Estudo das Superfícies

Luís Miguel Cotrim Mateus, Assistente (2006) – 2ª versão

1. Os destinatários

No contexto da aplicação Planos de Estudo de 2004, esta planificação integra o conjunto de aulas da disciplina Geometria Descritiva e Conceptual III das licenciaturas em Arquitectura, Arquitectura de Interiores e Arquitectura de Design.

Decorrerá no terceiro semestre das licenciaturas, isto é, no 1º semestre do 2º ano, no contexto de um programa relacionado com o estudo das SUPERFÍCIES GEOMÉTRICAS, após os alunos terem frequentado dois semestres em que abordaram o estudo dos Sistemas de Representação, nomeadamente a Perspectiva Linear (Quadros Planos e Quadros Curvos), Dupla Projecção Ortogonal (e Múltipla Projecção Ortogonal), as Projecções Cotadas e a Axonometria.

Não serão abordados os temas relacionados com o programa das Superfícies Geométricas utilizando meios informáticos, uma vez que a articulação temporal entre esta disciplina e as de desenho assistido por computador não é possível em tempo útil. Neste sentido, os sistemas de representação a adoptar serão os anteriormente referidos e estudados com especial incidência na Dupla Projecção Ortogonal (e Múltipla Projecção Ortogonal - MPO), sem prejuízo de que algum aluno que se sinta apto a utilizá-los o possa fazer.

Aqui não se faz o desenvolvimento exaustivo de todas as matérias, focando-se apenas alguns items. Pelo indicado, estes apontamentos não substituem a frequência das aulas nem a consulta da bibliografia indicada no início do semestre.

2. A disciplina – Geometria Descritiva e Conceptual III

A disciplina Geometria Descritiva e Conceptual III é uma disciplina teórico-prática com carga horária semanal de 4 horas, distribuídas por duas aulas de 2 horas cada. Idealmente, um semestre tem 14 semanas, o que equivale a 28 aulas entre aulas teóricas e práticas.

2.1. SUPERFÍCIES GEOMÉTRICAS – Programa desenvolvido

Face ao programa da disciplina existente, e facultado aos alunos, propõe-se o seguinte alinhamento detalhado:

SUPERFÍCIES GEOMÉTRICAS

1. Definições e Conceitos
- **1.1.** Elementos de definição de uma superfície
- **1.2.** Condições de pertença
- **1.2.** Recta tangente
- **1.4.** Plano tangente
- **1.5.** Recta normal e plano normal
- **1.6.** Curvatura
- **1.7.** Contorno aparente
- **1.8.** Intersecção entre superfícies
- **1.9.** Recta tangente num ponto da linha comum
- **1.10.** Concordância entre superfícies
- **1.11.** Distinção entre superfície e sólido

2. Critérios de Classificação das superfícies
- **2.1.** Quanto à ordem
- **2.2.** Quanto à curvatura
- **2.3.** Quanto ao tipo de geratriz
- **2.4.** Outros

3. Quadro de classificação das superfícies
- **3.1.** Classificação das superfícies quanto ao tipo de geratriz
- **3.2.** Aplicações práticas das superfícies

4. Representação e Estudo das Superfícies

. representação em vários sistemas de representação

. definição projeccional

. condições de pertença

. planos tangentes

. recta normal e plano normal

. contornos aparentes

. intersecções

. tangente num ponto da linha comum

. concordâncias

4.1. Superfícies Poliédricas: *regulares; semi-regulares; irregulares*

4.2. Superfícies Regradas Planificáveis: *piramidal; prismática; cónica; cilíndrica; convoluta; helicoidal tangencial*

4.3. Superfícies Curvas (não regradas): Superfícies de revolução – *esférica; elipsóide; tórica*

4.4. Superfícies Regradas Empenadas: *hiperbolóide de revolução; parabolóide hiperbólico; helicoidais regradas; de cilindróide; de conóide; de arco enviesado*

5. Estereotomia

5.1. Definições e conceitos

5.2. Aplicações práticas

5.3 Estudo de aplicações a casos elementares

3. Sobre o desenvolvimento do programa

3.1 1º e 2ª semanas

Ponto, Linha e Superfície

O PONTO é uma entidade sem dimensão, isto é, adimensional.

A LINHA é uma entidade unidimensional gerada pelo movimento contínuo do ponto.

As linhas podem ser CURVAS ou não curvas; às linhas não curvas dá-se o nome de RECTAS.

Cada linha recta tem uma DIRECÇÃO; direcção é a propriedade comum a uma família de rectas paralelas entre si.

Cada linha recta contém um PONTO IMPRÓPRIO, isto é, um ponto situado no infinito.

A cada direcção de rectas corresponde apenas um ponto impróprio, isto é, todas as rectas paralelas entre si têm o mesmo ponto do infinito, daí dizer-se que rectas paralelas são rectas concorrentes no infinito.

A SUPERFÍCIE é uma entidade bidimensional gerada pelo movimento contínuo da linha.

A GERATRIZ é a linha, deformável ou indeformável, que se move no espaço para gerar a superfície.

A DIRECTRIZ é a linha ou superfície em que se apoia a geratriz no seu movimento.

Se a directriz for uma superfície, então a superfície gerada diz-se de NÚCLEO.

Quando uma geratriz recta se move continuamente no espaço, conservando a direcção, apoiada numa directriz recta com direcção diferente da sua, é gerado o PLANO.

Cada plano tem uma ORIENTAÇÃO; orientação é a propriedade comum a uma família de planos paralelos entre si.

Cada plano contém uma RECTA IMPRÓPRIA, isto é, uma recta situada no infinito.

A cada orientação de planos corresponde apenas uma recta imprópria, isto é, todos os planos paralelos entre si têm a mesma recta do infinito, daí dizer-se que planos paralelos se intersectam no infinito.

Uma orientação contém uma infinidade de direcções.

O lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as rectas impróprias é o PLANO IMPRÓPRIO, isto é, o plano do infinito.

Quando uma superfície puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é REGRADA.

Quando uma superfície não puder ser gerada pelo movimento de uma linha recta diz-se que é CURVA.

Por ORDEM de uma superfície entende-se o número máximo de pontos em que uma recta a pode intersectar; o plano é uma superfície de 1ª ordem.

