



## **GD – AULA TEÓRICA 2**

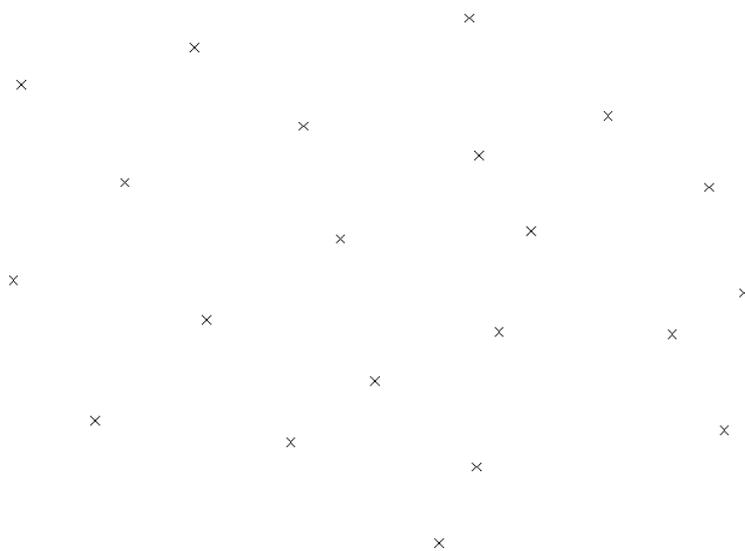
**Pavimentações:**

- Domínio de Dirichlet de uma grelha plana e geração de um padrão de pavimentação.
- Critérios de classificação das pavimentações (monoédricas / não monoédricas; regulares / semi-regulares / demi-regulares / irregulares; periódicas e aperiódicas).
- A noção de grupo de simetria de uma pavimentação.



## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

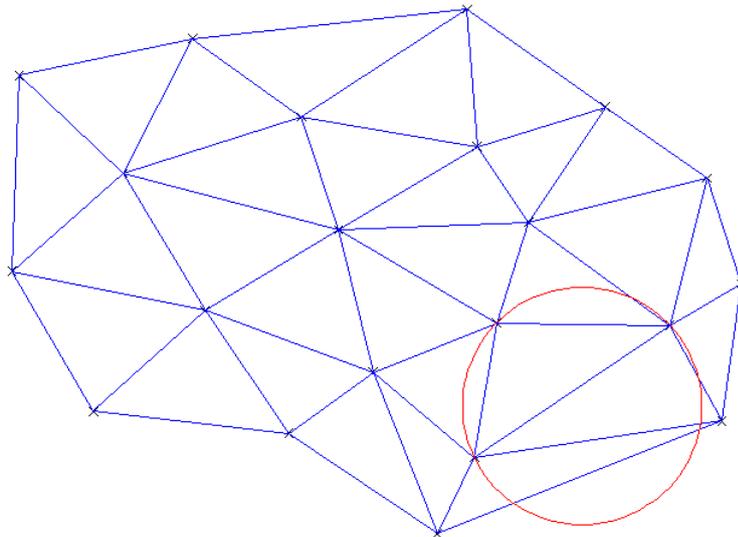
Tomemos como ponto de partida uma conjunto de pontos aleatoriamente distribuídos no plano.





