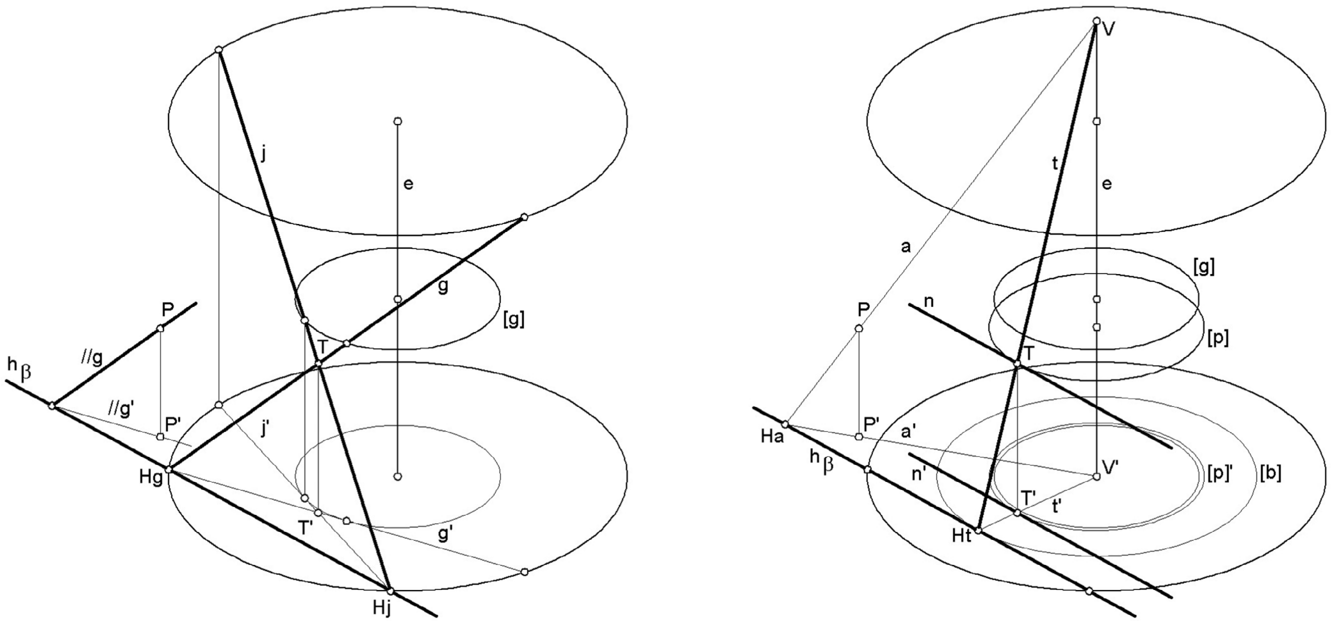
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes




PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO DA SUPERFÍCIE

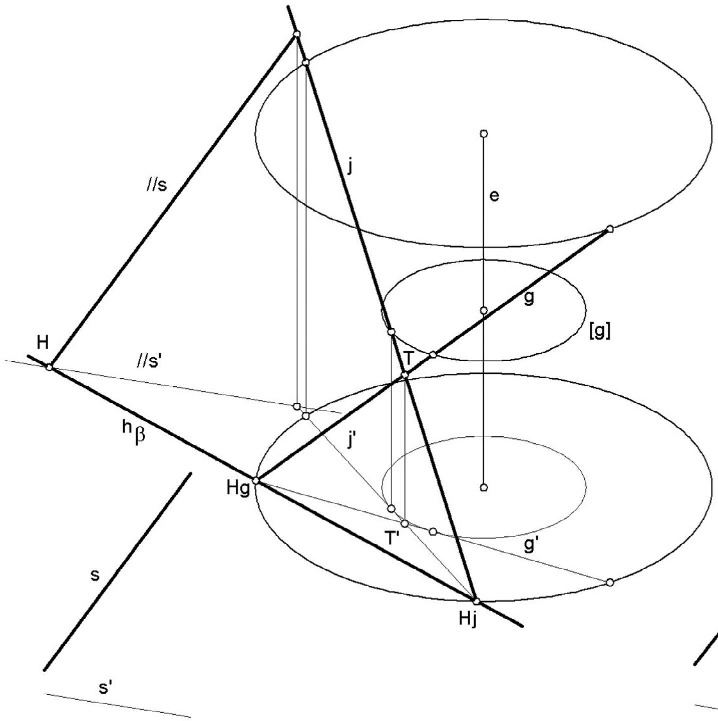
# Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes

