



GDC I – AULA TEÓRICA 12

Estudo das superfícies:

- Superfícies regradas não planificáveis (empenadas).
- Superfícies regradas não planificáveis (empenadas) – planos tangentes e concordâncias.



Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ			exemplos
REGRADAS	PLANIFICÁVEIS	SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS	poliedros regulares, semi-regulares e irregulares
		SUPERFÍCIE PLANA	plano
		definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ	cônica; cilíndrica; prismática; piramidal ⁽¹⁾
		definidas por 2 DIRECTRIZES	convolutas; superfícies de igual pendente
		SUPERFÍCIES TANGENCIAIS	helicoidal tangencial
REGRADAS	NÃO PLANIFICÁVEIS	definidas por 3 DIRECTRIZES	parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado ⁽¹⁾
		outras	superfície regradada de uma só face
		SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO ⁽²⁾	esférica; torca; elipsoidal
CURVAS		outras	serpentina; superfícies mínimas

⁽¹⁾ Note-se que há superfícies regradadas que são de revolução

⁽²⁾ Note-se que há superfícies de revolução que são regradadas.



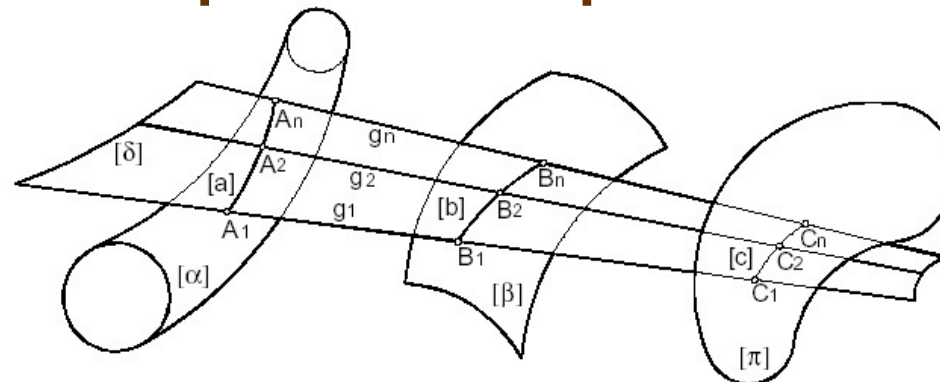
Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)

Uma superfície regradada não é planificável se duas geratrizes infinitamente próximas não se intersectarem. Esta condição é em geral cumprida quando a superfície é definida por três directrizes quaisquer. Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regradada ou em que esta degenera numa superfície planificável.



Estudo das Superfícies - superfícies empenadas



A condição que se impõe para que as rectas g_1, g_2, g_n definam uma superfície regrada $[\delta]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[\delta]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[\alpha], [\beta]$ e $[\pi]$ segundo linhas $[a], [b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas g_1, g_2, g_n designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfícies directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.



Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

Se a superfície $[\delta]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n , então diz-se que é SIMPLEMENTE REGRADA.

Se a superfície $[\delta]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n e j_1, j_2, j_n , então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas às geratrizes d_1, d_2, d_n de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.



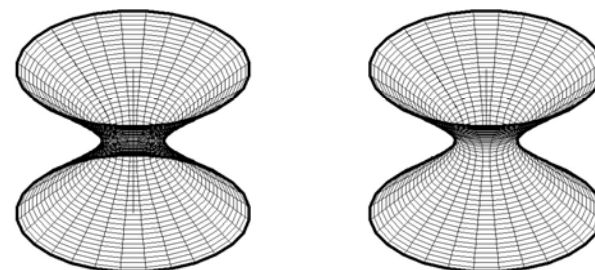
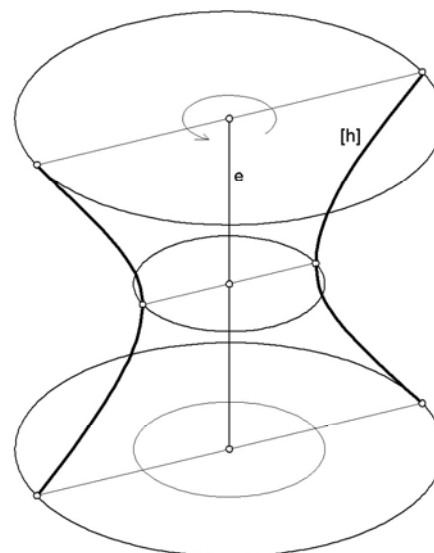
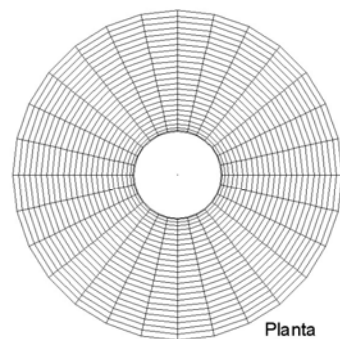
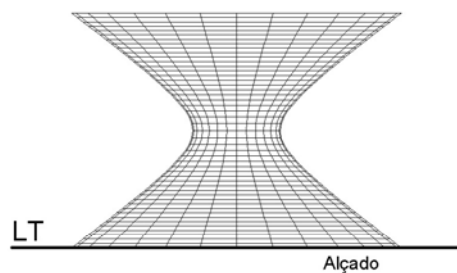
Estudo das Superfícies - superfícies empenadas

TIPO	DIRECTRIZES	exemplos
ORDINÁRIA	R R R	Hiperbolóide escaleno; Hiperbolóide de revolução de uma folha
	R R C	
	R C C	Superfícies de arco enviesado (corno de vaca; arriere-vousure)
	C C C	
	R R S	
	R C S	
	C C S	
	R S S	
	C S S	
	S S S	
DE PLANO DIRECTOR	R_{∞} R R	Parabolóide hiperbólico
	R_{∞} R C	Superfícies de conóide; Superfícies helicoidais
	R_{∞} C C	Superfícies de cilindróide
	R_{∞} R S	Superfícies de conóide com um núcleo
	R_{∞} C S	Superfícies de cilindróide com um núcleo; Superfícies helicoidais com núcleo
	R_{∞} S S	Superfícies de cilindróide com dois núcleos
DE CONE DIRECTOR	C_{∞} R R	Tetraedróide
	C_{∞} C R	Superfícies helicoidais
	C_{∞} C C	
	C_{∞} R S	
	C_{∞} C S	Superfícies helicoidais com núcleo
	C_{∞} S S	

SUPERFÍCIES REGRADAS EMPENADAS DEFINIDAS POR 3 DIRECTRIZES
 (linhas e/ou superfícies)
 R (recta) ; C (curva) ; S (superfície) ; R_{∞} (recta imprópria) ; C_{∞} (curva imprópria)



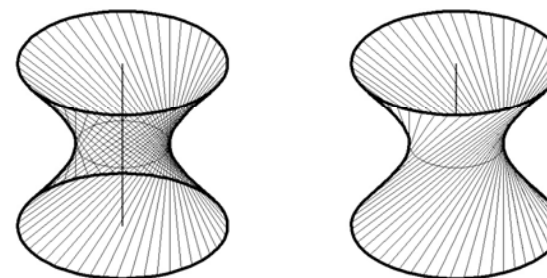
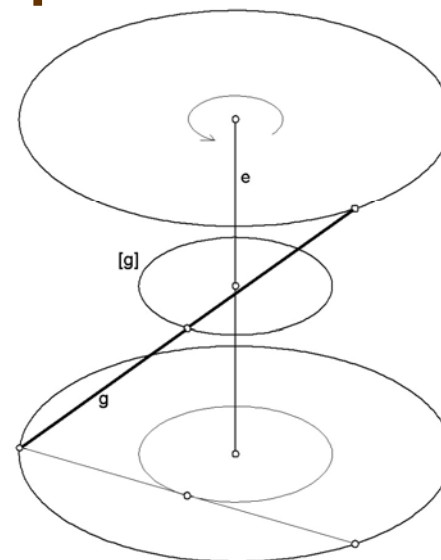
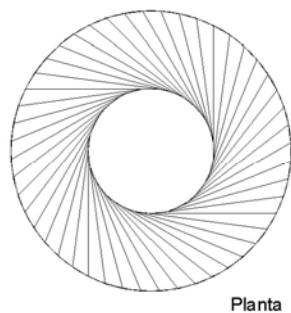
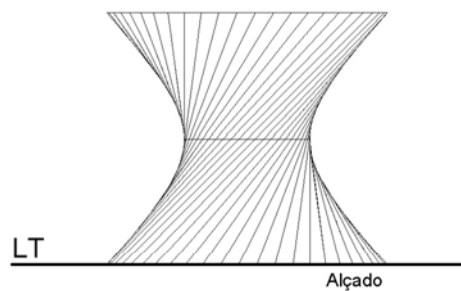
Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR ROTAÇÃO DA HIPÉRBOLE EM TORNO DO SEU EIXO TRANSVERSO



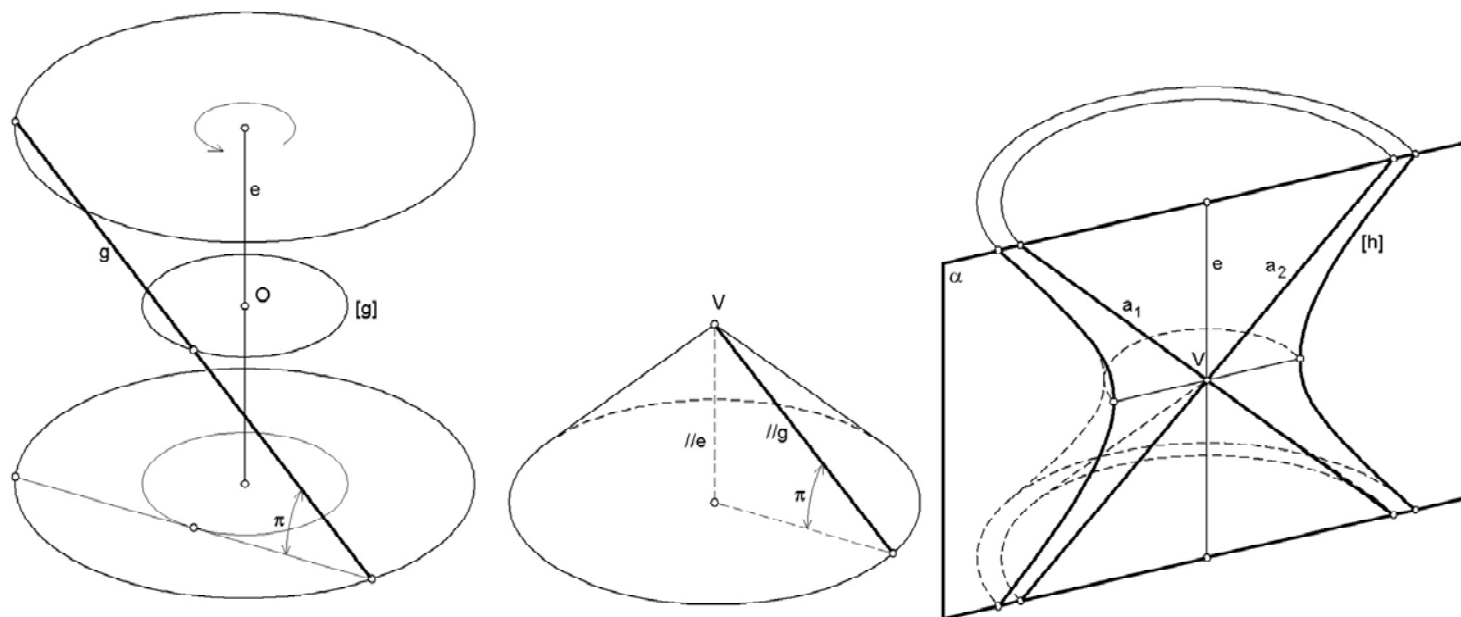
Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR ROTAÇÃO DE UMA RECTA



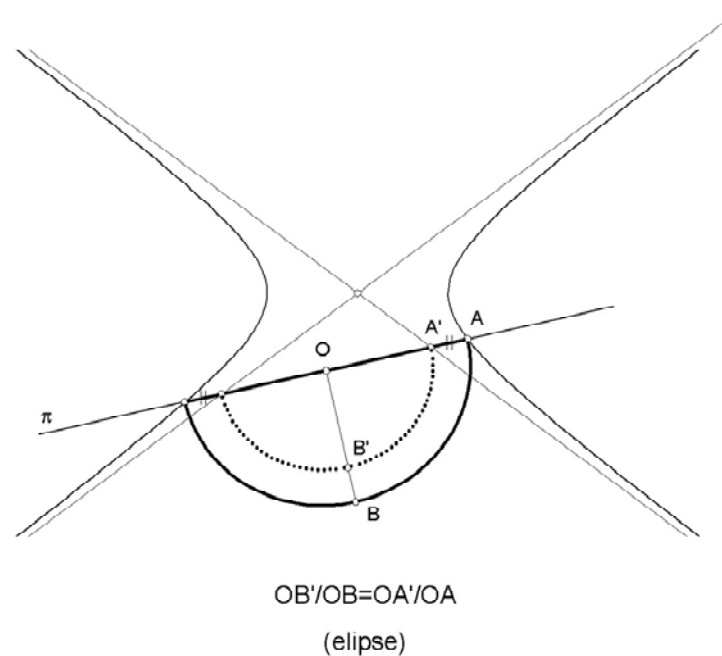
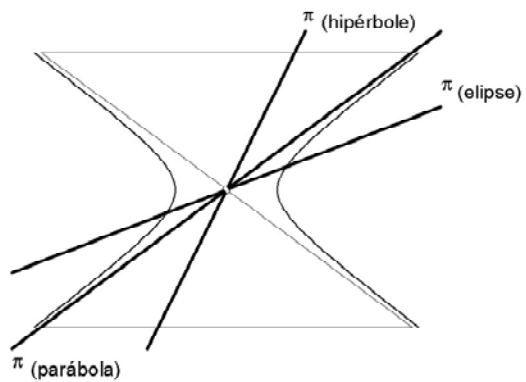
Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



