



GDC I – AULA TEÓRICA 2

Introdução ao estudo da axonometria: apontamento histórico e prático.

Os vários tipos de desenhos através de representações em axonometria: do esquiço ao desenho técnico.

Bases operativas gerais do sistema axonométrico: axonometria ortogonal e axonometria oblíqua.

Subsistemas axonométricos oblíquos: caso geral (teorema de Pohlke), a axonometria cavaleira e a axonometria militar; a definição de escalas nos eixos axonométricos; a noção de coeficiente de redução.

O método do paralelepípedo envolvente e o método da afinidade.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações proto-axonométricas na pintura Ocidental.

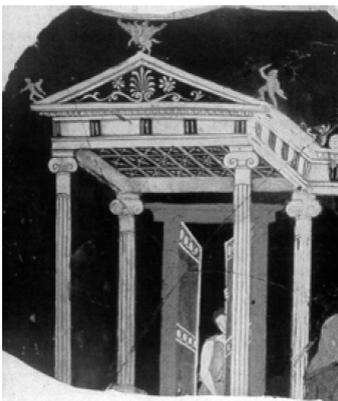


Fig. 1 – Representação proto-axonométrica (fragmento de cerâmica do séc. IV a.c.)



Fig. 2 – Representação proto-axonométrica (Fresco na Igreja de *Santa Croce*, Florença, Itália, sec. XIII/XIV)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações proto-axonométricas na pintura oriental.



Fig. 3 – Quadro “Han XiZai dá um banquete” do pintor chinês Gu HongZhong (séc. X.)



Fig. 4 – Quadro do pintor japonês Utagawa Yoshikazu (sec. XIX)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações axonométricas em tratados de Arquitectura civil.

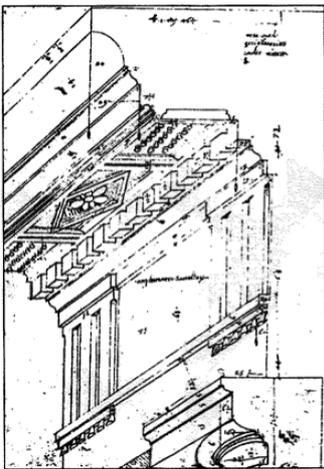


Fig. 5 – Figura do *Codex Coner* (tratado de arquitectura do séc. XVI.)

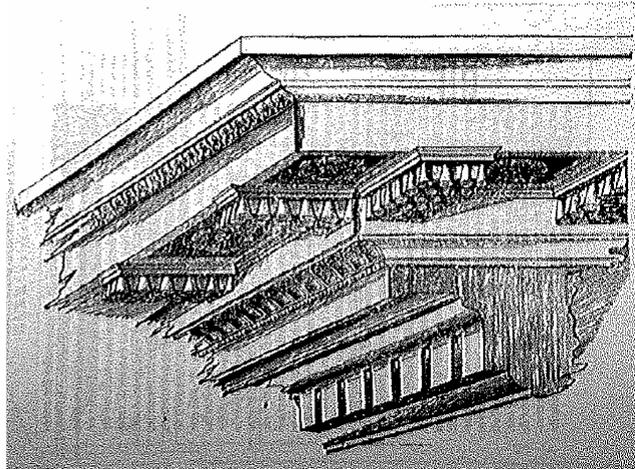


Fig. 6 – Figura do tratado *Architecture* do arquitecto Philibert de l'Orme (tratado de arquitectura do séc. XVI.)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações axonométricas em tratados de arquitectura militar.

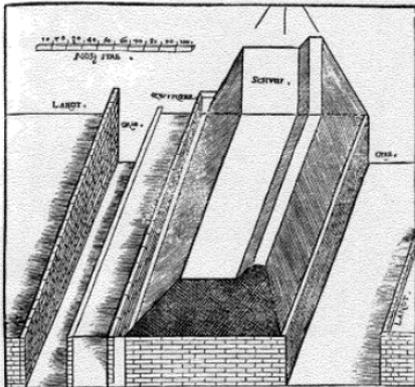


Fig. 7 – Figura de *Della Fortificazione delle Città* de Girolamo Maggi e Jacomo Castrioto, Veneza (tratado de arquitectura militar do séc. XVI.)

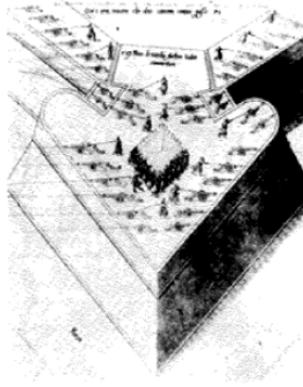


Fig. 8 – Figura do tratado *On Military architecture* de F. de Marchi, Brescia (tratado de arquitectura militar do séc. XVI.)



Fig. 9 – Figura do tratado *Des Fortifications et artifices de architecture et perspective* de J. Perret de Chamberry (tratado de arquitectura do séc. XVII.)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Exemplos de representações axonométricas em tratados de geometria e matemática.

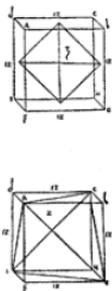


Fig. 10 – Figura do tratado *Divina Proportione* de Luca Pacioli (Veneza 1509).

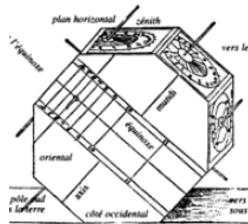


Fig. 11 – Figura do tratado *Underweysung Der Messung* (1525).

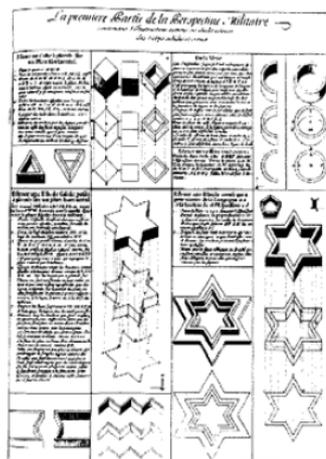


Fig. 12 – Figura do tratado de T. Luders de 1680.

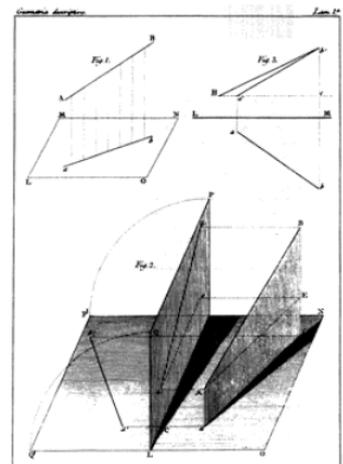


Fig. 13 – Figura *Géométrie Descriptive* de Gaspard Monge (1798).



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

A partir de do tratado de William Farish a axonometria ganha interesse por parte da comunidade de matemáticos e geómetras que fazem o seu tratamento algébrico.

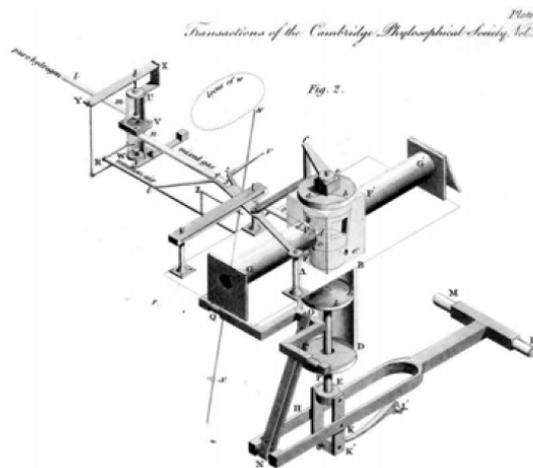


Fig. 14 – Figura do tratado de William Farish *On Isometrical Perspective* (1822).



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Em 1853 Pohlke formula, sem apresentar nenhuma prova, aquele que viria a ser conhecido como o teorema fundamental da axonometria. Diz que *“um quadrângulo plano $O'X'Y'Z'$ pode sempre tomar-se por projecção paralela de três segmentos OX , OY e OZ iguais, com um ponto O comum, e dois a dois ortogonais”*.

Mais tarde, esta conjectura foi demonstrada pelo matemático Schwarz. Posteriormente o teorema foi generalizado a quaisquer três segmentos de qualquer comprimento e fazendo entre si quaisquer ângulos.