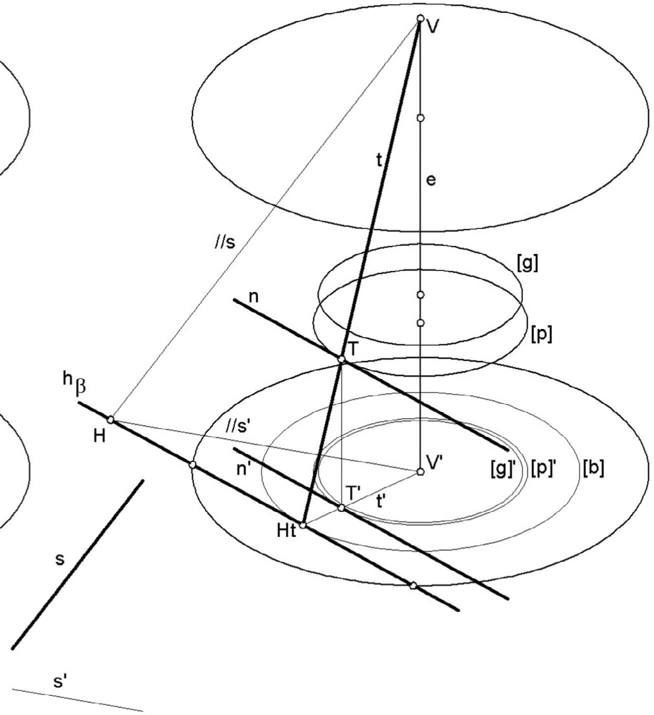



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR PONTO EXTERIOR

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes

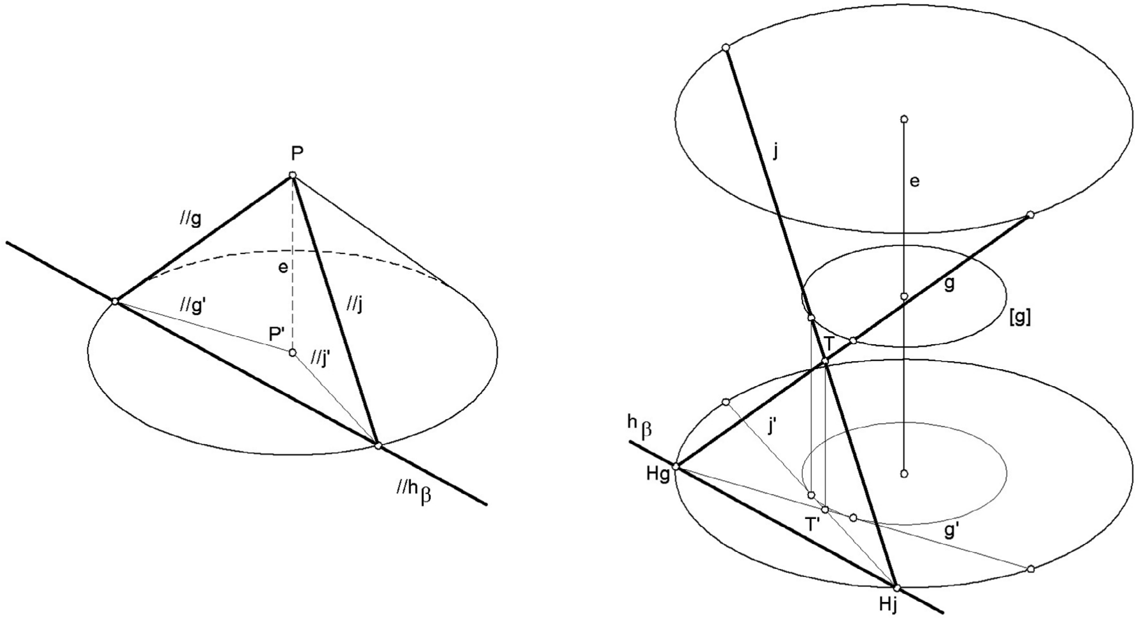



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

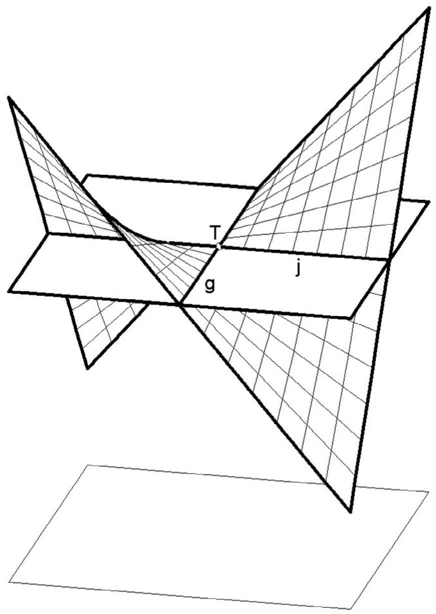
# Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes

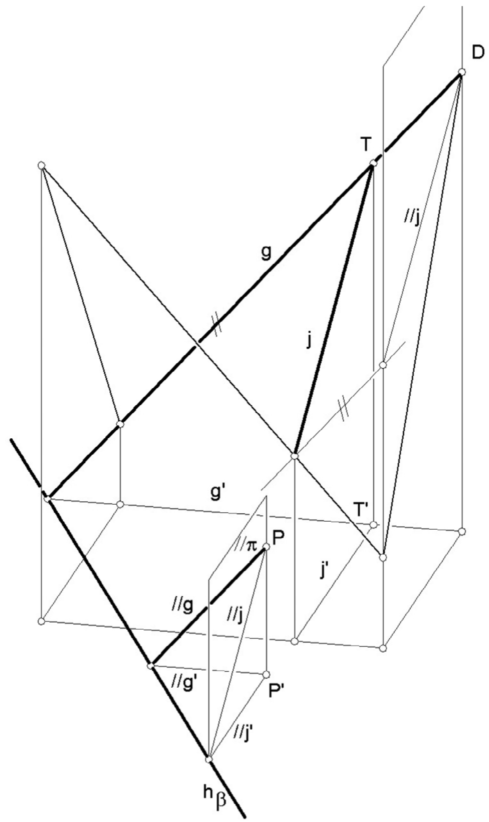



PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes



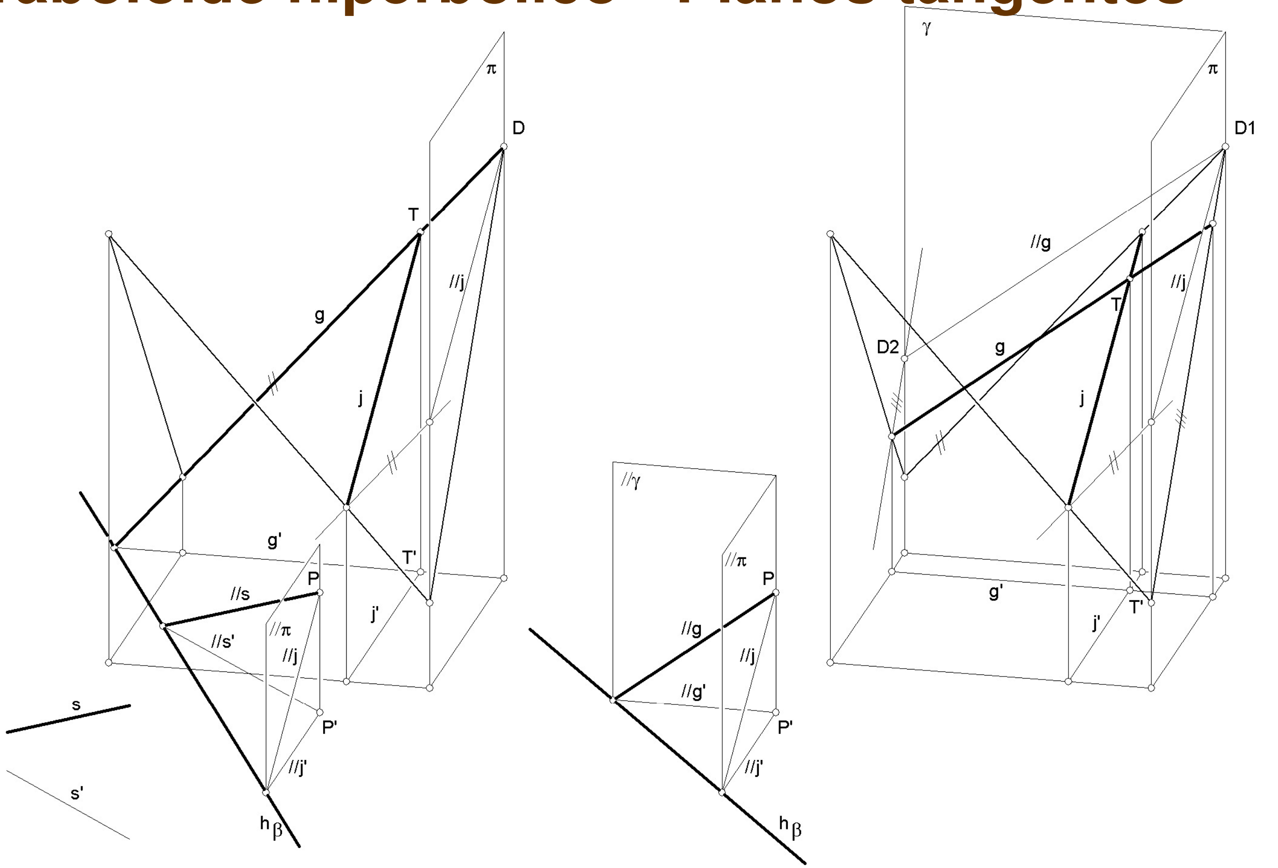




PLANO TANGENTE NUM PONTO DA SUPERFÍCIE

PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO EXTERIOR