Quando uma superfície regrada pode ser “desenrolada” para um plano, sem provocar “pregas” ou “rasgos” diz-se que a superfície é PLANIFICÁVEL; apenas superfícies regradas podem ser planificáveis, embora nem todas o sejam.

Condições de pertença (fig.1)

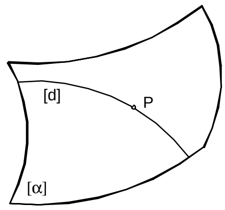


Fig. 1

Se o ponto P pertencer à linha $[d]$ e a linha $[d]$ pertencer à superfície $[a]$, então o ponto P pertence à superfície $[a]$.

Recta tangente (fig.2)

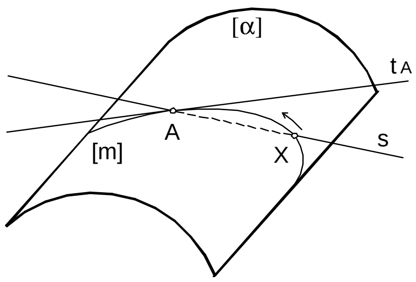


Fig. 2

O ponto A pertence à linha $[m]$ e a linha $[m]$ pertence à superfície $[a]$.

A recta t_A, tangente à linha $[m]$ no ponto A, é a posição limite da recta secante s, quando o ponto X tende para o ponto A.

Se a recta t_A é tangente à linha $[m]$, é também tangente à superfície $[a]$.

Plano tangente (fig.3)

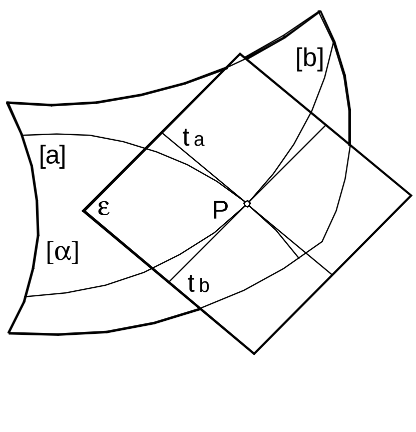


Fig. 3

Sejam $[a]$ e $[b]$ duas linhas, pertencentes à superfície $[a]$, concorrentes no ponto P.

Sejam t_a e t_b as rectas tangentes às linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, no ponto P.

O plano e, definido pelas rectas t_a e t_a, é o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P.

O plano e é o lugar geométrico de todas as rectas tangentes à superfície $[a]$ no ponto P.

Do plano tangente a uma superfície diz-se que é OSCULANTE.

Recta normal e plano normal (fig.4)

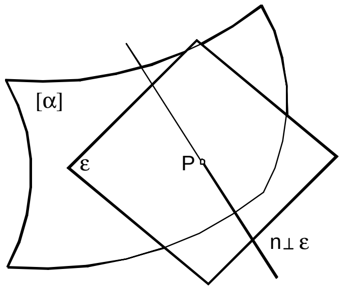


Fig. 4

Seja e o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P.

Seja n uma recta perpendicular ao plano e no ponto P.

A recta n diz-se NORMAL à superfície $[a]$ no ponto P.

De um plano que contenha a recta n diz-se que é normal à superfície $[a]$ no ponto P.

Curvatura de uma superfície (fig.5)

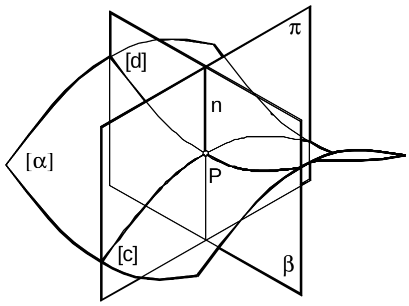


Fig. 5

Seja n uma recta normal à superfície $[a]$ no ponto P.

Sejam p e b planos normais à superfície $[a]$ no ponto P.

Seja $[c]$ (resultado da intersecção do plano p com a superfície $[a]$) a linha de maior CURVATURA[1] da superfície $[a]$ no ponto P.

Seja $[c]$ (resultado da intersecção do plano b com a superfície $[a]$) a linha de menor curvatura da superfície $[a]$ no ponto P.

A curvatura da superfície $[a]$ no ponto P é a soma das curvaturas máxima e mínima.

Se o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P a dividir em quatro regiões, duas "para cima" do plano e duas "para baixo", então a superfície é de DUPLA CURVATURA DE SENTIDOS OPOSTOS no ponto P.

---

[1] A curvatura de uma linha num ponto é o inverso do raio de curvatura nesse ponto.

Se o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P apenas contiver P na sua vizinhança, então a superfície é de DUPLA CURVATURA COM O MESMO SENTIDO no ponto P.

Se o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P tiver em comum com $[a]$ apenas uma linha passante por P, então a superfície é de SIMPLES CURVATURA no ponto P.

Intersecção de superfícies (fig.6, 6a, 6b e 6c)

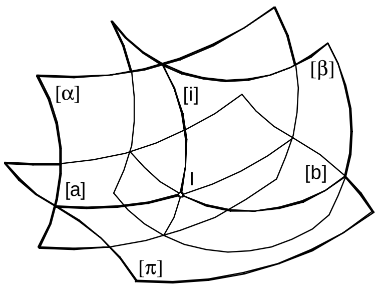


Fig.6

Se duas superfícies $[a]$ e $[b]$ se intersectam segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[p]$ que intersecta a superfície $[a]$ segundo uma linha $[a]$, intersecta a superfície $[b]$ segundo uma linha $[b]$, de tal modo que a linha $[a]$ intersecta a linha $[b]$ num ponto I da linha $[i]$.

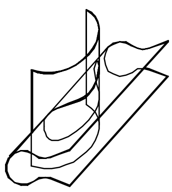


Fig. 6a

Se a linha de intersecção for única e fechada tem-se um ARRANCAMENTO.

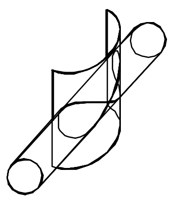


Fig. 6b

Se a linha de intersecção tiver um ponto duplo tem-se um BEIJAMENTO.

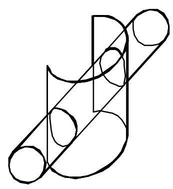


Fig. 6c

Se existir uma linha de entrada e uma linha de saída distintas tem-se uma PENETRAÇÃO.