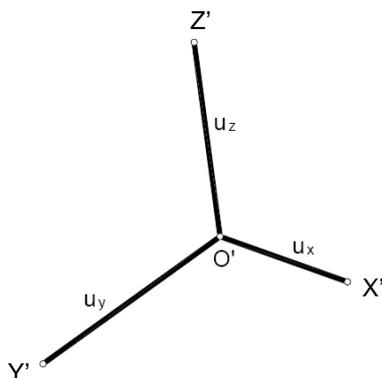


Fig. 15 – Teorema de Pohlhe Schwarz.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Representações axonométricas em tratados de geometria descritiva, em que se se coloca a ênfase na aplicação à representação de casos concretos, por exemplo no estudo da estereotomia (estudo do corte da pedra).

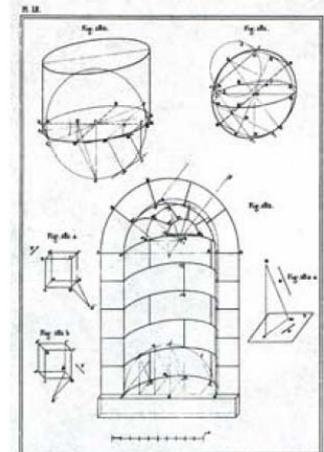
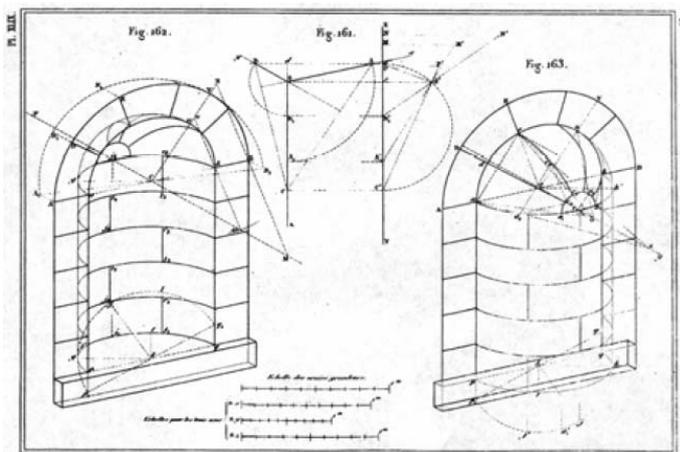


Fig. 16 – Figuras do *Traité de géometrie Descriptive* de Jules de la Gourmerie (sec. XIX)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Representações axonométricas em tratados de geometria descritiva, em que se se coloca a ênfase na aplicação à representação de casos concretos, por exemplo no estudo da estereotomia (estudo do corte da pedra).

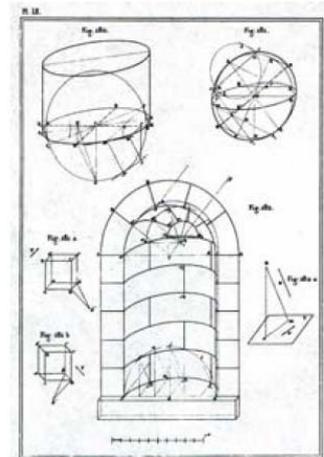
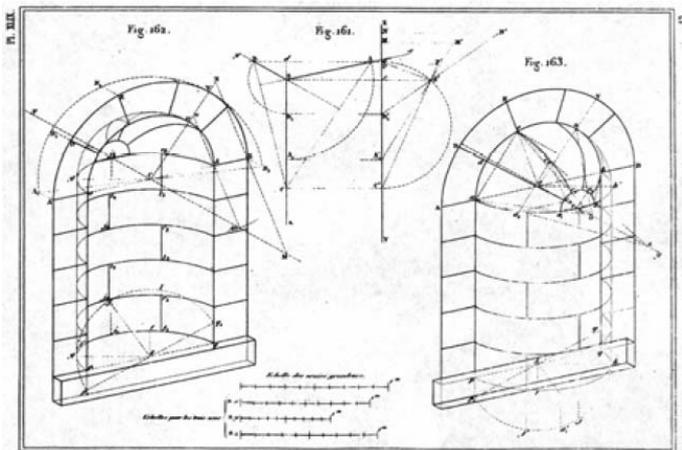


Fig. 16 – Figuras do *Traité de géométrie Descriptive* de Jules de la Gourmerie (sec. XIX)



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: aspectos históricos

Representações axonométricas na representação da arquitectura no Modernismo.

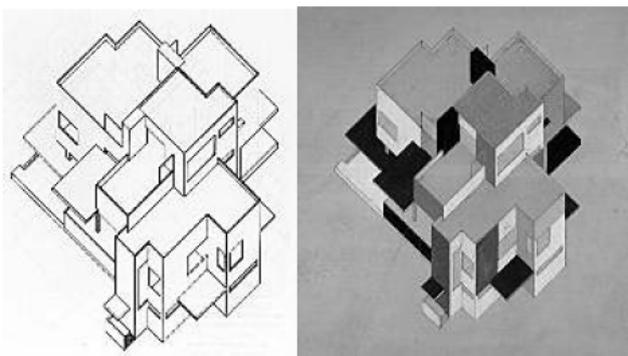


Fig. 17 – Desenhos de Theo van Doesburg e Cor van Eesteren (1897-1988) para uma casa particular (1923)



Fig. 18 – Desenho do projecto de Alberto Sartoris para a *Villa du Dr. Roman Brum à Lausanne* (1934).



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: na actualidade

Representações de arquitectura: do esquiço ao desenho de pormenores.

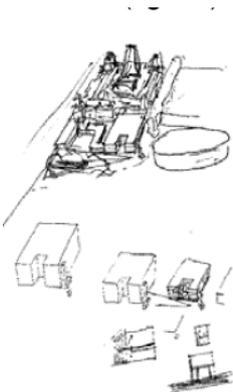


Fig. 19 – Esquiço do arquitecto Siza Vieira

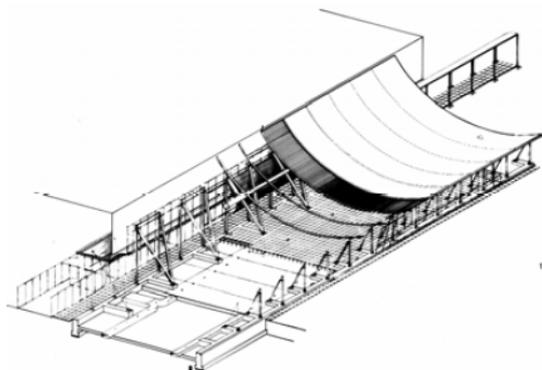


Fig. 20 – Desenho de um projecto do arquitecto Renzo Piano



Fig. 21 – Desenho de um pormenor construtivo



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: na actualidade

Representações axonométricas em visualização informática.



Fig. 19 – Visualização informática e jogos de computador.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: trabalhos de alunos

Exemplos de trabalhos de alunos.

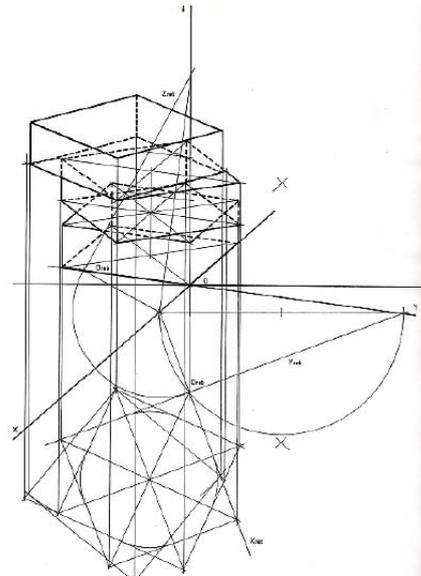
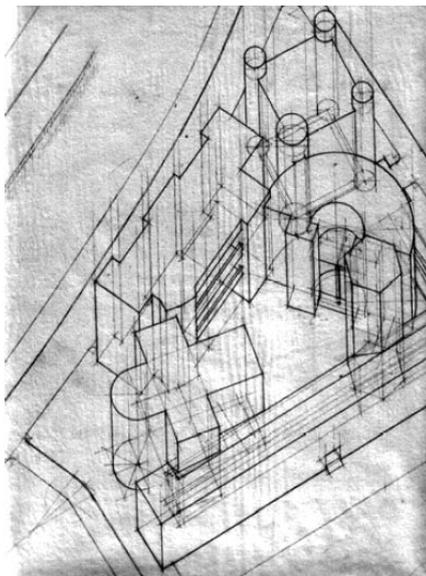


Fig. 20 – Exemplos de trabalhos de alunos.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: trabalhos de alunos

Exemplos de trabalhos de alunos.