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes

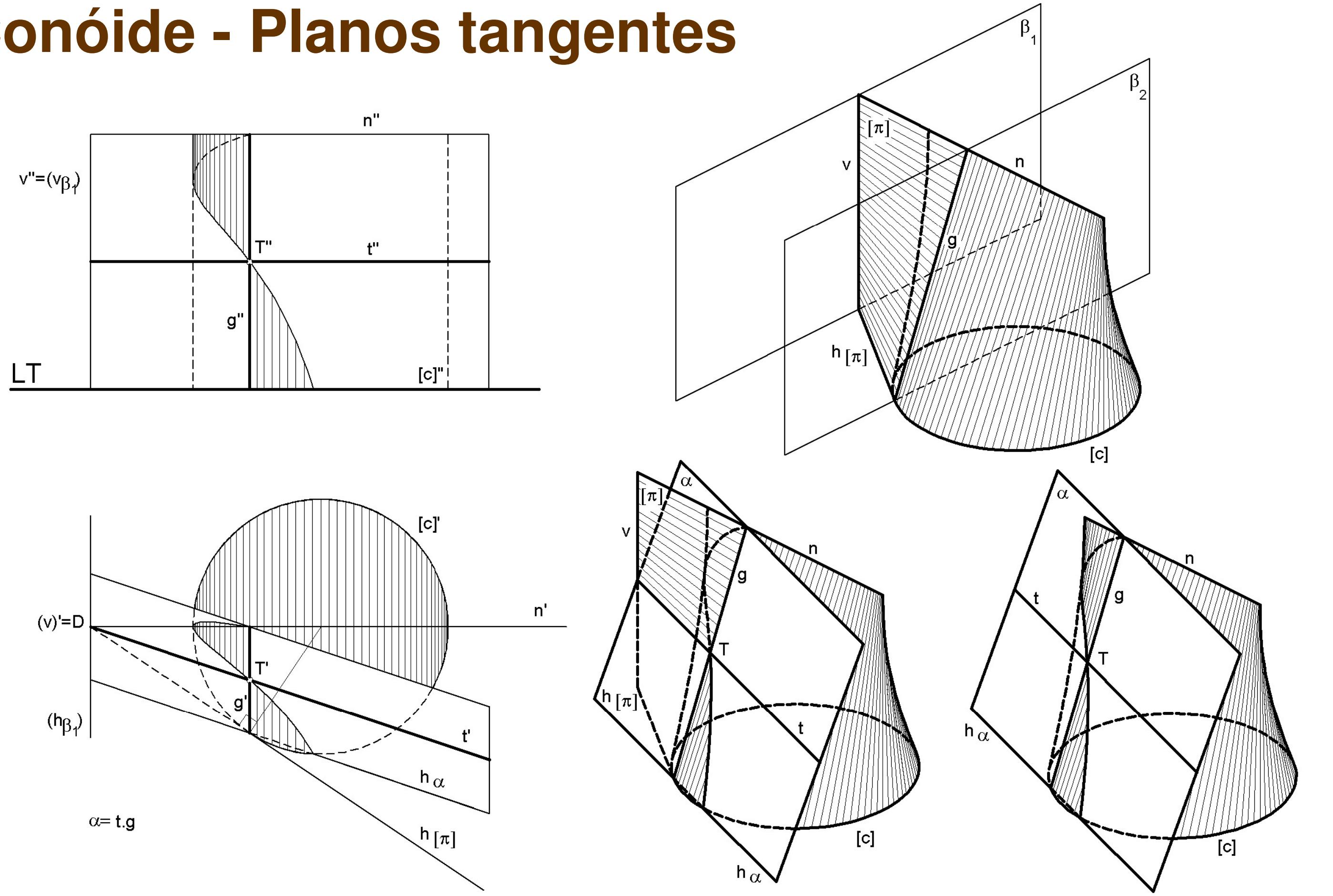



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA

PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

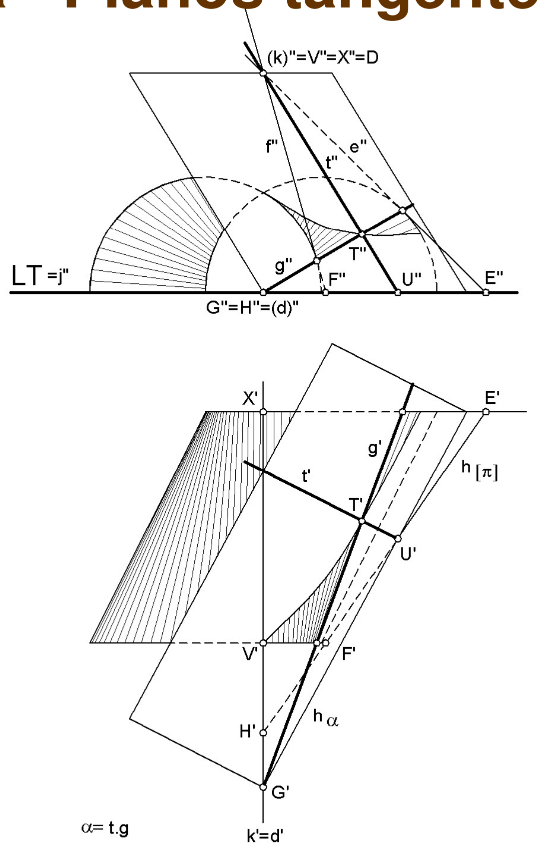