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

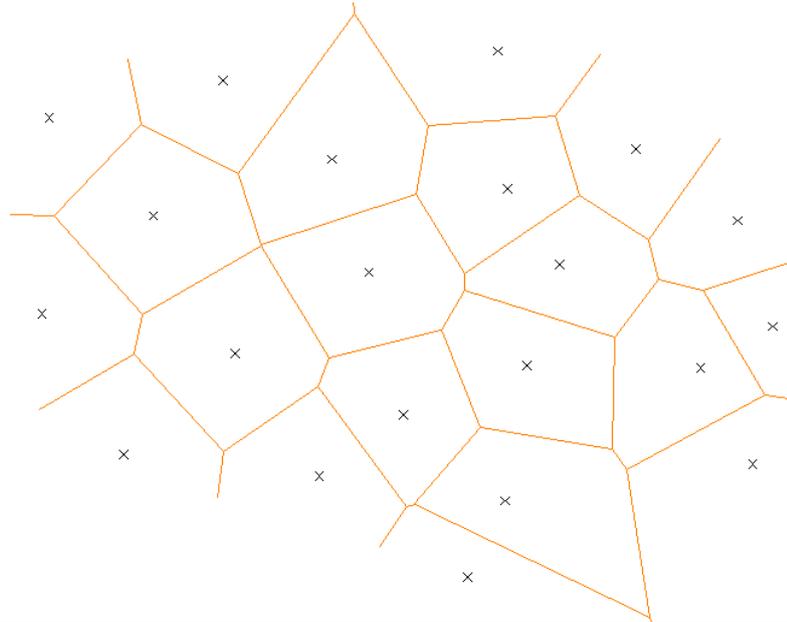
Estes pontos podem ser unidos definindo uma triangulação especial que se designa por TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY. Esta triangulação é feita de modo a que o círculo conduzido pelos 3 vértices de qualquer triângulo da grelha não contenha outro ponto.





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

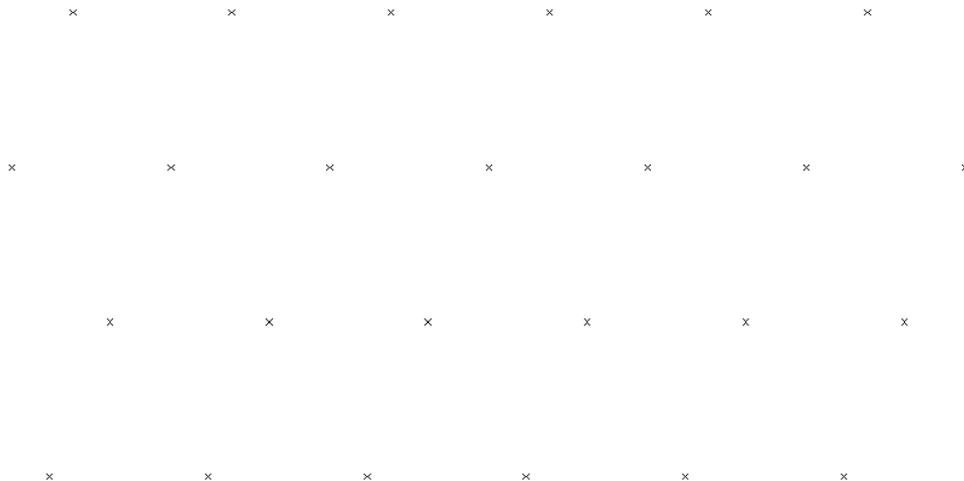
A partir da triangulação de DELAUNAY é possível efectuar outra tesselação do plano que se designa por tesselação de DIRICHLET, ou por tesselação de VORONOI. Esta é feita dividindo o plano nas regiões que estão mais próximas de cada ponto que de qualquer outro ponto da grelha.