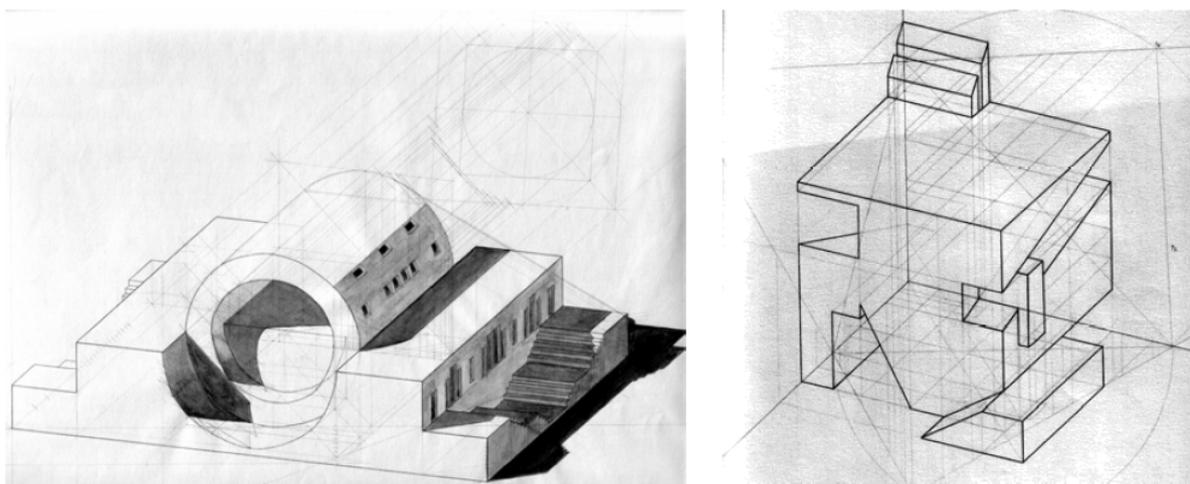


Fig. 21 – Exemplos de trabalhos de alunos.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: trabalhos de alunos

Exemplos de trabalhos de alunos.

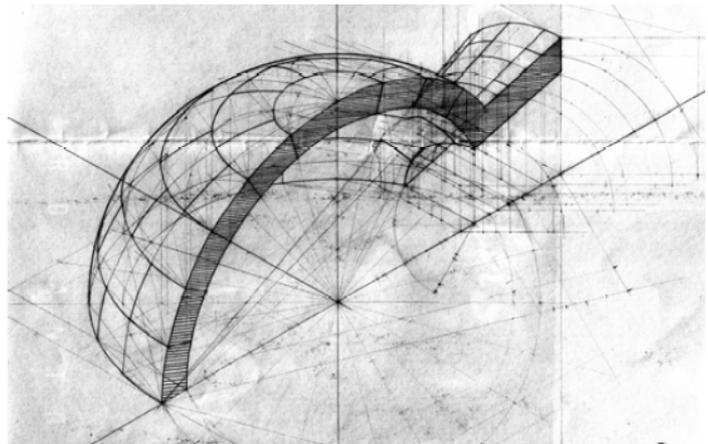
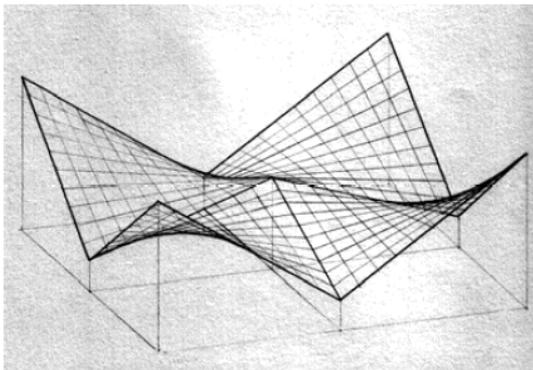
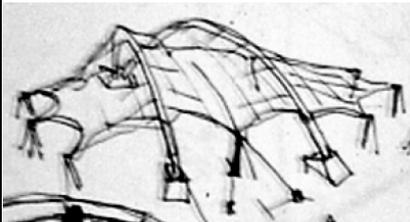


Fig. 22 – Exemplos de trabalhos de alunos.

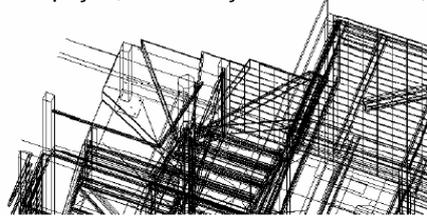


>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: prática profissional

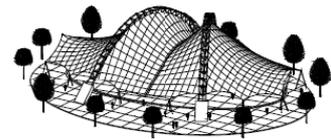
Exemplos da prática profissional: esboços, visualizações informáticas, desenhos construtivos.



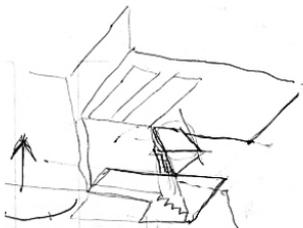
esboço



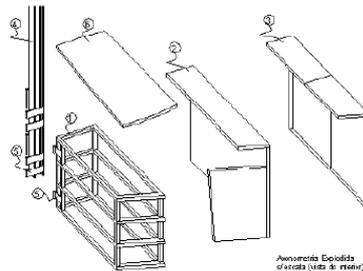
visualização informática



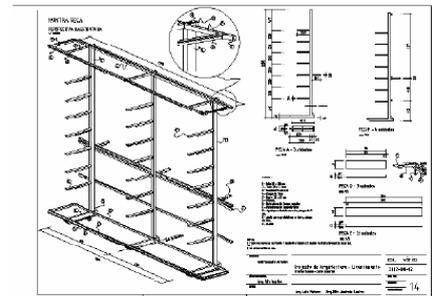
visualização informática



esboço



excerto de desenho para construção



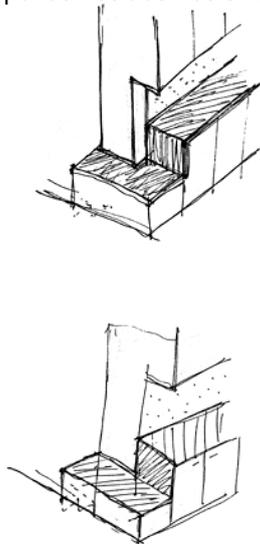
desenho para construção

Fig. 23

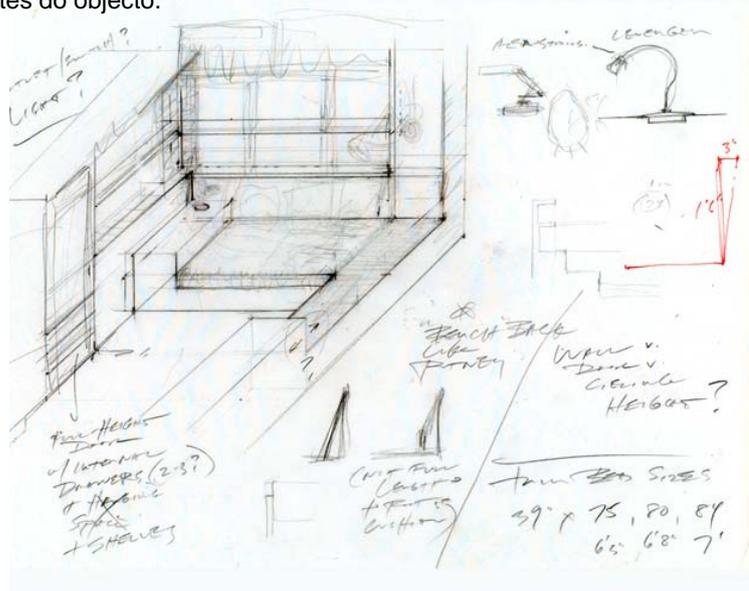


>> Exemplos de desenhos axonométricos à mão levantada: exemplos da Web

No exemplo da direita há uma orientação de planos que preserva as relações angulares. Esses planos aparecem “frontais” no desenho. No desenho da esquerda são arbitradas três direcções gráficas correspondentes aos três eixos estruturantes do objecto.