# Conóide - Planos tangentes




PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

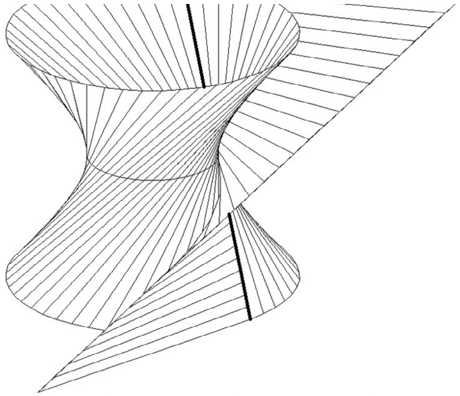
# Corno de vaca - Planos tangentes



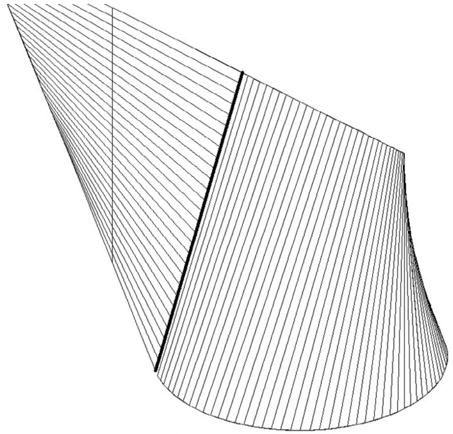

PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DO "CORNO DE VACA"