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

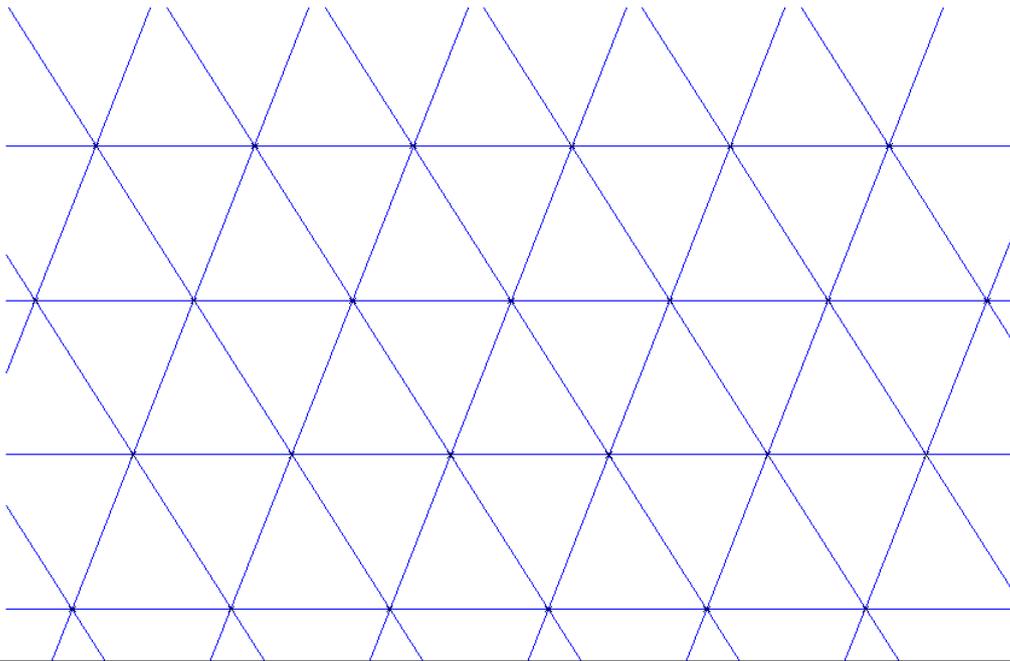
Se os pontos estiverem distribuídos de forma regular pelo plano então...





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

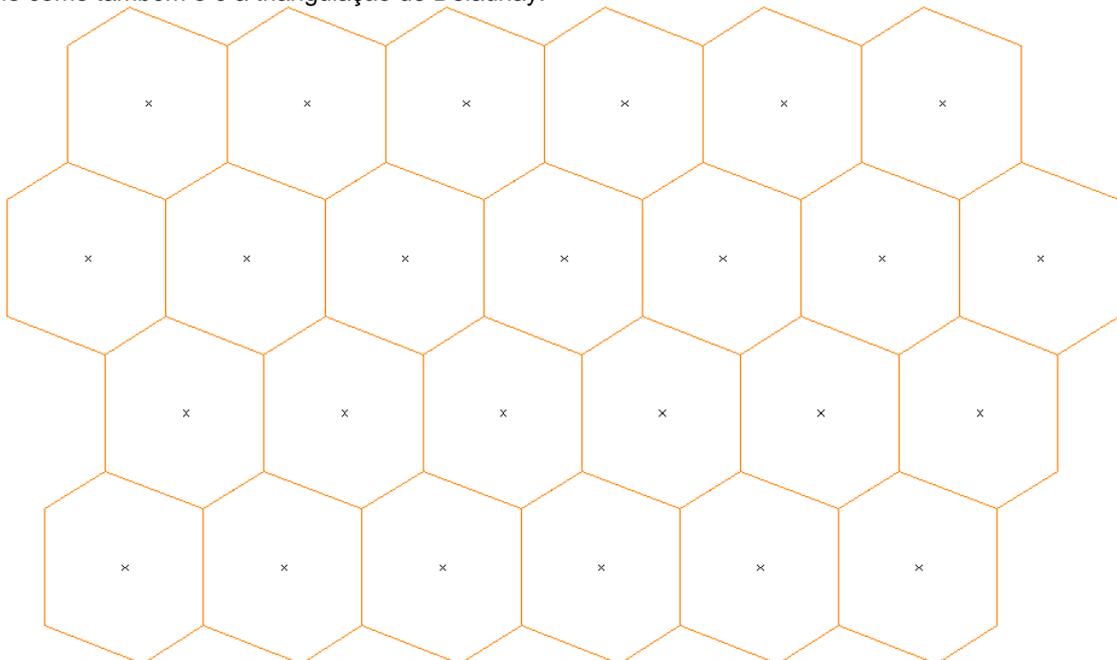
...a triangulação de Delaunay tem também um aspecto regular...