CONE DIRECTOR / CONE ASSINTÓTICO / SECÇÕES HIPERBÓLICAS PRINCIPAIS



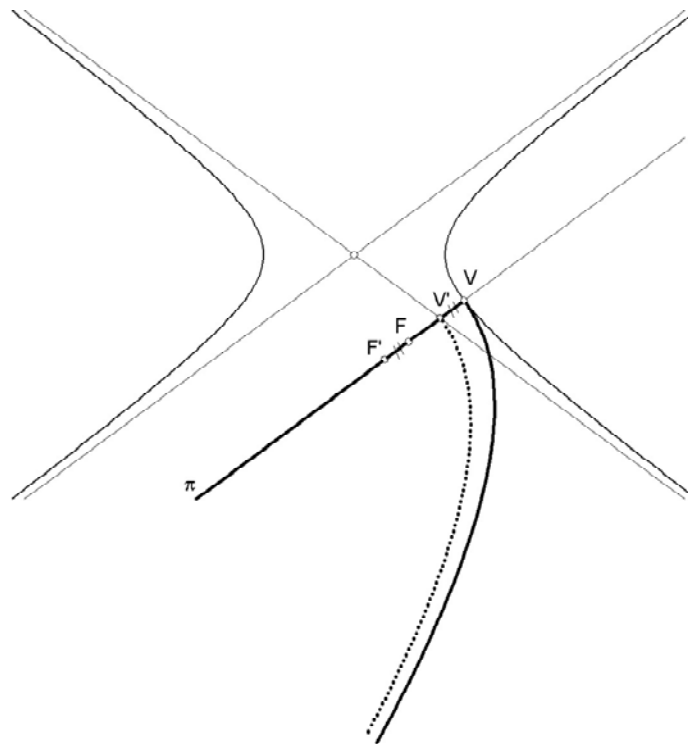
Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



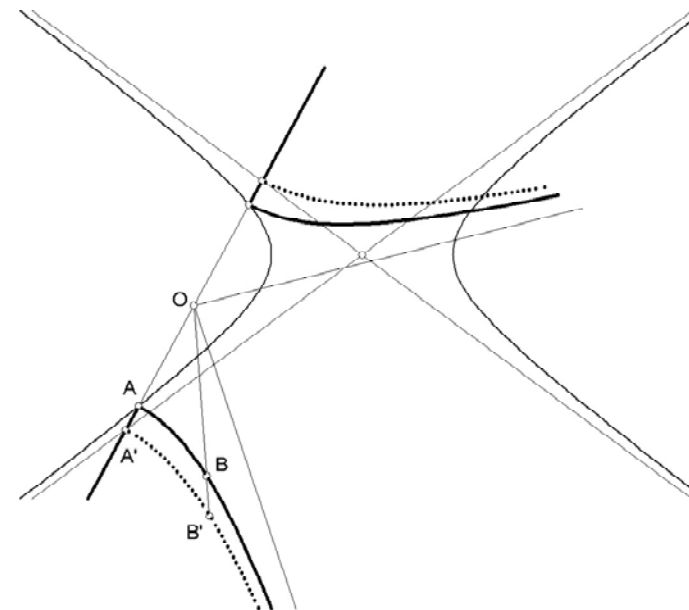
INTERSECÇÕES PLANAS



Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



(parábola)



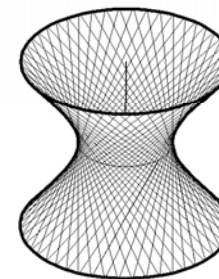
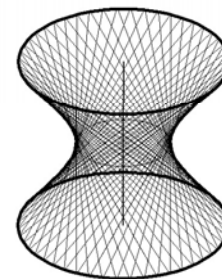
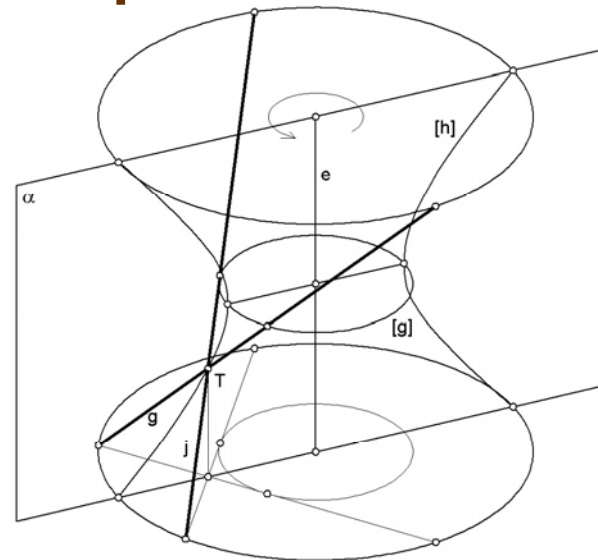
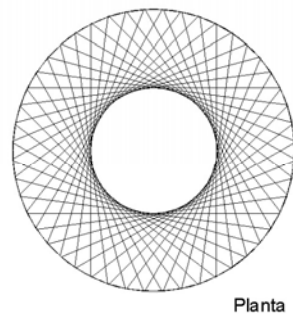
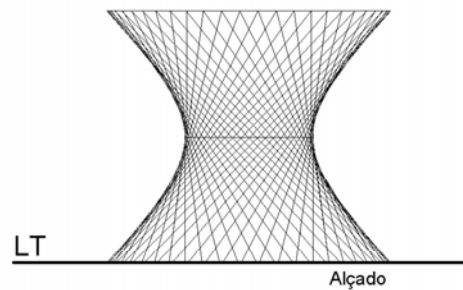
$$OB'/OB=OA'/OA$$

(hipérbole)

INTERSECÇÕES PLANAS



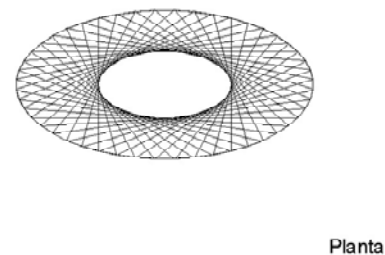
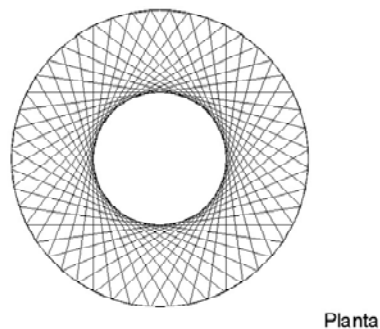
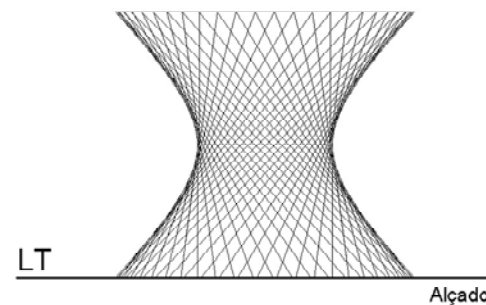
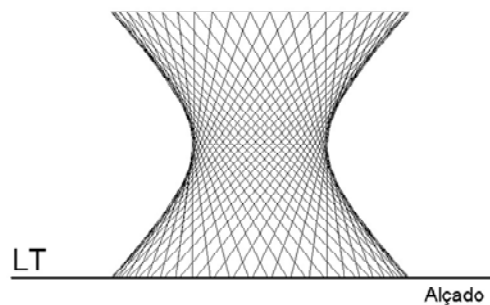
Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução



DOIS SISTEMAS DE GERATRIZES RECTAS



Estudo das Superfícies - hiperbolóide de revolução

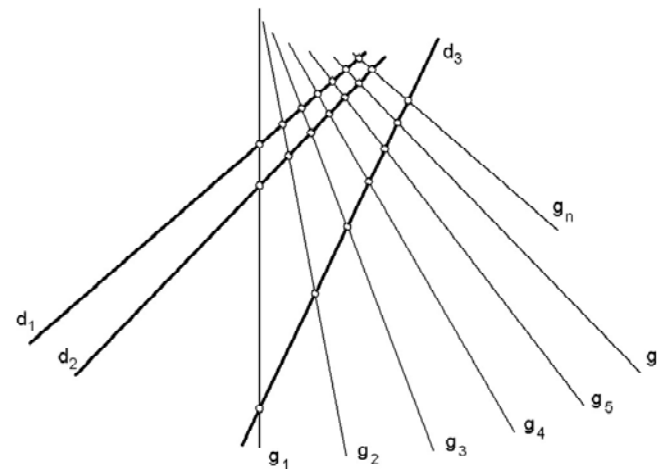
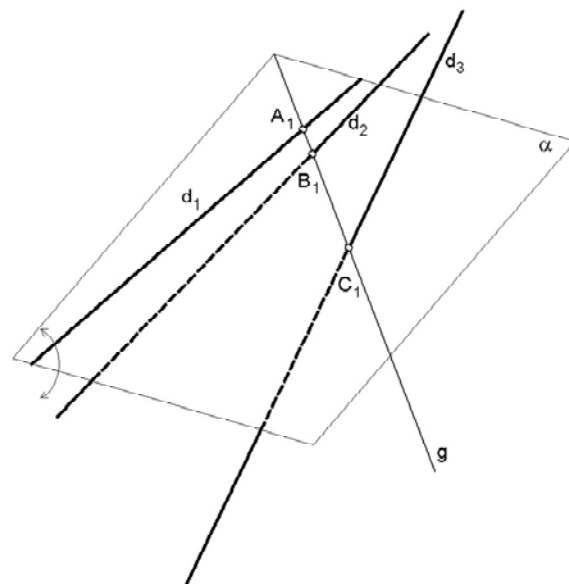


HIPERBOLÓIDE REGRADO DE REVOLUÇÃO

HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO



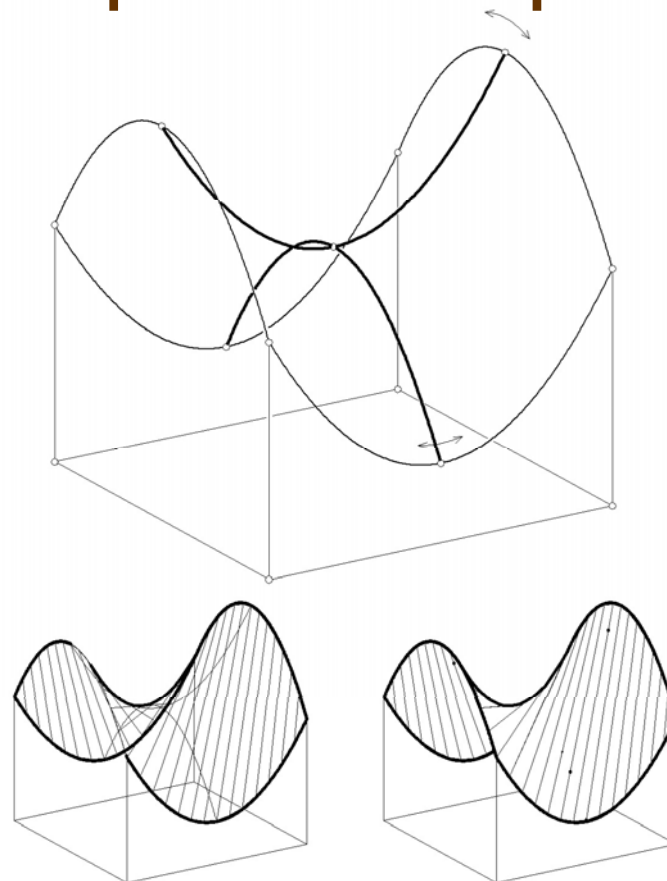
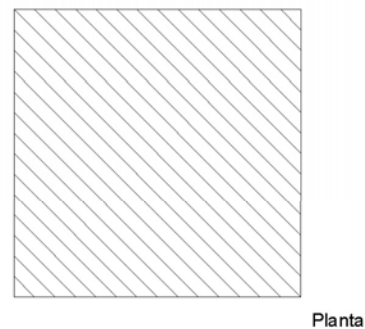
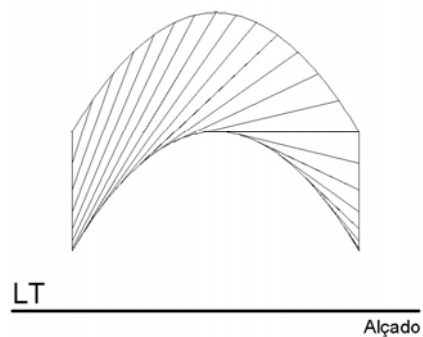
Estudo das Superfícies - hiperbolóide escaleno