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

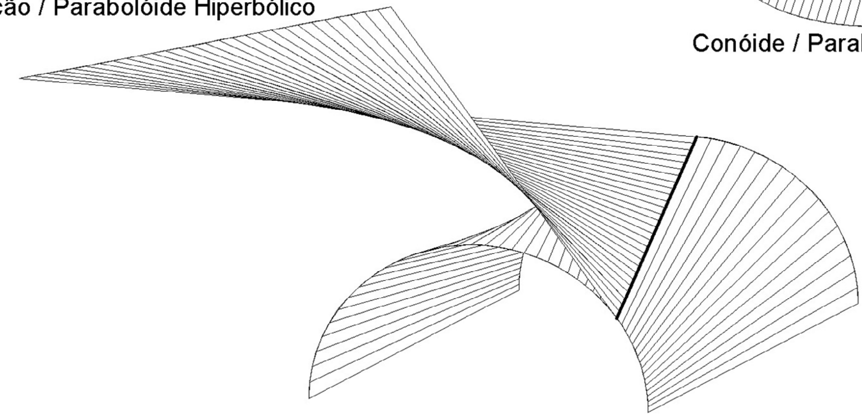
# Superfícies empenadas - Concordâncias



Hiperbolóide de Revolução / Parabolóide Hiperbólico



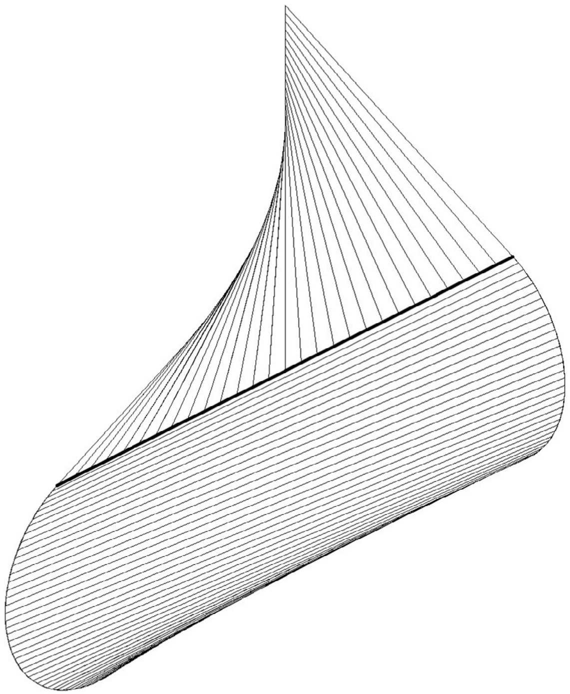
Conóide / Parabolóide Hiperbólico



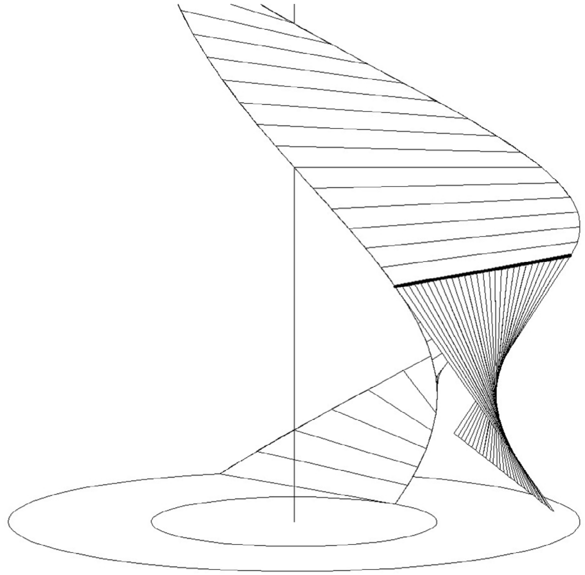
Corno de Vaca / Parabolóide Hiperbólico

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# Superfícies empenadas - Concordâncias



Cilindróide / Parabolóide Hiperbólico



Helicóidal Regrado / Parabolóide Hiperbólico

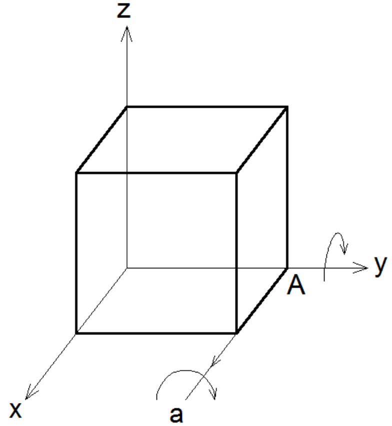
Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

# GDC – Exercícios

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 1º EXERCÍCIO

Resolva o exercício em 2 folhas A3 ao baixo.
Considere 3 cubos coincidentes com 5m de aresta, como se ilustra na figura seguinte.




Para um dos cubos, considere: i) uma translação de 1m no sentido positivo de x, ii) uma rotação de 10º em torno da recta **a**, no sentido indicado na figura, e iii) uma translação de 1m no sentido positivo de z.
Para outro cubo, considere: i) uma rotação de 45º em torno da recta **a**, no sentido indicado na figura, e ii) uma rotação em torno do eixo y, no sentido indicado na figura, por um ângulo que torne uma diagonal espacial vertical.

Represente 5 vistas (1 planta e 4 alçados), à escala 1/100, do sólido resultante da união dos três cubos.
Represente o sólido final numa isometria normalizada, à escala 1/50.

Nota: Na planta, coloque o ponto A 1cm acima do centro da folha A3 ao baixo.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 2º EXERCÍCIO

Resolva o exercício numa folha A3 ao baixo.
Considere um tetraedro regular com 8cm de aresta e uma face horizontal.
Considere um octaedro regular com 7cm de aresta, com uma diagonal vertical. O vértice de menor cota desta vertical coincide com o centro da face horizontal do tetraedro.
Os dois poliedros intersectam-se.