Recta tangente à linha de intersecção (fig.7)

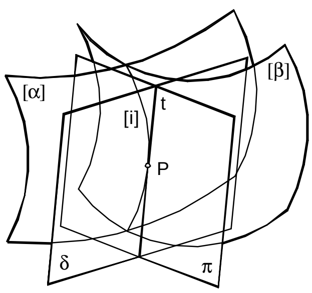


Fig. 7

Seja $[i]$ a linha de intersecção entre as superfícies $[a]$ e $[b]$.

Seja P um ponto da linha $[i]$, logo ponto comum $[a]$ e $[b]$.

Seja d o plano tangente à superfície $[a]$ no ponto P.

Seja p o plano tangente à superfície $[b]$ no ponto P.

A recta t, de intersecção entre os planos d e p, é a recta tangente à linha $[i]$ no ponto P.

Concordância entre superfícies (fig.8a, 8b e 8c)

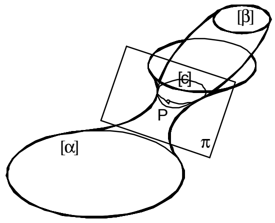


Fig. 8a

Se duas superfícies $[a]$ e $[b]$ admitirem os mesmos planos tangentes p em todos os pontos P da linha $[c]$ comum a ambas, então as duas superfícies dizem-se concordantes segundo a linha $[c]$.

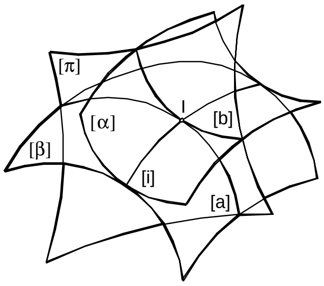


Fig. 8b

Se duas superfícies $[a]$ e $[b]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$, então existe pelo menos uma superfície $[p]$ que intersecta as superfícies $[a]$ e $[b]$ segundo as linhas $[b]$ e $[a]$, respectivamente, de tal modo que as linhas $[b]$ e $[a]$ são tangentes entre si num ponto I da linha $[i]$.

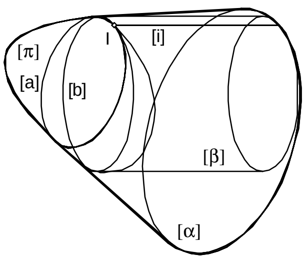


Fig. 8c

Se duas superfícies $[a]$ e $[b]$ forem concordantes segundo uma linha $[i]$ e forem ambas concordantes com uma superfície $[p]$ segundo as linhas $[a]$ e $[b]$, respectivamente, de tal modo que $[a]$ e $[b]$ se intersectem um ponto I da linha $[i]$, então, as duas linhas $[a]$ e $[b]$ são tangentes entre si no ponto I.

Contorno aparente (fig.9)

O contorno aparente de uma superfíce $[a]$ para um "observador" (centro de projecções) O é a linha $[c]$ de concordância entre a superfície $[a]$ e uma superfície cónica $[p]$ de vértice O, que projectada a partir de O sobre uma superfície $[b]$ qualquer determina nesta uma linha $[c']$ que delimita a projecção de $[a]$.

Se o observador estiver no infinito, então $[p]$ é uma superfície cilíndrica.

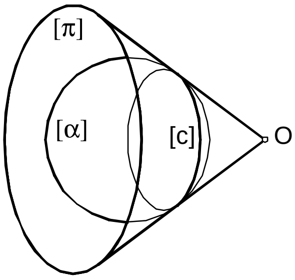


Fig. 9

Distinção entre superfície e sólido

Uma superfície é a entidade que delimita o volume do sólido.

3.2 3ª semana

Quadro de classificação das superfícies

O quadro que se apresenta é desenvolvido com base no critério de classificação segundo o tipo de geratrizes e consoante a propriedade das superfícies serem planificáveis ou não.

Obviamente, este não é o único critério possível de classificação de superfícies. Será conveniente fazer a chamada de atenção para outros critérios, nomeadamente quanto à curvatura, quanto à ordem, ou até mesmo critérios mais intuitivos como sejam os das propriedades visuais das superfícies (por exemplo: superfícies facetadas, superfícies sem arestas, etc.).

Assim sendo, tem-se:

<table>
<tr><th colspan="3">CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES QUANTO AO TIPO DE GERATRIZ</th><th>exemplos</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS</td><td>poliédricas regulares, semi-regulares e irregulares</td></tr>
<tr><td rowspan="7">REGRADAS</td><td rowspan="5">PLANIFICÁVEIS</td><td>SUPERFÍCIE PLANA</td><td>plano</td></tr>
<tr><td>definidas por 1 PONTO e 1 DIRECTRIZ</td><td>cónica; cilíndrica; prismática; piramidal (1)</td></tr>
<tr><td>definidas por 2 DIRECTRIZES</td><td>convolutas; superfícies de igual pendente</td></tr>
<tr><td>SUPERFÍCIES TANGENCIAIS</td><td>helicoidal tangencial</td></tr>
<tr><td>outras</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">NÃO PLANIFICÁVEIS</td><td>definidas por 3 DIRECTRIZES</td><td>parabolóide hiperbólico; hiperbolóide de revolução; cilindróide; conóide; helicoidais regradas; superfícies de arco enviesado (1)</td></tr>
<tr><td>outras</td><td>superfície regrada de uma só face</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CURVAS</td><td rowspan="2"></td><td>SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO (2)</td><td>esférica; tórica; elipsoidal</td></tr>
<tr><td>outras</td><td>serpentina; superfícies mínimas</td></tr>
</table>

(1) Note-se que há superfícies regradas que são de revolução

(2) Note-se que há superfícies de revolução que são regradas.

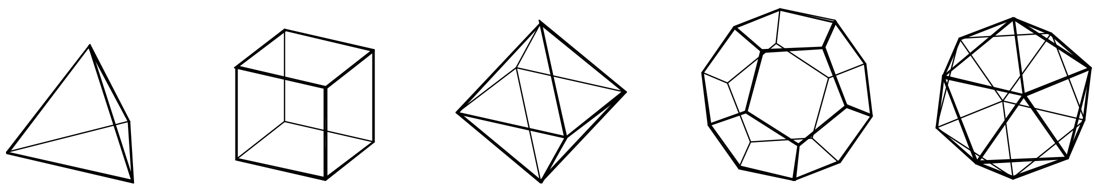
Superfícies Poliédricas

(Apenas serão considerados poliedros convexos topologicamente equivalentes à esfera)

A relação entre o número de arestas (**A**), vértices (**V**) e faces (**F**) de qualquer poliedro topologicamente equivalente a uma esfera vem dada pela fórmula de Euler:

A + 2 = V + F

Poliedros regulares: Todas as faces são poligonos regulares de apenas um tipo; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os “Sólidos platónicos”.



