

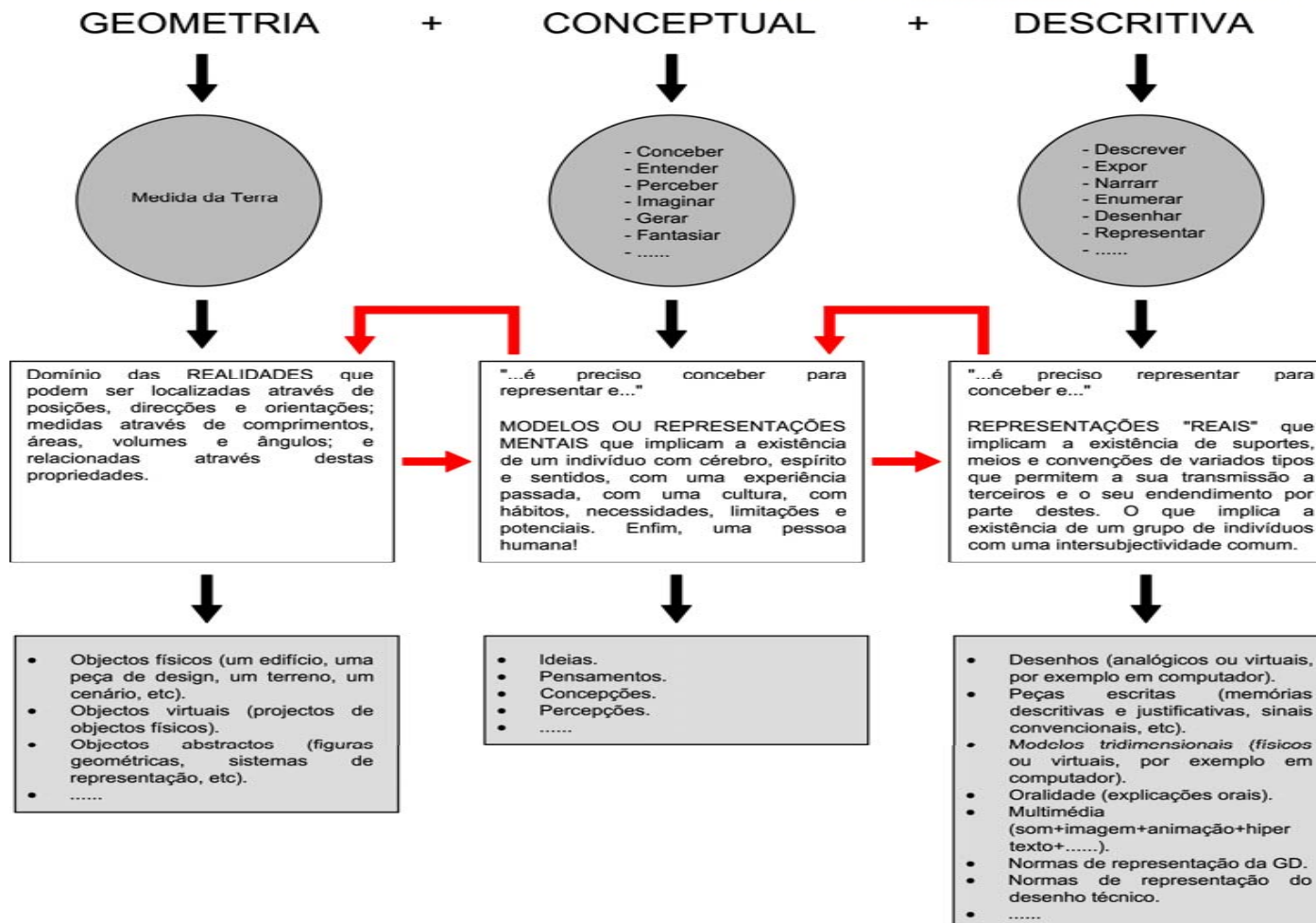


GD – AULA TEÓRICA 1

Apresentação do programa e objectivos da disciplina, bibliografia, critérios de avaliação e informações gerais.

Revisões gerais sobre o tipo de projecções e sistemas de representação.

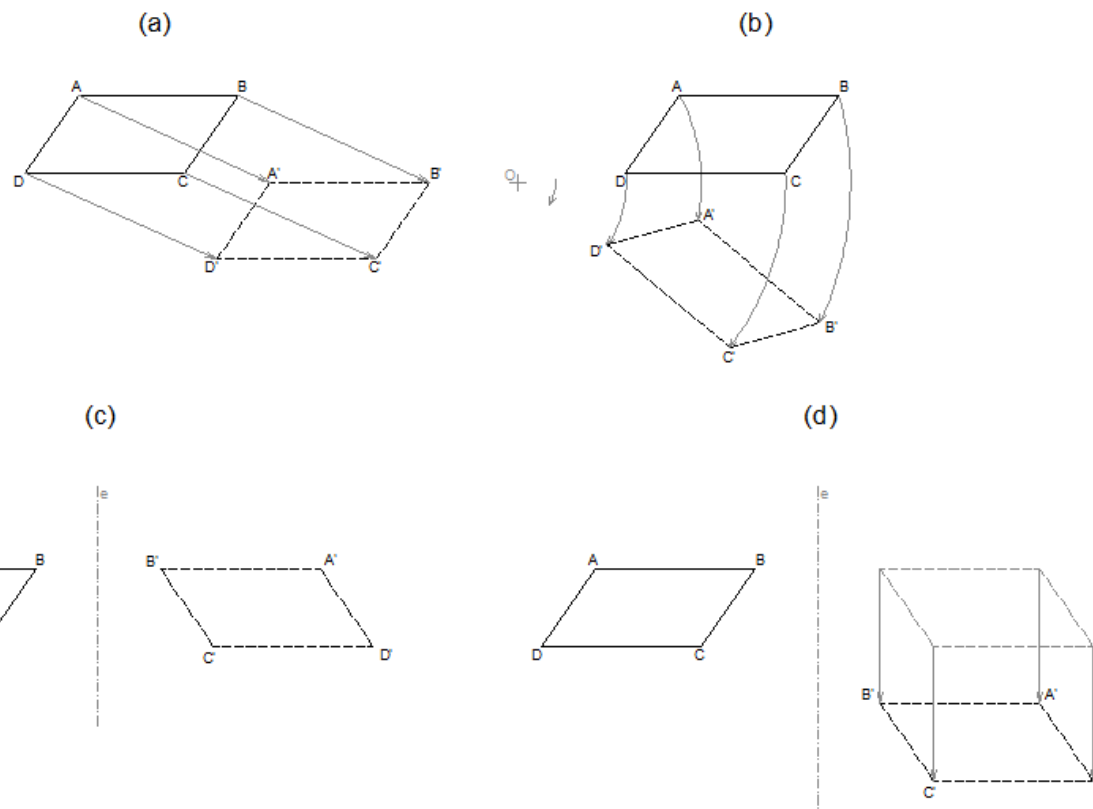
Exercícios de diagnóstico sobre as projecções.





>> REVISÕES GERAIS: Transformações rígidas do plano

As transformações rígidas do plano são: Translação (a), Rotação (b), Reflexão (c), e Reflexão deslizante (d).





>> REVISÕES GERAIS: Noção de *simetria* e invariável

“Numa figura, a *SIMETRIA* consiste numa transformação que mantém a figura INVARIÁVEL na medida em que, depois de submetida a essa transformação, mantém, globalmente, o seu aspecto inicial, embora alguns dos seus pontos possam ser deslocados em consequência da mesma.”

In Matemática, A ciência dos Padrões

Por exemplo, o círculo mantém-se invariável quando sujeito a qualquer rotação no seu plano e em torno do seu centro, ou quando sujeito a uma reflexão no seu plano cujo eixo contém o seu centro. Outro exemplo, (o quadrado mantém-se invariável quando sujeito a rotações múltiplas de 90° no seu plano e com centro no seu centro geométrico.

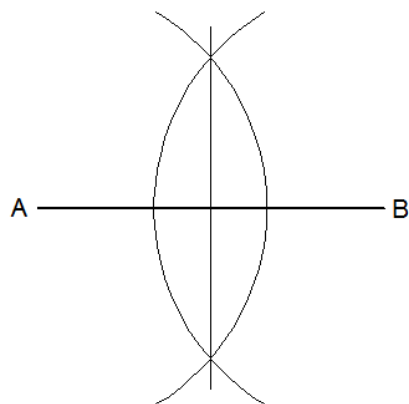
EXERCÍCIO:

Identifique transformações que deixem o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular invariáveis.

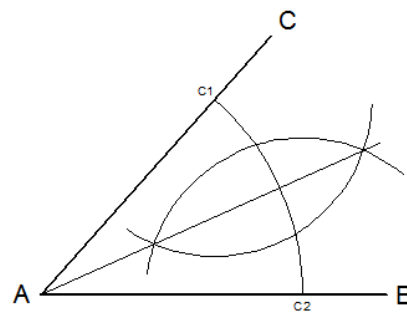


>> REVISÕES GERAIS: Construções geométricas no plano

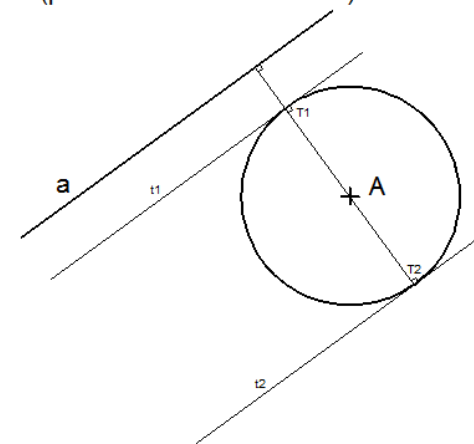
Mediatriz de um segmento



Bissectriz de um ângulo

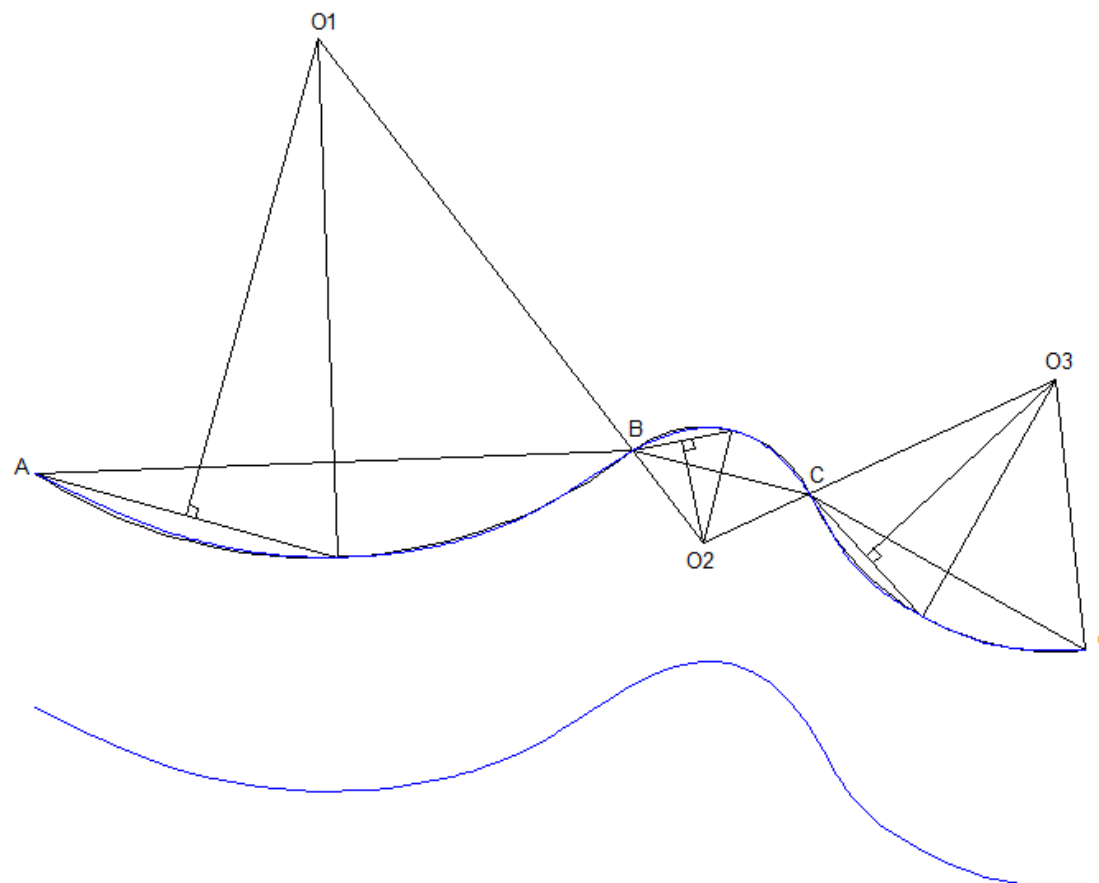


Tangente à circunferência
(paralela a uma recta dada)



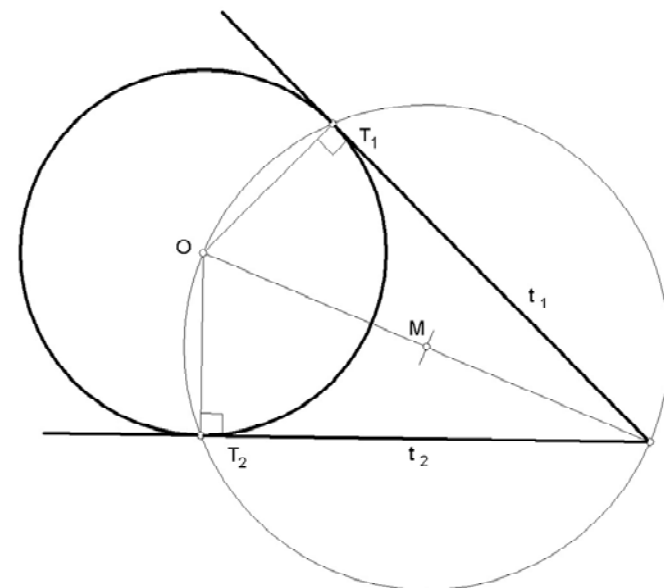
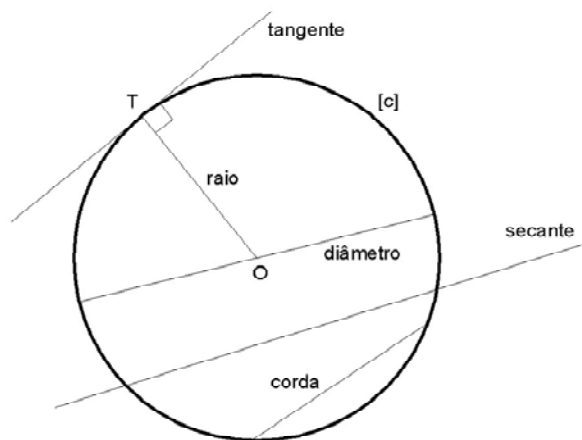