Represente 4 vistas (planta + 3 alçados) do sólido resultante da união do tetraedro com o octaedro.

Nota: Para além do que está descrito nos dados, a disposição relativa dos dois poliedros pode ser arbitrada.

## >> 3º EXERCÍCIO

Resolva os exercícios em folhas A3 ao baixo.

**a)** Represente um dodecaedro regular com 4cm de aresta e uma face horizontal à cota 0 (3 vistas). Determine as sombras, própria e produzida no Plano Horizontal de Projecção (PHP), considerando uma direcção luminosa a 45º com o PHP.

**b)** Represente um icosaedro regular com 7cm de aresta e uma diagonal espacial vertical, com o vértice inferior à cota 0 (3 vistas). Determine as sombras, própria e produzida no Plano Horizontal de Projecção (PHP), considerando uma direcção luminosa a 45º com o PHP.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 4º EXERCÍCIO

Resolva os exercícios em folhas A3 ao baixo.

**a)** Considere um cone de revolução com 14cm de altura e base de raio 4cm, e uma pirâmide triangular regular com 14cm de altura e base de lado com 10cm. Represente o sólido resultante da união do cone com a pirâmide sabendo que: i) o centro da base do cone coincide com o vértice da pirâmide, ii) o centro da base da pirâmide coincide com o vértice do cone, e iii). De seguida efectue a planificação das superfícies do sólido final. Indique ainda a natureza geométrica das linhas de intersecção.

**b)** Considere um cone de revolução com 12cm de altura, eixo vertical, base à cota 0, e vértice com cota positiva. Considere ainda um cubo com uma diagonal espacial vertical com 12cm de comprimento. Represente o sólido resultante da união do cubo com o cilindro sabendo que: i) o eixo do cilindro coincide com a diagonal espacial do cubo, e ii) a superfície do cone é tangente a três faces do cubo. De seguida efectue a planificação das superfícies do sólido final. Indique ainda a natureza geométrica das linhas de intersecção.

**c)** Represente um helicóide tangencial. A hélice directriz inscreve-se numa superfície cilíndrica de revolução de eixo vertical, com 4cm de raio. O passo da hélice é 10cm. Considere apenas a região da superfície compreendida entre: i) a hélice directriz, ii) uma superfície cilíndrica de revolução co-axial com 7cm de raio, e iii) duas geratrizes paralelas consecutivas.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 5º EXERCÍCIO

Resolva os exercícios em folhas A3 ao baixo.

**a)** Considere uma superfície esférica de raio 5cm e centro com 6cm de cota. Represente um cubo com os planos das faces tangentes à superfície esférica sabendo que o cubo tem uma aresta (a de menor cota) à cota 0.

**b)** Considere um elipsóide de revolução alongado com eixo maior vertical com 14cm, equador com 5cm de raio, e centro com cota 7cm. Represente uma superfície tórica concordante com o elipsóide ao longo de um paralelo com 3cm de cota. A superfície tórica é tangente ao Plano Horizontal de Projecção.

**c)** Considere um hiperbolóide de revolução de uma folha com eixo vertical. O circulo de gola tem 2cm de raio e 6cm de cota. O traço horizontal da superfície tem 5cm de raio. Represente um parabolóide de revolução concordante com o hiperbolóide ao longo de um paralelo com 2.5cm de cota considerando apenas a porção do parabolóide situada acima do Plano Horizontal de Projecção.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 6º EXERCÍCIO

Resolva os exercícios em folhas A3 ao baixo.