DEFINIÇÃO DO HIPERBOLÓIDE REGRADO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS



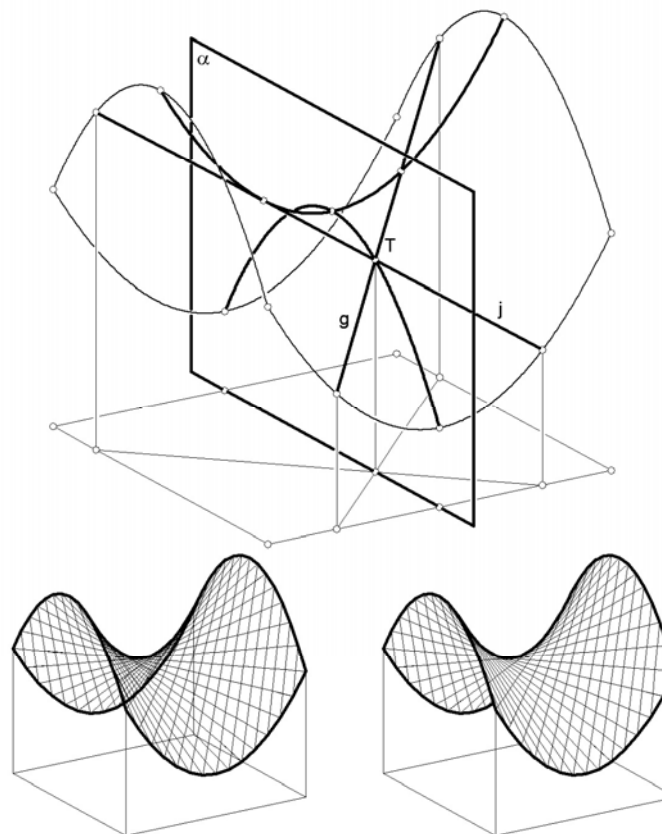
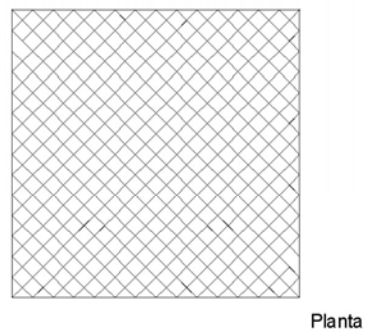
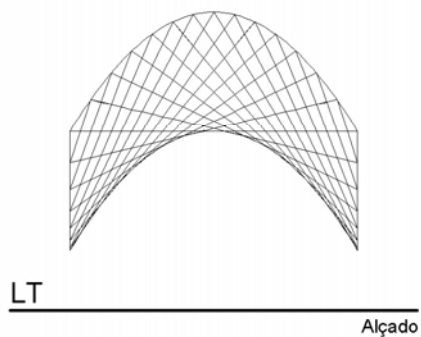
Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



GERAÇÃO DA SUPERFÍCIE POR MOVIMENTO DE UMA PARÁBOLA APOIADA NOUTRA PARÁBOLA



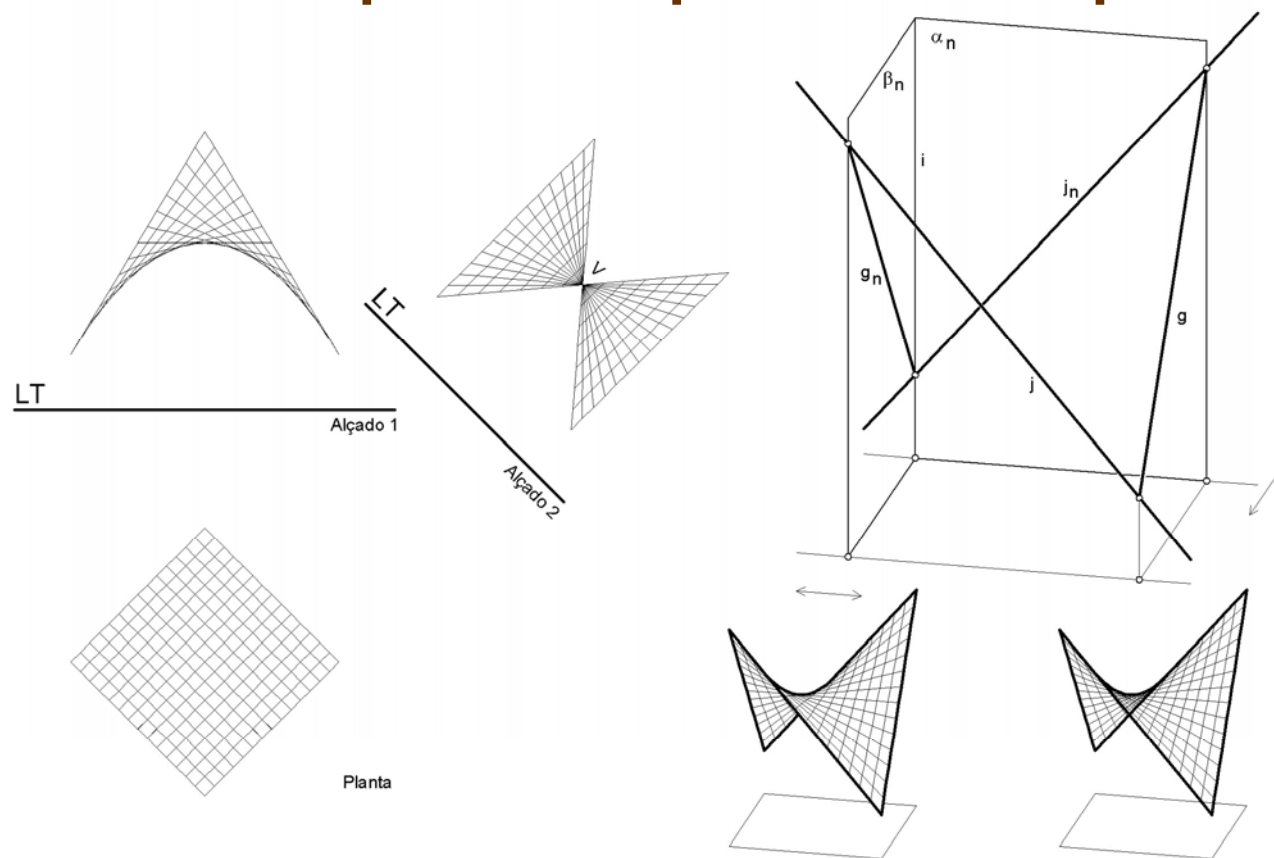
Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



DOIS SISTEMAS DE GERATRIZES RECTAS



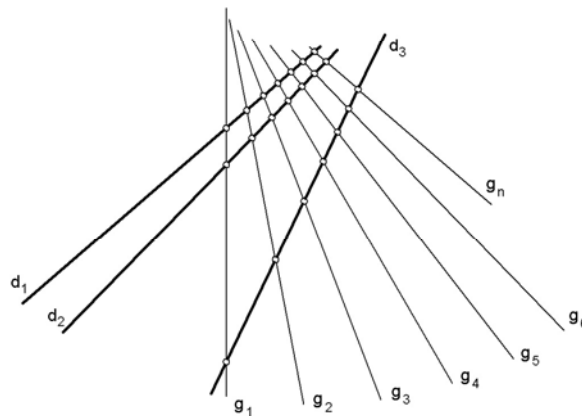
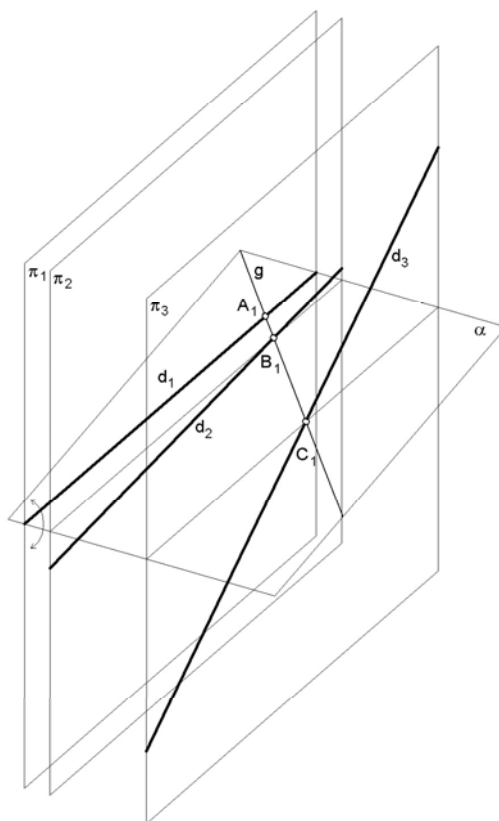
Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



GERAÇÃO POR RECTAS / PLANOS DIRECTORES / PONTO DE DIVERGÊNCIA



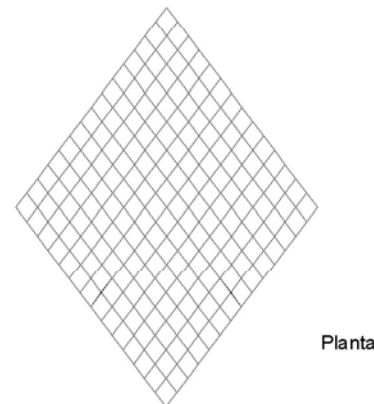
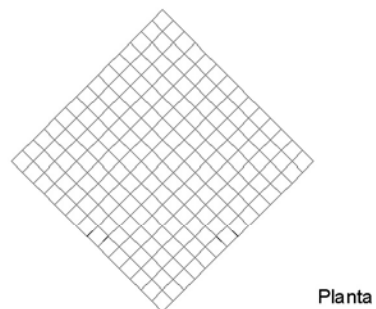
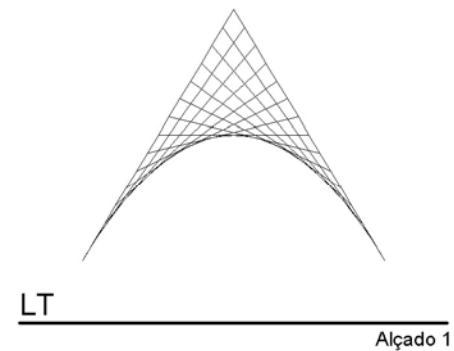
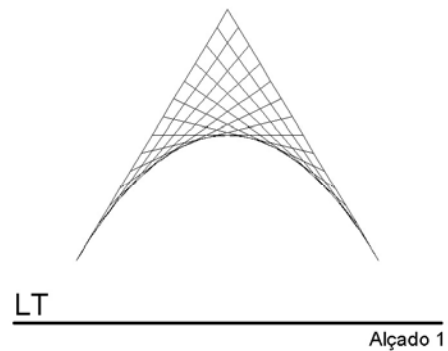
Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



DEFINIÇÃO DO PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO POR TRÊS RECTAS ENVIESADAS



Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico



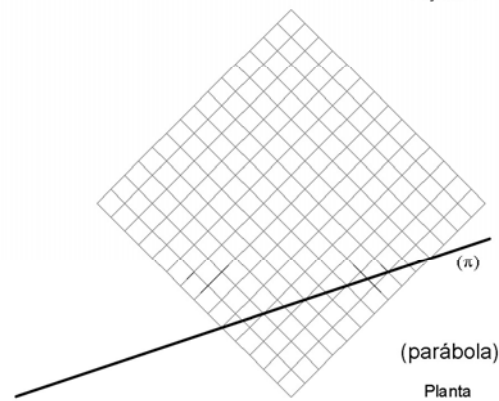
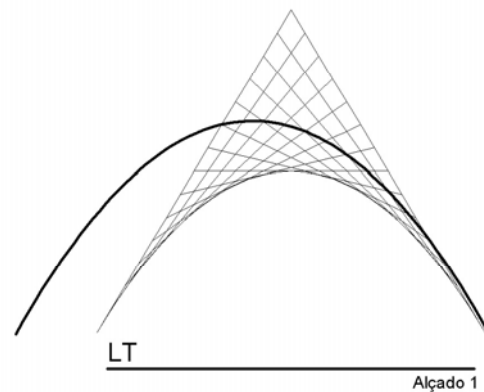
PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ISÓSCELES

PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO ESCALENO

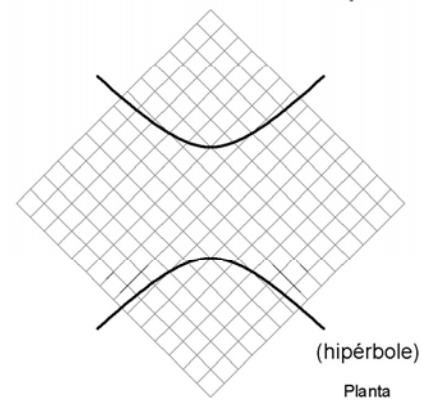
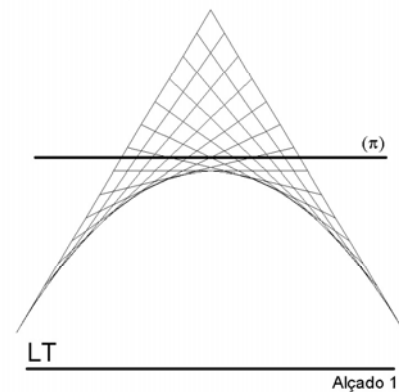


Estudo das Superfícies - parabolóide hiperbólico

planos paralelos à direcção comum
aos dois planos directores



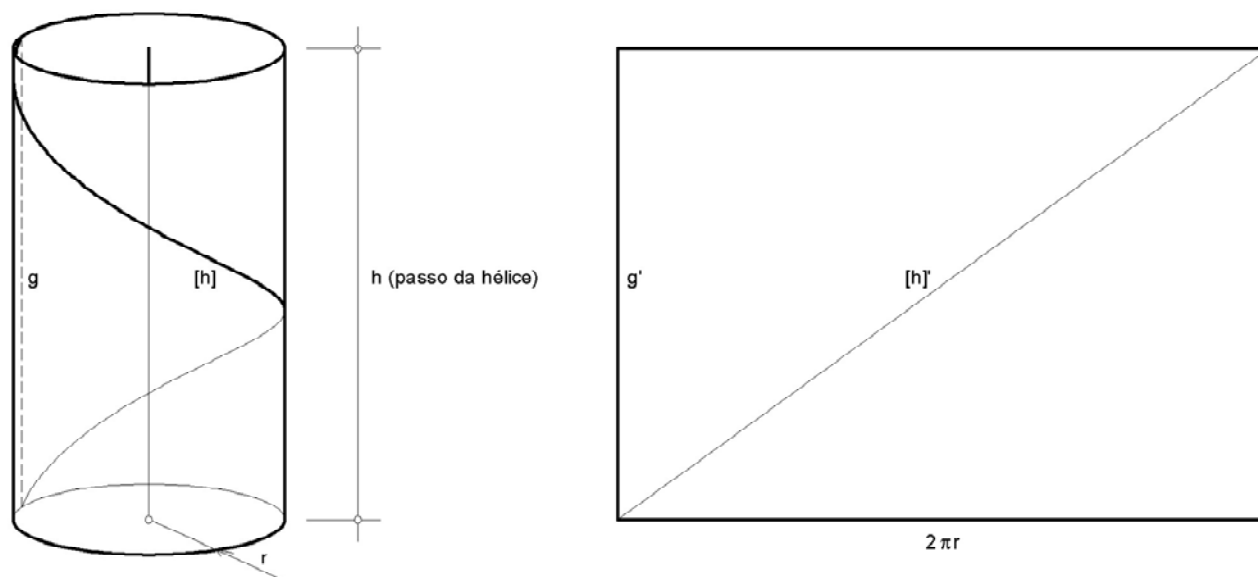
planos não paralelos à direcção comum
aos dois planos directores



INTERSECÇÕES PLANAS



Estudo das Superfícies - helicoidais empenados



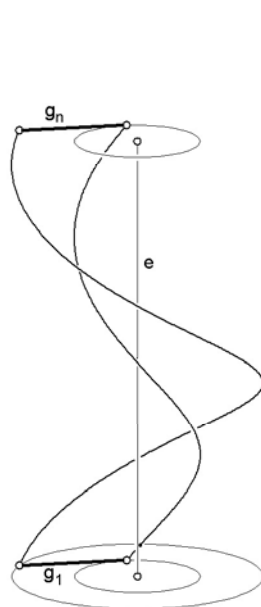
HÉLICE CILÍNDRICA



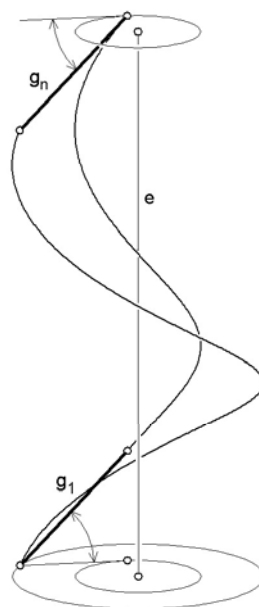
Estudo das Superfícies - helicoidais empenados

COM NÚCLEO CILÍNDRICO

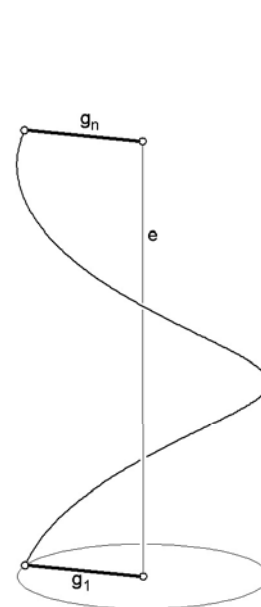
SEM NÚCLEO CILÍNDRICO



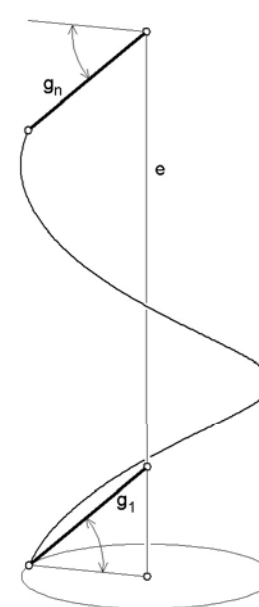
PLANO DIRECTOR



CONE DIRECTOR



PLANO DIRECTOR



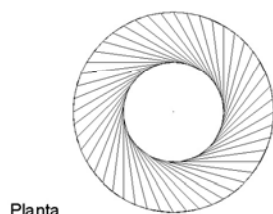
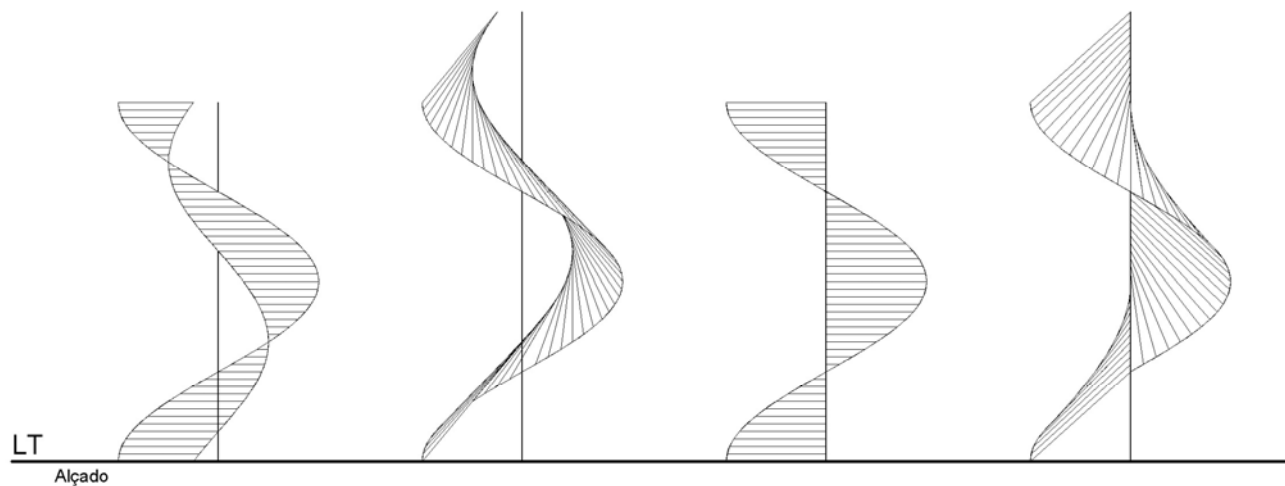
CONE DIRECTOR



Estudo das Superfícies - helicoidais empenados

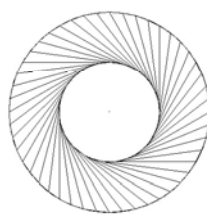
COM NÚCLEO CILÍNDRICO

SEM NÚCLEO CILÍNDRICO

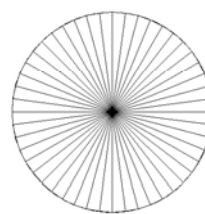


Planta

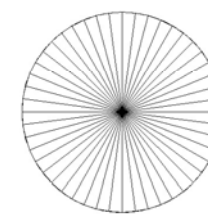
PLANO DIRECTOR



CONE DIRECTOR



PLANO DIRECTOR



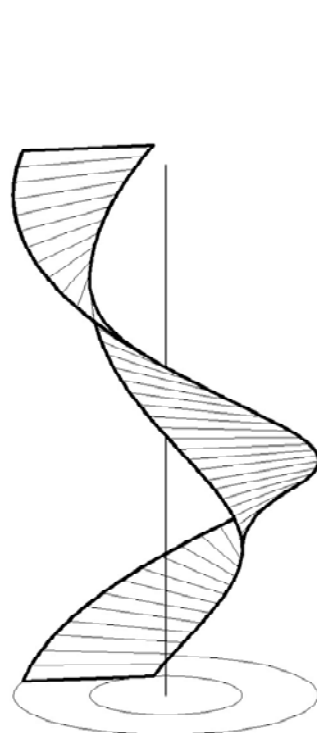
CONE DIRECTOR



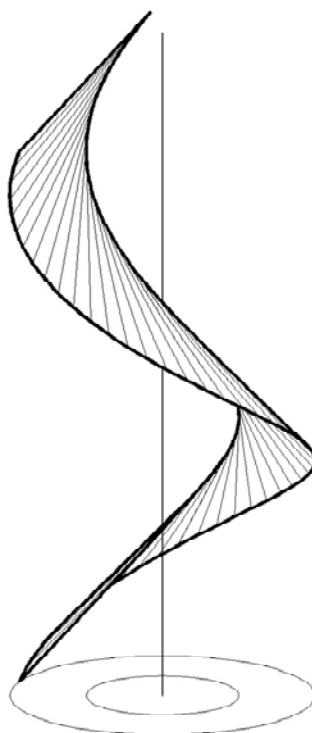
Estudo das Superfícies - helicoidais empenados