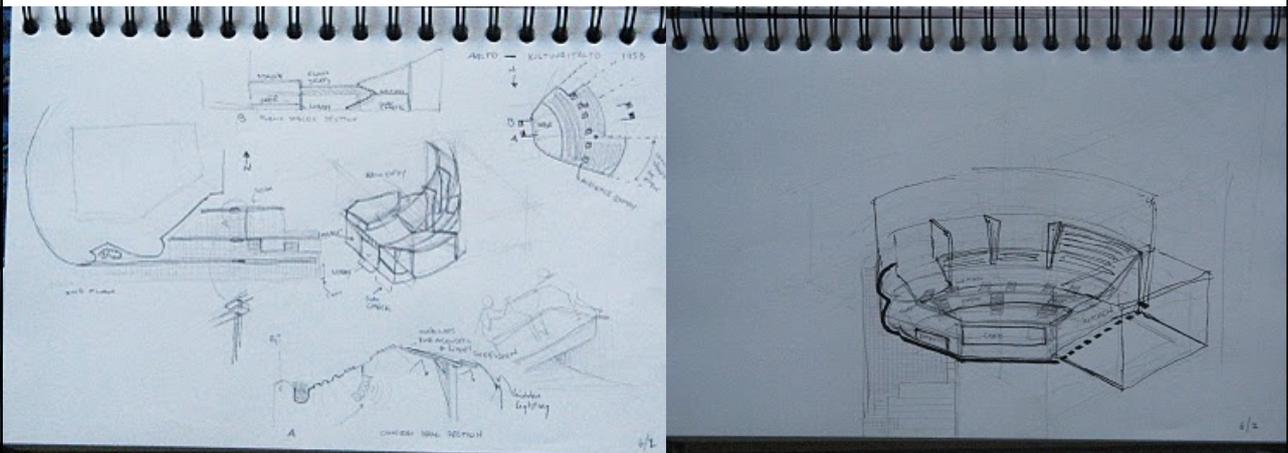
Imagens disponíveis em:
<http://eastbranch.net/process.html>





>> Exemplos de desenhos axonométricos à mão levantada: exemplos da Web

Nestes exemplos as formas curvas são inscritas em paralelepípedos. De seguida os paralelepípedos são decompostos de modo a que neles se inscrevam os objectos que se pretendem representar. Este método de estruturação do desenho é muito eficiente para representar formas curvas e pode aplicar-se quer se desenhe ou não à mão levantada.

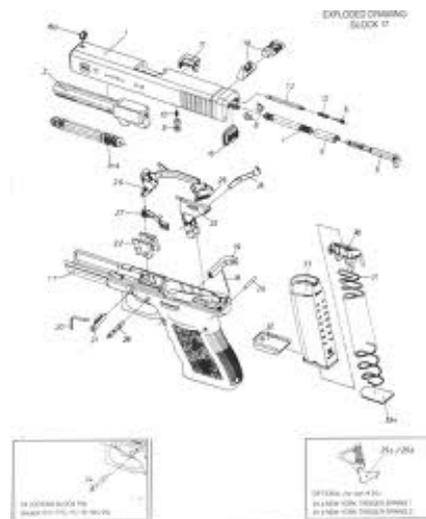
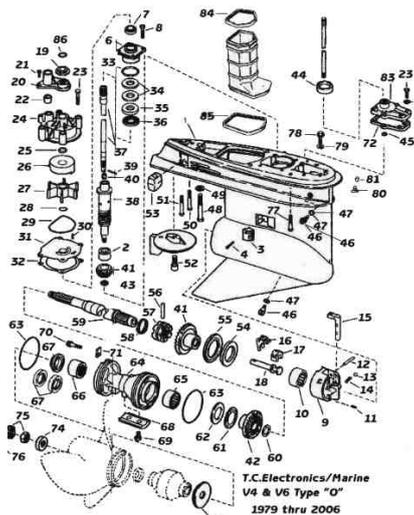


Imagens disponíveis em:
<http://scandicat.blogspot.com/2010/06/day-10-helsinki-alvar-aalto-and.html>



>> Exemplos de desenhos axonométricos explodidos: exemplos da Web

Os desenhos axonométricos explodidos são uma forma eficiente de ilustrar o modo como se relacionam as várias partes constituintes de um objecto, ou como se relacionam objectos distintos. São muito utilizados para ilustrar instruções de montagem de objectos, pormenores construtivos, diagramas de circulação, etc.

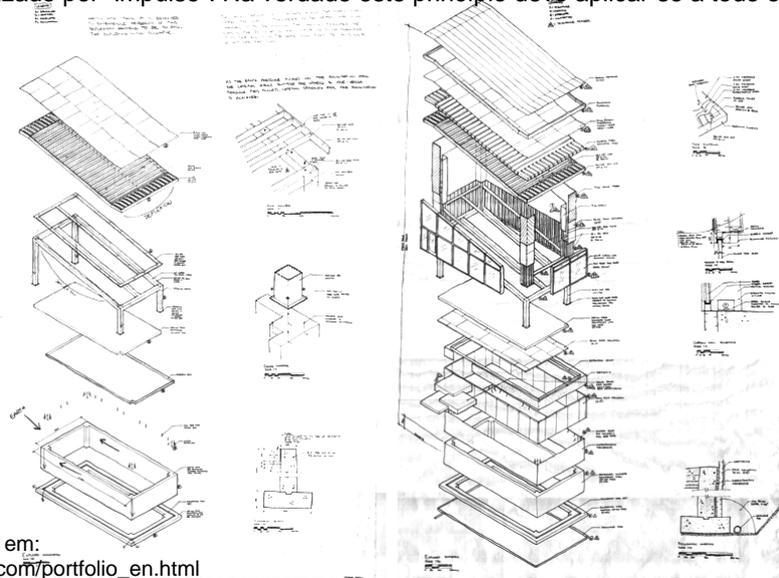


Imagens disponíveis em:
<http://qwickstep.com/search/exploded-drawing.html>



>> Exemplos de desenhos axonométricos cotados e anotados: exemplos da Web

A anotação de medidas em desenhos axonométricos numa direcção de eixo deve ser feita paralelamente a esse eixo com as linhas de chamada paralelas a um dos outros dois eixos. O desenho dos algarismos deve respeitar a lógica da axonometria como se o algarismo se situasse num plano em axonometria. O desenho dos algarismos deve ser cuidado e uniforme ao longo do desenho. O registo das medidas deve ser pensado e preparado e realizado por “impulso”. Na verdade este princípio deve aplicar-se a todo o processo de desenho.

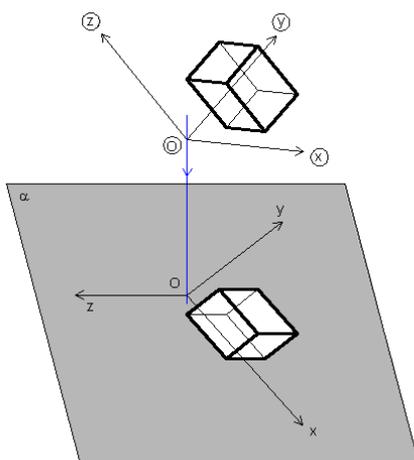


Imagens disponíveis em:
http://nicholascaron.com/portfolio_en.html



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: noções gerais

Na representação axonométrica, as figuras geométricas são associadas a um REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL e projectadas solidariamente com este num plano, o PLANO AXONOMÉTRICO, através de uma projecção ortogonal (AXONOMETRIA ORTOGONAL) ou oblíqua (AXONOMETRIA CLINOAGONAL).



- (X, Y, Z) - REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL
- (x, y, z) - EIXOS COORDENADOS
- O - ORIGEM DO REFERENCIAL TRI-ORTOGONAL
- (X, Y, Z) e (x, y, z) - PLANOS COORDENADOS
- α - PLANO AXONOMÉTRICO (o plano do desenho; a folha de papel)
- x, y, z - EIXOS AXONOMÉTRICOS
- O - PROJEÇÃO DA ORIGEM (por comodidade de linguagem por vezes designa-se simplesmente origem)

Nota: Alguns autores designam os planos coordenados por planos axonométricos, os eixos coordenados por eixos axonométricos, designando o plano de projecção simplesmente como plano de projecção. A nossa notação está de acordo com a notação adoptada nos programas do ensino secundário e vai ao encontro da notação utilizada pela maioria dos autores.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução

Numa representação axonométrica podem estar relacionados, separadamente ou em conjunto, três conceitos distintos: i) ESCALA DO DESENHO AXONOMÉTRICO, ii) ESCALA AXONOMÉTRICA (escala do desenho da direcção de um eixo axonométrico), e iii) COEFICIENTE DE REDUÇÃO.

A noção geral do conceito de ESCALA define-a como sendo a razão entre uma medida numa representação e a sua homóloga real. As escalas podem ser expressas graficamente ou numericamente através de um quociente. Um exemplo de escala numérica é 1/100, escala bastante usada em arquitectura.