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

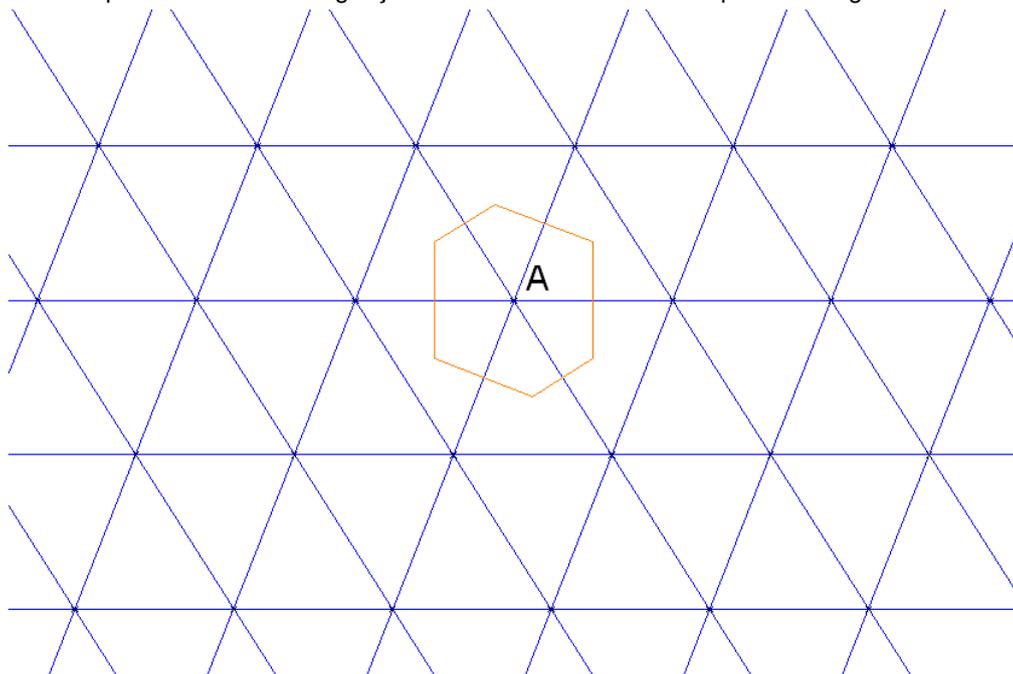
...assim como a tesselação de Dirichlet. Esta tesselação corresponde já a uma possível pavimentação do plano como também o é a triangulação de Delaunay.





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

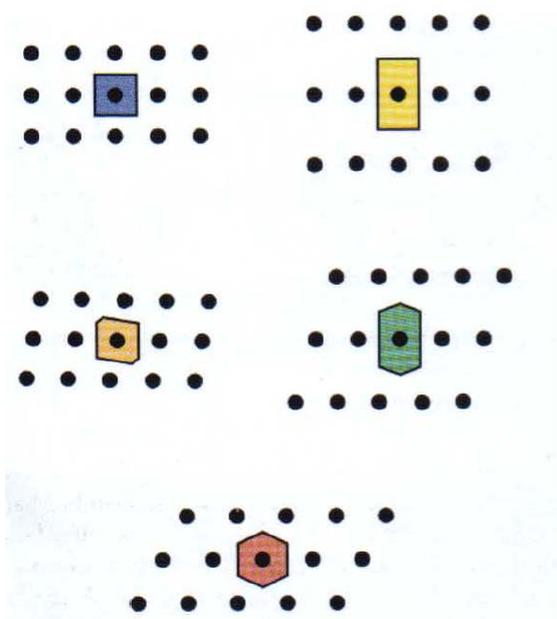
À tessela de um ponto A dá-se a designação de domínio de Dirichlet do ponto A da grelha.





## >> PAVIMENTAÇÕES: Domínio de Dirichlet de uma grelha plana

Existem 5 tipos distintos de domínios de Dirichlet para grelhas planas regulares.