COM NÚCLEO CILÍNDRICO

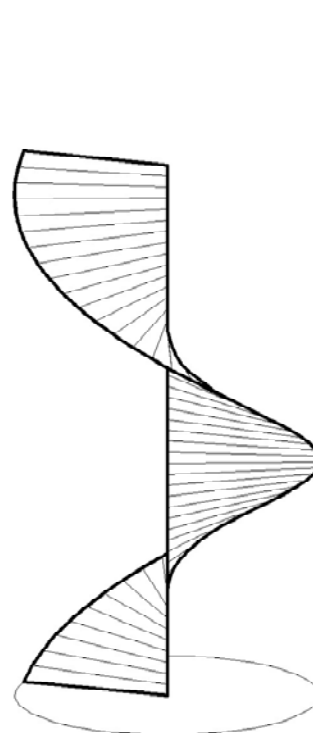
SEM NÚCLEO CILÍNDRICO



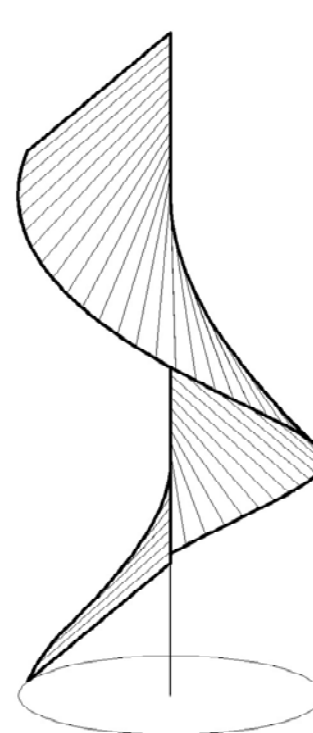
PLANO DIRECTOR



CONE DIRECTOR



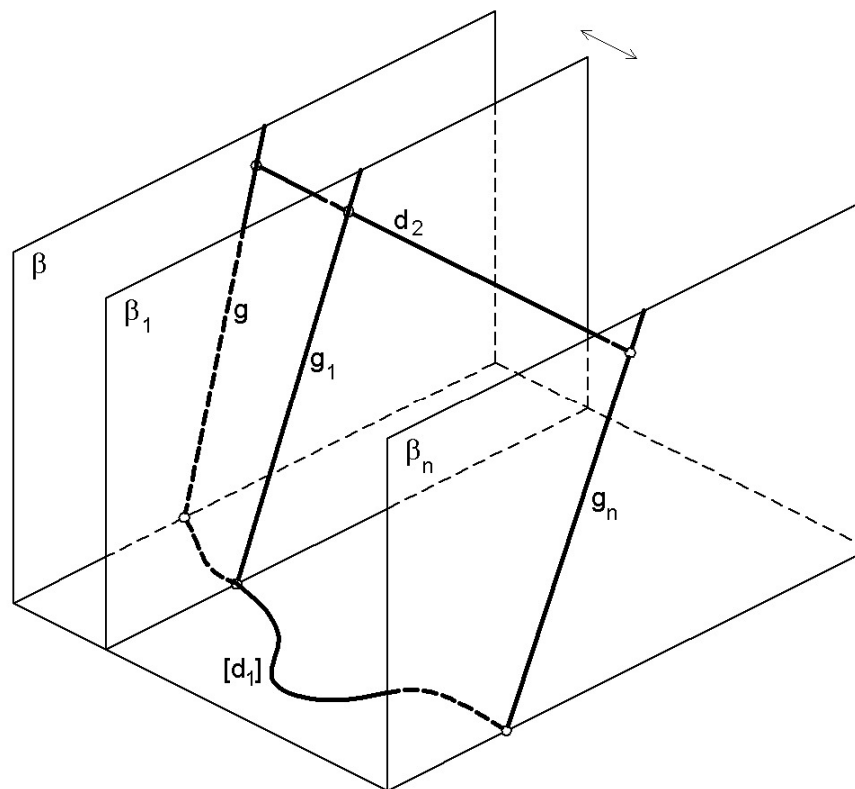
PLANO DIRECTOR



CONE DIRECTOR

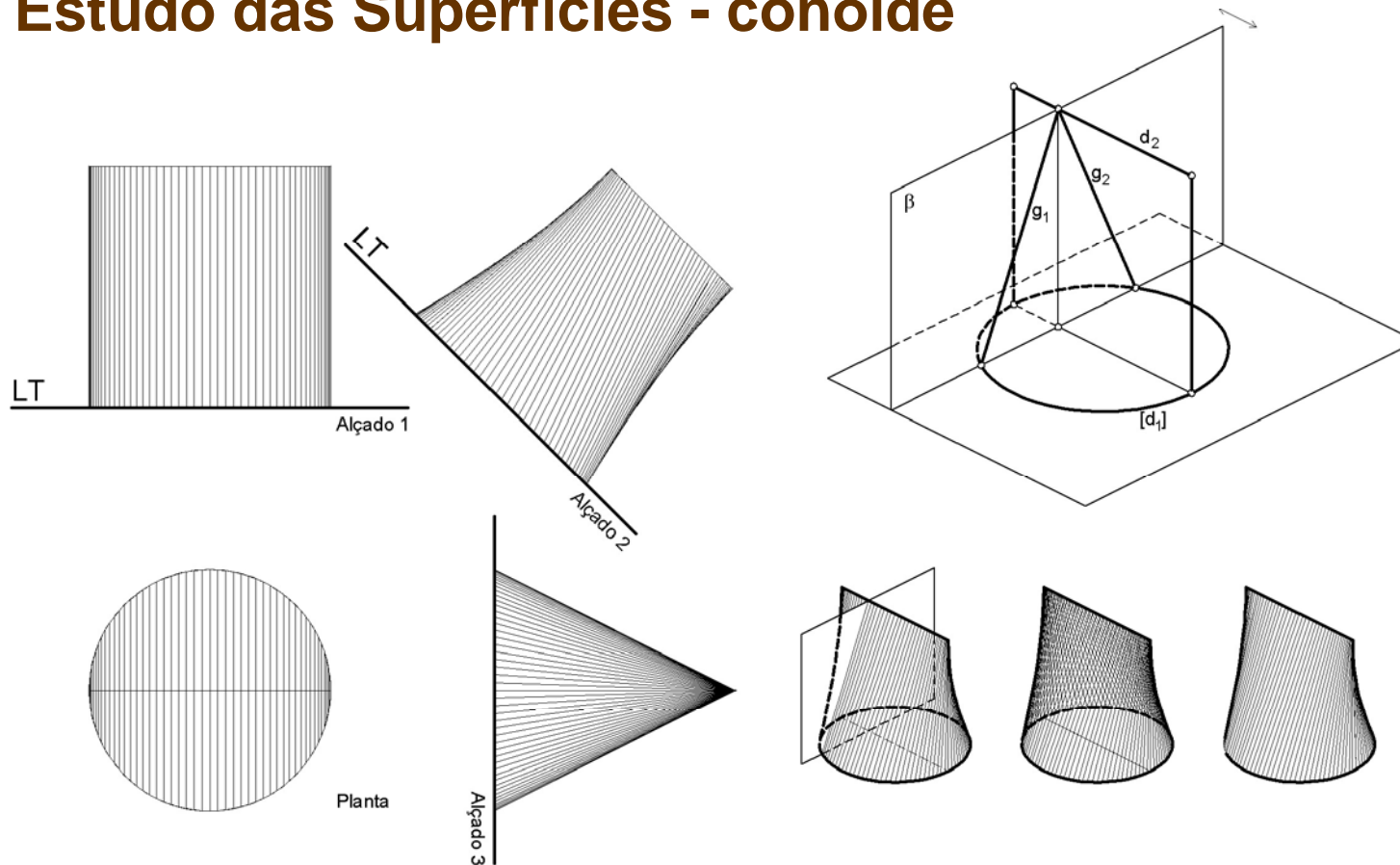


Estudo das Superfícies - conóide





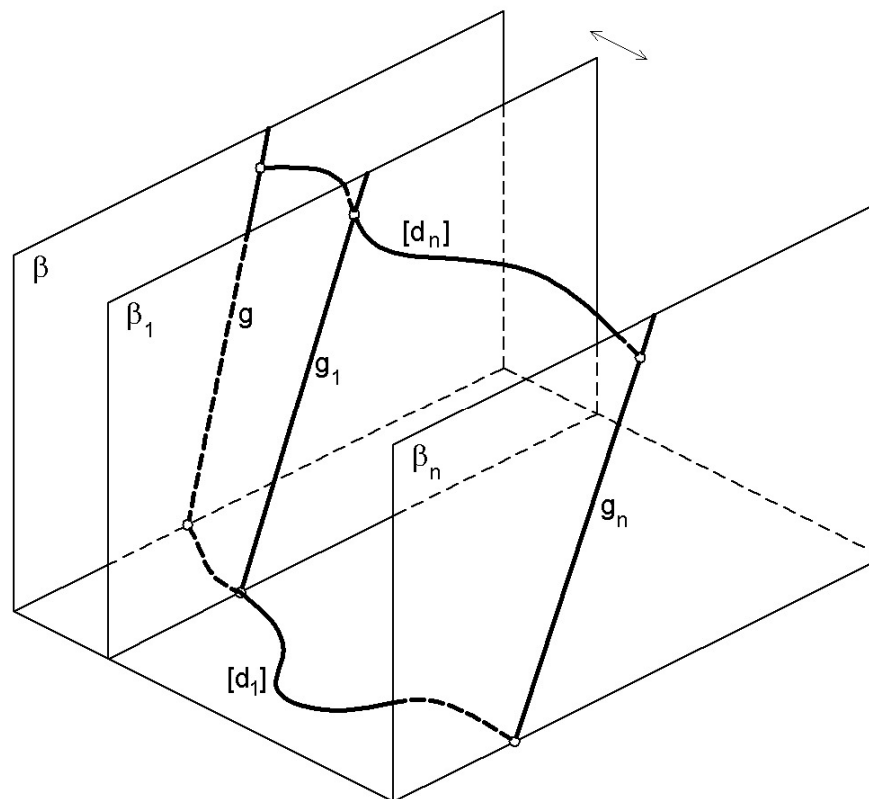
Estudo das Superfícies - conóide



SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL

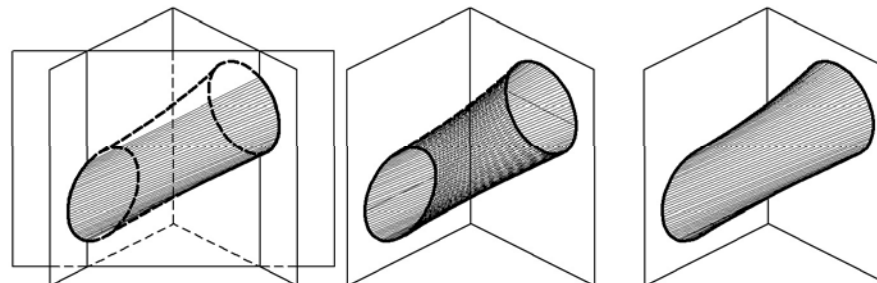
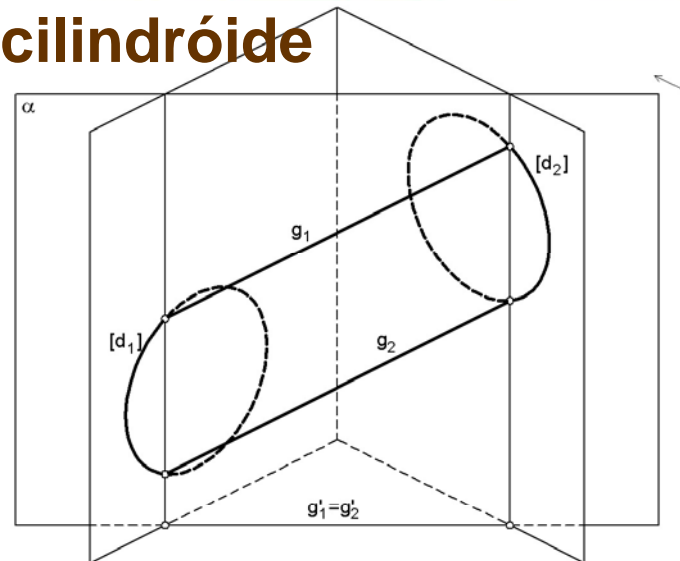
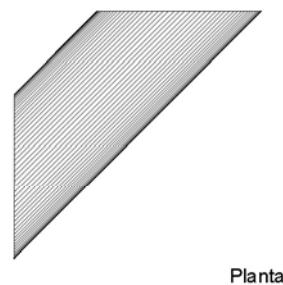
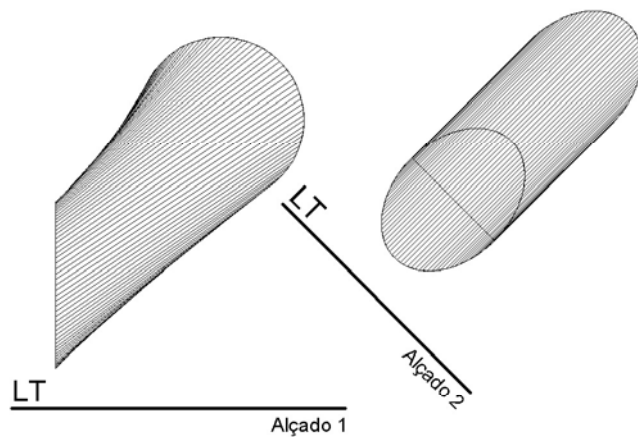