>> REVISÕES GERAIS: Construções geométricas no plano – racionalização de linhas



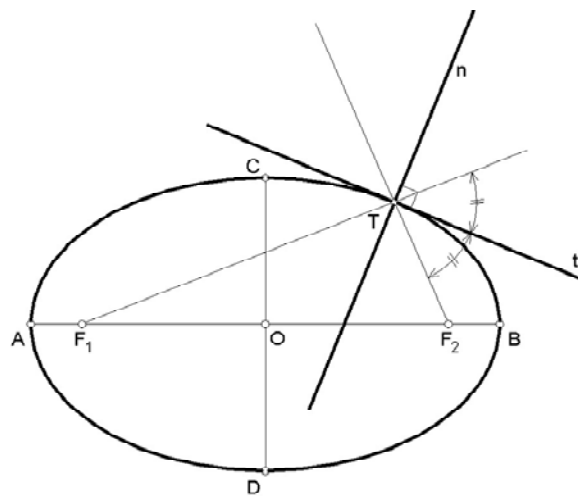


>> REVISÕES: Geometria plana - circunferência





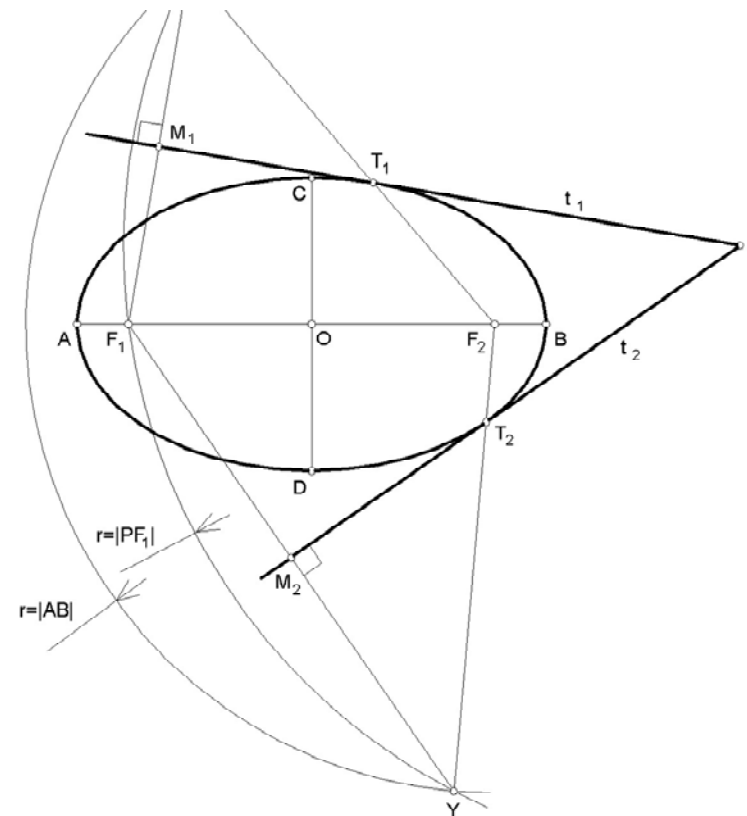
>> REVISÕES: Geometria plana - elipse



$$|AB| = |F_1T| + |F_2T| = K$$

DEFINIÇÃO

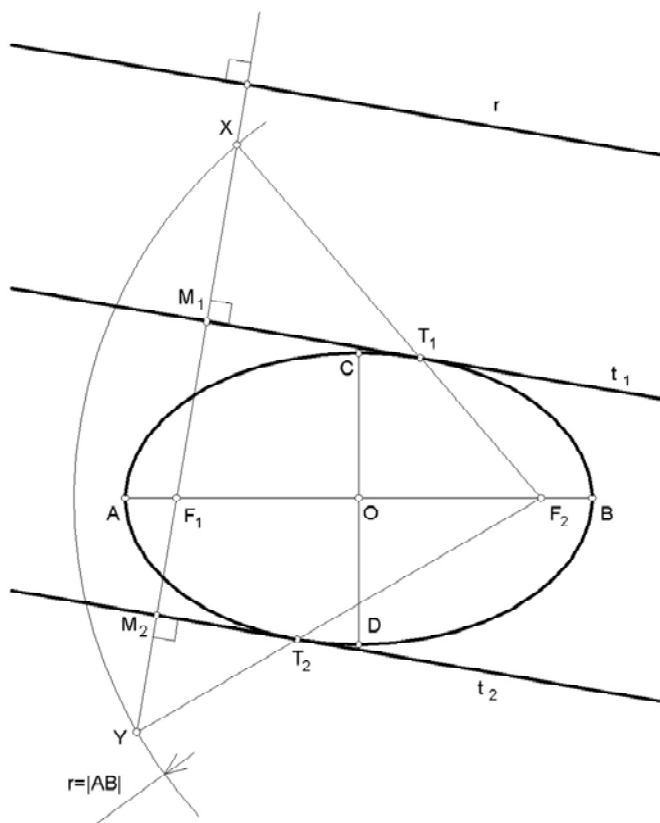
TANGENTE E NORMAL NUM PONTO DA CURVA



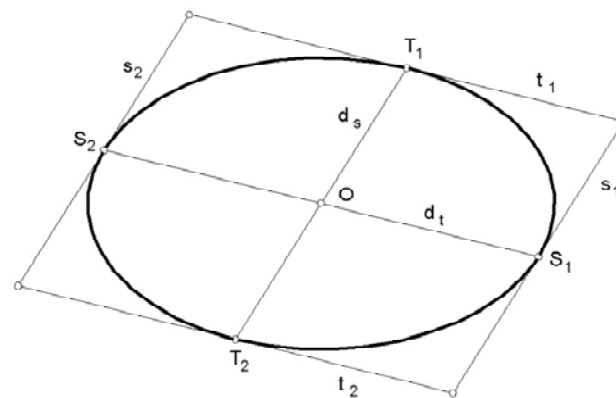
TANGENTE CONDUZIDA POR UM PONTO EXTERIOR À CURVA



>> REVISÕES: Geometria plana - elipse



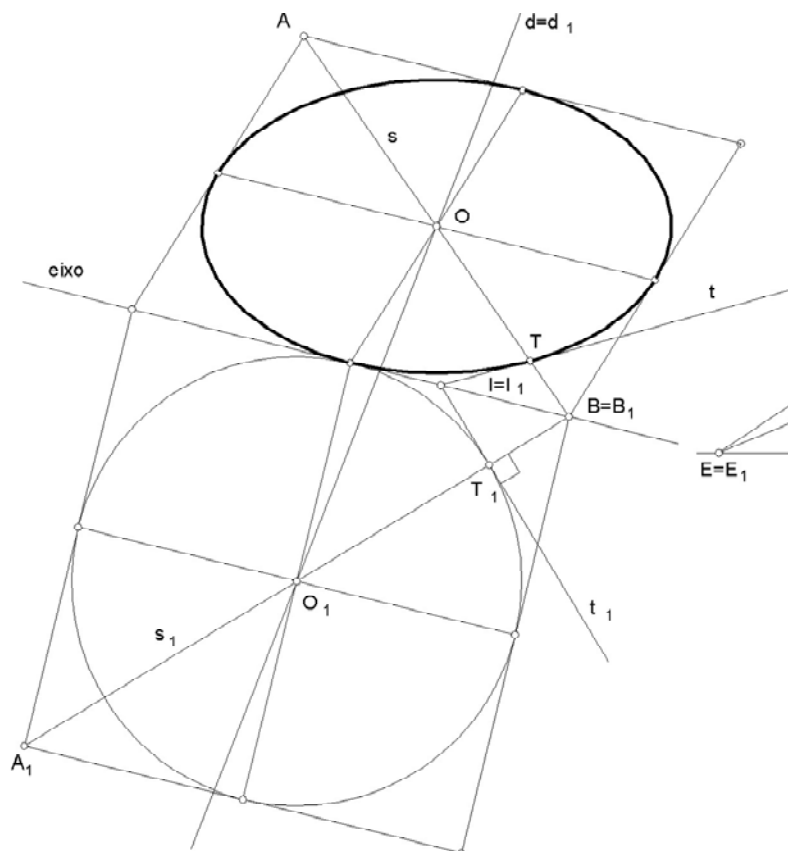
TANGENTE COM UMA DIRECÇÃO DADA



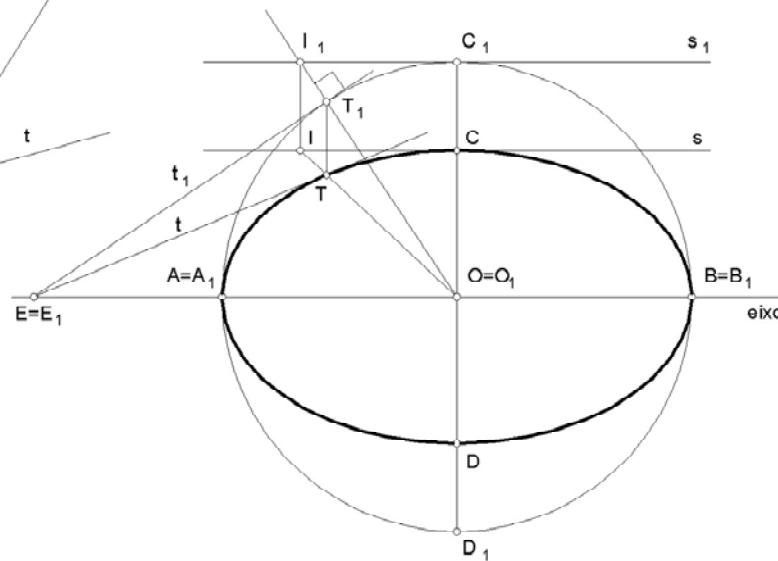
DIÂMETROS CONJUGADOS



>> REVISÕES: Geometria plana - elipse



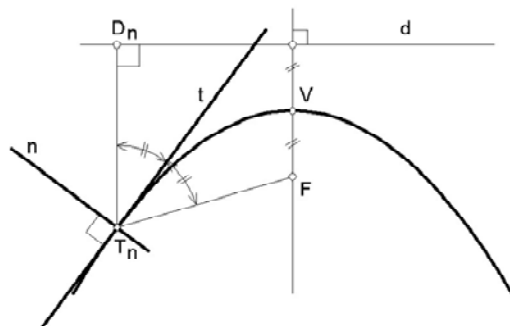
AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA



AFINIDADE ELIPSE/CIRCUNFERÊNCIA



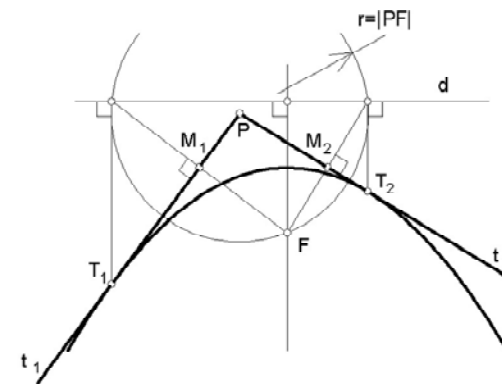
>> REVISÕES: Geometria plana - parábola



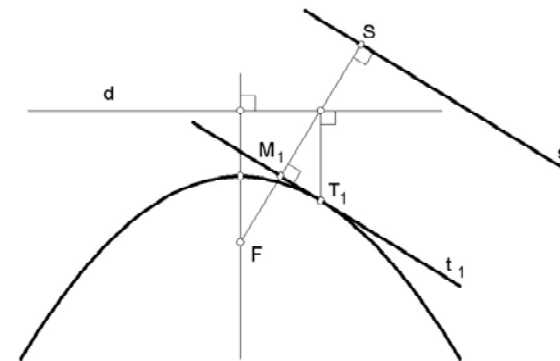
$$|T_n D_n| - |T_n F| = K = 0$$

DEFINIÇÃO

TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA



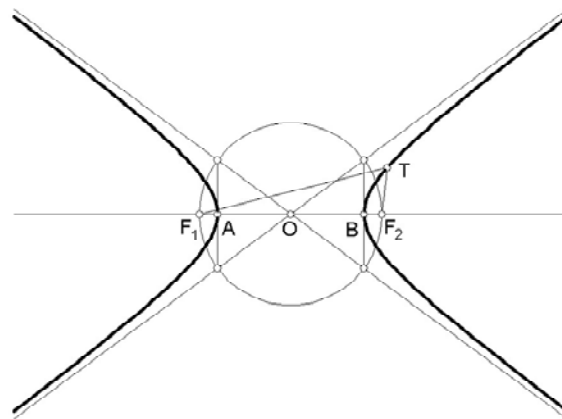
TANGENTE CONDUZIDA POR UM PONTO EXTERIOR À CURVA



TANGENTE COM UMA DIRECÇÃO DADA

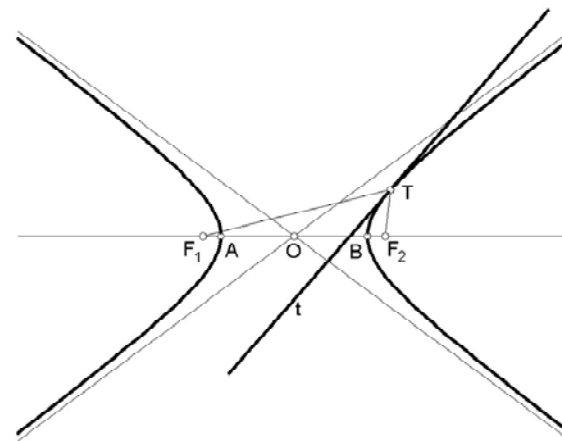


>> REVISÕES: Geometria plana - hipérbole



$$|AB| = |F_1T| - |F_2T| = K$$

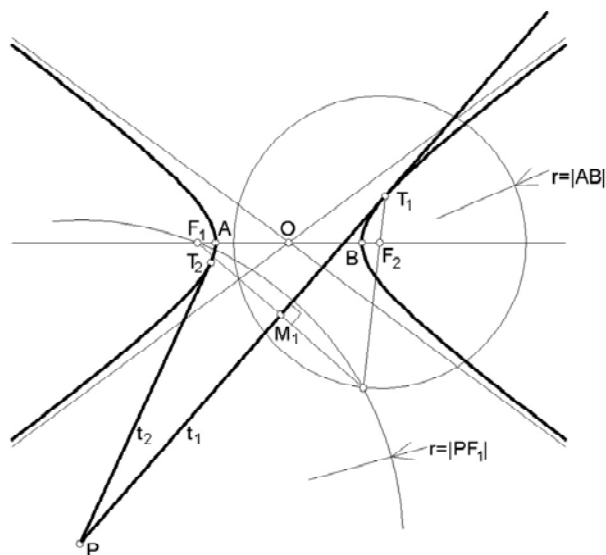
DEFINIÇÃO



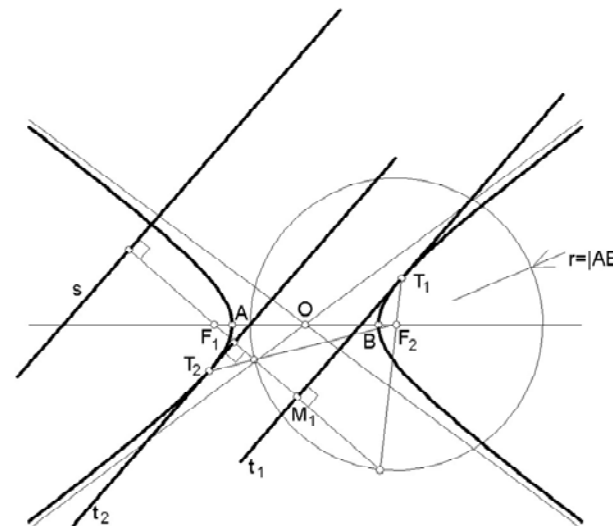
TANGENTE CONDUZIDA POR PONTO DA CURVA



>> REVISÕES: Geometria plana - hipérbole



TANGENTE CONDUZIDA POR UM PONTO EXTERIOR À CURVA



TANGENTE COM UMA DIRECÇÃO DADA



GD – AULA TEÓRICA 2

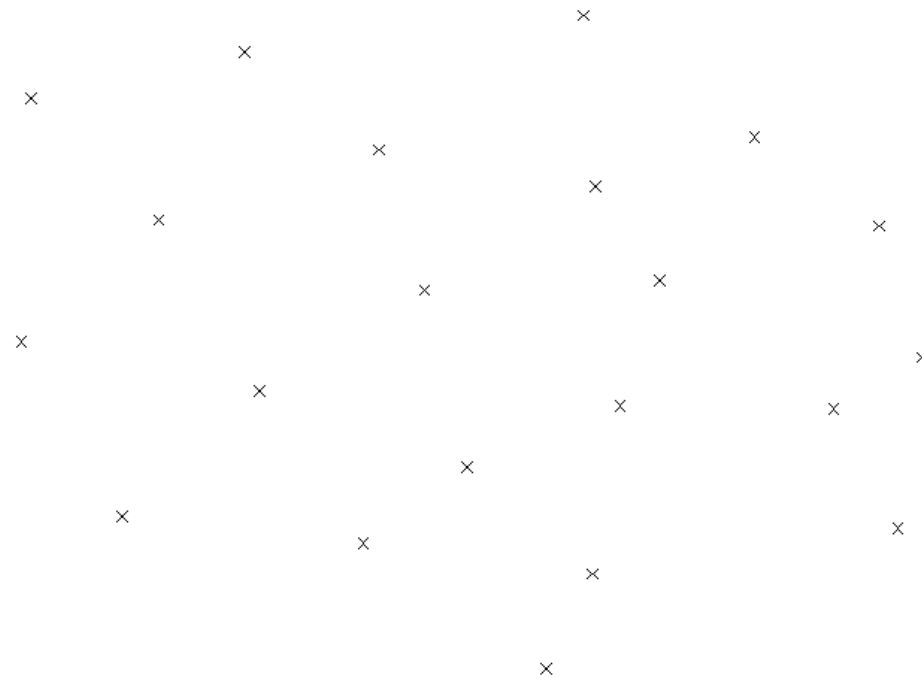
Pavimentações:

- Domínio de Dirichlet de uma grelha plana e geração de um padrão de pavimentação.
- Critérios de classificação das pavimentações (monoédricas / não monoédricas; regulares / semi-regulares / demi-regulares / irregulares; periódicas e aperiódicas).
- A noção de grupo de simetria de uma pavimentação.



>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

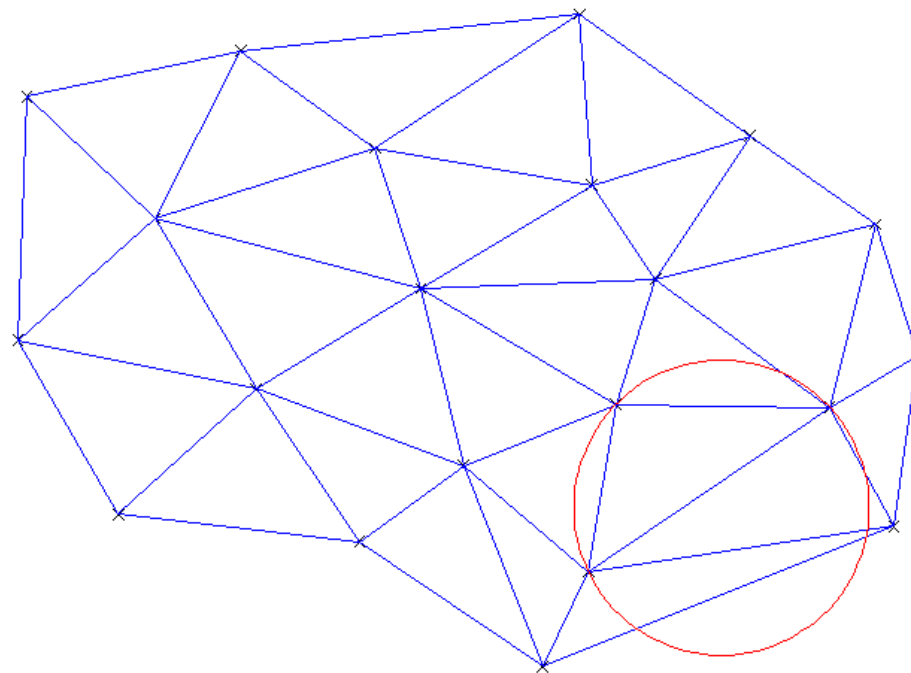
Tomemos como ponto de partida uma conjunto de pontos aleatoriamente distribuídos no plano.





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

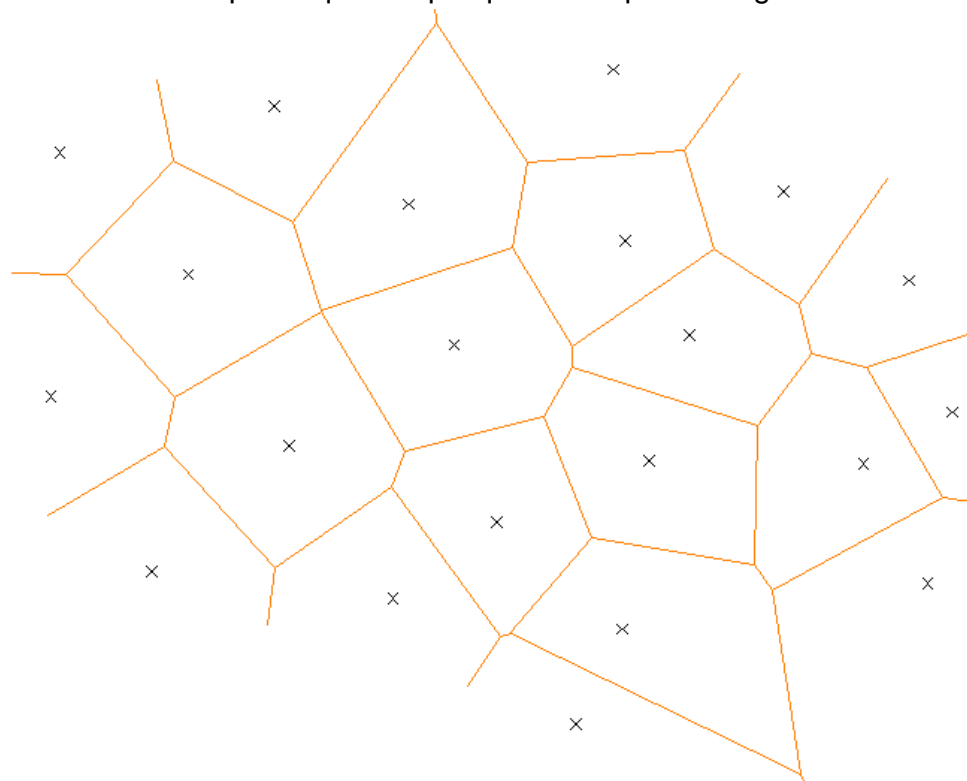
Estes pontos podem ser unidos definindo uma triangulação especial que se designa por TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY. Esta triangulação é feita de modo a que o círculo conduzido pelos 3 vértices de qualquer triângulo da grelha não contenha outro ponto.