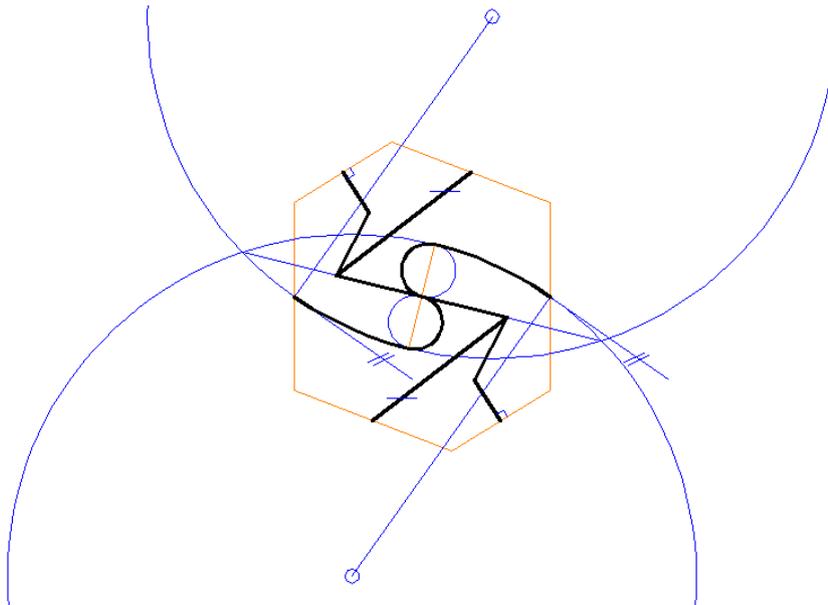
As cinco espécies distintas de domínios Dirichlet para uma grade bidimensional.

In  
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



## >> PAVIMENTAÇÕES: construção de um padrão de pavimentação

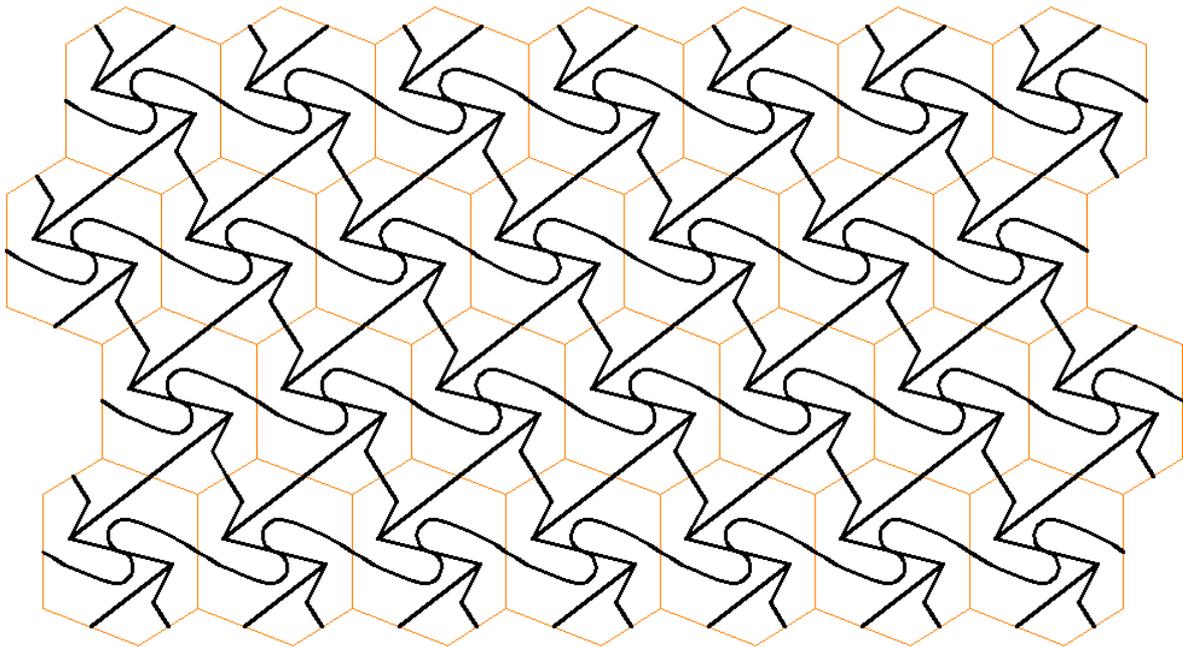
A ideia base subjacente à construção de um padrão para uma pavimentação do plano corresponde ao preenchimento de um domínio de Dirichlet ...