Estudo das Superfícies - cilindróide





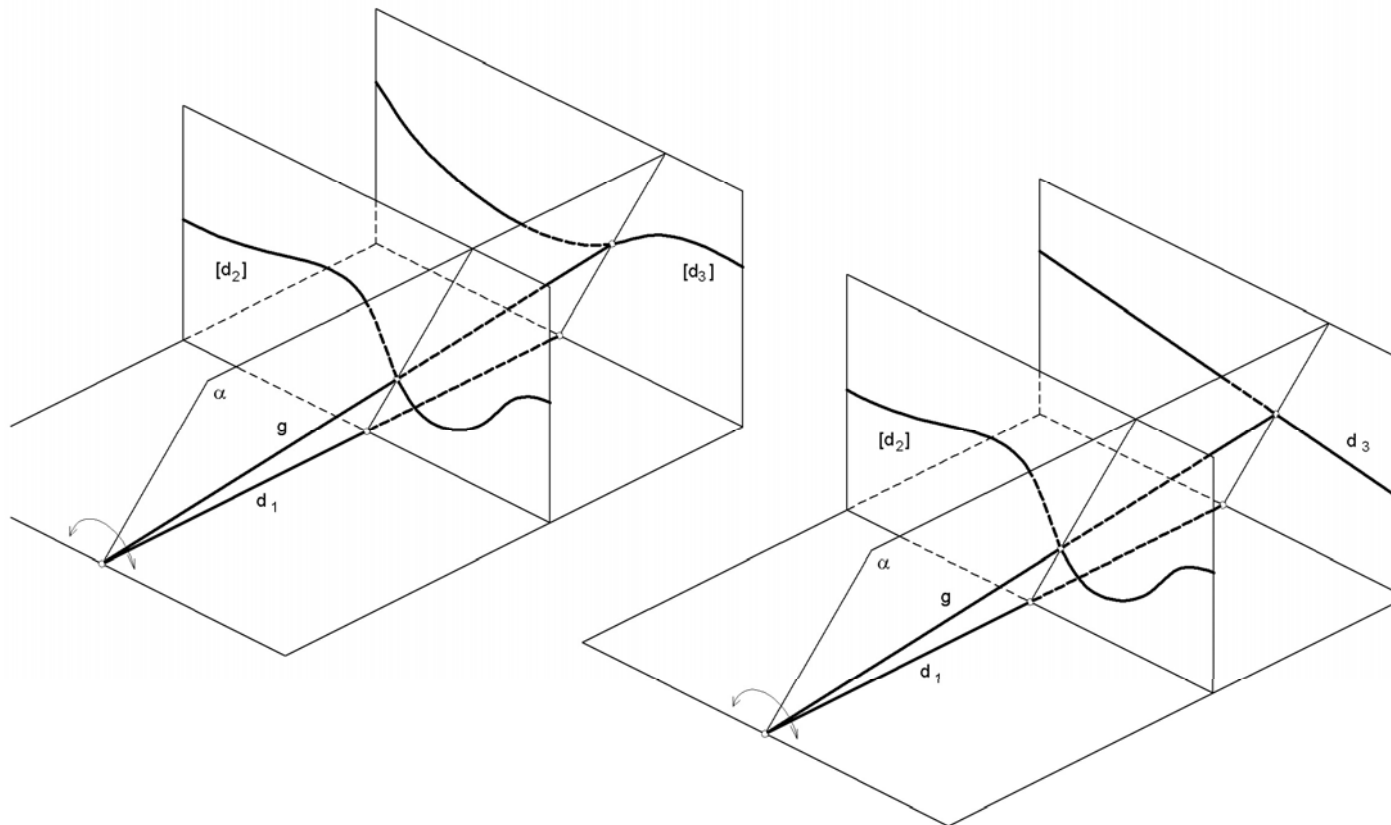
Estudo das Superfícies - cilindróide



SUPERFÍCIE DE CILINDRÓIDE DE DIRECTRIZES CIRCUNFERENCIAIS



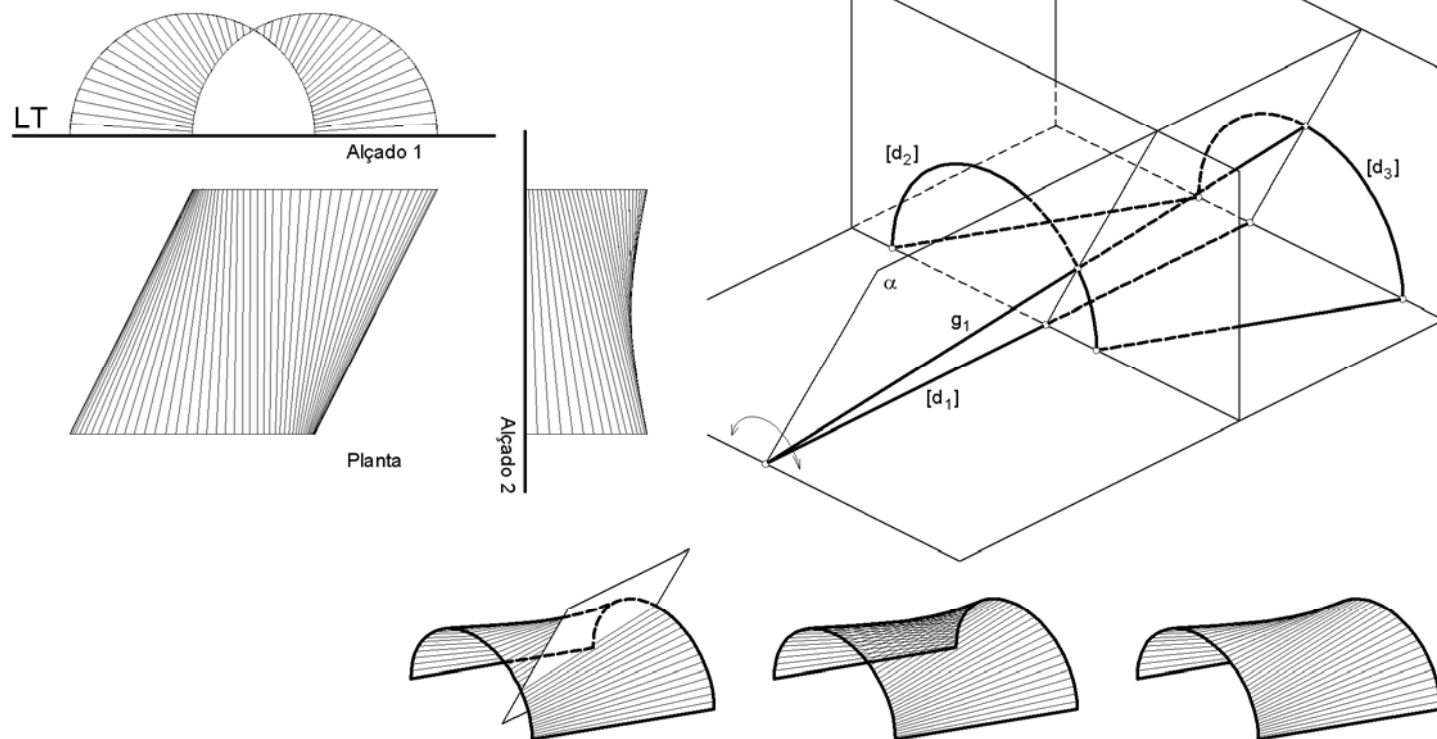
Estudo das Superfícies - arco enviesado



SUPERFÍCIES DE ARCO ENVIESADO



Estudo das Superfícies - arco enviesado

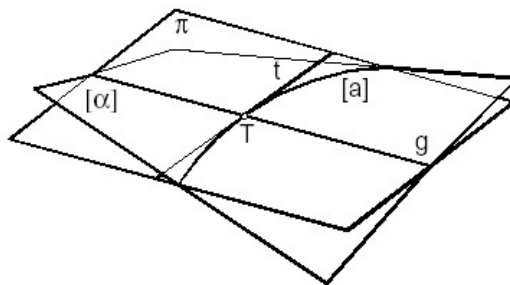


SUPERFÍCIE DE ARCO ENVIESADO - "CORNO DE VACA"



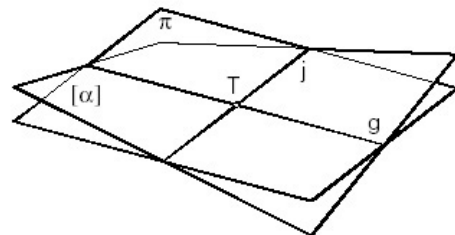
Superfícies empenadas - Planos tangentes

Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada



Numa superfície empenada simplesmente regrada $[\alpha]$ o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , contém a geratriz recta g que por ele passa. Este plano intersecta a superfície segundo a recta g e segundo uma linha $[a]$. O plano π contém a recta t tangente à linha $[a]$ no ponto T .

Plano tangente a uma superfície duplamente regrada

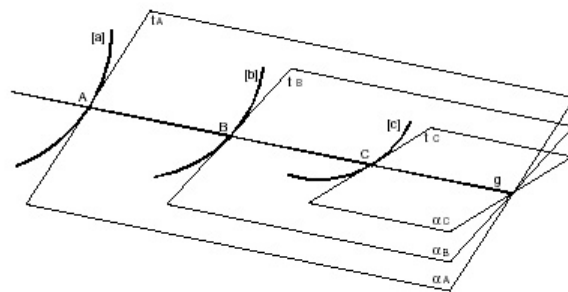


Numa superfície empenada duplamente regrada, $[\alpha]$, o plano π , tangente a $[\alpha]$ num ponto T , fica definido pelas duas geratrizes rectas, g e j , que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.



Superfícies empenadas - Planos tangentes

Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz



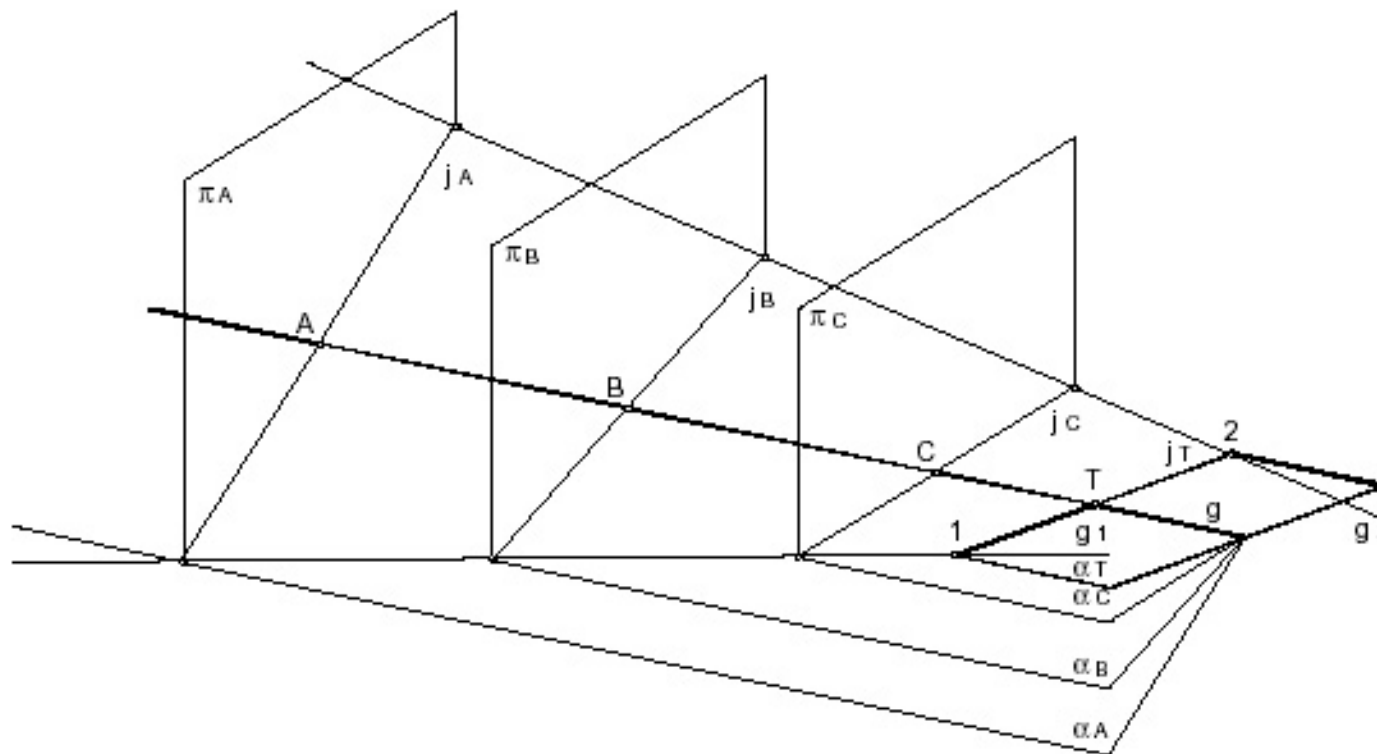
Considere-se a superfície empenada regrada $[\delta]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja g uma geratriz recta, da superfície $[\delta]$, que contém os pontos A , B e C pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos α_A , α_B e α_C tangentes à superfície $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente, ficam definidos pela geratriz g e pelas rectas t_A , t_B e t_C , respectivamente tangentes a $[a]$ em A , a $[b]$ em B e a $[c]$ em C .



Superfícies empenadas - Planos tangentes





Superfícies empenadas - Planos tangentes

Se se intersectar o plano α_A com um plano π_A qualquer (passante pelo ponto A), o plano α_B com um plano π_B qualquer (passante pelo ponto B), e o plano α_C com um plano π_C qualquer (passante pelo ponto C), obtêm-se, respectivamente, as rectas j_A , j_B e j_C tangentes à superfície regrada empenada $[\delta]$ nos pontos A , B e C , respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Como os planos π_A , π_B e π_C podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Se os três planos π_A , π_B e π_C forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.