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

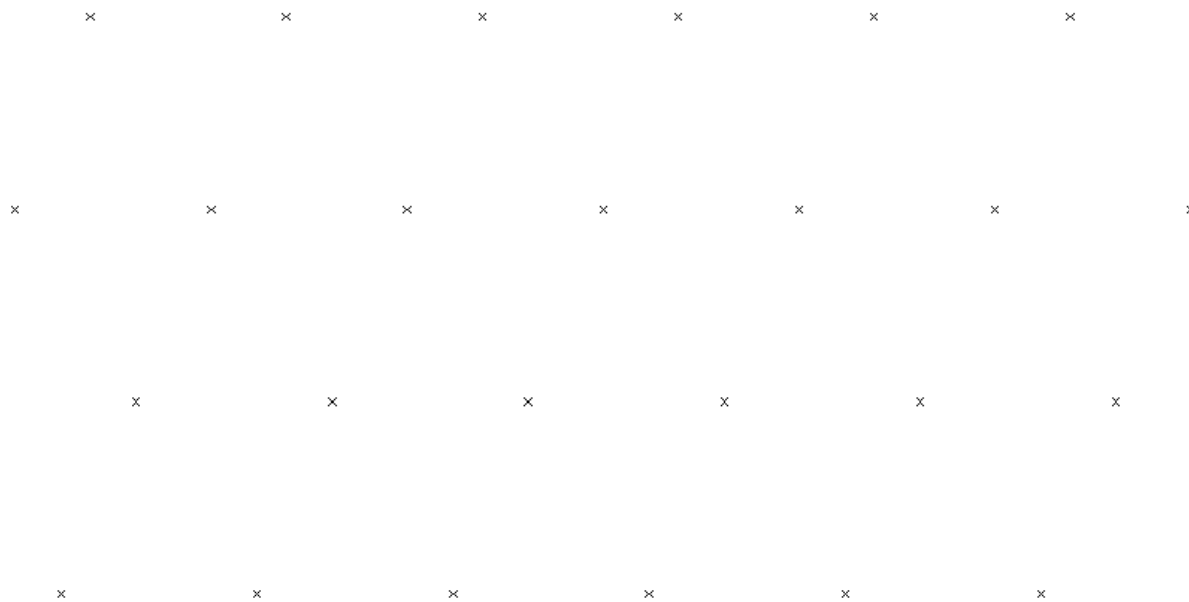
A partir da triangulação de DELAUNAY é possível efectuar outra tesselação do plano que se designa por tesselação de DIRICHLET, ou por tesselação de VORONOI. Esta é feita dividindo o plano nas regiões que estão mais próximas de cada ponto que de qualquer outro ponto da grelha. Os lados desta tesselação são perpendicul





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

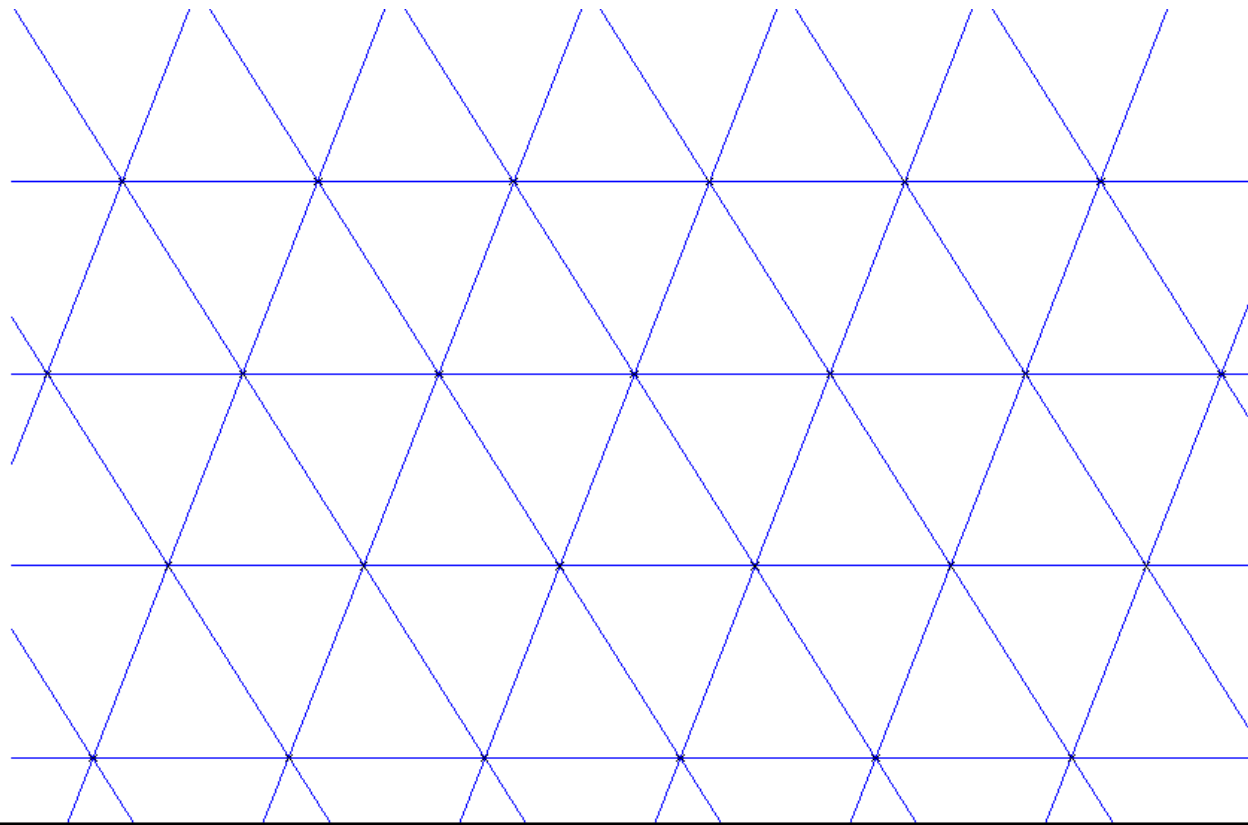
Se os pontos estiverem distribuídos de forma regular pelo plano então...





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

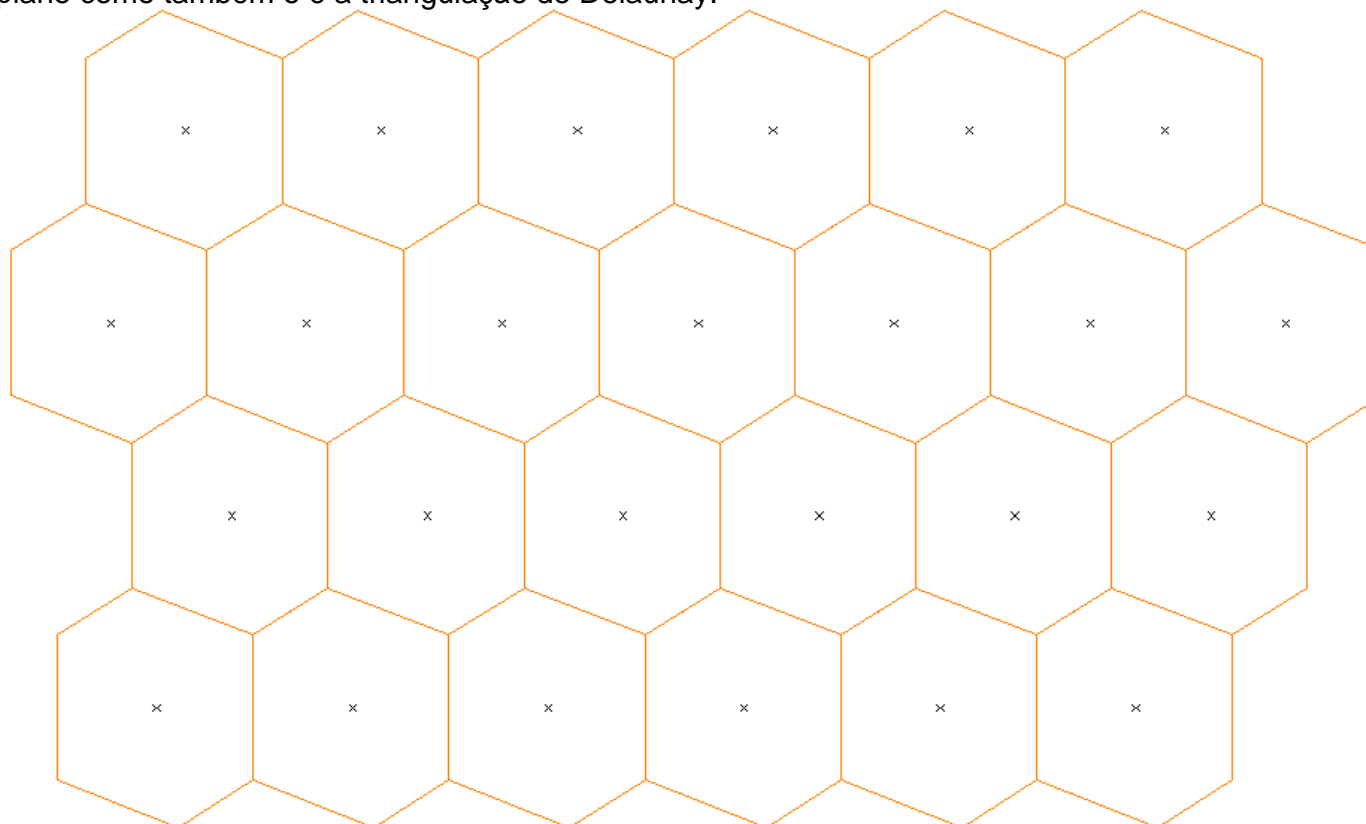
...a triangulação de Delaunay tem também um aspecto regular...





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

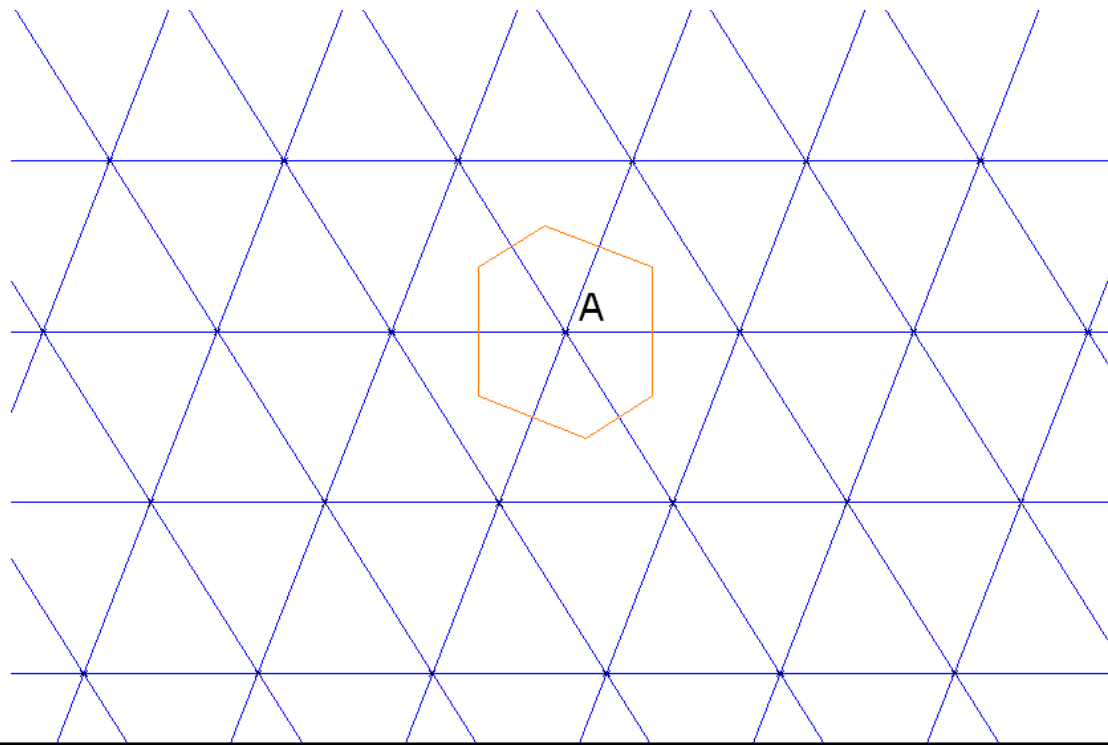
...assim como a tesselação de Dirichlet. Esta tesselação corresponde já a uma possível PAVIMENTAÇÃO do plano como também o é a triangulação de Delaunay.





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

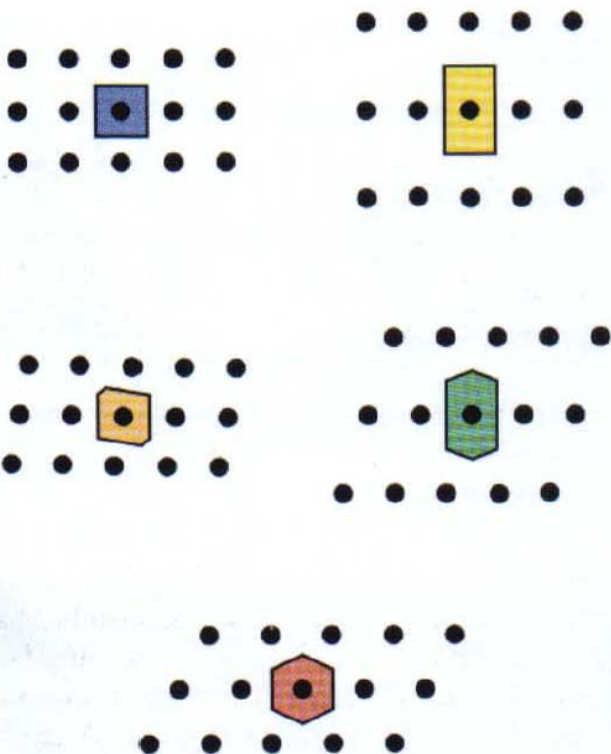
À TESSELA de um ponto A dá-se a designação de DOMÍNIO DE DIRICHLET do ponto A da grelha.
Note que os lados da tessela do ponto A se obtêm construindo as mediatrizes dos lados da grelha que concorrem em A.





>> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

Existem 5 tipos distintos de domínios de Dirichlet para grelhas planas regulares.



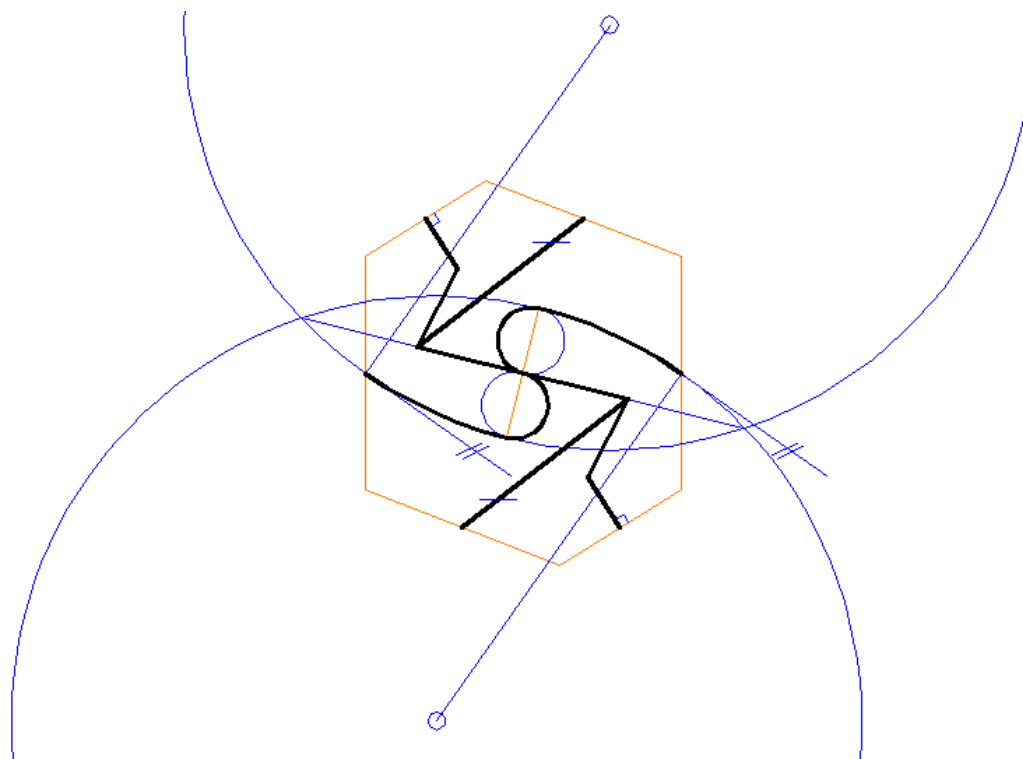
As cinco espécies distintas de domínios Dirichlet para uma grade bidimensional.

In
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



>> PAVIMENTAÇÕES: construção de um padrão de pavimentação

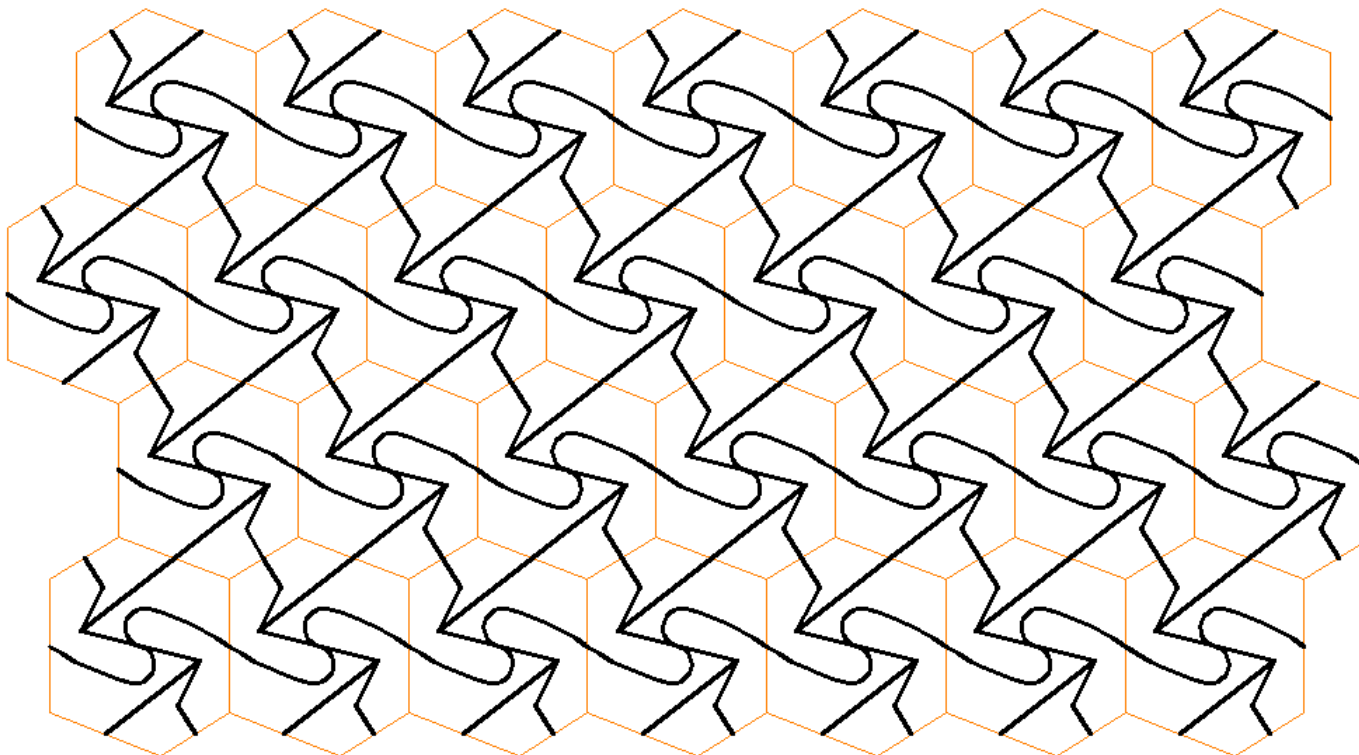
A ideia base subjacente à construção de um PADRÃO para uma PAVIMENTAÇÃO PERIÓDICA do plano corresponde ao preenchimento de um domínio de Dirichlet ...