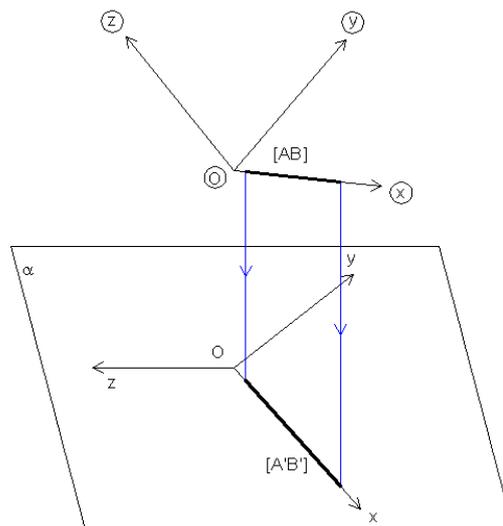
Assim, quando se toma a axonometria no seu conjunto como um desenho, faz sentido falar de ESCALA DO DESENHO AXONOMÉTRICO no sentido geral que se dá ao termo escala. Esta diz respeito a um factor de redução global a aplicar ao espaço de um objecto a ser representado.

O conceito de COEFICIENTE DE REDUÇÃO é específico da representação axonométrica e é função i) da direcção do eixo coordenado em relação ao plano axonométrico, e ii) da direcção de projecção. E é independente da escala do desenho.

Não esqueçamos que os eixos axonométricos são projecções de eixos coordenados e que, por isso, as medidas paralelas a um eixo coordenado aparecem projectadas paralelas ao eixo axonométrico correspondente. À razão entre uma medida paralela a um eixo axonométrico, digamos [A'B'], e a sua homóloga paralela ao eixo coordenado correspondente, digamos [AB], dá-se a designação de COEFICIENTE DE REDUÇÃO. No caso da figura seguinte trata-se do coeficiente de redução no eixo axonométrico x e nota-se por C_x . De modo idêntico nota-se C_y e C_z .



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução



A noção de ESCALA AXONOMÉTRICA de um eixo axonométrico corresponde à composição da escala do desenho com o coeficiente de redução para esse eixo axonométrico. Assim, numa representação axonométrica há 3 escalas axonométricas que podem sempre ser separadas (embora às vezes de forma difícil) em escala do desenho e coeficientes de redução.



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: escalas e coeficientes de redução

É importante perceber o que une e distingue os conceitos de escala axonométrica e de coeficiente de redução. Vamos procurar fazê-lo através de um exemplo.

Num desenho axonométrico à escala 1/100, por exemplo, as medidas reais são afectadas sequencialmente, e separadamente, pela escala do desenho e de seguida pelo coeficiente de redução, ou vice-versa. Suponhamos que pretendemos representar uma medida de 8m paralela ao eixo coordenado z, sabendo que o coeficiente de redução a aplicar às medidas no eixo coordenado z é de 0.9, por exemplo. Neste caso a medida 8m afectada pela escala do desenho, 1/100, resulta em 8cm. De seguida esta medida afectada do coeficiente de redução 0.9 resulta em 7.2cm. Esta é a medida a representar ao longo do eixo axonométrico z.

Por outro lado a escala axonométrica de um eixo é uma expressão que sintetiza, não distinguindo, o coeficiente de redução e a escala do desenho. Assim, ao definir escalas para os eixos axonométricos, em geral escalas gráficas, não são explícitos os valores dos coeficientes de redução nem a escala da axonometria. Porém, as relações de proporção entre as escalas axonométricas e as relações de proporção entre os coeficientes de redução são as mesmas.

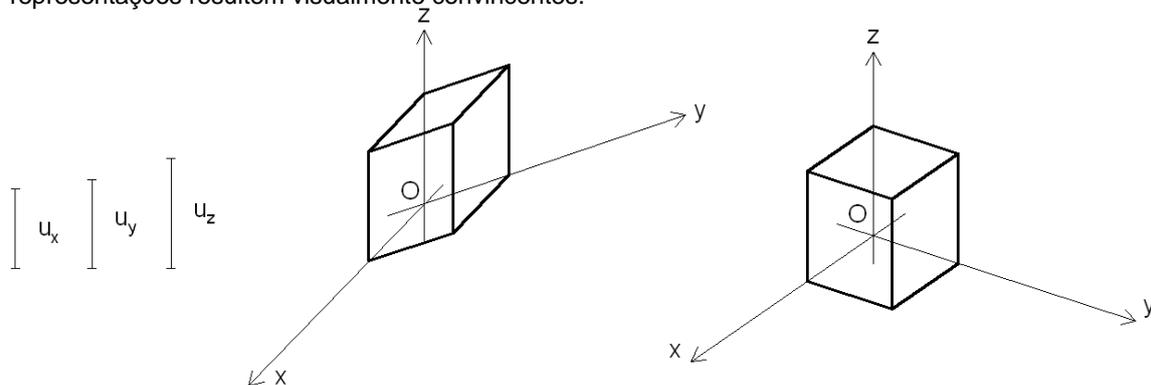


>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: axonometria oblíqua (clinogonal)

No CASO GERAL da axonometria oblíqua podemos escolher arbitrariamente as direcções dos eixos axonométricos e as escalas axonométricas em cada eixo. Esta possibilidade é uma consequência directa do teorema de Pohlke. Este é o caso em que distinguir escala do desenho e coeficientes de redução é tarefa árdua!

Nos exemplos abaixo foram arbitradas diferentes direcções de eixos axonométricos e foram definidas escalas para os eixos axonométricos x , y e z dada pelos segmentos u_x , u_y e u_z , respectivamente, representativos de um comprimento unitário. Em cada uma das axonometrias está representado um cubo com uma unidade de lado.

Do ponto de vista estritamente geométrico ambas as representações estão correctas. No entanto a representação da direita é mais verosímil como representação de um cubo. Por isso, ao considerar o caso geral da axonometria oblíqua, pode ser conveniente dispor os eixos e definir as escalas de modo a que as representações resultem visualmente convincentes.

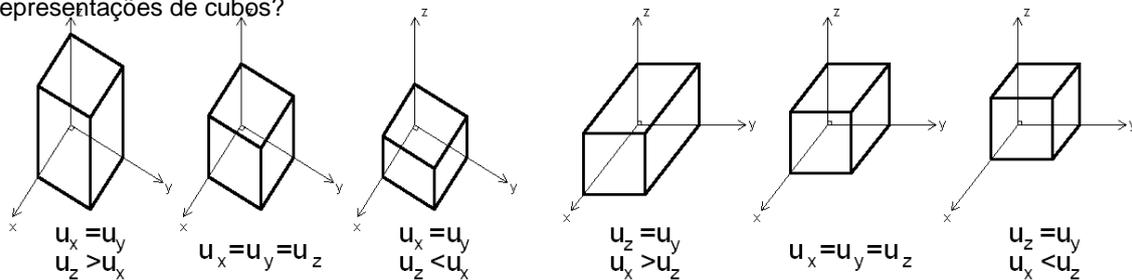




>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: axonometria oblíqua (clinogonal)

Para além do caso geral da axonometria oblíqua consideram-se, em geral, dois casos particulares: i) o caso em que o plano coordenado x.y é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA MILITAR) e o caso em que o plano coordenado x.y (ou y.z) é paralelo ao plano axonométrico (AXONOMETRIA CAVALEIRA). A consequência desta disposição espacial é de que os eixos axonométricos x e y, no caso da axonometria militar, e os eixos x e z (ou y e z), no caso da axonometria cavaleira, são perpendiculares entre si, e as ESCALAS AXONOMÉTRICAS nestes eixos são iguais entre si. Os coeficientes de redução nestes eixos são iguais à unidade.

No caso da axonometria militar a direcção e escala do eixo axonométrico z podem ser livremente arbitradas, porém a representação só resulta visualmente convincente se a escala no eixo axonométrico z for igual ou inferior à escala dos outros dois eixos, isto é, se o coeficiente de redução for igual ou inferior a 1. Raciocínio análogo pode ser aplicado ao caso da axonometria cavaleira. Nos exemplos abaixo estão representados cubos em axonometria militar (à esquerda) e cavaleira (à direita). Quais são mais convincentes como representações de cubos?