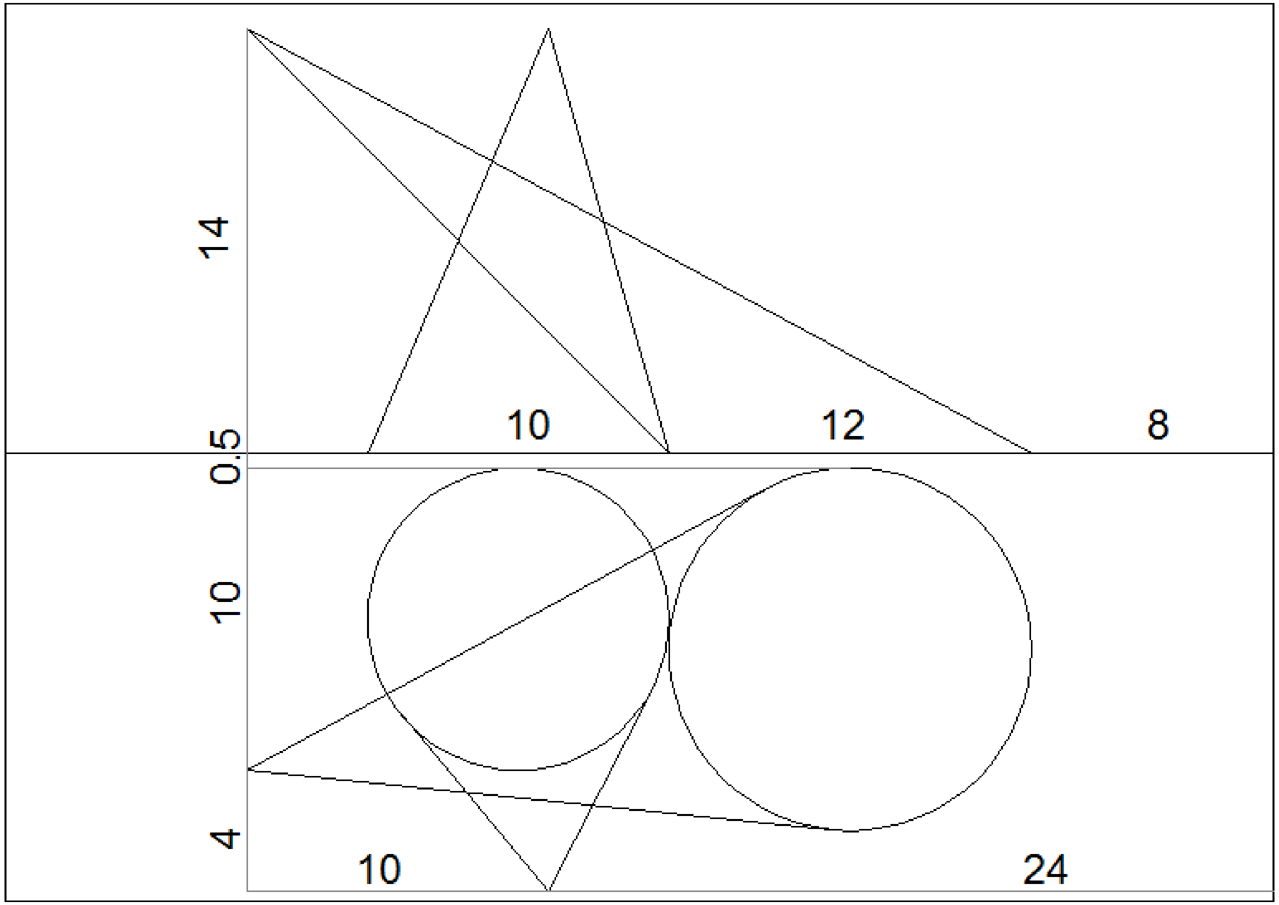
**a)** Considere dois cilindros de revolução com 12cm de altura e 3cm de raio. Um dos cilindros tem eixo vertical e o outro tem eixo horizontal. Os eixos distam 1cm entre si. Represente o sólido que resulta da subtracção do cilindro horizontal ao cilindro vertical.

**b)** Considere um cone oblíquo com 14cm de altura, base horizontal com 7cm de raio, e uma geratriz vertical. Considere também um cilindro de revolução com eixo horizontal, com 14cm de altura, e bases com 4cm de raio. Os dois sólidos intersectam-se segundo um beijamento duplo. Um dos pontos duplos da intersecção encontra-se na geratriz vertical.

**c)** Considere os dois cones representados na figura do slide seguinte (a unidade é o centímetro). Determine a intersecção entre as superfícies dos dois cones e represente o sólido resultante da união entre os dois cones.

Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> 6º EXERCÍCIO



Ass. Luís Mateus, lmmateus@fa.utl.pt / http://www.fa.utl.pt/~lmmateus

## >> ENTREGA E AVALIAÇÃO

Os exercícios deverão ser desenvolvidos preferencialmente na aula. Este é um factor a considerar na avaliação dos mesmos. A entrega deve ser feita no dia 7 de Dezembro.

As folhas, em formato A3, orientadas ao baixo, devem ser identificadas no canto inferior direito. A identificação deve incluir:
- escola
- ano lectivo
- licenciatura
- disciplina
- data
- nome
- número

Os critérios de avaliação são:
- acompanhamento da execução dos exercícios → 15%
- correcção dos métodos empregues → 65%
- clareza gráfica dos desenhos → 15%
- notação correcta (quando aplicável) → 5%