>> PAVIMENTAÇÕES: construção de um padrão de pavimentação

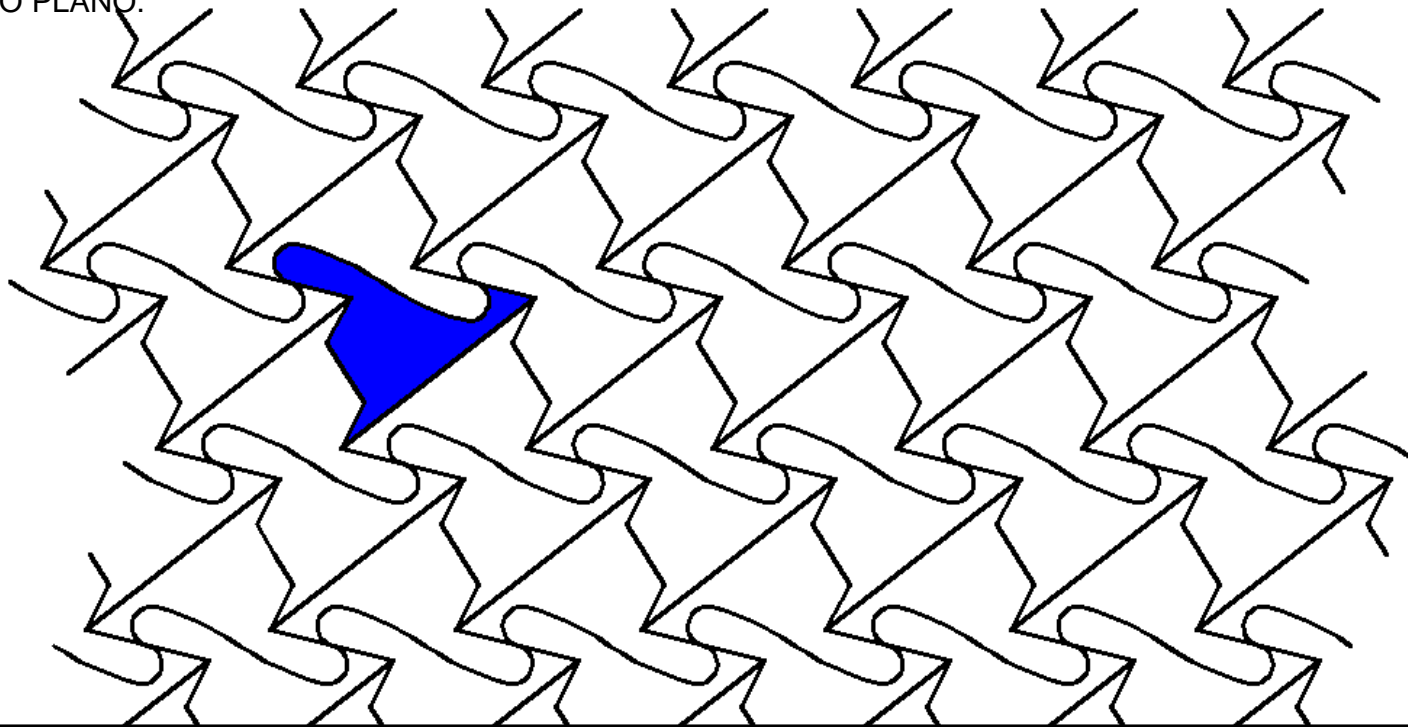
...e sua replicação por todos os pontos da grelha. Mas note que para dar origem a uma PAVIMENTAÇÃO todas as áreas formadas devem ser isoláveis. Cada uma dessas áreas é designada por LADRILHO.





>> PAVIMENTAÇÕES: pavimentações monoédricas e não monoédricas.

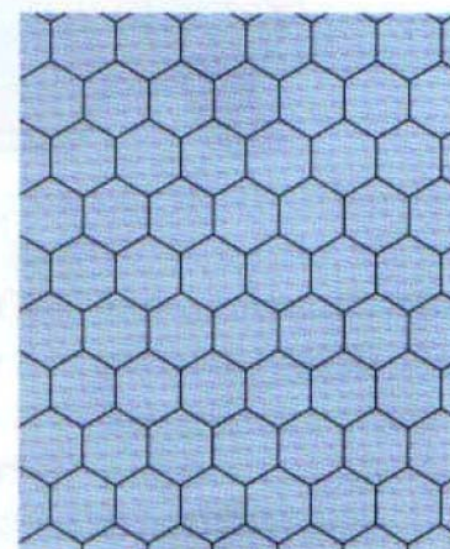
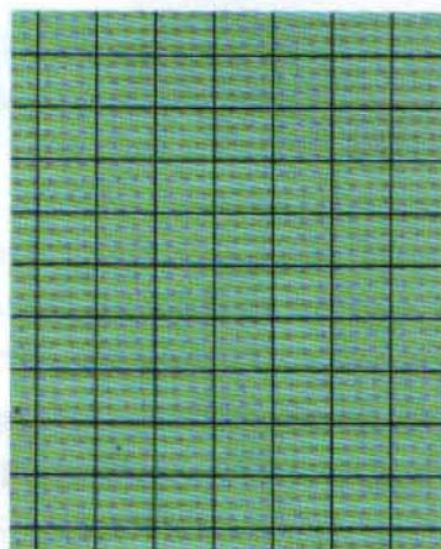
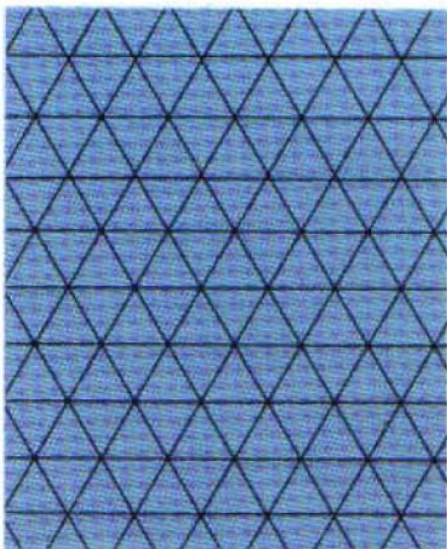
Desta operação pode ser possível isolar uma ou mais áreas fechadas que se repetem. Cada uma destas áreas designa-se por TESSELA ou LADRILHO. Se a pavimentação resultar do arranjo de apenas um tipo de ladrilho diz-se MONOÉDRICA. Se resultar de mais que um tipo de ladrilho diz-se NÃO MONOÉDRICA. Se a divisão do plano não resultar em ladrilhos podemos ter ainda assim um PADRÃO DE PREENCHIMENTO DO PLANO.





>> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com um tipo de polígono regular. Existem 3 tipos de polígonos regulares que podem pavimentar o plano: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Os vértices não podem incidir no meio de lados.

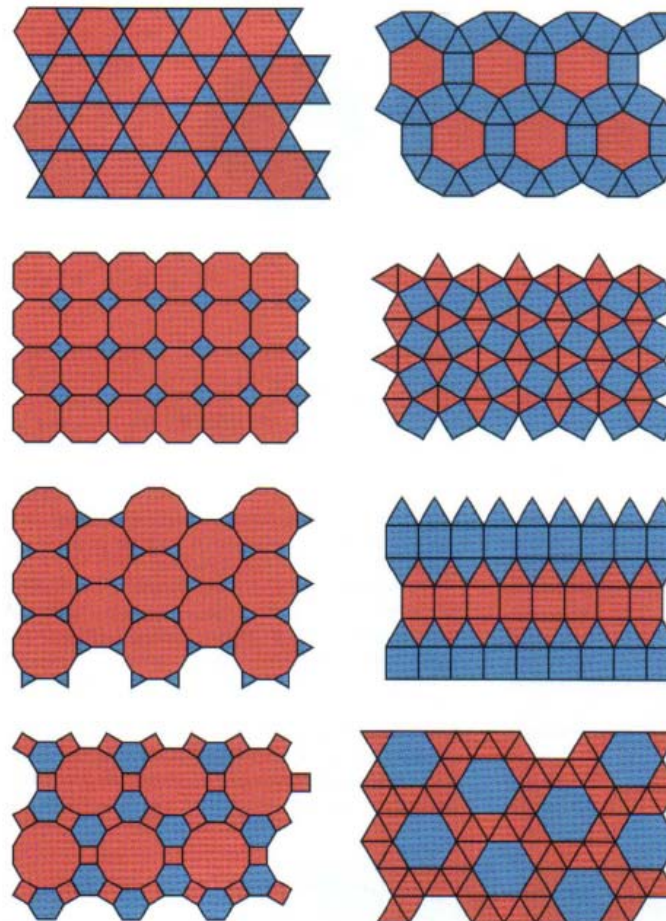


In
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



>> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO SEMI-REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com polígonos regulares de tal modo que nos vértices concorram sempre o mesmo tipo de lados, isto é, de modo a que os vértices sejam todos do mesmo tipo. Existem oito tipos diferentes de pavimentações semi-regulares.



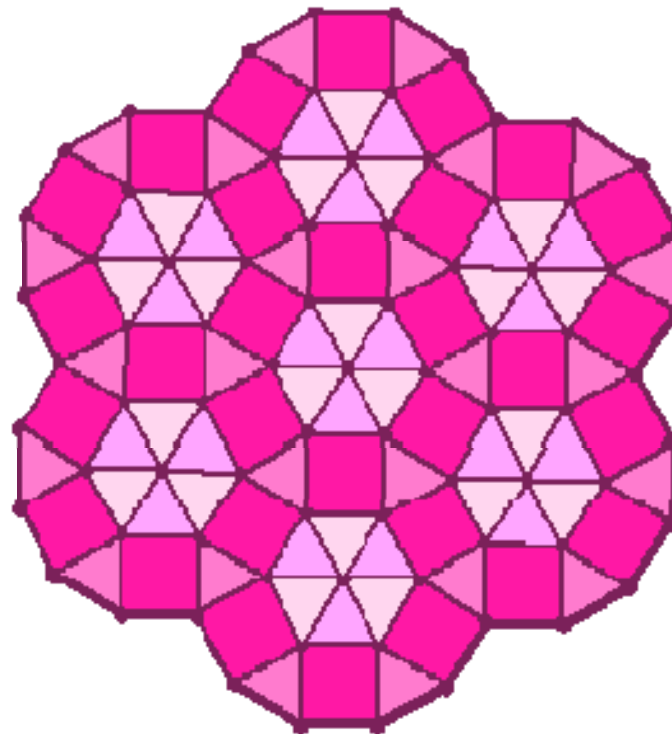
In
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



>> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO DEMI-REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com polígonos regulares sendo os vértices de diferentes tipos.

Diz-se PAVIMENTAÇÃO IRREGULAR aquela que não é regular, semi-regular ou demi-regular.



In
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/tiposdepavimentacao1.htm>

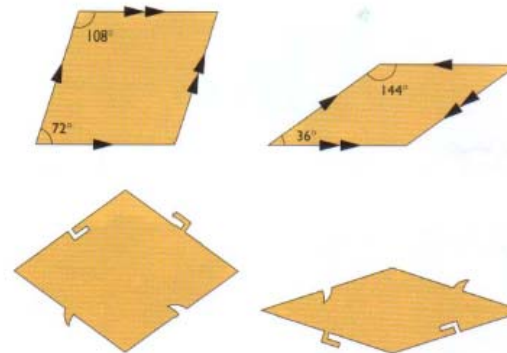


>> PAVIMENTAÇÕES: periódicas e aperiódicas

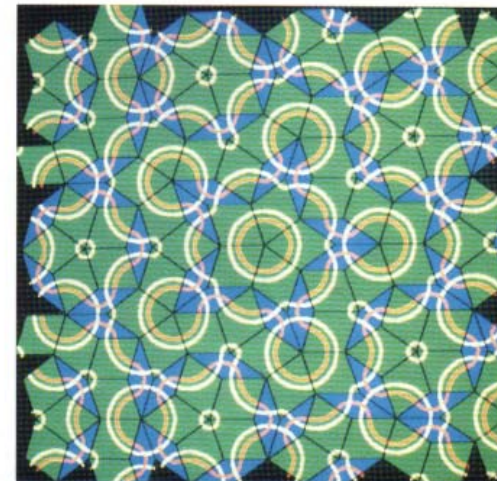
Uma pavimentação diz-se PERIÓDICA se for possível fazê-la coincidir consigo própria aplicando transformações de translação em mais que uma direcção. É o caso da generalidade das figuras que apresentámos até agora.

Uma pavimentação diz-se APERIÓDICA se não for periódica. Na figura do lado apresenta-se a pavimentação aperiódica de Penrose.

In
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



As pavimentações de Penrose: encaixando as duas figuras superiores de tal maneira que haja coordenação das direcções das setas nos pontos de junção, é possível pavimentar o plano, mas apenas de uma forma aperiódica. A introdução de cunhas e de cortes nas figuras, como se vê nas duas figuras em baixo, forma polígonos que irão pavimentar o plano, mas apenas de forma aperiódica, sem haver necessidade de qualquer restrição no alinhamento das figuras.



Parte de uma pavimentação (aperiódica) de Penrose a cobrir o plano, vendo-se a simetria quintuplicada do local da pavimentação.

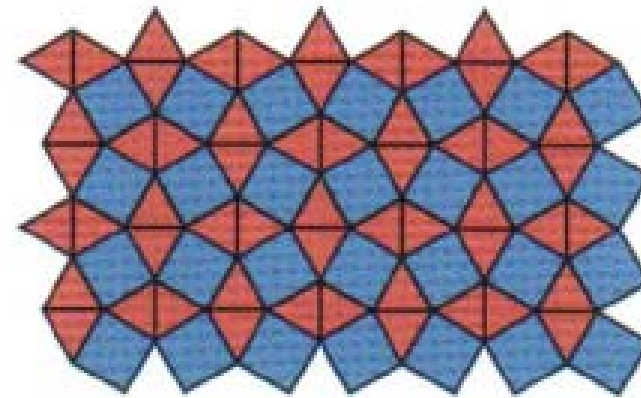
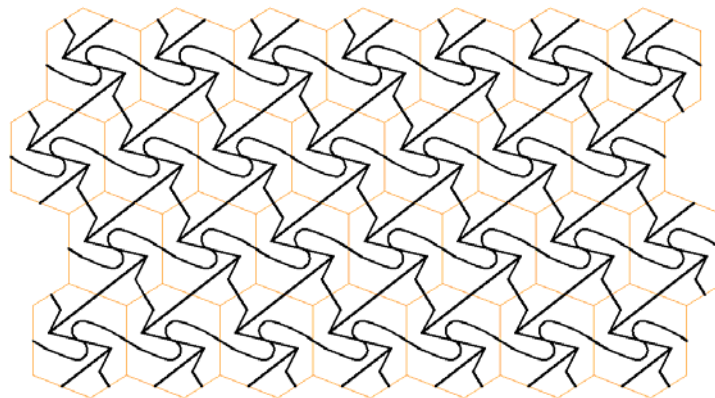


>> PAVIMENTAÇÕES: noção de grupo de simetria de uma pavimentação

Uma forma de analisar uma pavimentação é através da noção de GRUPO DE SIMETRIA. Um grupo de simetria de uma pavimentação é o conjunto das transformações geométricas (de ente: rotações de 180°, 120°, 90° e 60°, translações, reflexões, e reflexões deslizantes) que deixa a pavimentação invariante. Isto é aplicando cada uma das transformações do grupo à pavimentação, esta acaba por coincidir consigo própria. Existem 17 grupos de simetria (ver http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group e http://homepage.mac.com/eduardo.veloso/novohome/curso04_2003/paginas/17padroes.html)

Com efeito, pavimentações aparentemente muito diversas podem na verdade ser do mesmo tipo, isto é, podem pertencer ao mesmo grupo de simetria e permanecer invariáveis quando sujeitas ao mesmo tipo de transformações. Todas as pavimentações dos 17 grupos de simetria são periódicas.

À partida nós nunca colocaremos a questão de produzir uma pavimentação que seja deste ou daquele grupo. Pode no entanto ser interessante como exercício, para uma dada pavimentação, identificar transformações que a deixam invariante. Que transformações deixam as pavimentações abaixo invariantes?





Transformações consideradas nos grupos de simetria dos padrões periódicos de preenchimento do plano:

- Rotações de 180°
- Rotações de 120°
- Rotações de 90°
- Rotações de 60°
- Translações
- Reflexões
- Reflexões deslizantes

Grupos de simetria dos padrões periódicos (17):

- **p1** (translações)
- **p2** (translações + rotações de 180°)
- **pm** (translações + reflexões)
- **pg** (translações + reflexões deslizantes)
- **cm** (translações + reflexões + reflexões deslizantes)
- **pmm** (translações + rotações de 180° + reflexões)
- **pmg** (translações + rotações de 180° + reflexões + reflexões deslizantes)
- **pgg** (translações + rotações de 180° + reflexões deslizantes)
- **cmm** (translações + rotações de 180° + reflexões + reflexões deslizantes)
- **p4** (translações + rotações de 180° + rotações de 90°)
- **p4m** (translações + rotações de 180° + rotações de 90° + reflexões + reflexões deslizantes)
- **p4g** (translações + rotações de 180° + rotações de $n90^\circ$ + reflexões + reflexões deslizantes)
- **p3** (translações + rotações de 120°)
- **p3m1** (translações + rotações de 120° + reflexões + reflexões deslizantes)
- **p31m** (translações + rotações de 120° + reflexões + reflexões deslizantes)
- **p6** (translações + rotações de 180° + rotações de 120° + rotações de 60°)
- **p6m** (translações + rotações de 180° + rotações de 120° + rotações de 60° + reflexões + reflexões deslizantes)



GD – AULA TEÓRICA 3

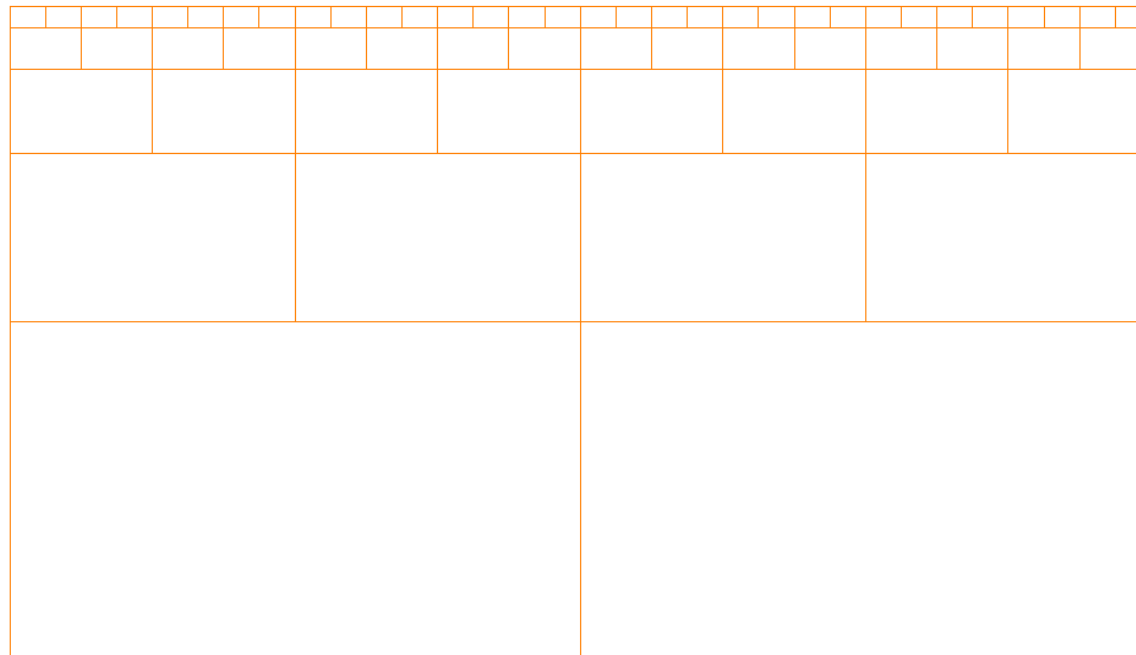
Padrões e pavimentações fractais.