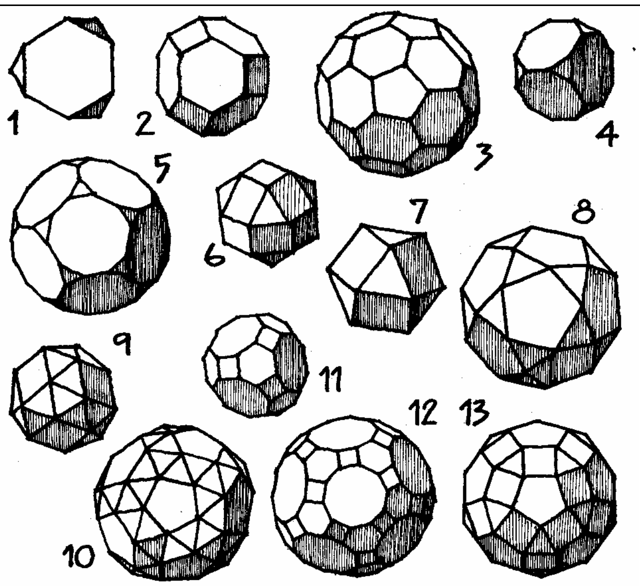
Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

Fig. 10

Poliedros semi-regulares:

- poliedros de Arquimedes

Todas as faces são poligonos regulares de dois ou mais tipos sendo o comprimento da aresta uma constante; todos os vértices pertencem a uma superfície esférica; são os “Sólidos Arquimedianos”; todas as arestas e vértices são congruentes e podem obter-se dos poliedros regulares por algum processo de transformação geométrica. Também podem considerar-se nesta categoria os prismas regulares e os antiprismas regulares embora normalmente não seja comum.



1- Troncotetraedro
2- Troncoctaedro
3- Troncoicosaedro
4- Troncocubo
5- Troncododecaedro
6- Rombicuboctaedro
7- Cuboctaedro
8- Icosidodecaedro
9- Cubo achatado
10- Dodecaedro achatado
11- Troncocuboctaedro
12- Troncoicosidodecaedro
13- Rombicosidodecaedro

in “EDROS”

Fig. 11a

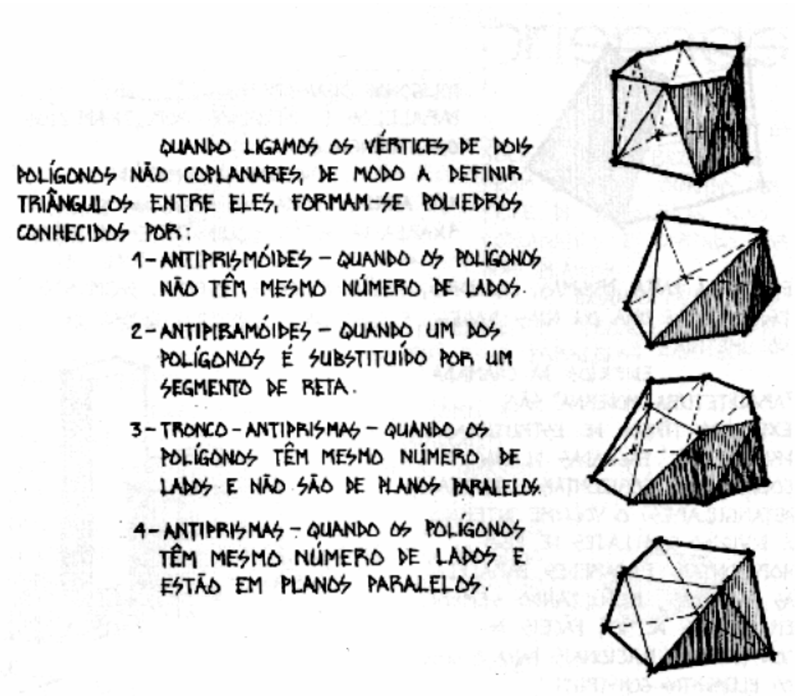
Poliedros irregulares:

Todas as faces são polígonos de vários tipos; os vértices podem ou não pertencer a uma superfície esférica; o comprimento da aresta não é constante.

- pirâmides, bipirâmides, troncos de pirâmide, prismas, troncos de prisma

Uma bipirâmide é um sólido gerado pela “soma” de uma pirâmide com a sua simétrica relativamente ao plano da base.

- antiprismas, antipiramóides, tronco-antiprismas, antiprismóides, *outros*



in “EDROS”

Fig. 11b

- sólidos de Johnson

São poliedros em que todas as faces são regulares de mais que um tipo, não sendo, no entanto, poliedros regulares, semi-regulares, prismas regulares ou antiprismas regulares. Existem 92 ao todo.

Um poliedro que tenha por vértices os centros das faces de um outro poliedro diz-se DUAL daquele.

3.3 4ª e 5ª semanas

Superfícies planificáveis

Para que uma superfície seja planificável deve ser regrada. Mas esta condição só por si não implica que a superfície seja planificável. Para além de ser regrada deve ainda acontecer que cada para de geratrizes infinitamente próximas entre si sejam concorrentes, isto é complanares. Do enuncidado resulta que uma superfície planificável apenas admite um plano tangente por cada geratriz. A planificação corresponde ao "desenrolar" da superfíce até que esta coincida com uma dos planos tangentes. Nesta operação a superfíce não "estica" nem "encolhe", não se "rasga" nem adquire "pregas". Nesta operação preservam-se os comprimentos e os ângulos.

A resolução de problemas concretos depende, obviamente, do tipo particular de superfíce que se tem em presença. Assim, diferentes métodos serão utilizados para planificar superfícies cónicas ou cilindricas de revolução, cónicas ou cilindricas obliquas, convulutas, tangenciais, etc.