## >> PAVIMENTAÇÕES: construção de um padrão de pavimentação

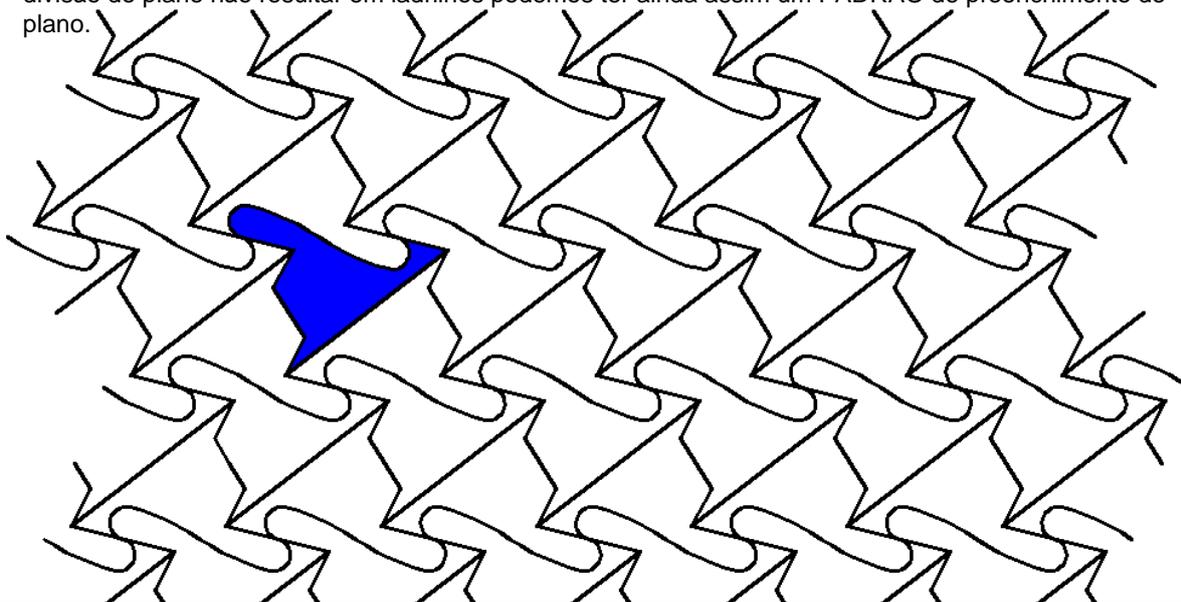
...e sua replicação por todos os pontos da grelha.





>> PAVIMENTAÇÕES: pavimentações monoédricas e não monoédricas.