>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

A noção de FRACTAL assenta na ideia de auto semelhança a diferentes escalas de uma figura. Existem diferentes tipos de fractais. Nalguns a semelhança é total noutros tal não acontece (ver <http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>)

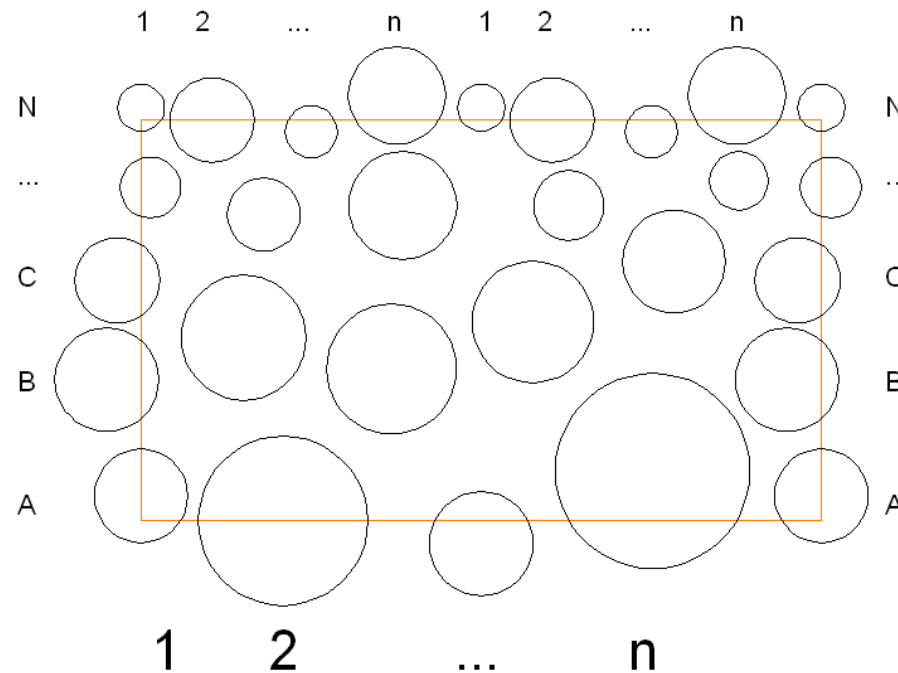
Para gerar um padrão fractal pode ser utilizado o seguinte procedimento: definimos uma área rectangular que replicamos mudando o tamanho para metade de cada vez que efectuamos a operação para uma linha, de acordo com a figura.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

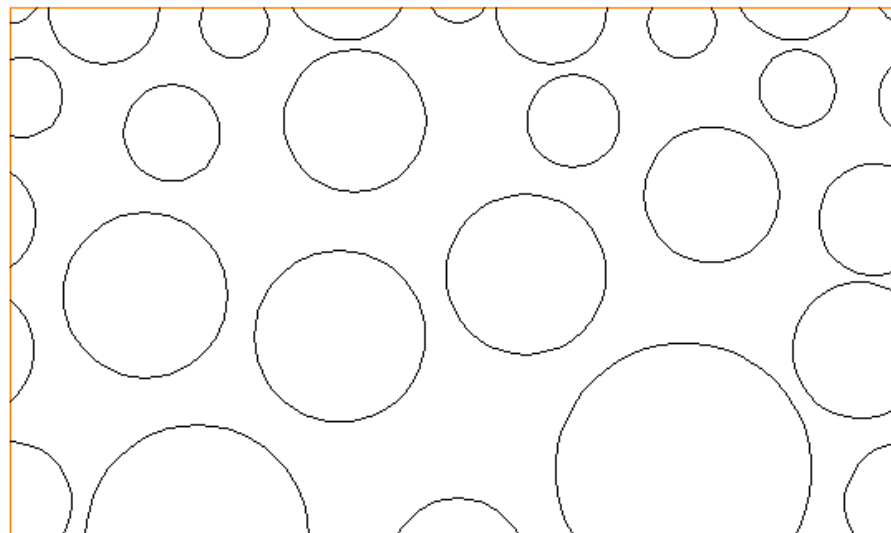
De seguida preenchemos um dos rectângulos garantido que há transição horizontal e vertical aquando da operação de replicação e diminuição da escala. No exemplo dado abaixo a transição horizontal é garantida mantendo igual relação entre os círculos da direita e da esquerda relativamente aos lados verticais do rectângulo. Na direcção vertical a transição é garantida repetido no lado superior a relação dos círculos inferiores com o lado inferior do rectângulo em duplicado e com redução para metade no tamanho.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

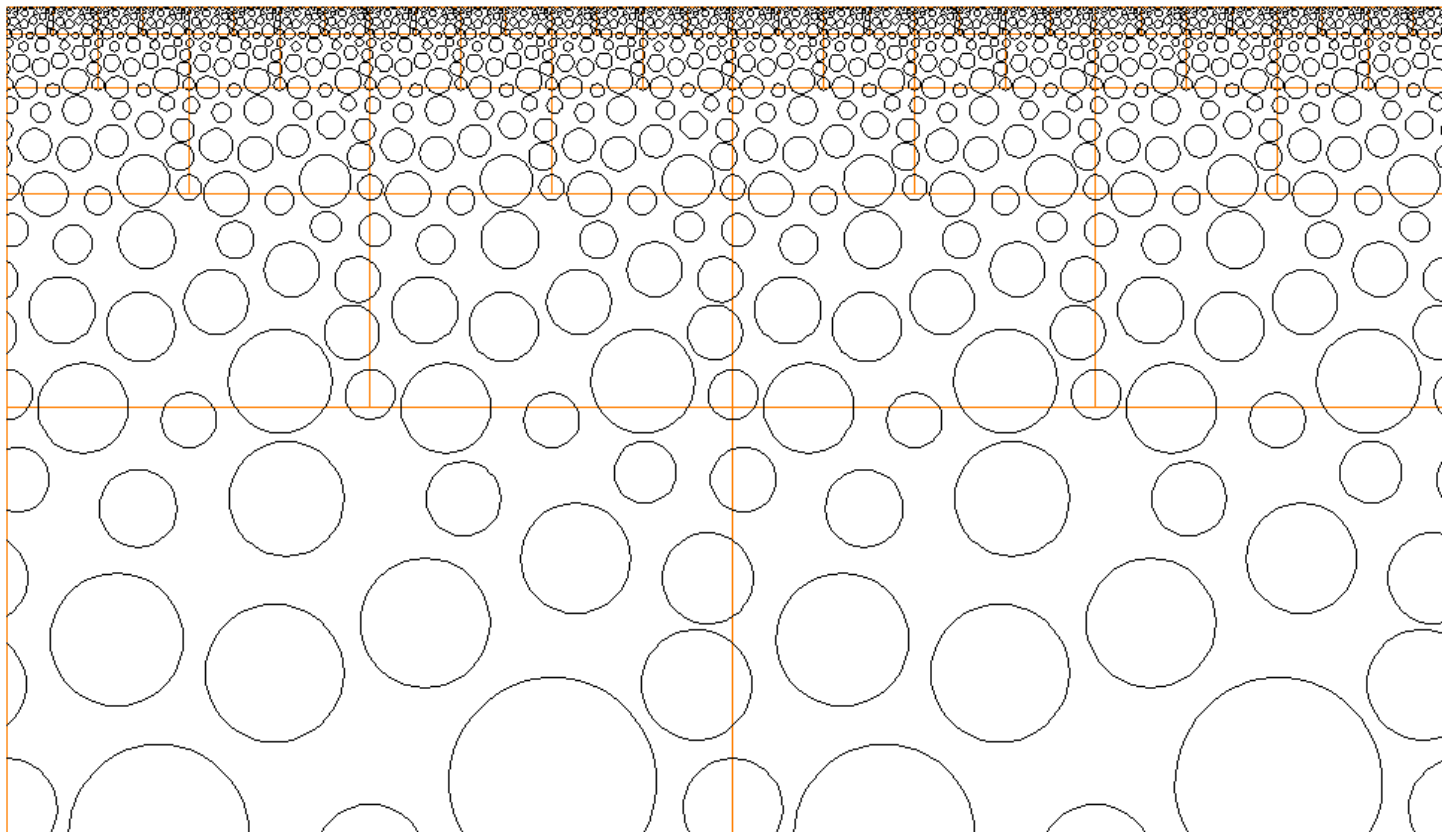
De seguida “limpa-se” o que se encontra fora dos limites do rectângulo e...





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

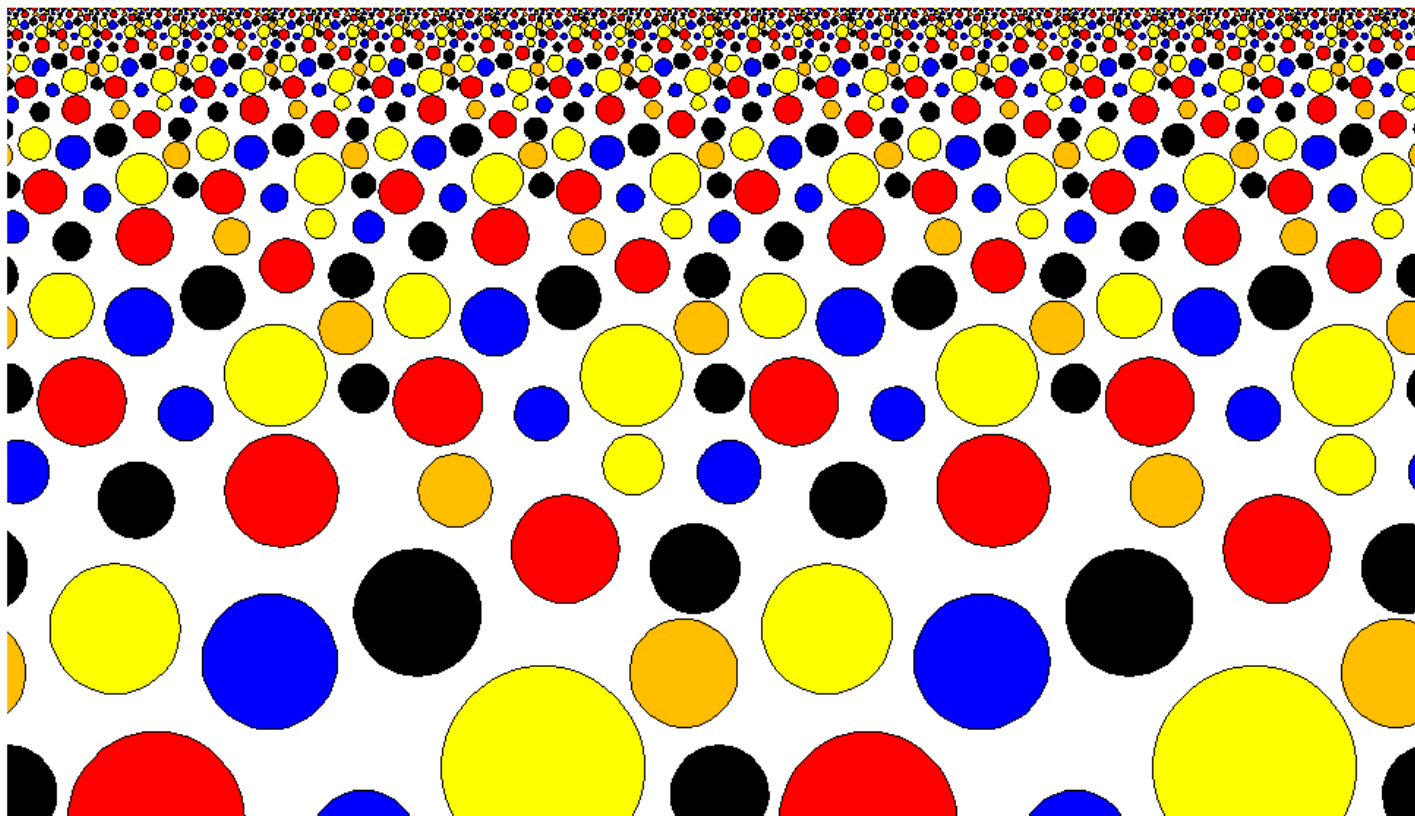
...obtém-se o padrão fractal que pode ser repetido as vezes que se pretender.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

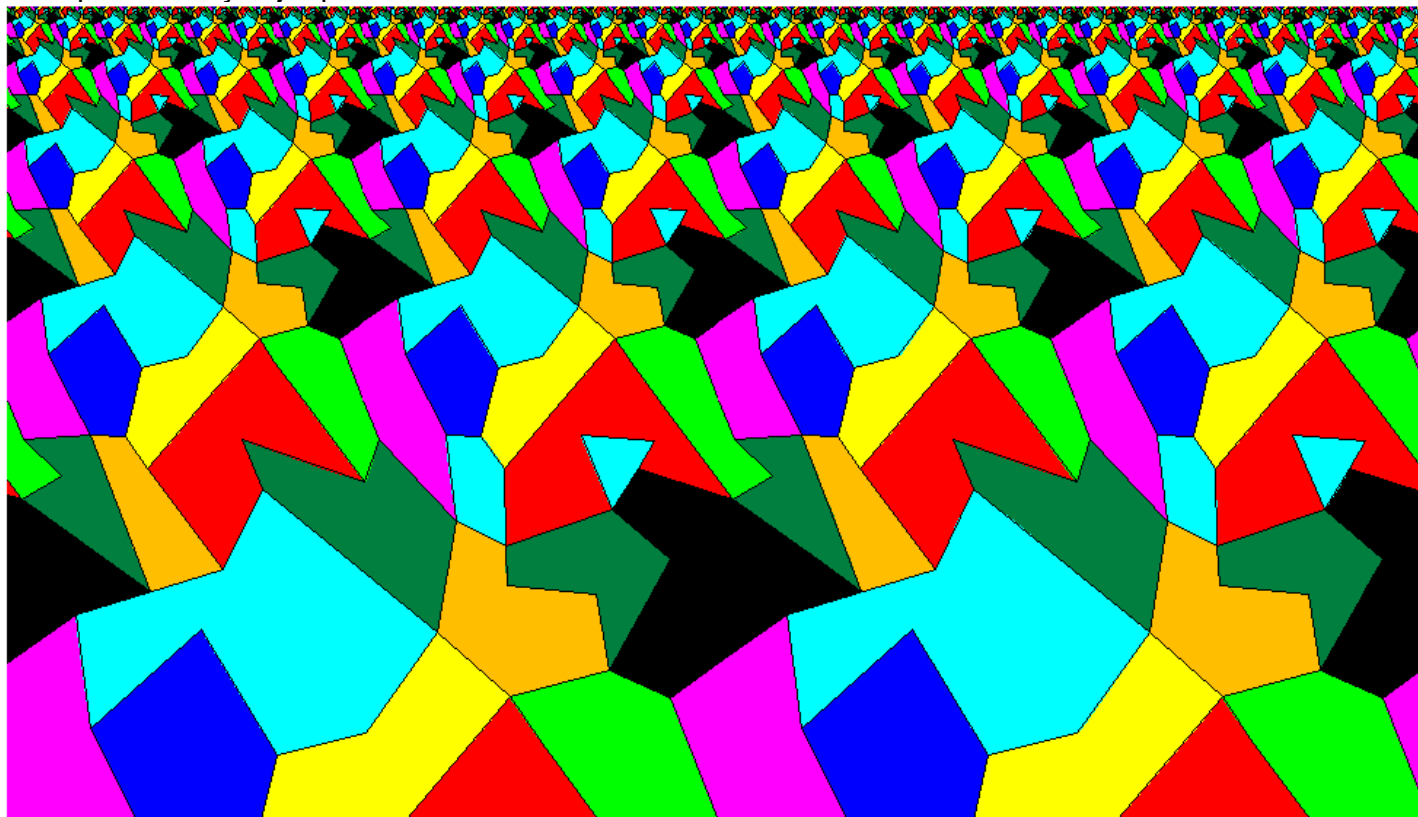
O preenchimento com cor é uma opção que pode valorizar visualmente o padrão. Note que neste exemplo não temos uma pavimentação.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

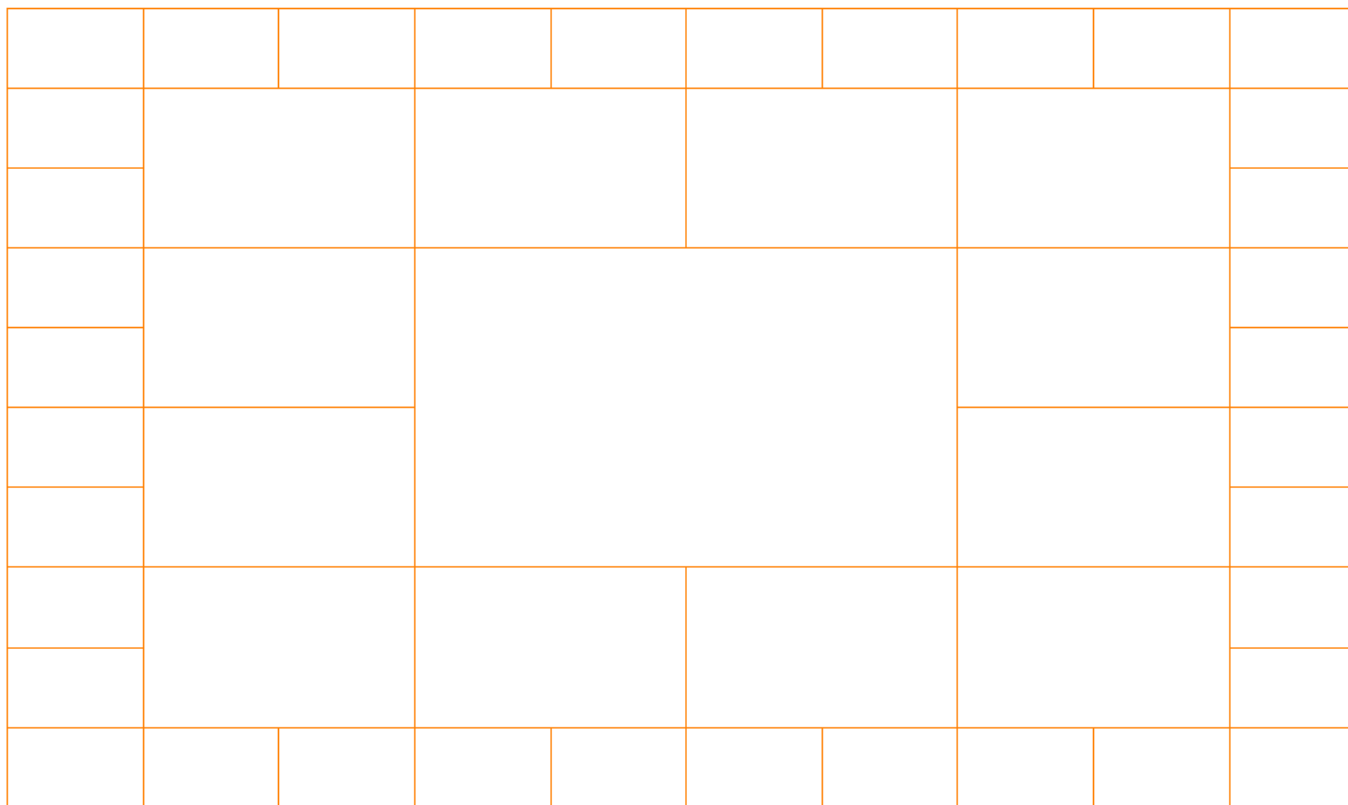
Este é outro padrão obtido de acordo com o mesmo procedimento. Neste caso trata-se também de uma pavimentação já que todas as áreas formadas são isoláveis.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