Teorema de Olivier

Este teorema aplica-se às transformadas das linhas de intersecção plana de superfícies cónicas e cilíndricas por planificação destas e pode ser enunciado do seguinte modo:

Se uma superfície, cónica ou cilíndrica, admite planos tangentes perpendiculares ao plano que produz a intersecção, então, os pontos de tangência entre a linha de intersecção e as rectas de intersecção entre os planos tangentes e o plano da intersecção correspondem, na planificação, aos pontos de inflexão da linha transformada da intersecção.

3.4 6ª semana

Tipos de intersecção

No essencial, como já tínhamos referido, as intersecções podem ser de três tipos: arrancamento, beijamento e penetração.

Intersecção entre superfícies cónicas (e ou cilindricas) – método geral

Para intersectar duas superfícies quaisquer, em geral utilizam-se superfícies auxiliares que intersectam as superfícies dadas segundo linhas que têm em comum pontos que pertencem à sua linha comum.

Se as suas superfícies a intersectar forem cónicas, as superfícies auliliares que mais facilmente se podem utilizar são planos. Contudo, para optimizar a intersecção dos planos com as superfícies cónicas dadas estes devem conter os seus vértices. Deste modo os planos poderão intersectar as superfícies cónicas segundo linhas rectas, graficamente mais facéis de representar que outras. Para que um plano intersecte simultaneamente duas superfícies cónicas segundo linhas rectas, deverá conter os seus vértices, isto é, deverá passar pela recta que une os dois vértices. Mas nem todos os que contêm aquela recta recta são úteis para a resolução de um exercício concreto. Como se determinam então os PLANOS ÚTEIS da intersecção?

Observemos a seguinte figura.

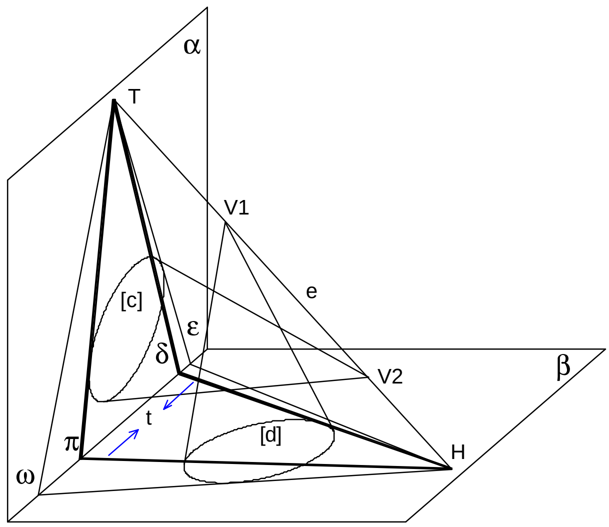


Fig. 12

Consideremos então a recta e que passa pelos dois vértices, **V1** e **V2**, das superfícies dos dois cones.

A recta **e** intersecta o plano da base **[c]** em **T** e o plano da base **[d]** em **H**.

Qualquer plano que passa por **e** intersecta a segundo rectas que passam por **T**, e intersecta b segundo rectas que passam **H**.

Entre p e e existe uma infinidade de planos que intersectam, segundo rectas, a superfície do cone de vértice **V2**.

Entre w e d existe uma infinidade de planos que intersectam, segundo rectas, a superfície do cone de vértice **V1**.

Contudo, nem todos os planos que intersectam uma das superfícies segundo rectas intersectam a outra nas mesmas condições.

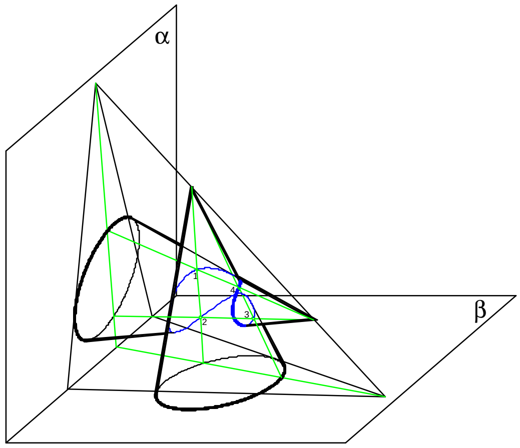


Fig. 13

Dos conjuntos de planos considerados, apenas os planos compreendidos entre p e d intersectam ambas as superfícies segundo rectas. Estes são os PLANOS ÚTEIS da intersecção, sendo π e δ os PLANOS LIMITE da INTERSECÇÃO.

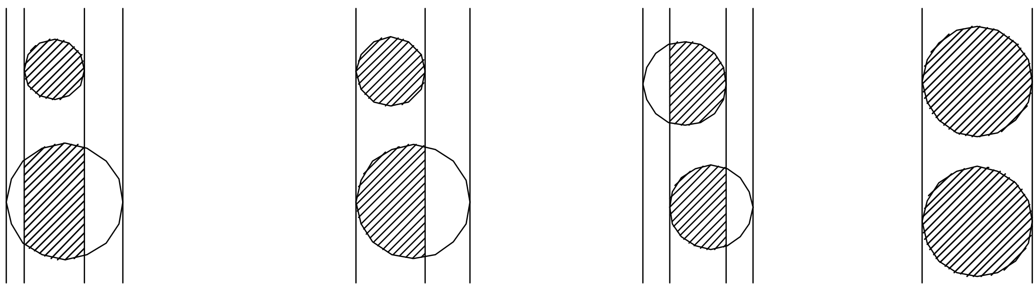
Para determinar pontos da linha de intersecção conduzem-se, para além de p e d, uma série de planos úteis.

No exemplo está considerado um plano qualquer (a verde) que intersecta as superfícies segundo rectas que por sua vez se intersectam duas a duas determinando 4 pontos da linha de intersecção.

Deve notar-se que há planos que é "obrigatório" conduzir. São aqueles que passam pelas geratrizes de contorno aparente. Os pontos determinados sobre estas geratrizes são importantes na medida em que limitam os intervalos de visibilidade e invisibilidade da linha de intersecção.

Não é necessário determinar a intersecção na totalidade para identificarmos o tipo de intersecção. É suficiente determinar os planos limite. A leitura da posição dos planos limite determina o tipo de intersecção.

Veja-se o esquema seguinte:



Penetração | Beijamento | Arrancamento | Beijamento Duplo

Fig. 14

3.5 7ª e 8ª semanas

Superfícies curvas

Superfícies curvas são as superfícies que não podem ser geradas pelo movimento de uma geratriz recta. Isto é, são superfícies não regradas.