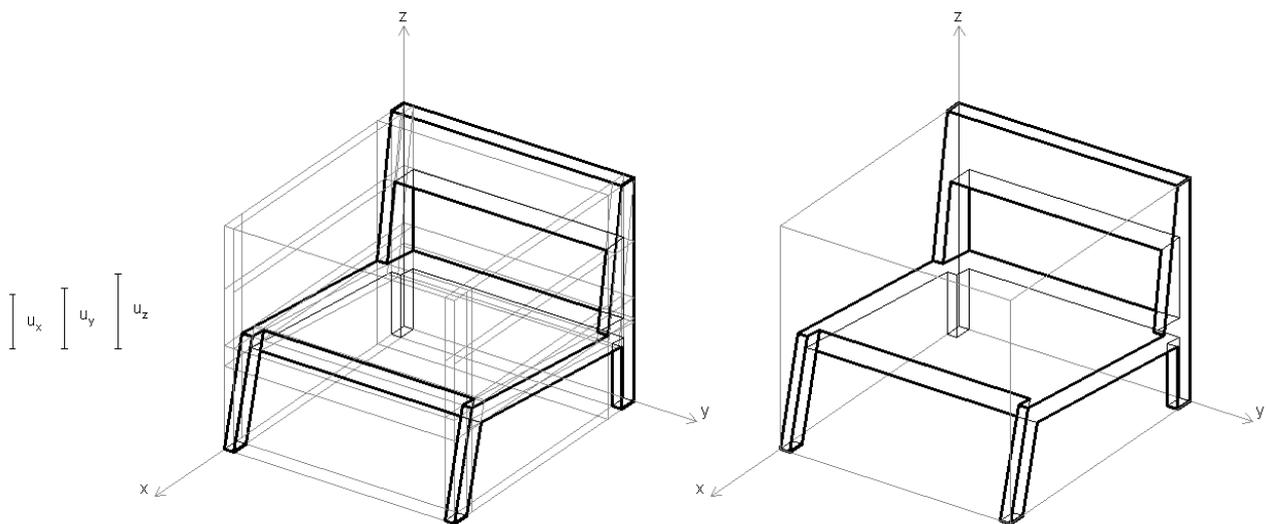
Axonometria Militar

Axonometria Cavaleira



>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: o método do paralelepípedo envolvente

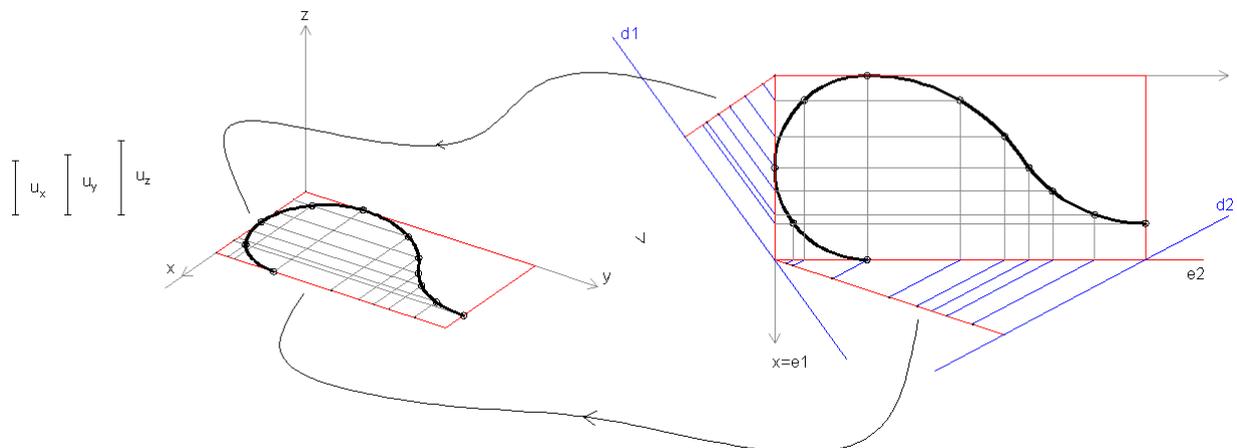
Para representar um objecto mais ou menos complexo em axonometria, pode considerar-se o paralelepípedo que o circunscribe e em função da decomposição deste chegar àquele. Este método designa-se por MÉTODO DO PARALELEPÍPEDO ENVOLVENTE. Na figura seguinte dá-se um exemplo.





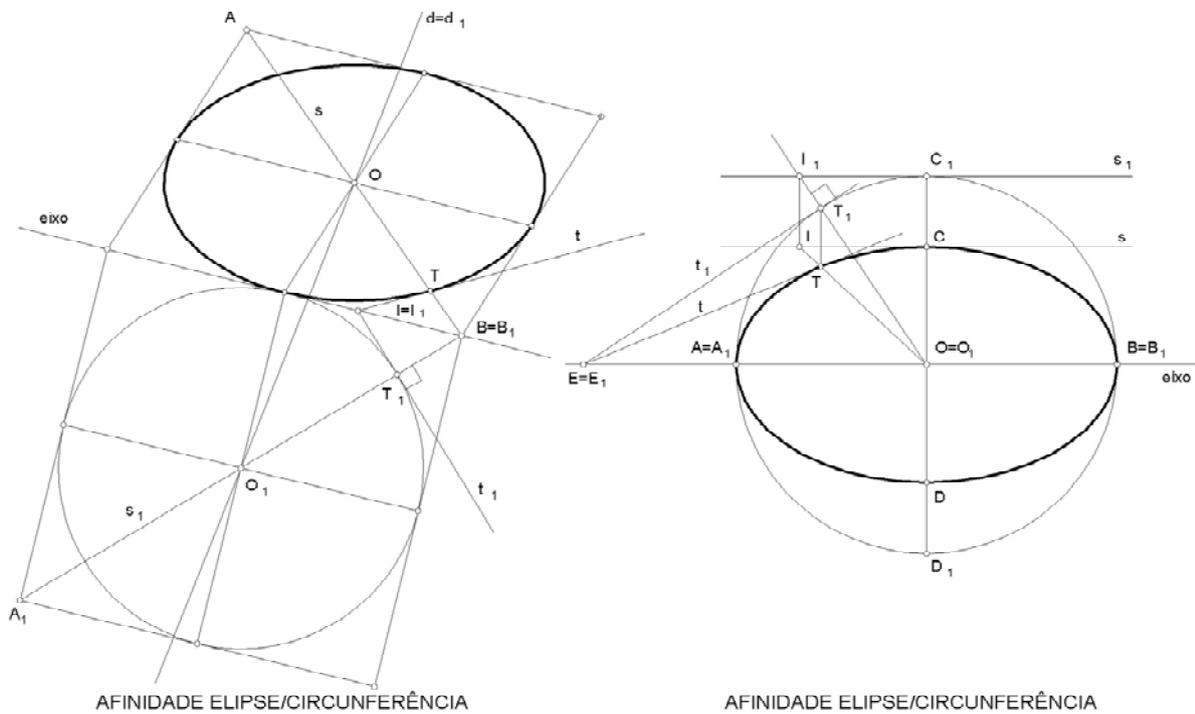
>> REPRESENTAÇÃO AXONOMÉTRICA: o método da afinidade

Associado ou não ao método anterior, pode utilizar-se o MÉTODO DA AFINIDADE. Este método consiste: i) na definição de um eixo para a transformação afim, e ii) na definição de uma direcção de afinidade que relacione o desenho a obter com um desenho homólogo conhecido. A figura seguinte ilustra a aplicação do método na representação de uma curva livre. Note-se que por comodidade de desenho pode proceder-se à transformação como um traçado auxiliar desviado da axonometria, como ilustra a figura. Note-se ainda que foram utilizadas duas afinidades, uma de direcção $d1$ e eixo $e1$, e outra de direcção $d2$ e eixo $e2$.