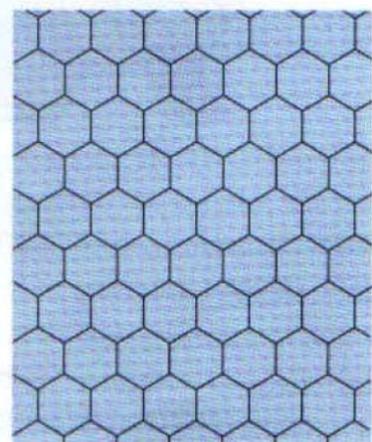
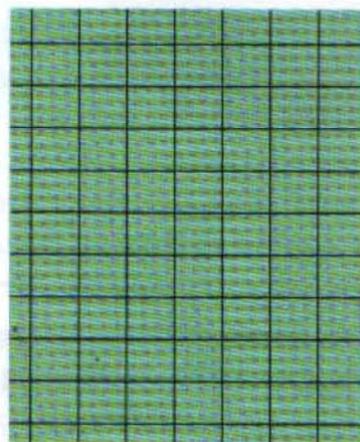
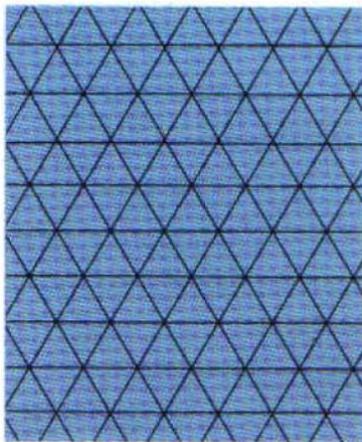
Desta operação pode ser possível isolar uma ou mais áreas fechadas que se repetem. Cada uma destas áreas designa-se por TESSELA ou LADRILHO. Se a pavimentação resultar do arranjo de apenas um tipo de ladrilho diz-se MONOÉDRICA. Se resultar de mais que um tipo de ladrilho diz-se NÃO MONOÉDRICA. Se a divisão do plano não resultar em ladrilhos podemos ter ainda assim um PADRÃO de preenchimento do plano.





## >> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com um tipo de polígono regular. Existem 3 tipos de polígonos regulares que podem pavimentar o plano: o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular. Os vértices não podem incidir no meio de lados.

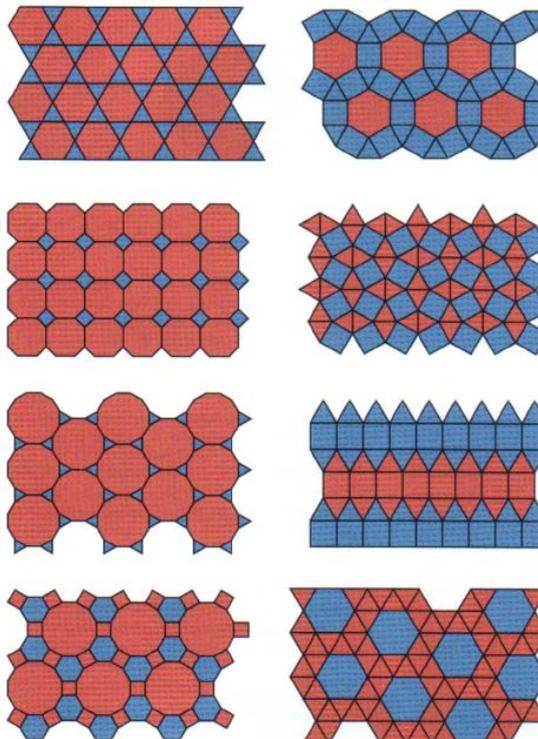


In  
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



## >> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO SEMI-REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com polígonos regulares de tal modo que nos vértices concorram sempre os mesmo tipo de lados, isto é, de modo a que os vértices sejam todos do mesmo tipo. Existem oito tipos diferentes de pavimentações semi-regulares.



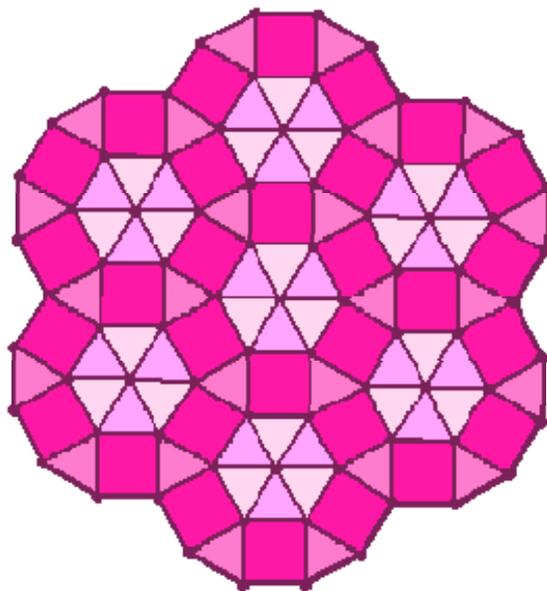
In  
DEVLIN K.:Matemática – a ciência dos padrões.