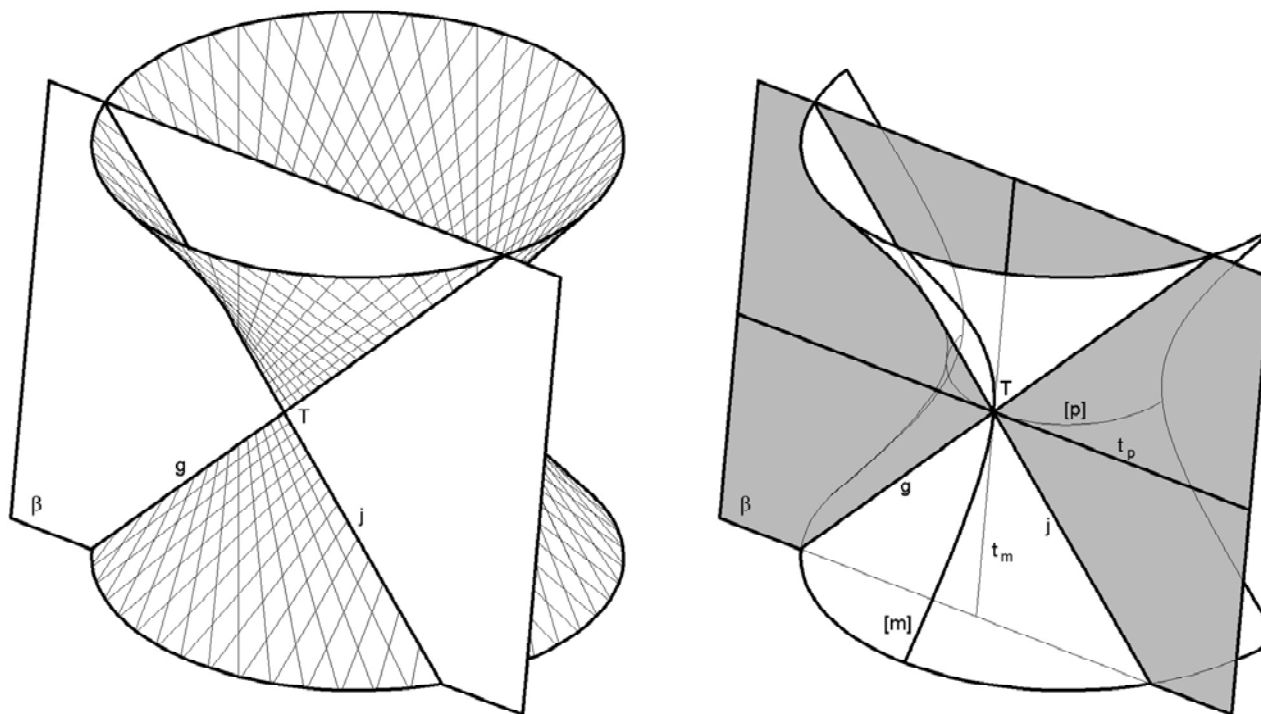
Superfícies empenadas - Planos tangentes

Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfície $[\delta]$ ao longo da geratriz g .

Determinar o plano α_T , tangente à superfície $[\delta]$ num ponto T qualquer da geratriz g , consiste em determinar a geratriz j_T (do sistema contrário ao de g e concorrente com g no ponto T) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.



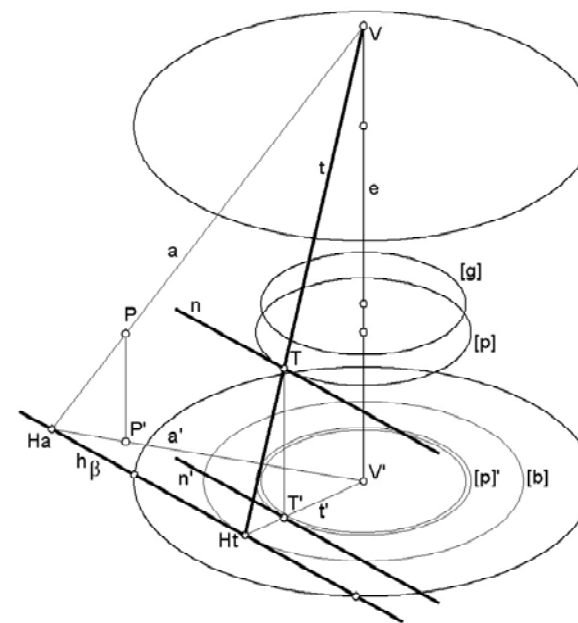
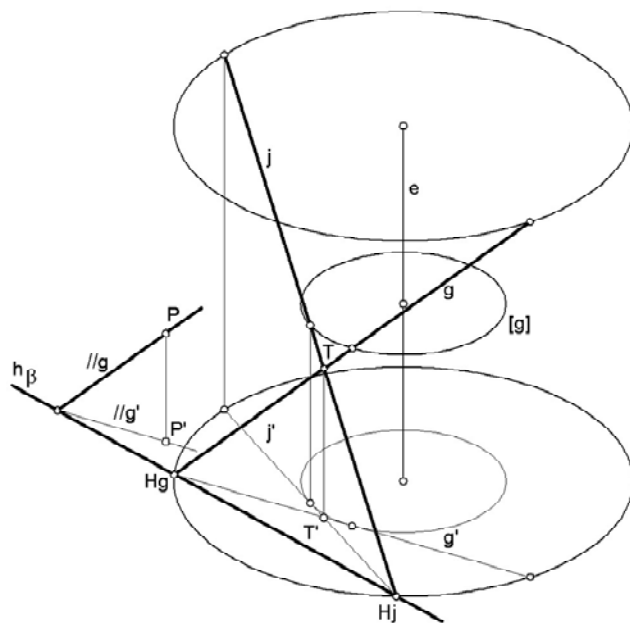
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO DA SUPERFÍCIE



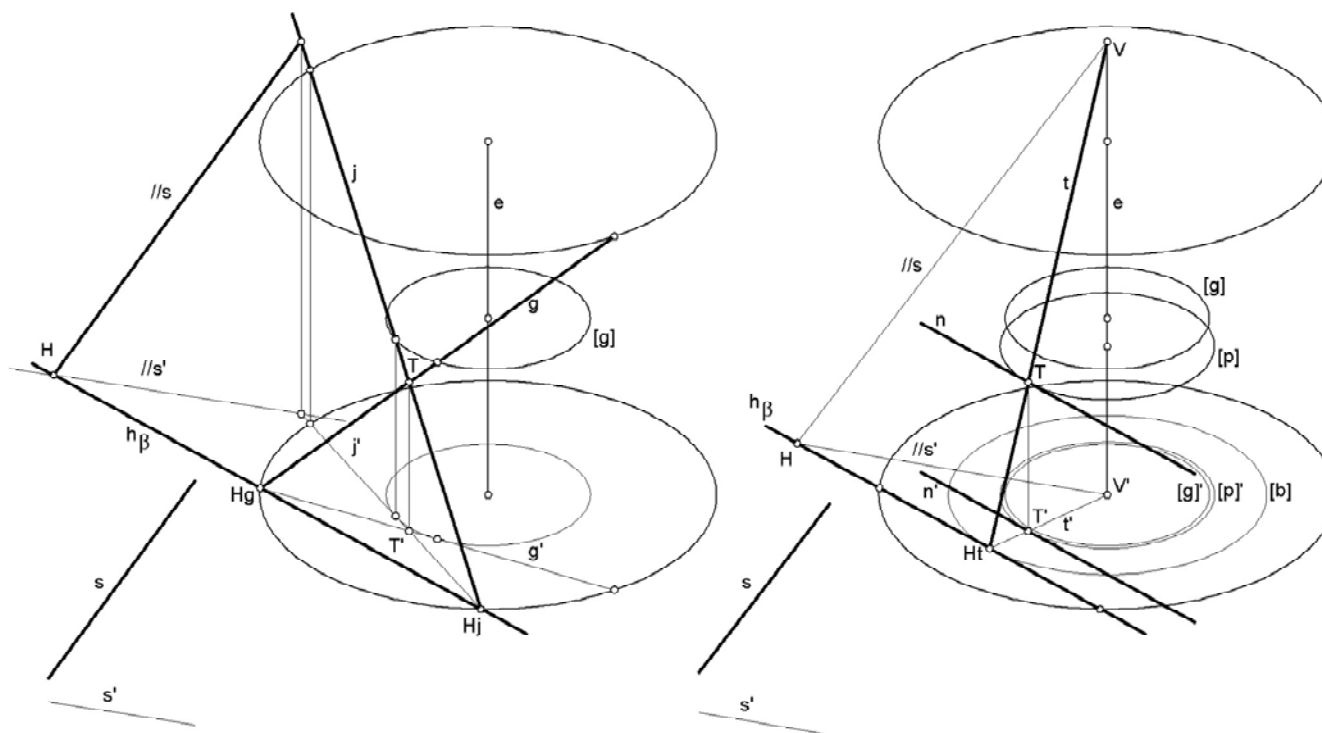
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR PONTO EXTERIOR



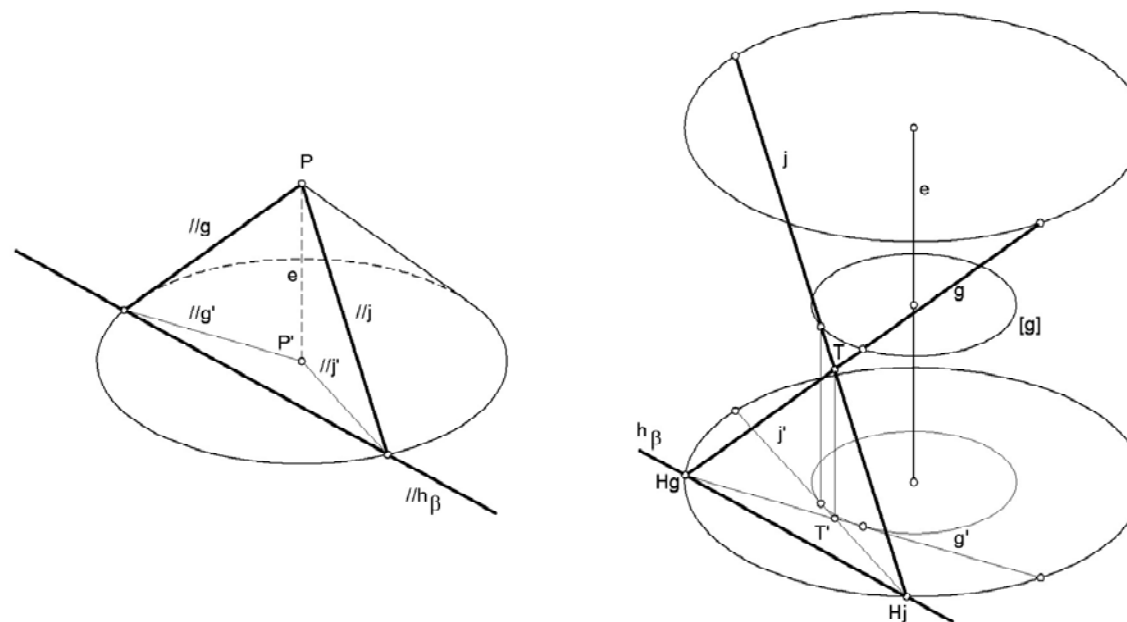
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA



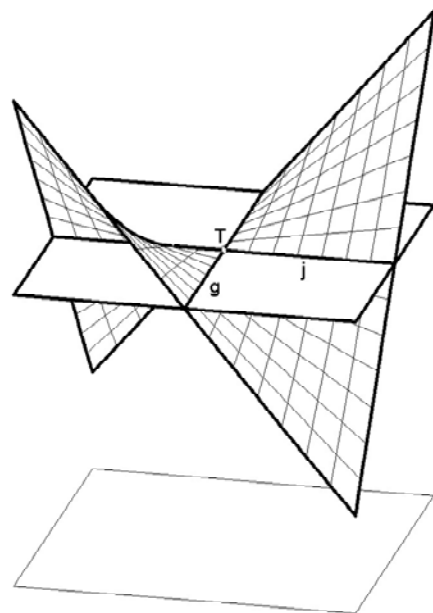
Hiperbolóide de revolução - Planos tangentes



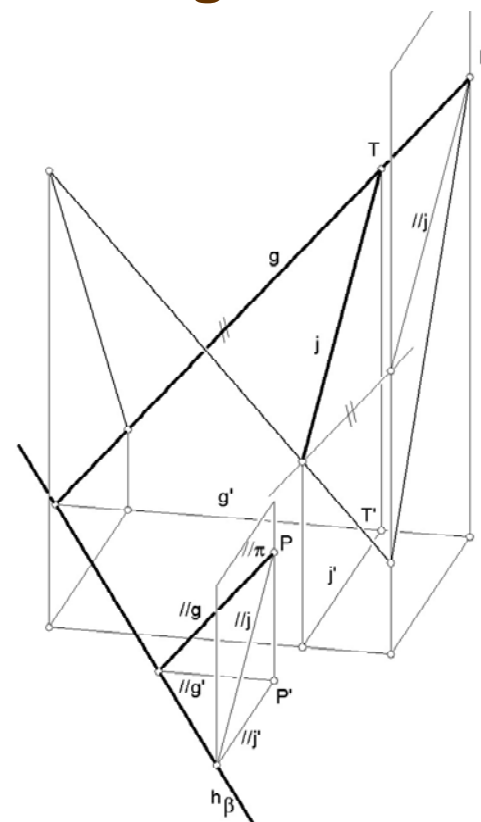
PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO



Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes



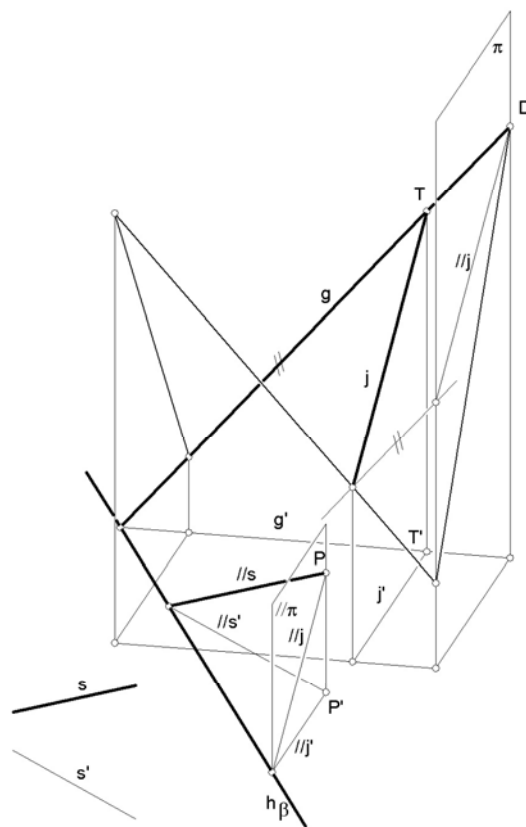
PLANO TANGENTE NUM PONTO DA SUPERFÍCIE



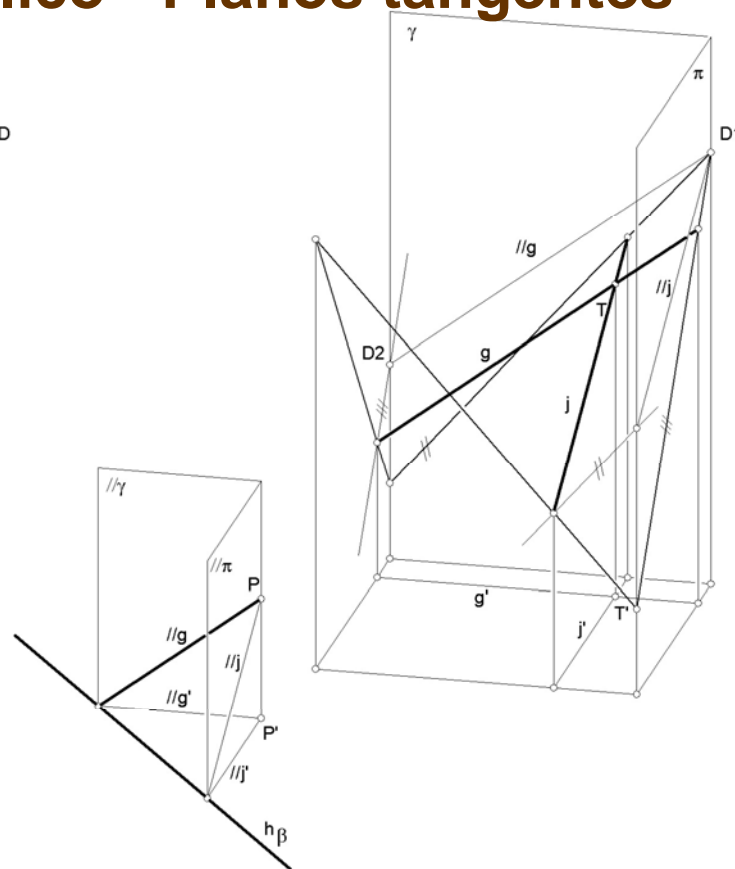
PLANO TANGENTE CONDUZIDO POR UM PONTO EXTERIOR



Parabolóide hiperbólico - Planos tangentes



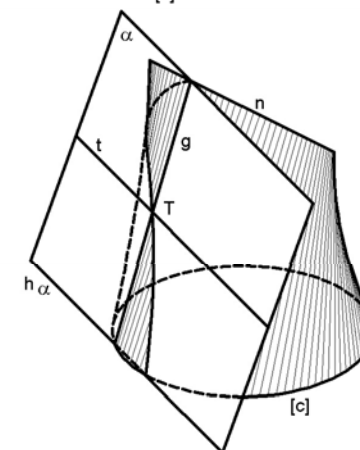
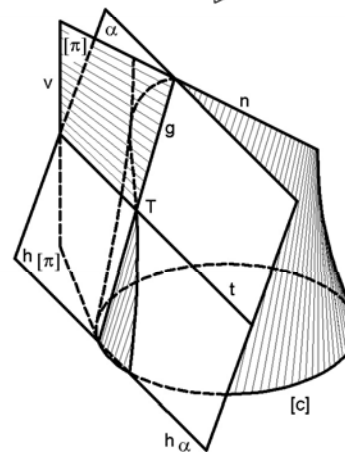
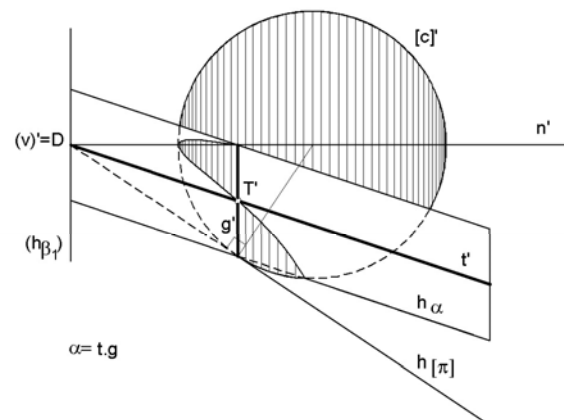
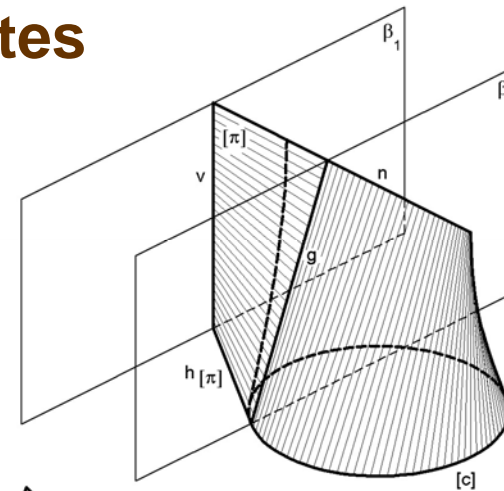
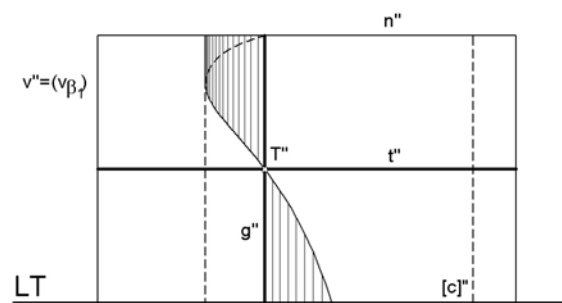
PLANO TANGENTE PARALELO A UMA RECTA DADA



PLANO TANGENTE PARALELO A UM PLANO DADO



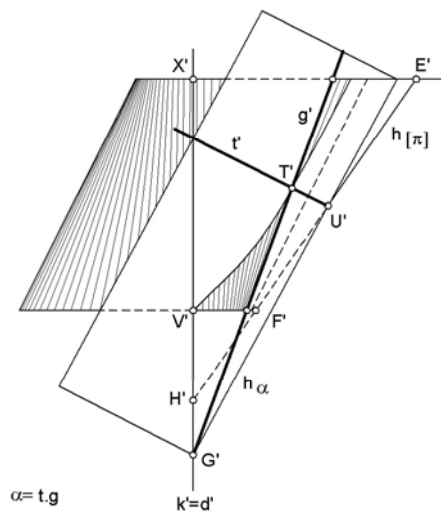
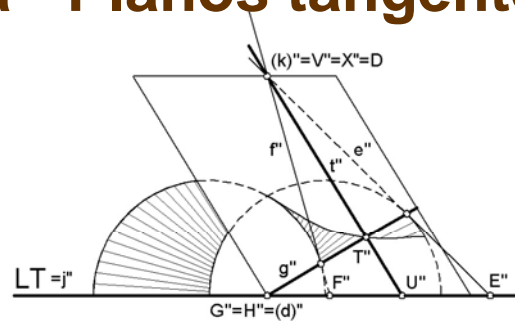
Conóide - Planos tangentes



PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DE CONÓIDE RECTO DE DIRECTRIZ CIRCUNFERENCIAL



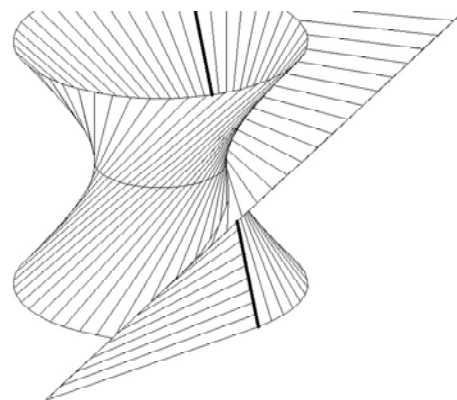
Corno de vaca - Planos tangentes



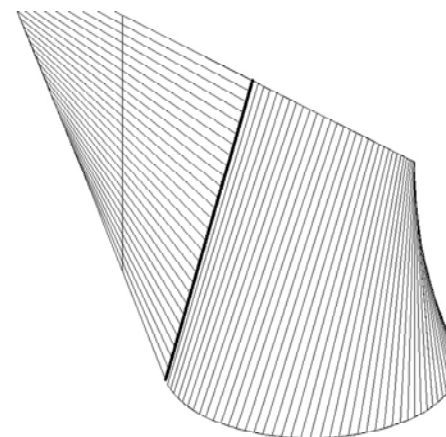
PLANO TANGENTE À SUPERFÍCIE DO "CORNO DE VACA"



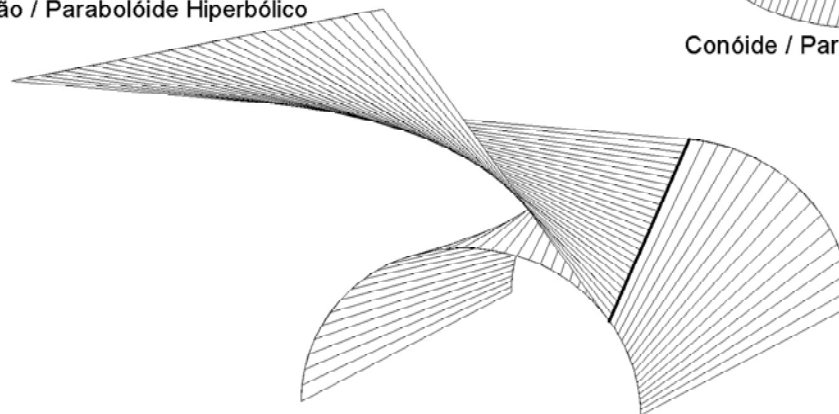
Superfícies empenadas - Concordâncias



Hiperbolóide de Revolução / Parabolóide Hiperbólico



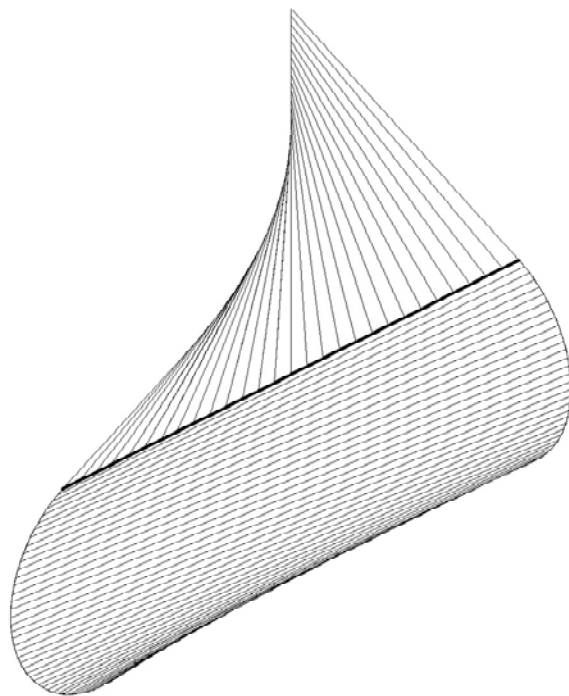
Conóide / Parabolóide Hiperbólico



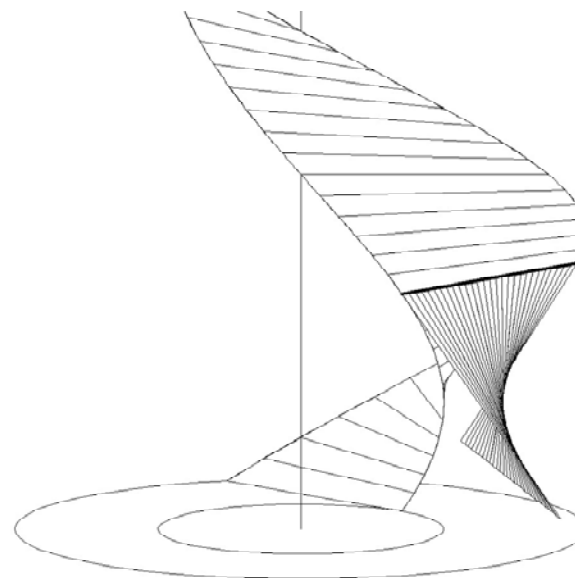
Corno de Vaca / Parabolóide Hiperbólico



Superfícies empenadas - Concordâncias



Cilindróide / Parabolóide Hiperbólico



Helicoidal Regrado / Parabolóide Hiperbólico