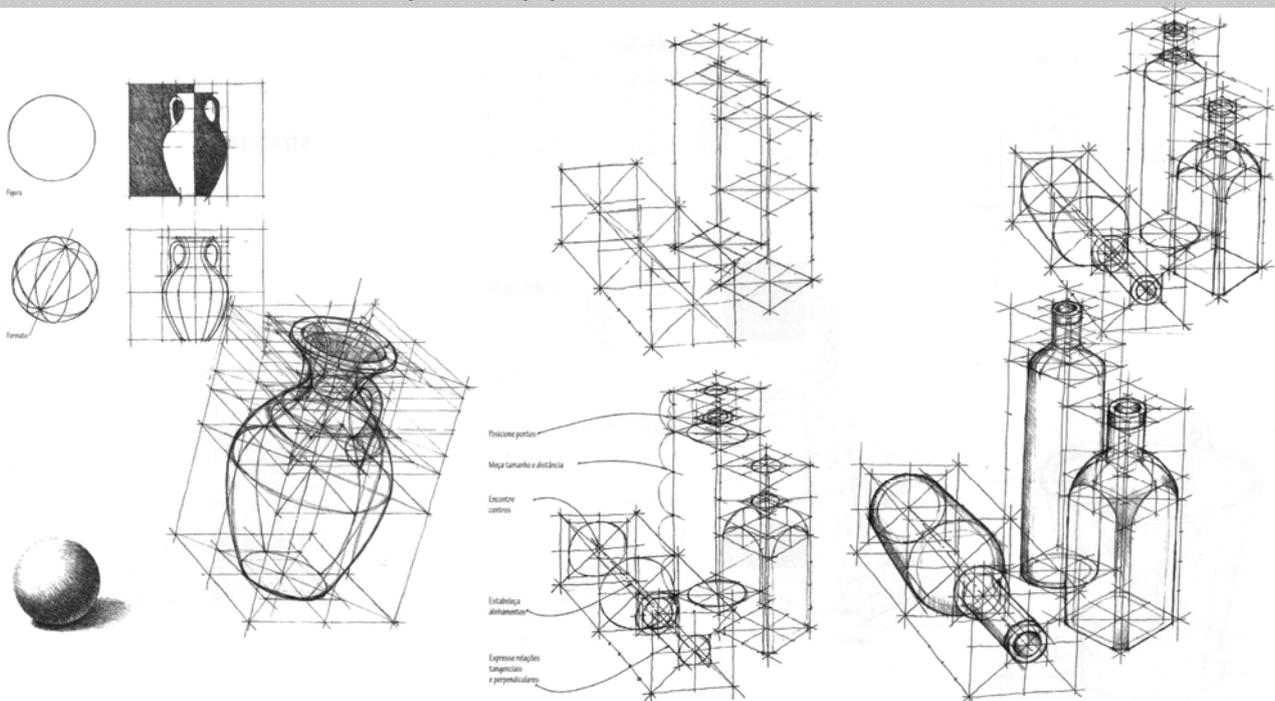


>> AFINIDADE ELIPSE / CIRCUNFERÊNCIA





>> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente / afinidade

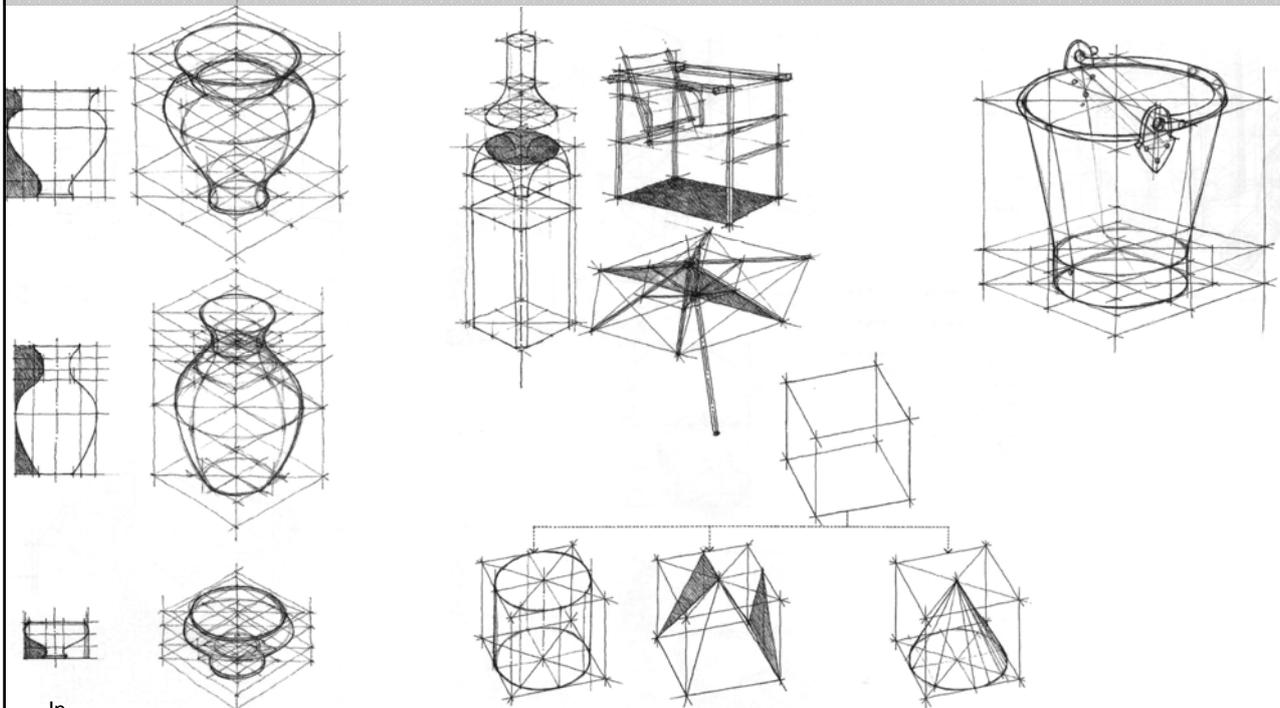


In

CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9



>> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente / afinidade

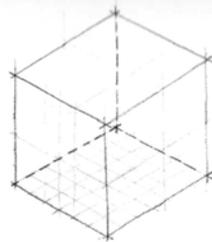


In

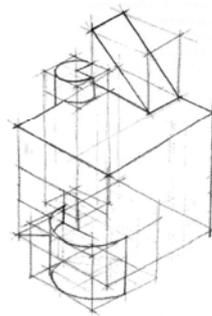
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9



>> EXEMPLOS: método do paralelepípedo envolvente

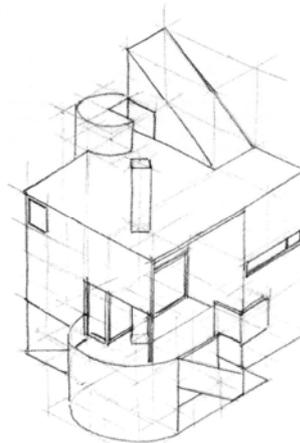


*Um simples prisma em axonometria
converte-se no "contentor" básico
de um edifício, neste caso a residência
Gwathmey.*



*Subdivide-se
gradualmente o
prisma, de acordo
com os elementos
volumétricos que
compõem a sua
estrutura
arquitectónica.*

*Por fim, incluem-se
janelas, escada e
aqueles elementos
que acabam por
definir a proposta
analisada.*