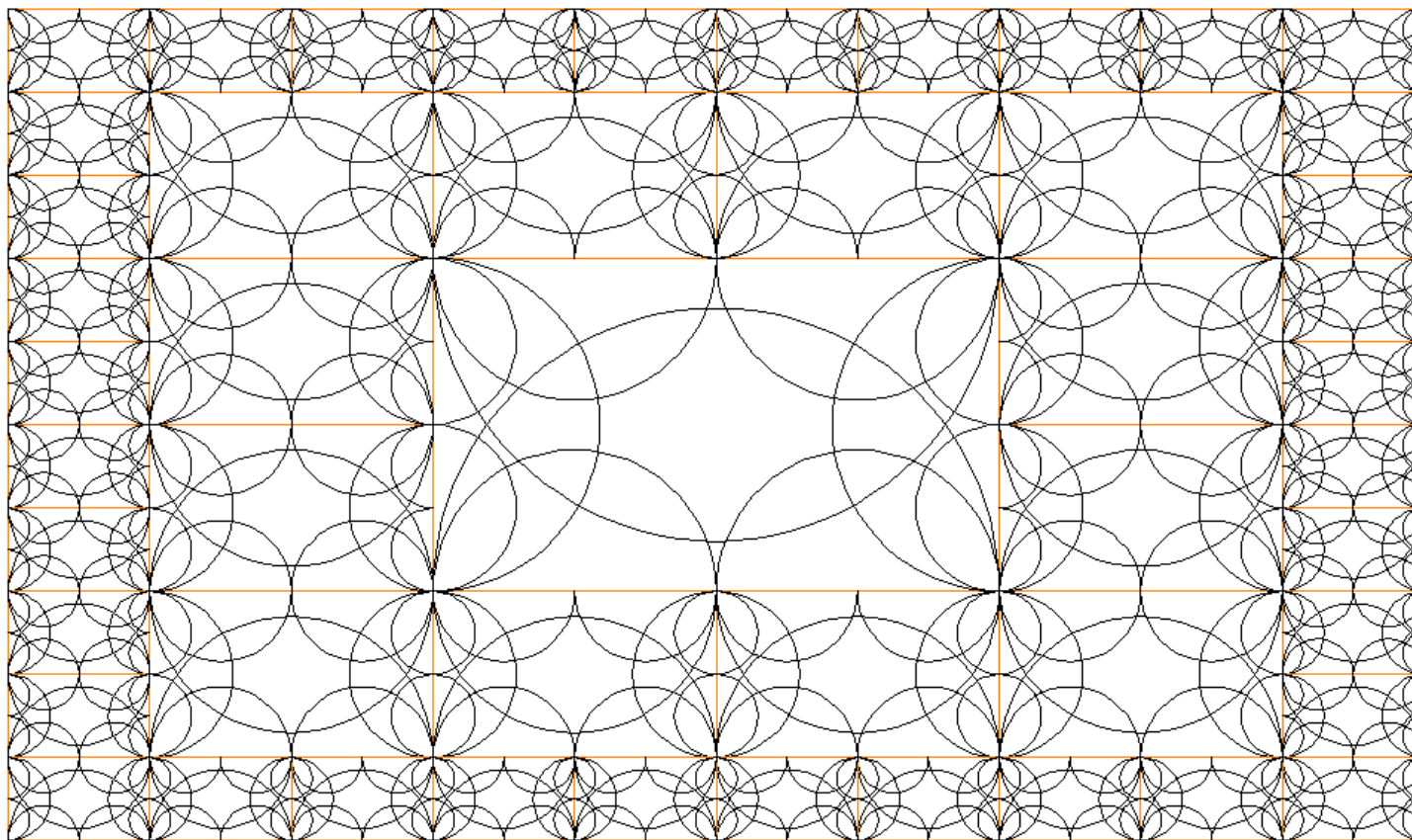
Outro procedimento possível corresponde à alteração de escala ao replicar o padrão em quatro sentidos, como no exemplo da estrutura abaixo.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

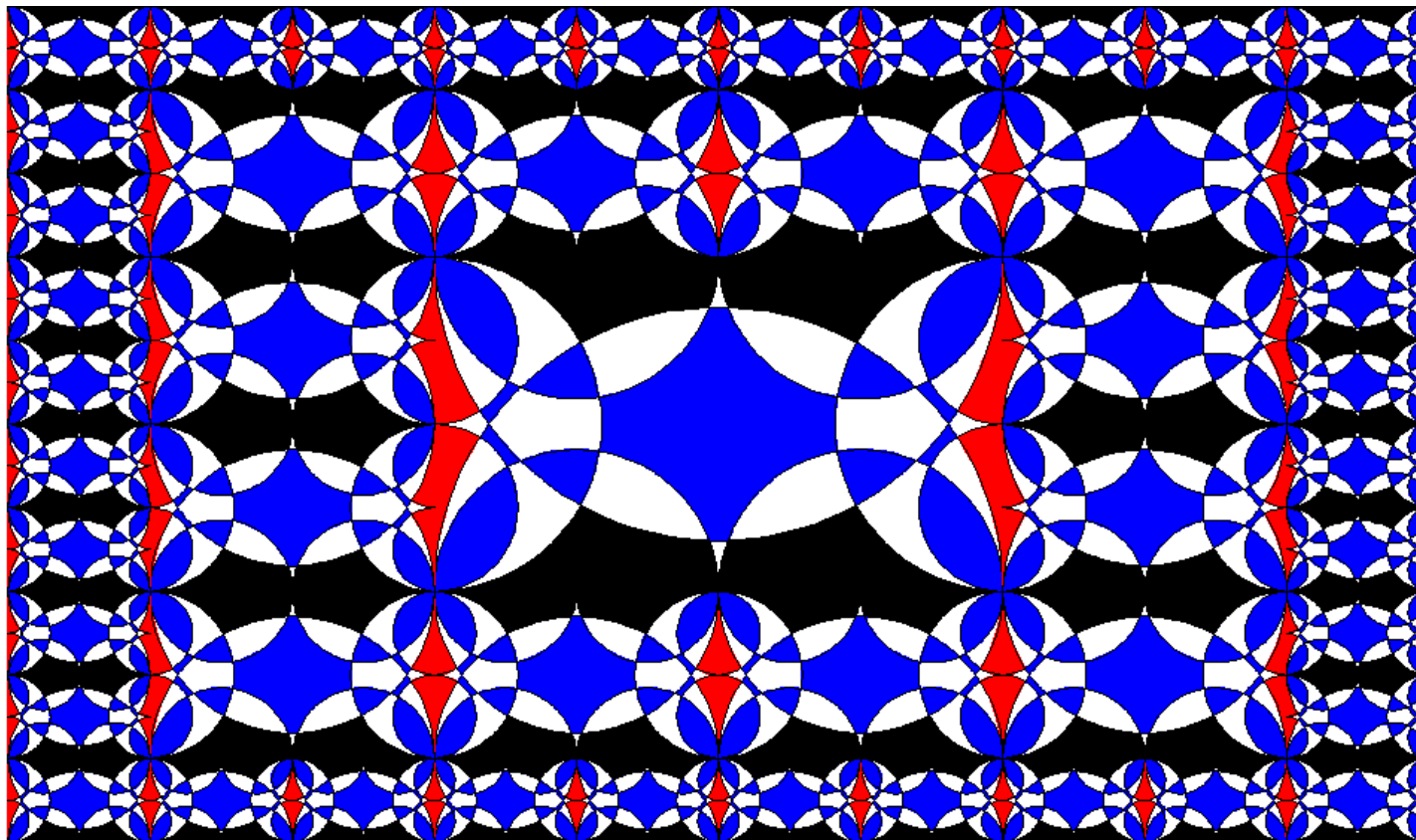
Com esta estrutura este é um possível resultado...





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

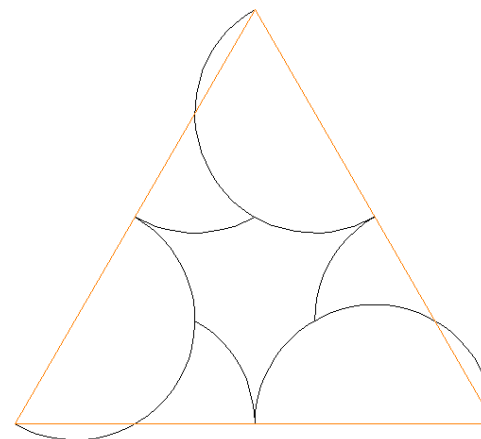
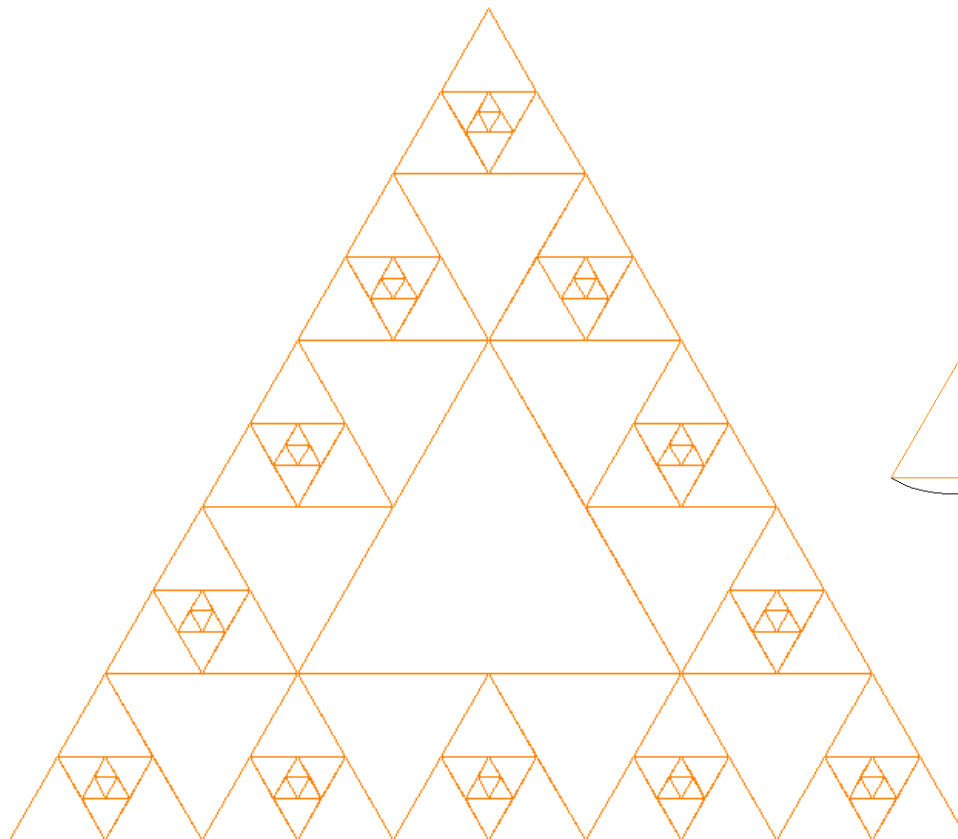
...a que também pode ser adicionada cor.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

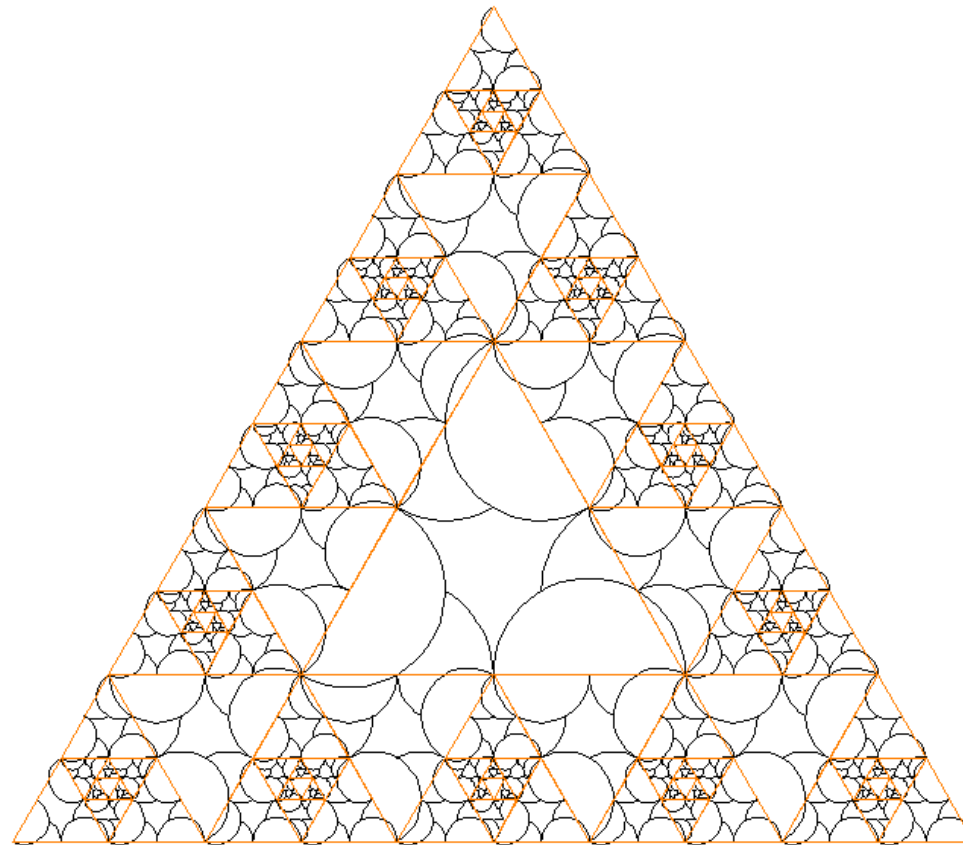
Com a estrutura abaixo podemos adoptar um procedimento semelhante...





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

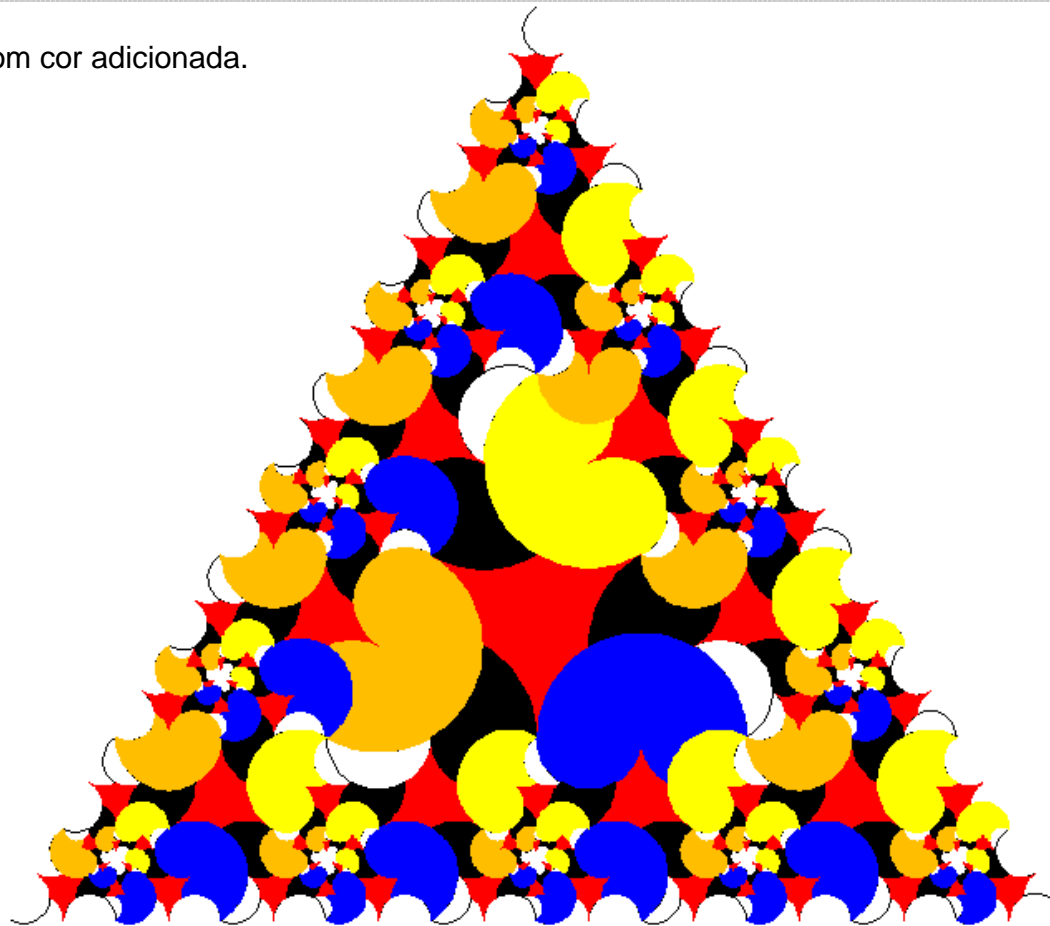
...embora neste caso seja ainda necessário considerar uma rotação de 60° de cada vez que se replica o padrão.





>> PADRÕES E PAVIMENTAÇÕES FRACTAIS

O padrão com cor adicionada.





GD – AULA TEÓRICA 4

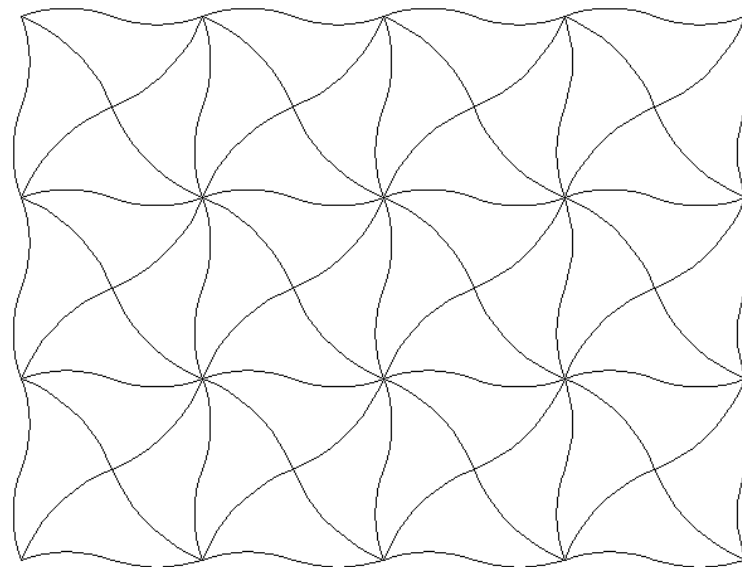
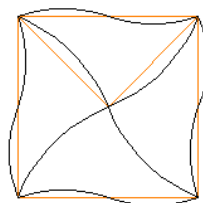
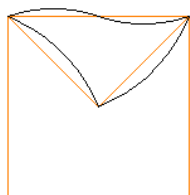
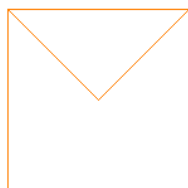
Outras formas de gerar padrões de pavimentações através de:

- reflexões, reflexões deslizantes, rotações.
- afinidades, transformações projectivas, transformações topológicas.



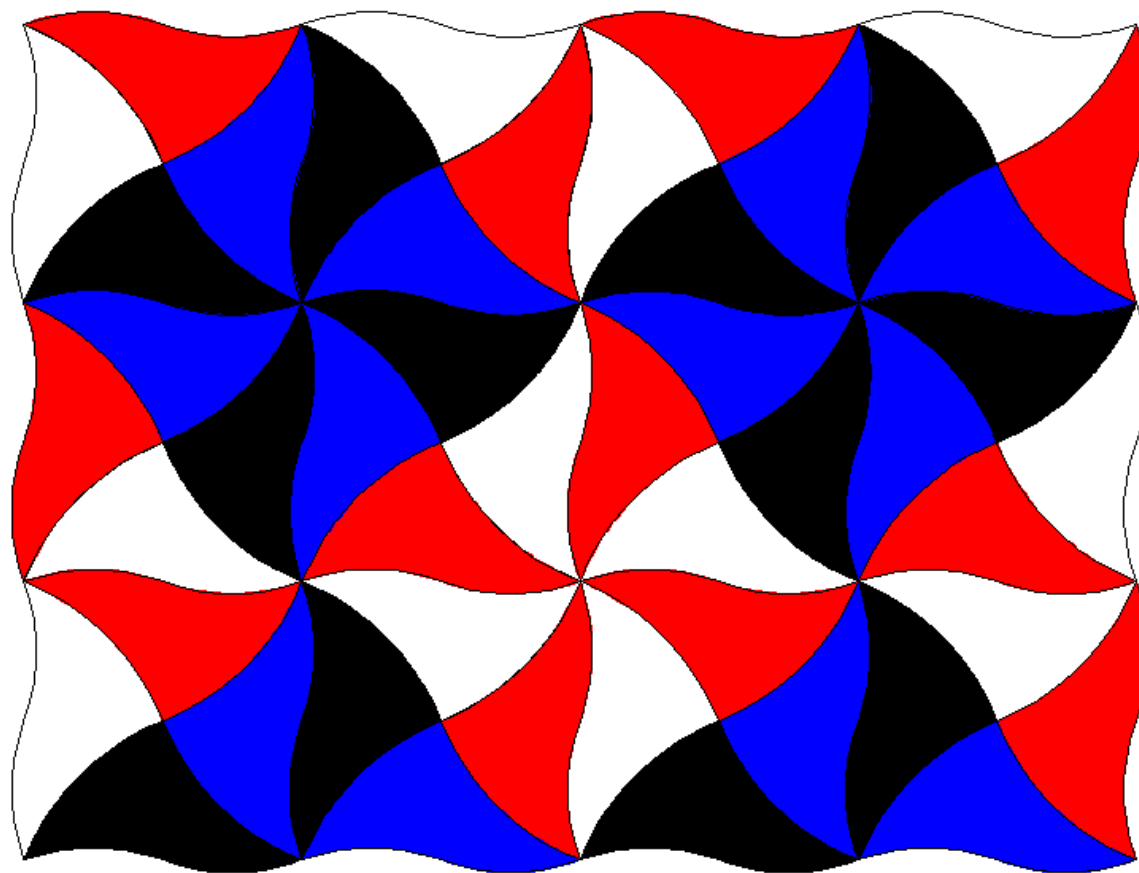
>> PADRÕES

GERAÇÃO POR ROTAÇÕES DE 90°.