## >> PAVIMENTAÇÕES: regulares, semi-regulares, demi-regulares e irregulares

Uma PAVIMENTAÇÃO DEMI-REGULAR do plano é aquela que pode ser construída apenas com polígonos regulares sendo os vértices de diferentes tipos.

Diz-se PAVIMENTAÇÃO IRREGULAR aquela que não é regular, semi-regular ou demi-regular.



In  
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/tiposdepavimentacao1.htm>

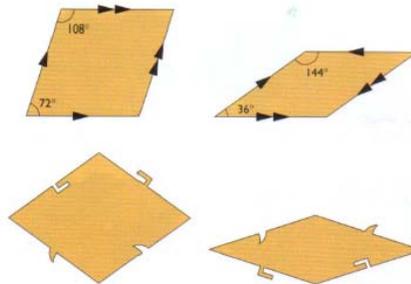


## >> PAVIMENTAÇÕES: periódicas e aperiódicas

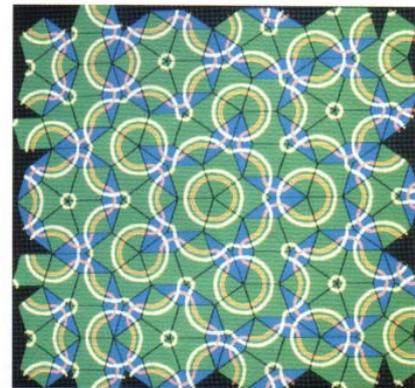
Uma pavimentação diz-se PERIÓDICA se for possível fazê-la coincidir consigo própria aplicando transformações de translação em mais que uma direcção. É o caso da generalidade das figuras que apresentámos até agora.

Uma pavimentação diz-se APERIÓDICA se não for periódica. Na figura do lado apresenta-se a pavimentação aperiódica de Penrose.

In  
DEVLIN K.: Matemática – a ciência dos padrões.



As pavimentações de Penrose: encaixando as duas figuras superiores de tal maneira que haja coordenação das direcções das setas nos pontos de junção, é possível pavimentar o plano, mas apenas de uma forma aperiódica. A introdução de cunhas e de cortes nas figuras, como se vê nas duas figuras em baixo, forma polígonos que irão pavimentar o plano, mas apenas de forma aperiódica, sem haver necessidade de qualquer restrição no alinhamento das figuras.



Parte de uma pavimentação (aperiódica) de Penrose a cobrir o plano, vendo-se a simetria quintuplicada do local da pavimentação.



## >> PAVIMENTAÇÕES: noção de grupo de simetria de uma pavimentação

Uma forma de analisar uma pavimentação é através da noção de GRUPO DE SIMETRIA. Um grupo de simetria de uma pavimentação é o conjunto das transformações geométricas (rotações de  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $60^\circ$ , translações, reflexões, e reflexões deslizantes) que deixa a pavimentação invariante. Isto é aplicando cada uma das transformações do grupo à pavimentação, esta acaba por coincidir consigo própria. Existem 17 grupos de simetria (ver [http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group) e [http://homepage.mac.com/eduardo.veloso/novohome/curso04\\_2003/paginas/17padroes.html](http://homepage.mac.com/eduardo.veloso/novohome/curso04_2003/paginas/17padroes.html))

Com efeito, pavimentações aparentemente muito diversas podem na verdade ser do mesmo tipo, isto é, podem pertencer ao mesmo grupo de simetria e permanecer invariáveis quando sujeitas ao mesmo tipo de transformações. Todas as pavimentações dos 17 grupos de simetria são periódicas.

À partida nós nunca colocaremos a questão de produzir uma pavimentação que seja deste ou daquele grupo. Pode no entanto ser interessante como exercício, para uma dada pavimentação, identificar transformações que a deixam invariante. Que transformações deixam as pavimentações abaixo invariantes?