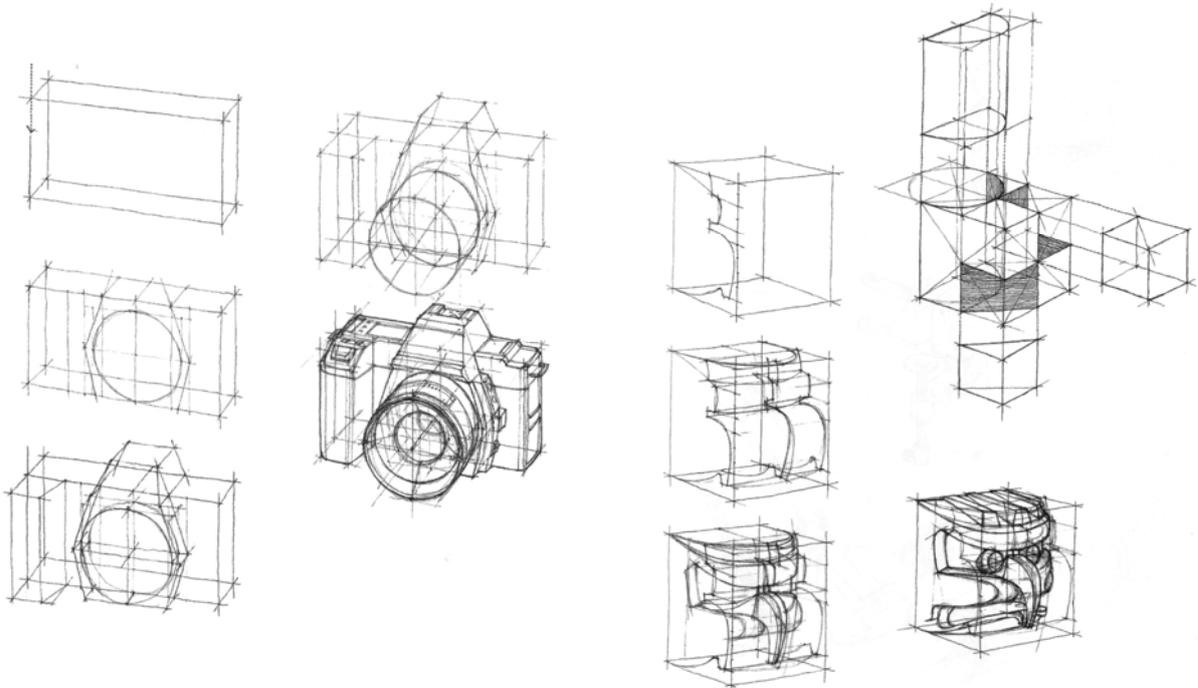


In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4



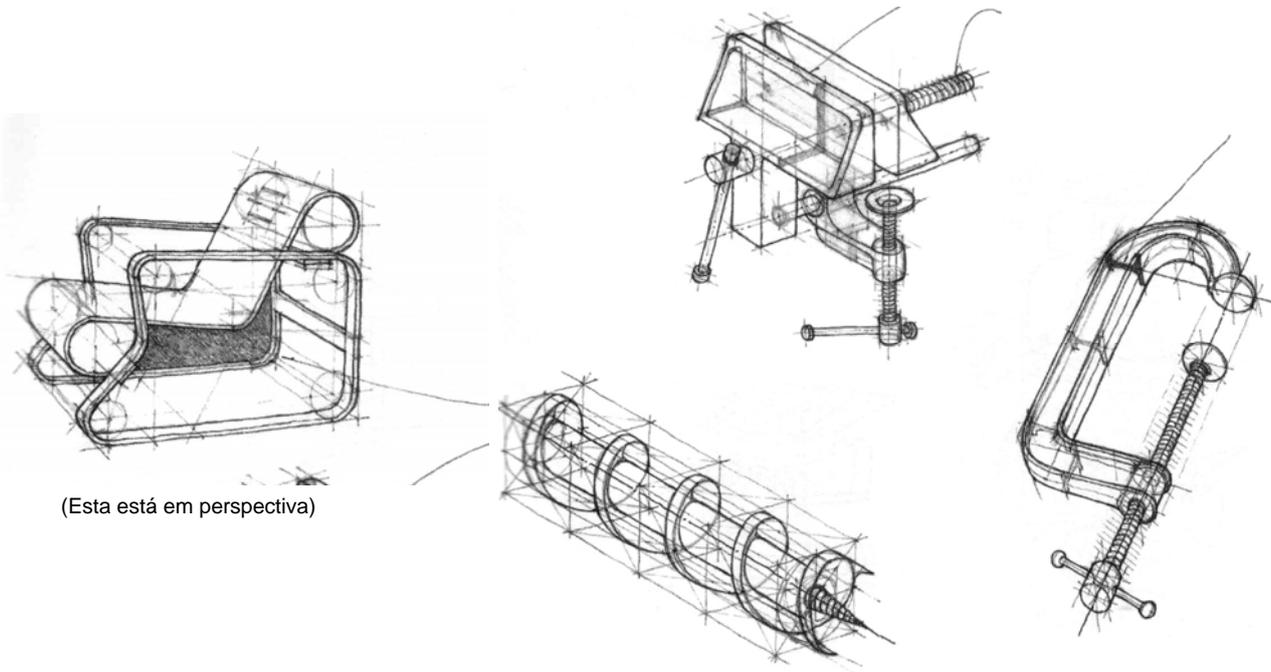
>> EXEMPLOS: adição / subtracção



In
CHING F, JUROSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9



>> EXEMPLOS: formas complexas

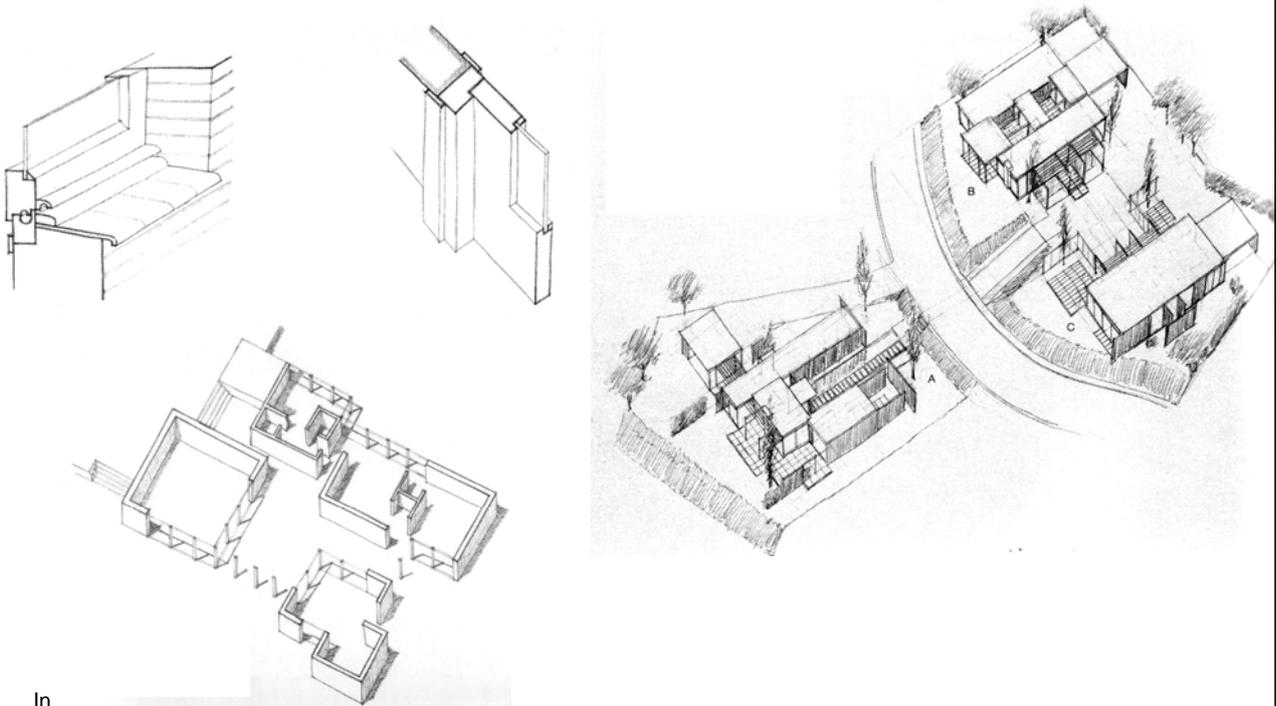


(Esta está em perspectiva)

In
CHING F, JURSZEK S: Representação gráfica para desenho e projeto. 2001. Ed. Gustavo Gili. ISBN 84-252-1848-9



>> EXEMPLOS: esboço axonométrico em axonometria cavaleira e militar



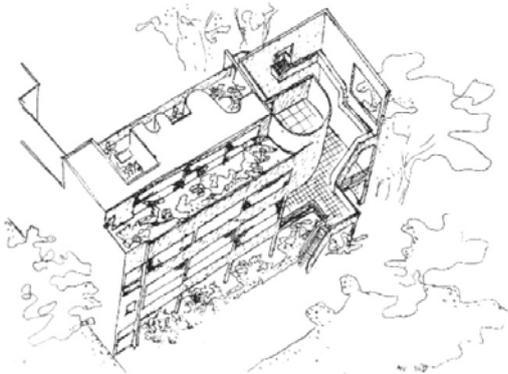
In

CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4

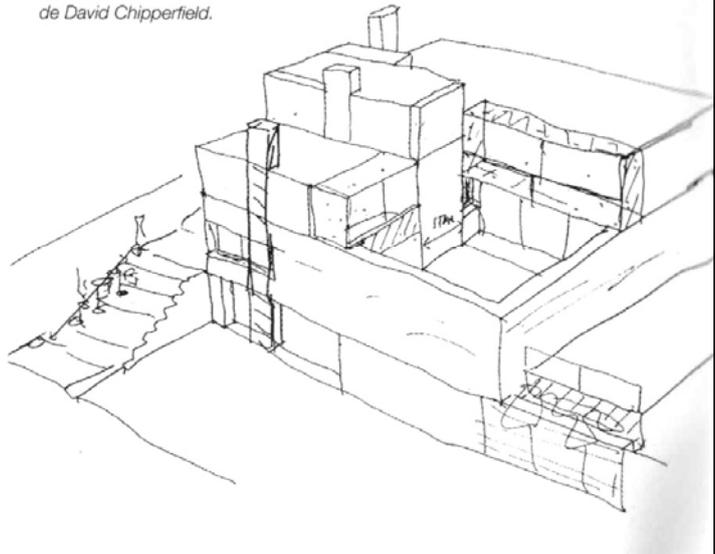


>> EXEMPLOS: mais outro exemplo!...

Axonometria militar da casa Steir, em Garches (França), da autoria de Le Corbusier.



Axonometria isométrica de uma casa unifamiliar na Alemanha, de David Chipperfield.



In
CANAL M (direcção editorial): Desenho livre para arquitectos. 2004. Editorial Estampa. ISBN 978-972-33-2040-4