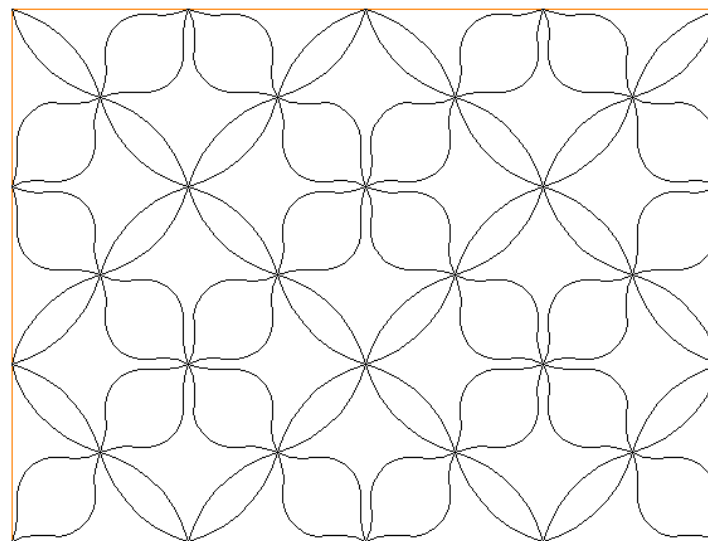
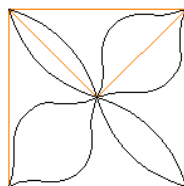
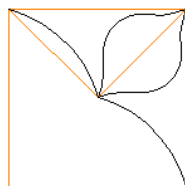
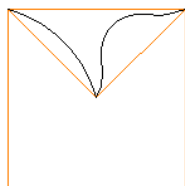
>> PADRÕES





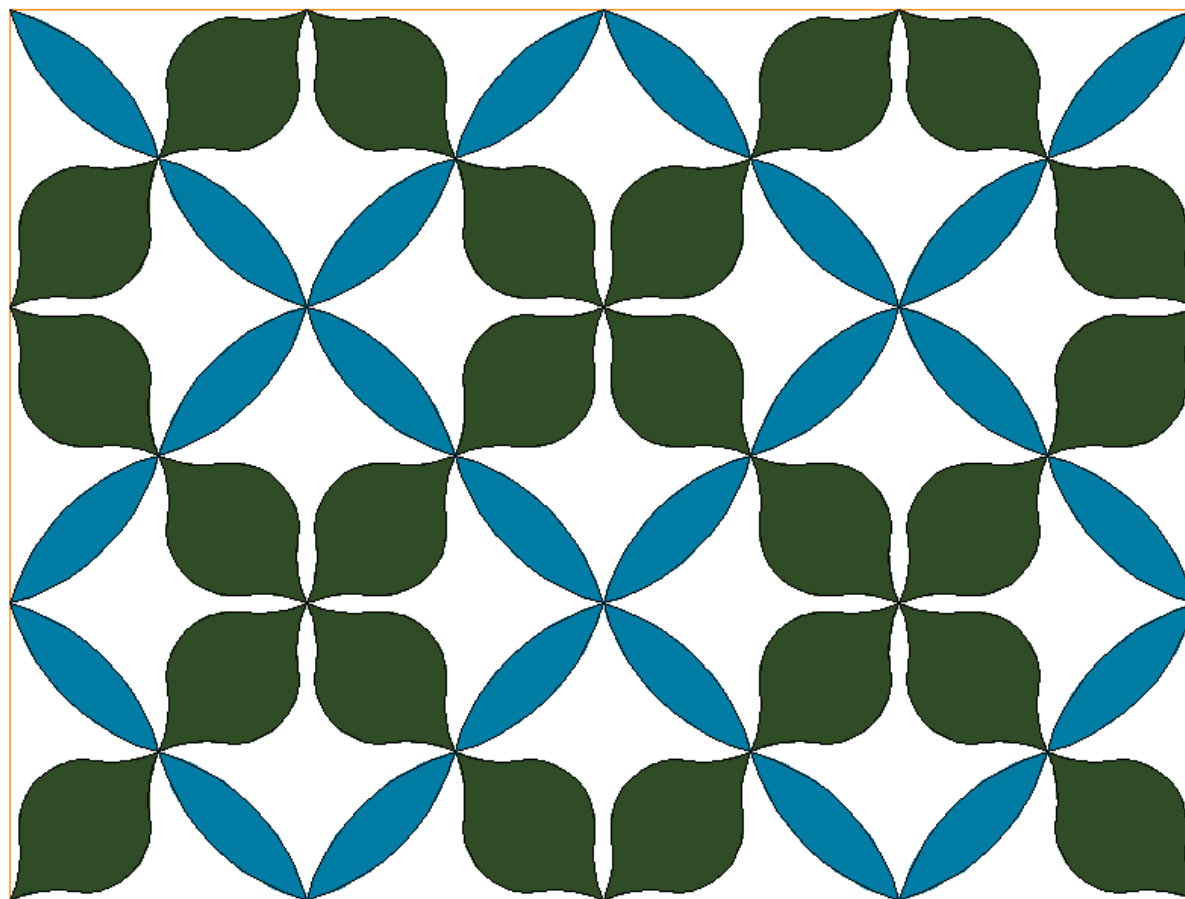
>> PADRÕES

GERAÇÃO POR REFLEXÕES





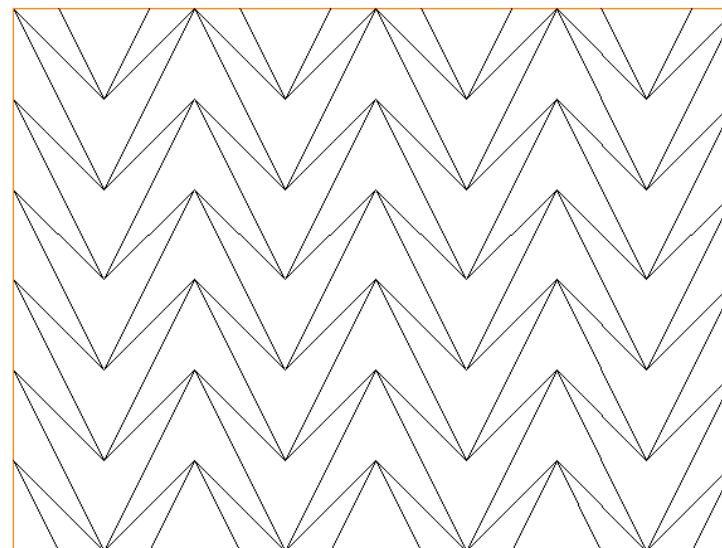
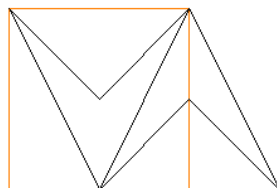
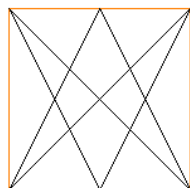
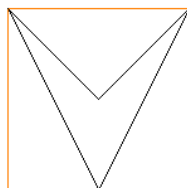
>> PADRÕES





>> PADRÕES

GERAÇÃO POR REFLEXÃO DESLIZANTE





>> PADRÕES

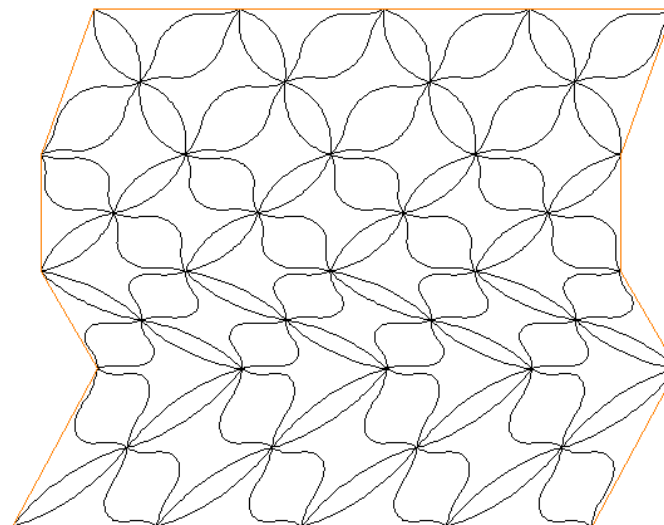
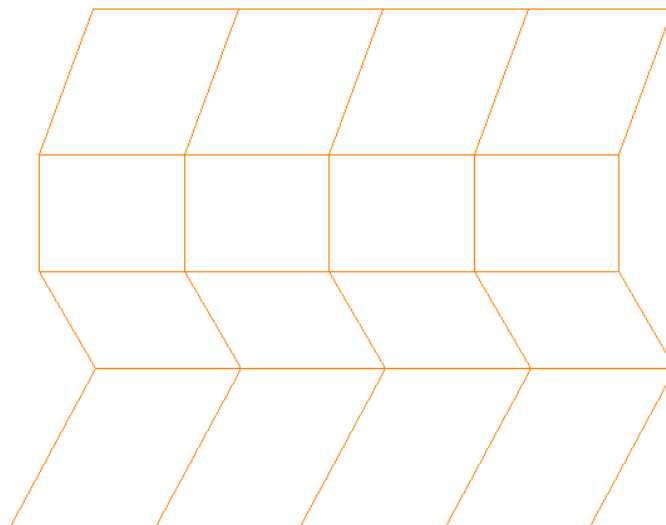
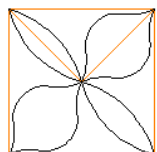




>> PADRÕES

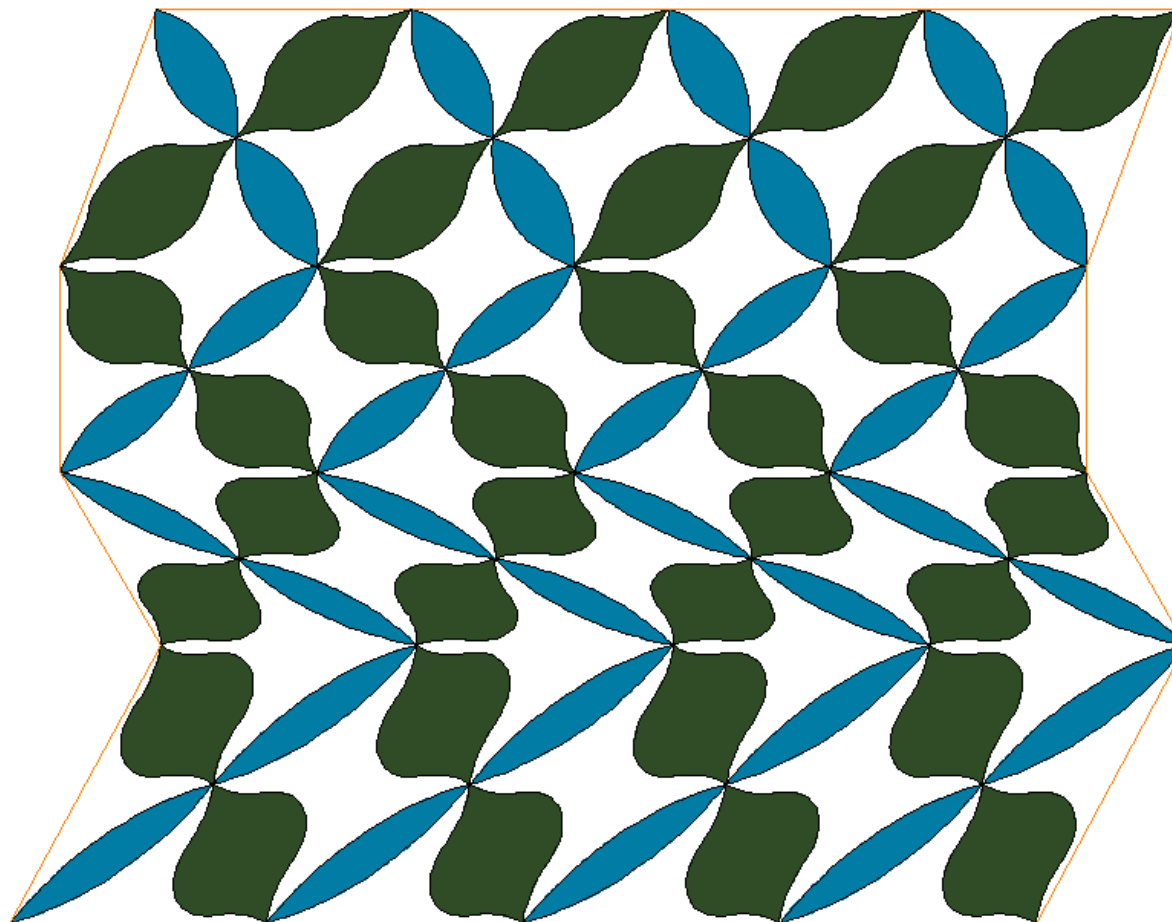
GERAÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO AFIM DA CÉLULA INICIAL

- Uma transformação afim transforma linhas rectas em linhas rectas mantendo a incidência entre pontos e linhas, mantém o paralelismo, e mantém as proporções para cada direcção de rectas





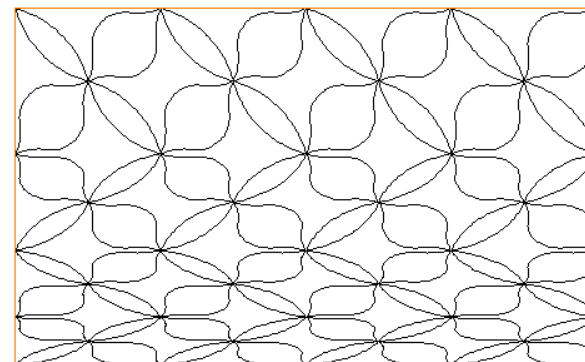
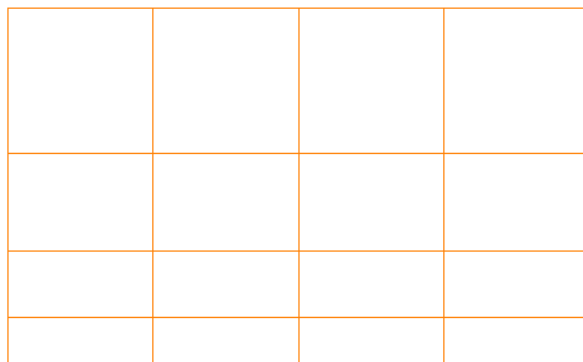
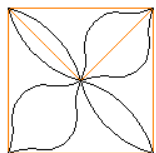
>> PADRÕES





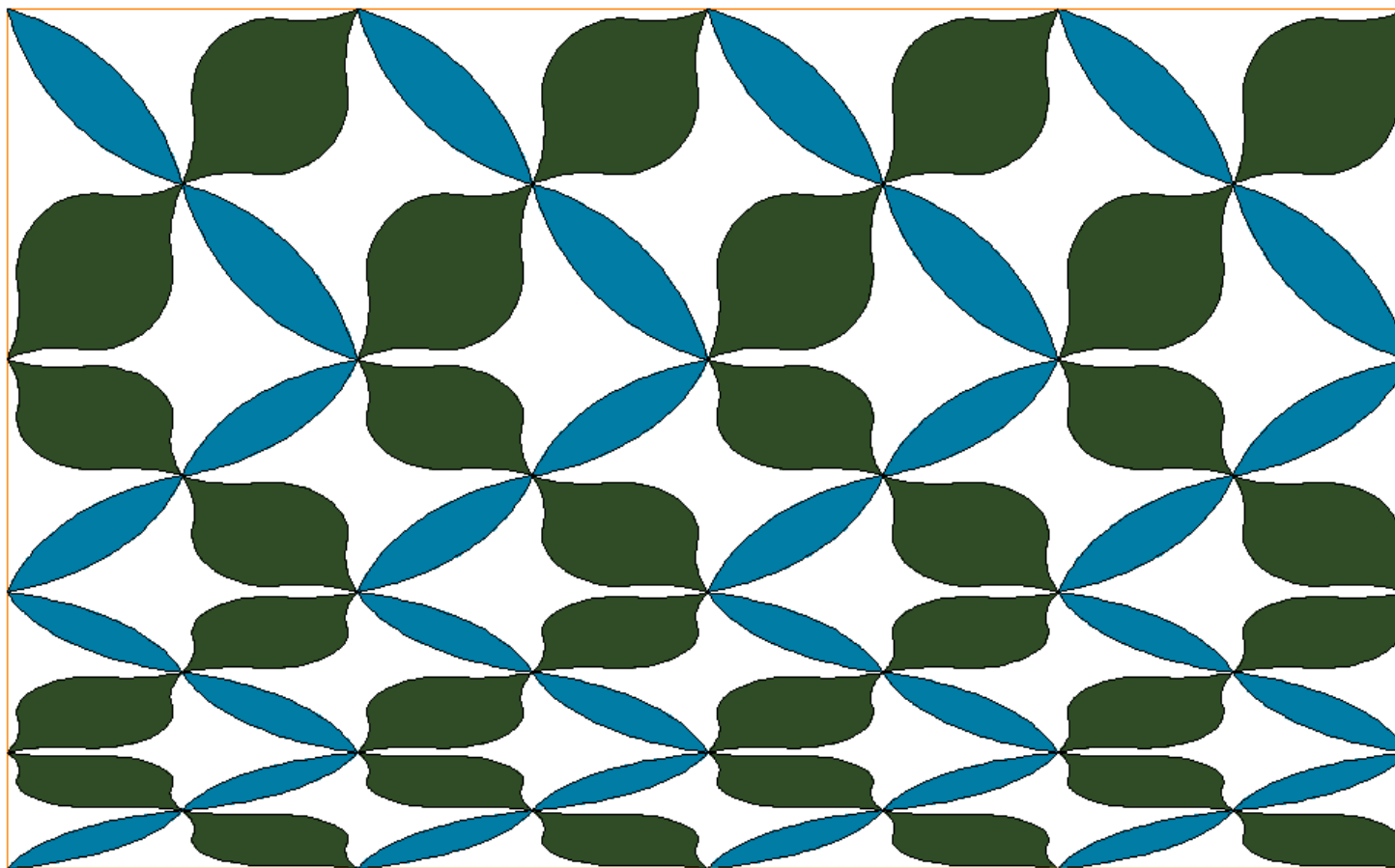
>> PADRÕES

GERAÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO AFIM DA CÉLULA INICIAL