Superfícies curvas

Das superfícies curvas interessam-nos em particular as de revolução [2].

Nestas, é conveninte definir alguns elementos notáveis.

O EIXO é a recta em torno da qual roda a linha (geratriz) que gera a superfície.

Um PARALELO é uma intersecção produzida na superfície por um plano perpendicular ao eixo.

Um MERIDIANO é uma intersecção produzida na superfície por um plano complanar com o eixo.

Se um paralelo é o maior na sua vizinhança designa-se EQUADOR.

Se um paralelo é o menor na sua vizinhança designa-se CÍRCULO DE GOLA.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo nos pontos que este tem em comum com aquela, então estes pontos designam-se PÓLOS.

Se a superfície admite planos tangentes perpendiculares ao eixo ao longo de paralelos, estes designam-se CÍRCULOS POLARES.

3.6 9ª e 10ª semanas

Superfícies regradas empenadas definidas por três directrizes

Este estudo começará pela exposição de alguns conceitos inerentes a este tipo de superfícies e passará pela exposição de um quadro mais detalhado de classificação deste tipo de superfícies.

Apenas alguns exemplos de superfícies serão estudados.

Superfícies regradas não planificáveis (empenadas)

Uma superfície regrada não é planificável se duas geratrizes infinitamente próximas não se intersectarem. Esta condição é em geral cumprida quando a superfície é definida por três directrizes quaisquer (fig.15). Contudo, há posições específicas que as directrizes podem assumir que não permitem gerar nenhuma superfície regrada ou em que esta degenera numa superfície planificável.

[2] Note-se que nem todas as superfícies de revolução são curvas.

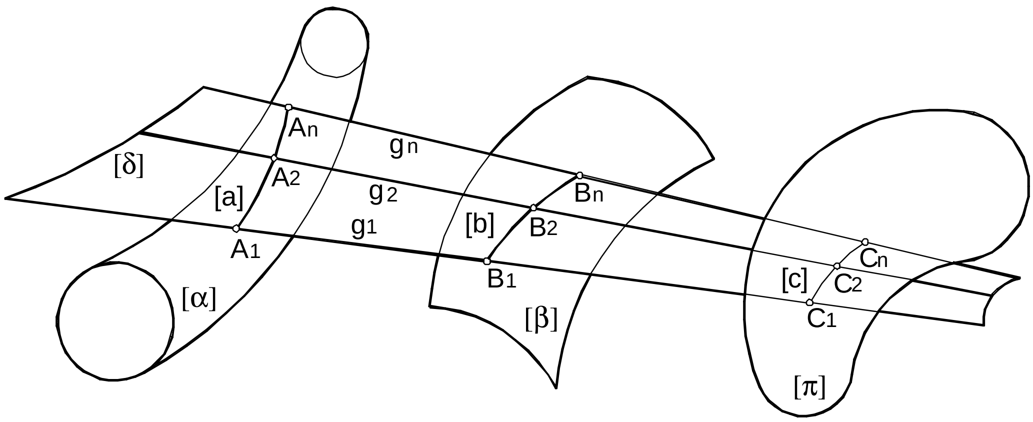


Fig. 15

A condição que se impõe para que as rectas g_1, g_2, g_n definam uma superfície regrada $[d]$ é a de serem tangentes às superfícies directrizes $[a]$, $[b]$ e $[p]$ simultaneamente. Isto é, a superfície $[d]$ deve ser simultaneamente concordante com as superfícies $[a]$, $[b]$ e $[p]$ segundo linhas $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

O conjunto das rectas g_1, g_2, g_n designa-se por SISTEMA DE GERATRIZES.

Se uma das superfíces directrizes for substituída por uma linha directriz, então as geratrizes devem intersectá-la.

Se a superfície $[d]$ possuir apenas um sistema de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n, então diz-se que é SIMPLESMENTE REGRADA.

Se a superfície $[d]$ possuir dois sistemas de geratrizes rectas g_1, g_2, g_n e j_1, j_2, j_n, então diz-se que é DUPLAMENTE REGRADA.

Quando uma superfície é duplamente regrada, todas as geratrizes de um sistema intersectam todas as geratrizes do outro sistema.

Se uma directriz recta for imprópria (situada no infinito) isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas a uma orientação. Neste caso diz-se que a superfície é de PLANO DIRECTOR.

Se uma directriz curva for imprópria (situada no infinito), isto equivale a dizer que todas as geratrizes g_1, g_2, g_n são paralelas às geratrizes d_1, d_2, d_n de uma superfície cónica. Neste caso, diz-se que a superfície é de CONE DIRECTOR ou de SUPERFÍCIE CÓNICA DIRECTRIZ.

Contudo, deve notar-se que mesmo que a superfície seja definida por 3 directrizes próprias ela gozará obrigatoriamente da propriedade de ser de plano director ou de cone director, uma vez que todas as rectas têm pontos impróprios. Em todo o caso, em termos de classificação quanto à directriz, é conveniente distinguir as que são de plano director ou cone director e as ORDINÁRIAS.

Como consequência, apresenta-se o seguinte quadro de classificação de superfícies regradas não planificáveis (empenadas) definidas por três directrizes.

Neste conjunto de aulas o aluno será familiarizado com algumas destas superfícies tendo para isso que as representar em vários sistemas de representação. Insiste-se na questão da representação porque estas superfícies não são, em geral, conhecidas por parte dos alunos. Portanto, a parte inicial do seu estudo consistirá em estudar as suas propriedades visuais. Só assim os alunos poderão, um dia mais tarde, tirar delas algum partido ao nível de aplicação a casos concretos na Arquitectura ou Design.