>> PADRÕES

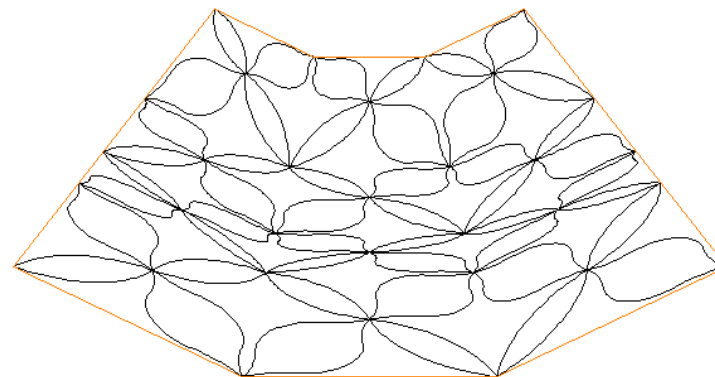
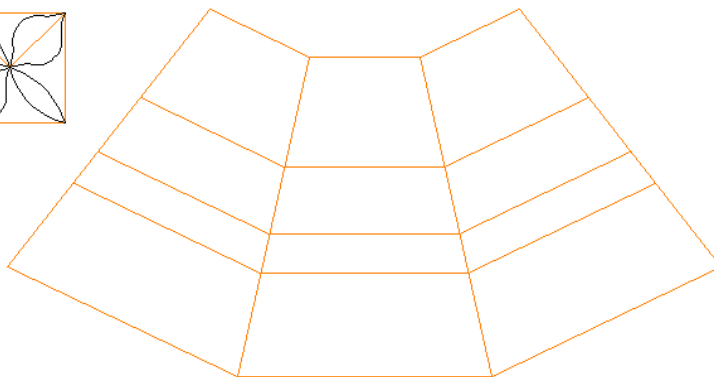
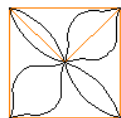




>> PADRÕES

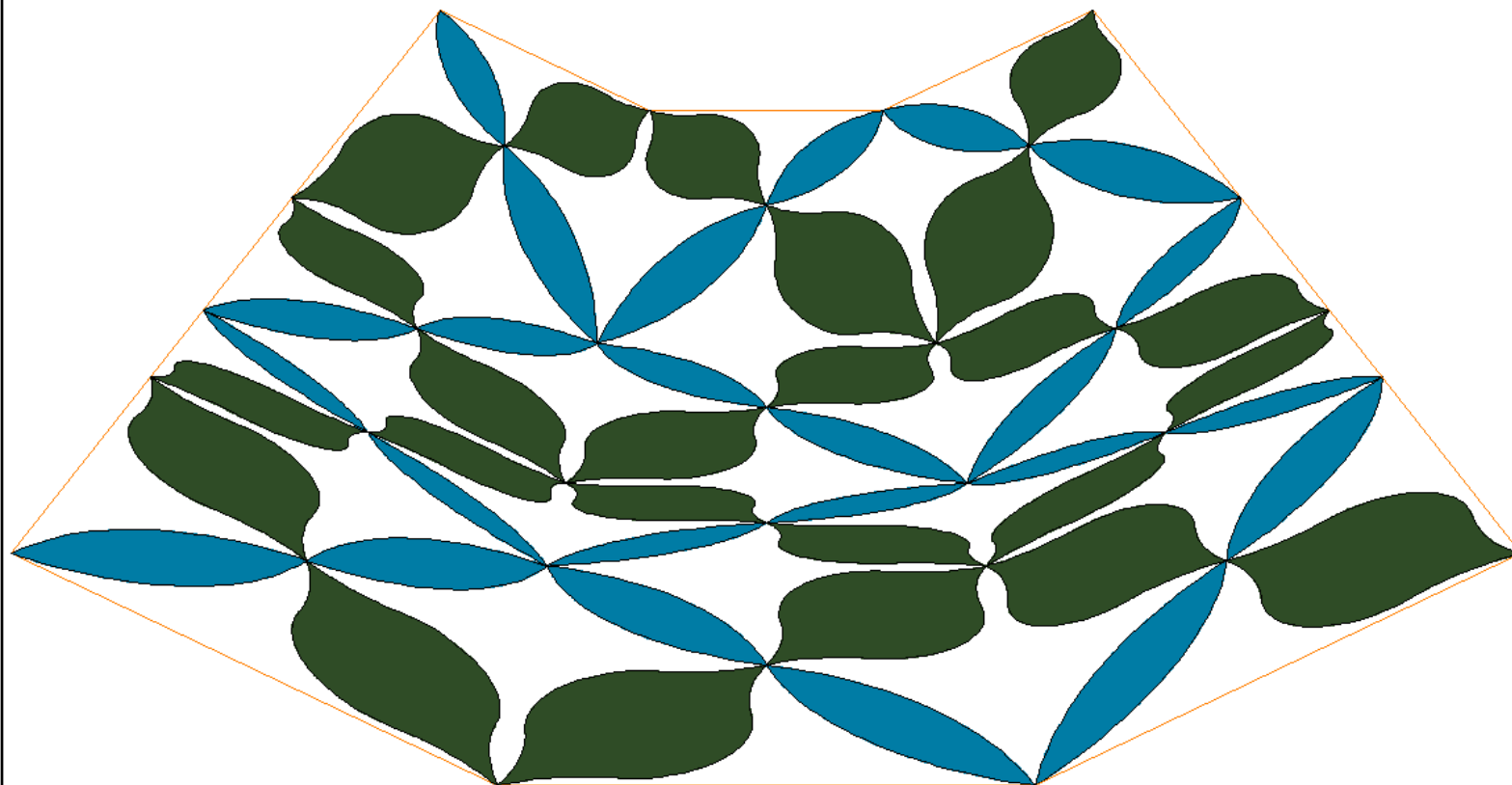
GERAÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO PROJECTIVA DA CÉLULA INICIAL

- Uma transformação projectiva transforma linhas rectas em linhas rectas mantendo a incidência entre pontos e linhas, não mantém o paralelismo, e não mantém as proporções para cada direcção de rectas.





>> PADRÕES

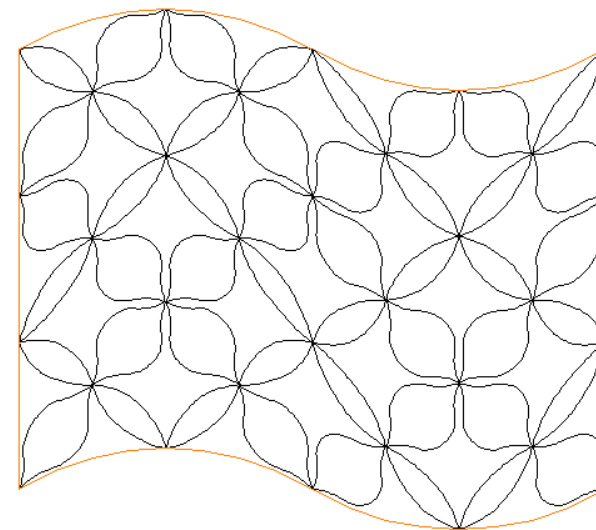
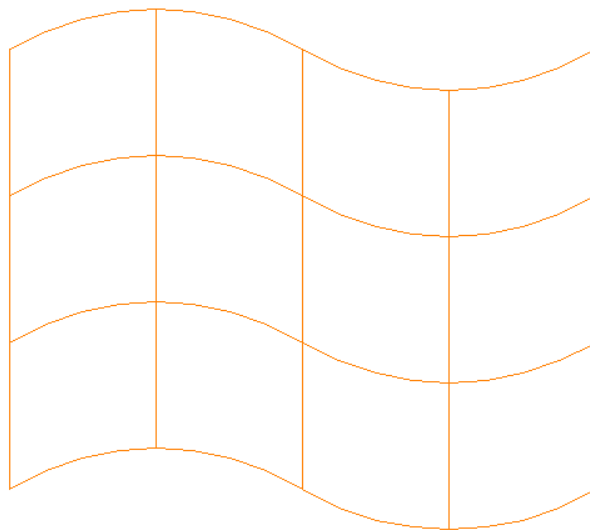
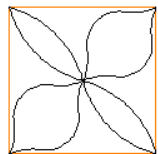




>> PADRÕES

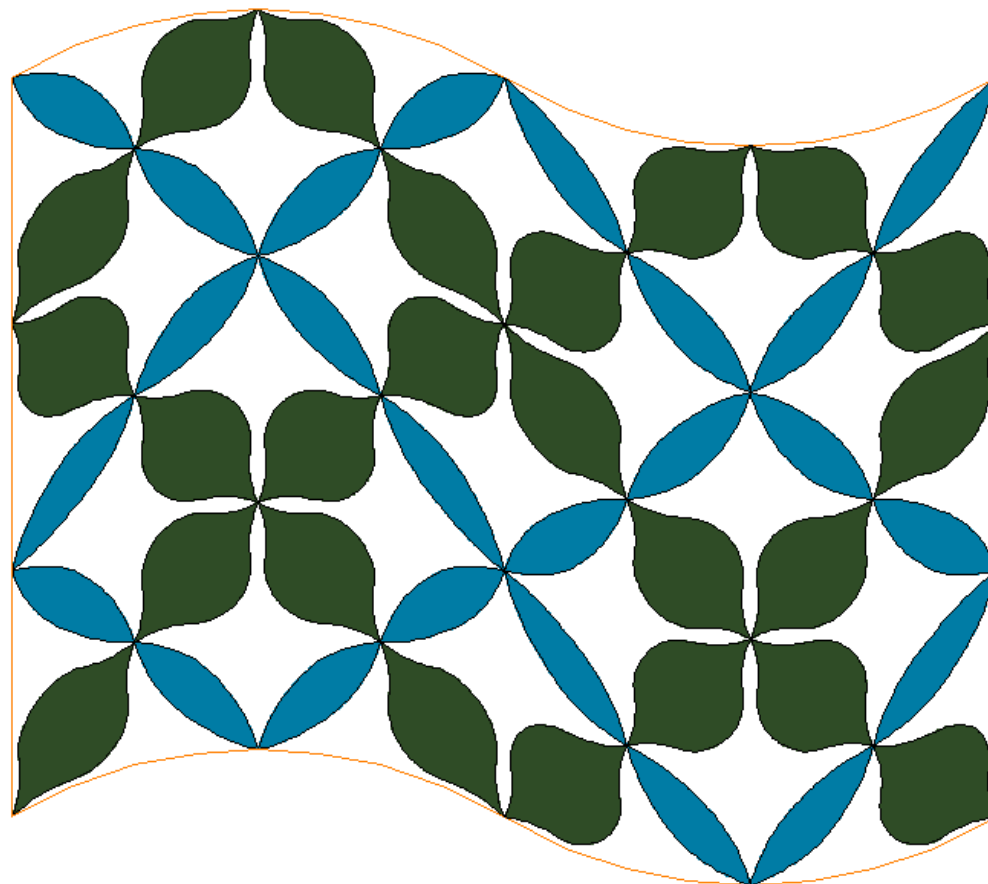
GERAÇÃO POR TRANSFORMAÇÃO TOPOLÓGICA DA CÉLULA INICIAL

- Uma transformação topológica transforma linhas rectas em linhas curvas mantendo a incidência entre pontos e linhas.





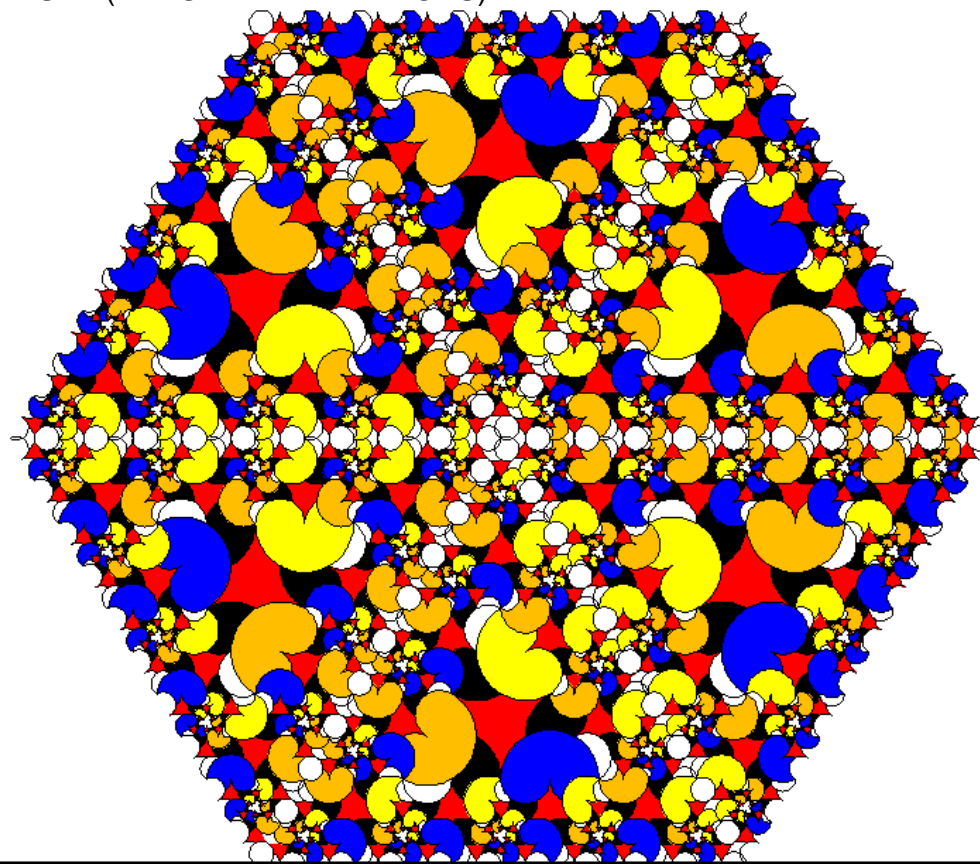
>> PADRÕES





>> PADRÕES

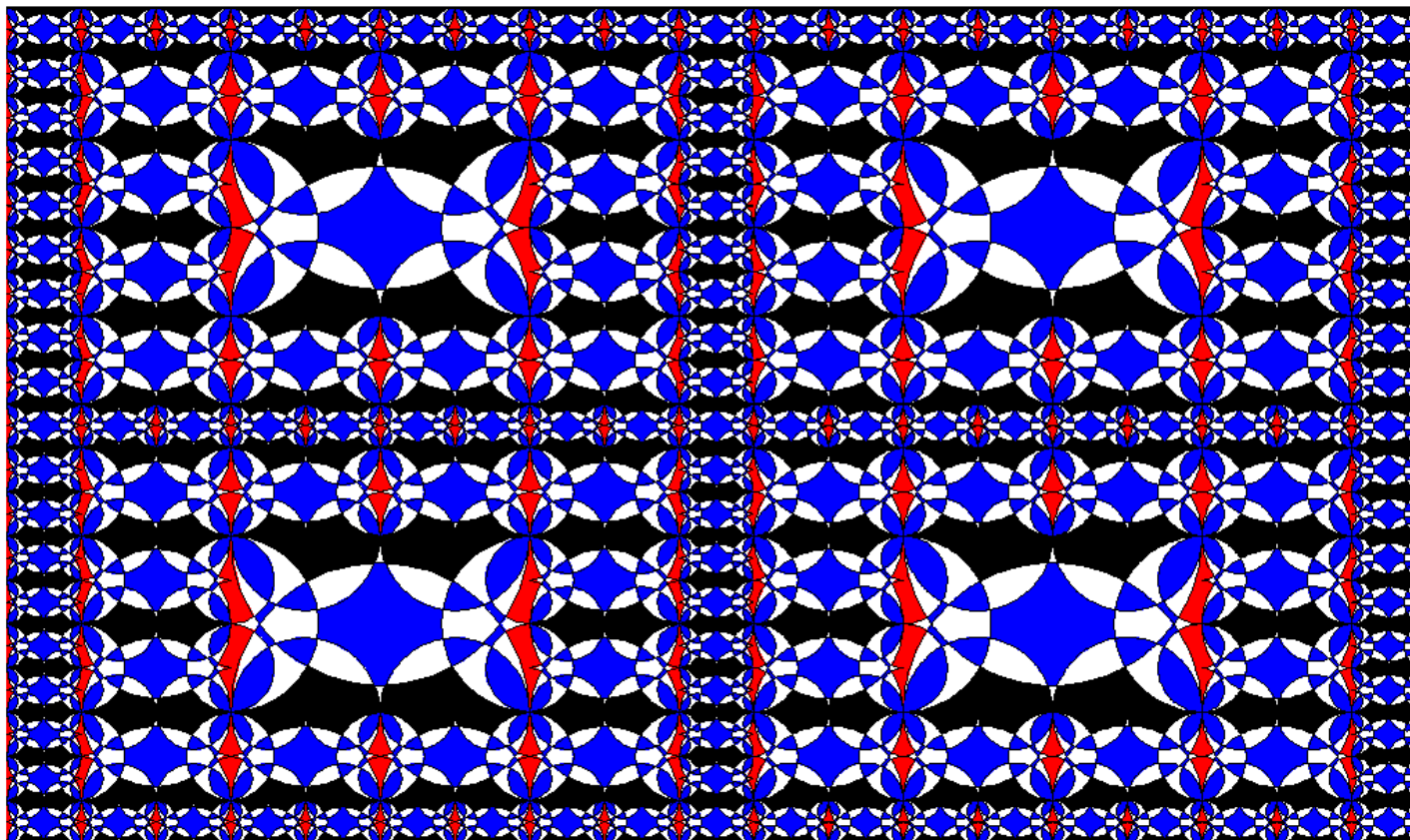
ABORDAGEM MISTA (FRACTAL + REFLEXÕES)





>> PADRÕES

ABORDAGEM MISTA (FRACTAL + REFLEXÕES)





GD – EXERCÍCIOS



>> 1º EXERCÍCIO PRÁTICO – padrões de pavimentação do plano

O exercício tem a duração de 4 aulas práticas, com início em 9 de Outubro e entrega no fim da aula prática de 5 de Novembro.

Em folhas A3 orientadas ao baixo, o desenho dos padrões de pavimentação deverá ocupar a área de um quadrado com 29cm de lado, colocado a 2.5 da margem esquerda da folha. O restante espaço à direita da folha será reservado para notas explicativas ao exercício e identificações várias.

Enunciado

1) Considere os cinco tipos de grelha plana que originam os cinco domínios de Dirichlet:

- Grelha quadrada com 5cm de lado.
- Grelha rectangular com 4cm e 6cm de lado.
- Grelha triangular equilátera com 5cm de lado.
- Grelha triangular isósceles com 5cm e 7cm de lado.
- Grelha triangular escalena com 4cm, 6cm e 7cm de lado.

Para cada um dos cinco tipos de domínios gere uma solução de pavimentação periódica do plano:

- a) Duas pavimentações deverão ser monoédricas.
- b) Duas pavimentações deverão ser não-monoédricas.
- c) Uma pavimentação deverá semi-regular ou demi-regular.

2) Para cada uma das pavimentações, identifique as transformações geométricas que a deixam invariantes.



>> 1º EXERCÍCIO PRÁTICO – padrões de pavimentação do plano

O exercício tem a duração de 4 aulas práticas, com início em 9 de Outubro e entrega no fim da aula prática de 5 de Novembro.

Em folhas A3 orientadas ao baixo, o desenho dos padrões de pavimentação deverá ocupar a área de um quadrado com 29cm de lado, colocado a 2.5 da margem esquerda da folha. O restante espaço à direita da folha será reservado para notas explicativas ao exercício e identificações várias.

Enunciado

- 3) Gere uma solução de pavimentação fractal do plano.
- 4) Considere uma célula quadrada com um padrão no seu interior. Gere uma solução de pavimentação do plano através da transformação topológica da célula

Deste exercício devem resultar 7 folhas A3 (sugestão: utilize a cor apenas se facilitar a leitura do exercício).



>> ENTREGA E AVALIAÇÃO

Os exercícios deverão ser desenvolvidos preferencialmente na aula. Este é um factor a considerar na avaliação dos mesmos. A entrega deve ser feita na 1ª semana de Novembro.

As folhas, em formato A3, orientadas ao baixo, devem ser identificadas no canto inferior direito. A identificação deve incluir:

- escola
- ano lectivo
- licenciatura
- disciplina
- data
- nome
- número

Os critérios de avaliação são:

- acompanhamento da execução dos exercícios → 15%
- nível de completamento dos exercícios → 25%
- correcção dos métodos empregues → 40%
- clareza gráfica dos desenhos → 10%
- notação correcta (classificação do tipo de pavimentação, eixos de reflexão, centros de rotação, ângulos de rotação, e outros elementos que entenda que contribuem para a leitura dos exercícios) → 10%