SUPERFÍCIES REGRADAS EMPENADAS DEFINIDAS POR 3 DIRECTRIZES (linhas e/ou superfícies) R (recta) ; C (curva) ; S (superfície) ; R∞ (recta imprópria) ; C∞ (curva imprópria)	**TIPO**	**DIRECTRIZES**	exemplos
	ORDINÁRIA	R R R	Hiperbolóide escaleno; Hiperbolóide de revolução de uma folha
		R R C	
		R C C	Superfícies de arco enviesado (corno de vaca; arriere-voussure)
		C C C	
		R R S	
		R C S	
		C C S	
		R S S	
		C S S	
		S S S	
	DE PLANO DIRECTOR	R∞ R R	Parabolóide hiperbólico
		R∞ R C	Superfícies de conóide; Superfícies helicoidais
		R∞ C C	Superfícies de cilindróide
		R∞ R S	Superfícies de conóide com um núcleo
		R∞ C S	Superfícies de cilindróide com um núcleo; Superfícies helicoidais com núcleo
		R∞ S S	Superfícies de cilindróide com dois núcleos
	DE CONE DIRECTOR	C∞ R R	Tetraedróide
		C∞ C R	Superfícies helicoidais
		C∞ C C	
		C∞ R S	
		C∞ C S	Superfícies helicoidais com núcleo
		C∞ S S	

3.7 11ª e 12ª semanas

A partir do momento em que as superfícies se tornam familiares através das suas propriedades visuais, está aberto o caminho para serem abordadas as propriedades mais abstractas destas superfícies (que se procurarão pôr em prática apenas de forma superficial por questões de tempo), nomeadamente a questão dos planos tangentes.

Não se terá ambição de abordar outras propriedades.

Plano tangente a uma superfície simplesmente regrada (fig.16)

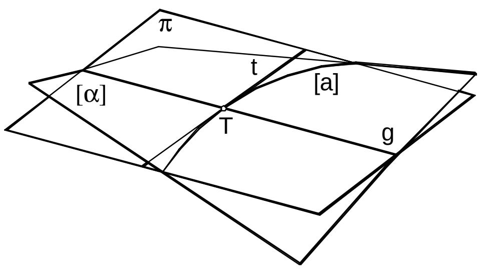


Fig. 16

Numa superfíce empenada simplesmente regrada $[a]$ o plano p, tangente a $[a]$ num ponto T, contém a geratriz recta g que por ele passa. Este plano intersecta a superfíce segundo a recta g e segundo uma linha $[a]$. O plano p contém a recta t tangente à linha $[a]$ no ponto T.

Plano tangente a uma superfície duplamente regrada (fig.17)

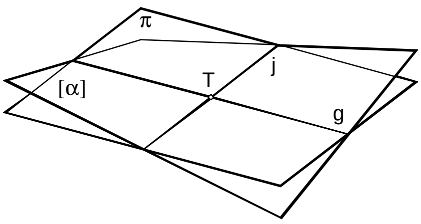
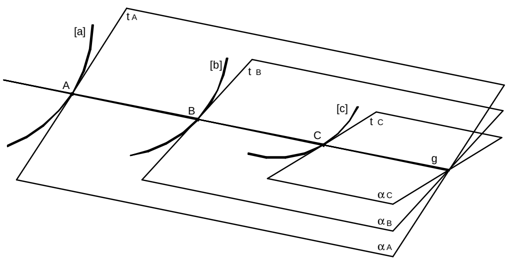


Fig. 17

Numa superfície empenada duplamente regrada, $[a]$, o plano p, tangente a $[a]$ num ponto T, fica definido pelas duas geratrizes rectas, g e j, que nele se intersectam. É o caso do parabolóide hiperbólico, do hiperbolóide escaleno e do hiperbolóide de revolução de uma folha.

Feixe de planos tangentes ao longo de uma geratriz (fig.18)



Considere-se a superfície empenada regrada $[d]$ definida pelas directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$.

Seja g uma geratriz recta, da superfície $[d]$, que contém os pontos A, B e C pertencentes às directrizes $[a]$, $[b]$ e $[c]$, respectivamente.

Os planos a_A, a_B e a_C tangentes à superfície $[d]$

nos pontos A, B e C, respectivamente, ficam definidos pela geratriz g e pelas rectas t_A, t_B e t_C, respectivamente tangentes a $[a]$ em A, a $[b]$ em B e a $[c]$ em C.

Fig. 18

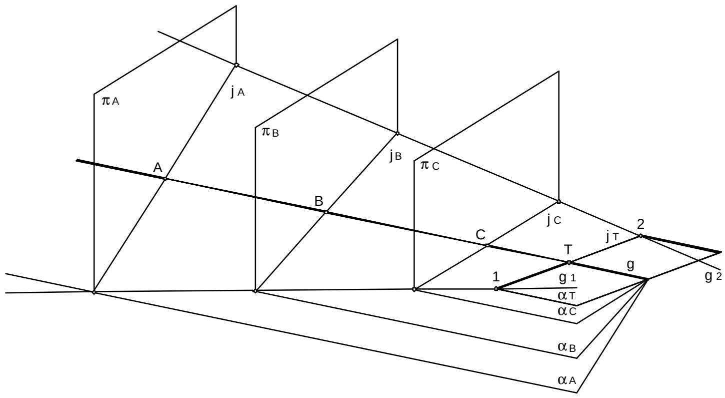


Fig. 19

Na sequência do exposto para a figura 18 tem-se:

Se se intersectar o plano a_A com um plano p_A qualquer (passante pelo ponto A), o plano a_B com um plano p_B qualquer (passante pelo ponto B), e o plano a_C com um plano p_C qualquer (passante pelo ponto C), obtêm-se, respectivamente, as rectas j_A, j_B e j_C tangentes à superfície regrada empenada $[d]$ nos pontos A, B e C, respectivamente.

As três rectas definem um hiperbolóide escaleno de concordância com a superfície $[d]$ ao longo da geratriz g.

Como os planos p_A, p_B e p_C podem assumir uma infinidade de orientações, existe uma infinidade de hiperbolóides escalenos concordantes com a superfície $[d]$ ao longo da geratriz g.

Se os três planos p_A, p_B e p_C forem paralelos entre si, a superfície de concordância é um parabolóide hiperbólico.

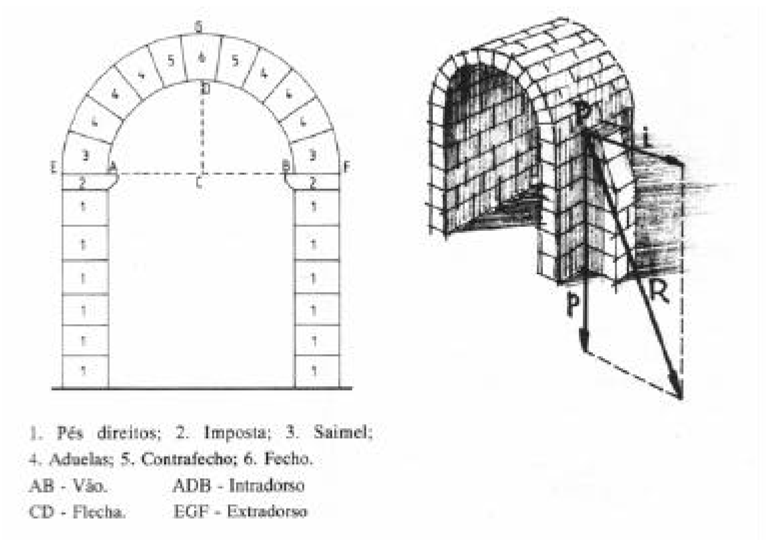
Mais uma vez, existe uma infinidade de parabolóides hiperbólicos concordantes com a superfíce $[d]$ ao longo da geratriz g.

Determinar o plano a_T, tangente à superfície $[d]$ num ponto T qualquer da geratriz g, consiste em determinar a geratriz j_T (do sistema contrário ao de g e concorrente com g no ponto T) do hiperbolóide escaleno ou do parabolóide hiperbólico, consoante o caso.

3.8 13ª semana

Após o estudo das superfícies, de acordo com o alinhamento definido, será feita uma apresentação de casos de aplicação das superfícies ao "mundo real da Arquitectura e do Design" de forma mais ou menos sistematizada. Contudo, faz-se notar que todo o alinhamento das matérias pode e deve ser "ilustrado" com casos concretos de aplicação das superfícies em vários contextos, sobretudo salientando a articulação entre elas na definição de estereotomias variadas com o sentido de constituir e contruir materialidades.

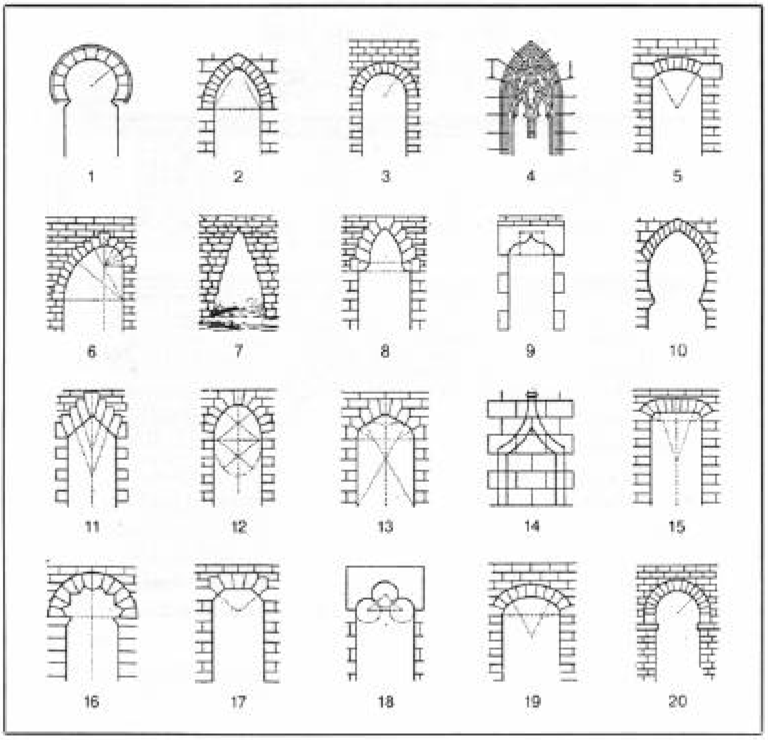
A seguir apresenta-se, a título de exemplo, o desenho simplificado das estereotomias das perdras de alguns tipos de arcos.



in VOCABULÁRIO DE ARQUITECTURA

Fig. 20

1. Arco ultrapassado; 2. Arco quebrado; 3. Arco de volta perfeita; 4. Arco quebrado flamejante; 5. Arco abaulado; 6. Arco aviajado; 7. Arco triangular; 8. Arco campanulado; 9. Arco contracurvado; 10. Arco lanceolado; 11. Arco angular; 12. Arco elíptico; 13. Arco tudor; 14. Arco inflectido; 15 Arco deprimido; 16. Arco em ziguezague; 17. Arco angular truncado; 18. Arco trilobado; 19. Arco abatido; 20. Arco de volta perfeita peraltado.



in VOCABULÁRIO DE ARQUITECTURA

Fig. 21

Bibliografia

· Aguilar, Leonildo T. De; ***Alguns conceitos geométricos***, SPB Editores, 1997

· Asenci, F. Izquierdo; ***geometria descriptiva***, Editorial Paraninfo, 24ª edição, 2000

· Asenci, F. Izquierdo; ***geometria descriptiva superior y aplicada***, Editorial Paraninfo, 4ª edição, 1996

· Bertrand, Yves e Valois, Paul; ***Paradigmas educacionais*** (Trad. do original *École et Sociétés* por Elisabete Pinheiro), Instituto Piaget, 1994

· Bireaud, Annie; ***Os métodos pedagógicos no ensino superior*** (Trad. do original *Les Métthodes Pédagogiques dans l'Enseignement Supérieur* por Irene Lima Mendes), Porto Editora, 1995

· Mateus, Luís; **Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica – Relatório de Aula**, FAUTL, 2005

· Motta Pegado, Luís Porfírio; ***Curso de Geometria Descriptiva da Escola Polytechnica***, Typographia da Academia Real das Sciencias, 1899

· Pinheiro, Carlos da Silva; ***Superfícies empenadas e projecções cotadas***, edição Faculdade de Arquitectura da Universidade Técnica de Lisboa

· Ricca, Guilherme; ***Geometria descritiva - método de Monge***, edição Fundação Calouste Gulbenkian, 1992

· Sá, Ricardo; ***Edros***, editora Projecto, 1982

· Serrano, Pedro; ***Redacção e apresentação de trabalhos científicos***, edição Relógio d´água,1996

· Sousa, Pedro Fialho de – Pinheiro, Carlos da Silva Desenho; ***TPU 55***, Colecção Textos pré-universitários; 1980

· Sousa, Pedro Fialho de *et al*; ***Vocabulário Técnico e Crítico de Arquitectura***, 3ª edição, Quimera; 2002

· **http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro** (consultado em Setembro de 2006)